**К СВЧ КОЛЕБАНИЯМ**

1. **Описание модели**

Рассматривается следующая модель плазмы. Электронная компонента описывается кинетическим уравнением Власова.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Ионы предполагаются свободными (воздействием внешних сил на них пренебрегается). Для их описания используется гидродинамический подход

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

Электрическое поле состоит из внешней постоянной и однородной компоненты и собственного поля системы . Последнее определяется из уравнения Пуассона

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

где . Собственным магнитным полем системы пренебрегается. Внешнее магнитное поле (как внешнее электрическое) предполагается постоянным и однородным. В движущейся с дрейфовой скоростью системе отсчета внешняя составляющая электрического поля равна нулю. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать .

Дальнейшее рассмотрение касается решений системы (1)-(3), которые являются малыми возмущениями некоторого равновесного состояния , где

Фактически будут интересовать плоские электростатические, т.е. , волны, распространяющиеся перпендикулярно магнитному полю. Равновесную функцию распределение будем предполагать изотропной по и однородной в направлении .

Оси координат выберем так, чтобы магнитное поле было направлено вдоль оси , а внешнее электрическое вдоль оси . Поскольку рассматриваются плоские волны (т.e. ), в вычислениях ниже координата опускается, а функция считается проинтегрированной по .

1. **Вывод общего дисперсионного уравнения (произвольная )**

В работе \*\* для рассматриваемой здесь ситуации было приведено дисперсионное уравнение. Однако вывода этого уравнения в указанной работе нет. Поэтому ниже, в качестве проверки представлен подробный вывод требуемого уравнения.

Линеаризуем кинетическое уравнение относительно равновесного решения .

Подставляя разложение в уравнение (1) и пренебрегая членами выше первого порядка малости (в данном случае), находим

Методом интегрирования по траекториям в фазовом пространстве получаем, что

где второе равенство справедливо в силу изотропности . В рассматриваемой ситуации траектории (решения системы: и ) в силу условия B, являются окружностями

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

по которым частицы «бегают» с постоянной по модулю скоростью

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Параметры и определяются из начальных условий: и . Таким образом, после замены имеем

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

Здесь где . Подставляя в систему (3)-(6) выражения для и в виде плоских волн:

,

получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

Здесь для существования интеграла из первого равенства достаточно потребовать, чтобы Если через обозначить комплексное число , то выражение в скобках в этом интеграле можно записать как . Следовательно,

Далее, разложив функцию в ряд Фурье и поменяв (в последнем равенстве) порядки суммирования и интегрирования местами получим, что

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

где – коэффициенты Фурье разложения равны

Здесь -- модифицированная функция Бесселя целого индекса . Таким образом, с четом равенства находим

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |

Используя рекуррентные свойства функций Бесселя, окончательно получаем, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

Линеаризованная гидродинамика для ионной компоненты дает следующее выражение для поправки концентрации

Таким образом, уравнение Пуассона принимает вид

где – плазменная ионная частота.

Теперь, для того, чтобы вывести дисперсионное соотношение, осталось подставить выражение (8) вместе с в правую часть уравнения Пуассона (3):

|  |
| --- |
|  |
|  |

Учитывая следующие свойства Бесселевых функций:

находим

|  |
| --- |
|  |
|  |

Стало быть, дисперсионное уравнение имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

Полученное выражение справедливо при или (что тоже) в с системе отсчета связанной с дрейфовой скоростью. Для того, чтобы теперь перейти к неподвижной системе отсчета, нужно в правой части (9) вместо везде подставить выражение , где – величина скорости дрейфа, параллельно оси . Предполагается, что поле направлено вдоль оси . Таким образом, окончательно имеем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

1. **Дисперсионное уравнение в случае Максвеловского распределения**

В случае Максвеловского равновесного распределения

известно, что дисперсионное уравнение имеет (см. например heron,laval) вид

где – радиус Дебая, –плазменная частота, и . Данное уравнение справедливо для системы отсчета связанной с дрейфовой скоростью. Переход к неподвижной системе отсчета осуществляется аналогично переходу от (9) к (10). Покажем теперь, что это уравнение вытекает из (9). Для этого воспользуемся, так называемым, равенством Вебера.

Теорема (Равенство Вебереа). При любом вещественном для Бесселевых функций целого порядка справедливо следующее равенство

Отметим, что равенство Вебера справедливо и в более общей формулировке (см. например \*\*\*), однако в рассматриваемом случае достаточно указанной. Приведем для справки доказательство равенства Вебера. Из интегрального представления функции Бесселя вытекает, что

Подставляя данное разложение в интеграл из левой части искомого равенства и меняя порядки суммирования и интегрирования местами, получим

|  |
| --- |
|  |
|  |

С другой стороны,

|  |
| --- |
|  |
|  |

Сравнивая полученные выражения друг с другом, заключаем справедливость искомого равенства.

Для максвелловского распределения :

и, следовательно,

В заключение доказательства осталось только заметить, что

1. **Работа электрического поля над электроном**

Интересует величина

представляющая собой среднюю за единицу времени работу, совершаемую против электрического поля волны в единице объема. Здесь треугольными скобками как раз обозначено осреднение по достаточно большому промежутку времени :

В рассматриваемой ситуации и , где . Комплексная амплитуда дается выражением (8). Отметим, что изначально выражение (8) было получено в предположении Однако последнее не является ограничением, поскольку аналитическое продолжение по в нижнюю полуплоскость также задается (8).

Ввиду того, что – равновесная имеем

и, следовательно,

Предположим теперь, что и осциллируют быстрей, чем затухают, т.е. . Тогда

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

Поскольку при усреднении по периоду осциллирующие величины дают вклад порядка , то

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

Вычислим компоненты вектора . Согласно (**8**) имеем

|  |
| --- |
|  |
|  |

Поскольку , то

|  |
| --- |
|  |
|  |

Таким образом,

|  |
| --- |
|  |
|  |

Действуя аналогично, получаем, что

|  |
| --- |
|  |
|  |

Подставляя теперь компоненты вектора в правую часть (11), находим

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

и

Таким образом, учитывая равенство

получаем

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

1. **Формулировка уравнений отклика функций распределения на поле**

Функция распределения представляется в виде суммы плавно меняющейся и быстро осциллирующей .

Первый вариант

Второй вариант

Во втором варианте функция не зависит от угла .

1. **Вывод (эвристический) уравнений отклика**

Представляем функцию распределения в виде суммы плавно меняющейся и быстро осциллирующей функции: . Усредняя исходное уравнение по *осцилляциям*, получаем

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

Здесь мы учли, что и , а также воспользовались тем, что

и .

Осциллирующий член берется из линейной теории:

Таким образом, первый вариант уравнения отклика получен.

Усредним теперь обе части уравнения (13) по углу. Обозначив , имеем

и

|  |
| --- |
|  |
|  |

где

|  |
| --- |
|  |
|  |

Последнее равенство до конца не понятно (строгих обоснований в литературе не нашел). Учитывая данные равенства, получаем требуемое уравнение

1. **Запись уравнения отклика через коэффициент диффузии**

В случае плоской монохроматической волны , ввиду равенства , для амплитуды осциллирующей части функции распределения справедливо представление (8). Следовательно, аналогично (11) имеет место равенство

|  |
| --- |
|  |
|  |

Таким образом,

где

1. **Вычисление потока**

Поскольку осциллирующая часть функции распределения не дает вклад в осредненный по времени поток, то

где согласно первому варианту квазилинейного уравнения

Здесь , , а

Введем обозначения и – оператор поворота на угол , тогда, , а .

Таким образом, меняя порядки интегрирования по , параметру траектории и усреднения местами, получим

Правомерность вынесения осреднения за знак интегрирования по вытекает из равенства

Далее, записывая градиент в полярных координатах, получаем что

Заметим, что

и

Таким образом,

где

Частные производные входящие в равны

|  |
| --- |
|  |
|  |

Следовательно,

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

Таким образом, выражение для потока имеет вид

|  |
| --- |
|  |
|  |

В случае потенциальных возмущений оператор симметричный. Прямое вычисление дает, что если симметричный оператор. Отсюда ввиду равенства получаем, что

Для плоской монохроматической электростатической волны

и

Отсюда, учитывая равенство

окончательно находим

Действуя аналогично пункту 4, получаем

и

В случае Максвеловской функции распределения, в пределе имеем