**К СВЧ КОЛЕБАНИЯМ**

1. **Описание модели**

Рассматривается следующая модель плазмы. Электронная компонента описывается кинетическим уравнением Власова.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Ионы для простоты изложения предполагаются неподвижными. Соответственно, их концентрация -- постоянна. Электрическое поле состоит из внешней постоянной и однородной компоненты и собственного поля системы . Последнее определяется из уравнения Пуассона

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

где . Собственным магнитным полем системы пренебрегается. Внешнее магнитное поле (как внешнее электрическое) предполагается постоянным и однородным. В движущейся с дрейфовой скоростью системе отсчета внешняя составляющая электрического поля равна нулю. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать .

Дальнейшее рассмотрение касается решений системы (1)–(2), которые являются малыми возмущениями некоторого равновесного состояния (решения) :

Фактически будут интересовать плоские электростатические, т.е. , волны, распространяющиеся перпендикулярно магнитному полю. Равновесную функцию распределения будем предполагать изотропной по и однородной в направлении .

Оси координат выберем так, чтобы магнитное поле было направлено вдоль оси , а внешнее электрическое вдоль оси . Поскольку рассматриваются плоские волны (т.e. ), в вычислениях ниже координата опускается, а функция считается проинтегрированной по .

1. **Вывод общего дисперсионного уравнения (произвольная )**

В работе \*\* для рассматриваемой здесь ситуации было приведено дисперсионное уравнение. Однако вывода этого уравнения в указанной работе нет. Поэтому ниже, в качестве проверки представлен подробный вывод требуемого уравнения.

Линеаризуем кинетическое уравнение относительно равновесного решения .

Подставляя разложение в уравнение и пренебрегая членами выше первого порядка малости (в данном случае ), находим

Методом интегрирования по траекториям в фазовом пространстве получаем, что

где второе равенство справедливо в силу изотропности . В рассматриваемой ситуации траектории (решения системы: и ) в силу условия B, являются окружностями

по которым частицы «бегают» с постоянной по модулю скоростью

Параметры и определяются из начальных условий: и **.** Таким образом, после замены имеем

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Подставляя в систему -(3) выражения для и в виде плоских волн:

,

получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |
|  |

Здесь для существования интеграла из первого равенства достаточно потребовать, чтобы Если через обозначить комплексное число , то выражение в скобках в этом интеграле можно записать как . Следовательно,

Далее, разложив функцию в ряд Фурье и поменяв (в последнем равенстве) порядки суммирования и интегрирования местами получим, что

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

где – коэффициенты Фурье разложения равны

Здесь -- модифицированная функция Бесселя целого индекса . Таким образом,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |
|  |
|  |

поскольку исходя из выбора траектории.

Теперь, для того, чтобы вывести дисперсионное соотношение, осталось подставить выражение (5) в правую часть уравнения Пуассона из системы (4):

|  |
| --- |
|  |
|  |

Далее, учитывая, что , имеем

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

Аналогично,

Отсюда, с использованием свойств Бесселевых функций, получаем, что

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

Стало быть, дисперсионное уравнение имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

Полученное выражение справедливо при или (что тоже) в с системе отсчета связанной с дрейфовой скоростью. Для того, чтобы теперь перейти к неподвижной системе отсчета, нужно в правой части вместо везде подставить выражение , где – величина скорости дрейфа, параллельно оси . Предполагается, что поле направлено вдоль оси .

Таким образом, окончательно имеем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

1. **Дисперсионное уравнение в случае Максвеловского распределения**

В случае Максвеловского равновесного распределения

известно, что дисперсионное уравнение имеет (см. например \*\*) вид

где – радиус Дебая, –плазменная частота, и . Данное уравнение справедливо для системы отсчета связанной с дрейфовой скоростью. Переход к неподвижной системе отсчета осуществляется аналогично переходу от (6) к (7). Покажем теперь, что это уравнение вытекает из (6). Для этого воспользуемся, так называемым, равенством Вебера.

**Теорема (Равенство Вебереа).** *При любых вещественных и для Бесселевых функций целого порядка справедливо**следующее равенство*

Отметим, что равенство Вебера справедливо и в более общей формулировке (см. например \*\*\*), однако в рассматриваемом случае достаточно указанной. Приведем для справки **доказательство равенства Вебера.** Из интегрального представления функции Бесселя вытекает, что

Подставляя данное разложение в интеграл из левой части искомого равенства и меняя порядки суммирования и интегрирования местами, получим

|  |
| --- |
|  |
|  |

С другой стороны,

|  |
| --- |
|  |
|  |

Сравнивая полученные выражения друг с другом, заключаем справедливость искомого равенства.

Для Максвеловского распределения

и, следовательно,

В заключение доказательства осталось только заметить, что

1. **Работа электрического поля над электроном**

Интересует величина

представляющая собой среднюю за единицу времени работу электрического поля над электроном в данной точке пространства. Здесь треугольными скобками как раз обозначено осреднение по достаточно большому промежутку времени :

В рассматриваемой ситуации и , где . Комплексная частота лежит в верхней полуплоскости, амплитуда дается выражением (5). Поскольку – равновесная и то

и, следовательно,

Вычислим компоненты вектора . Согласно (5) имеем

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |

Поскольку , то

|  |
| --- |
|  |
|  |

Таким образом,

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

Действуя аналогично, получаем, что

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |

Подставляя теперь компоненты вектора в произведение ,в пределе при находим

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

При осреднении по времени осциллирующими членами можно пренебречь, т.е.

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |