MEC 6616 Aérodynamique Numérique – Automne 2024
LAP4 - Laboratoire d'apprentissage en Programmation 4

Travail en équipe de 2 personnes
Pondération : 5% de la note globale
À remettre lundi 21 octobre 2024
(10 % de pénalité par jour de retard)

<u>Les équations du momentum</u>

On désire vérifier la solution numérique aux deux équations du momentum à l'aide de la solution analytique de l'écoulement de Couette. Les équations à résoudre sont les suivantes:

$$\frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} - \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = Sx$$

$$\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} - \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = Sy$$

On prendra la masse volumique $\rho=1 kg/m^3$ et la viscosité dynamique égale à $\mu=1{,}0\ Ns/m^2$.

La théorie pour la solution numérique de ce système d'équations a été présentée en classe et est disponible sur les notes de cours sur Moodle.

En général, le terme de gradient de pression apparaîtra comme un terme source dans l'équation du momentum. Pour la vérification proposée, les deux composantes du terme source de pression $Sx=-\partial p/\partial x$ et $Sy=-\partial p/\partial y$ seront imposées à partir de la solution analytique de l'écoulement de Couette.

1. Cas de Couette classique

La solution analytique de l'écoulement de Couette a été placée en Annexe. On va résoudre ce cas numériquement avec les paramètres suivants : b = 1, U = 1, μ=1.

Dans ce cas, pour un domaine unitaire ($0 < x < 1$, $0 < y < b=1$), la solution est donnée par :

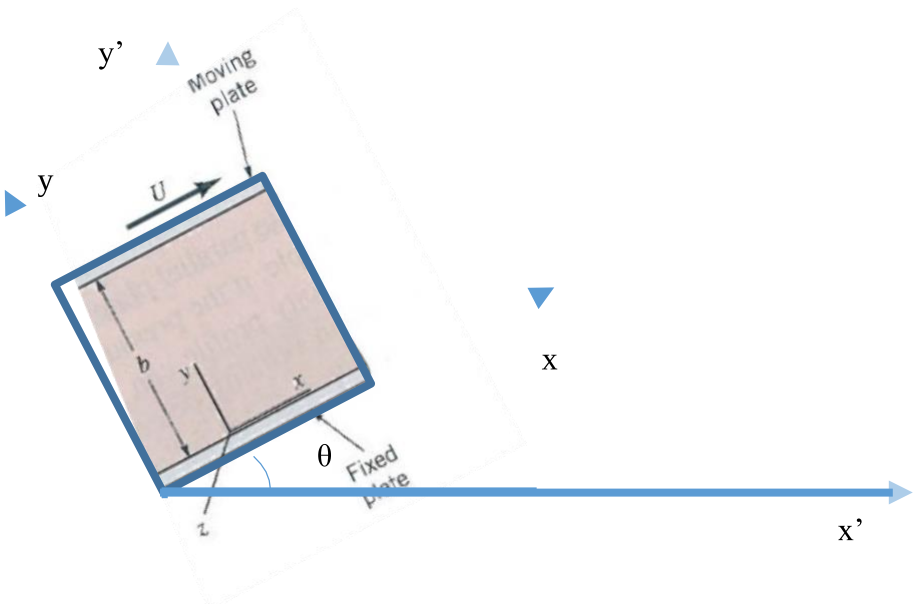
$\partial p/\partial x = -2P$, $\partial p/\partial y=0$ où P est un paramètre (défini en Annexe)

$u = y * (1 – P * (1-y))$, $v = 0$

Résoudre ce cas pour P=0, 1 et -3 et comparer les solutions analytiques et numériques pour u(y).

2. Cas de Couette tourné

Considérez maintenant la même solution analytique, mais en imposant une rotation d'un angle θ, tel qu'illustré.



Utiliser la matrice de rotation pour relier la solution du cas 1 au cas tourné.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Utiliser cette matrice pour modifier les coordonnées du maillage et pour calculer les composantes de vitesses et les composantes du gradient de pression dans le repère tourné.

Résoudre pour les mêmes paramètres (P=0, 1 et -3) et comparer les solutions analytiques et numériques.

Solutions Numériques

Pour les deux cas de Couette, classique et tourné, utiliser des conditions de Dirichlet pour u et v sur les 2 frontières du domaine en haut et en bas (dans le repère initial) et des conditions de Neumann sur l'entrée et la sortie de l'écoulement.

Appliquer l'approche itérative discutée en classe pour résoudre les deux équations couplées. Faites les calculs à l'aide du schéma Centré. Obtenez des solutions pour différents maillages de triangles et de quadrilatères et choisissez la taille des maillages permettant de bien illustrer la convergence en maillage et de bien calculer l'ordre de convergence.

Résultats attendus :

- Afficher certains des maillages utilisés
- Tracer les vecteurs du champ de vitesse et comparer qualitativement à la solution analytique
- Comparer vos solutions numériques à la solution analytique sur des coupes à x constant.
- En faisant varier le nombre de nœuds du maillage, déterminer l'ordre de convergence de l'approximation numérique pour le schéma Centré en utilisant tous les points du maillage pour la mesure de la norme de l'erreur.

DÉPOT SUR MOODLE

Déposer votre programme Python sur MOODLE avant le lundi 21 octobre 2024 à 23h55. Je vais exécuter le programme et je vais vérifier que :

- Votre programme fonctionne tel qu'attendu
- Votre programme est facile à comprendre
- Le programme trace les vecteurs du champ de vitesse pour les solutions analytiques et numériques
- Le programme compare les solutions analytiques et numériques sur des coupes.
- Le programme calcule la norme de l'erreur et l'ordre de convergence

Une note maximale de 5% sera donnée selon la grille suivante :

Item	État				
Programme	Non-fonctionnel	Fonctionnel	Fonctionnel	Fonctionnel	Fonctionnel
Résultats	Inexistant	La plupart des résultats manquants ou erronés	Environ la moitié des résultats corrects	Presque tous les résultats corrects	La totalité des résultats corrects
Note	0%	1-2%	2.0-3%	3.-4.5%	5.0%

ANNEXE : Solution analytique de l'écoulement de Couette

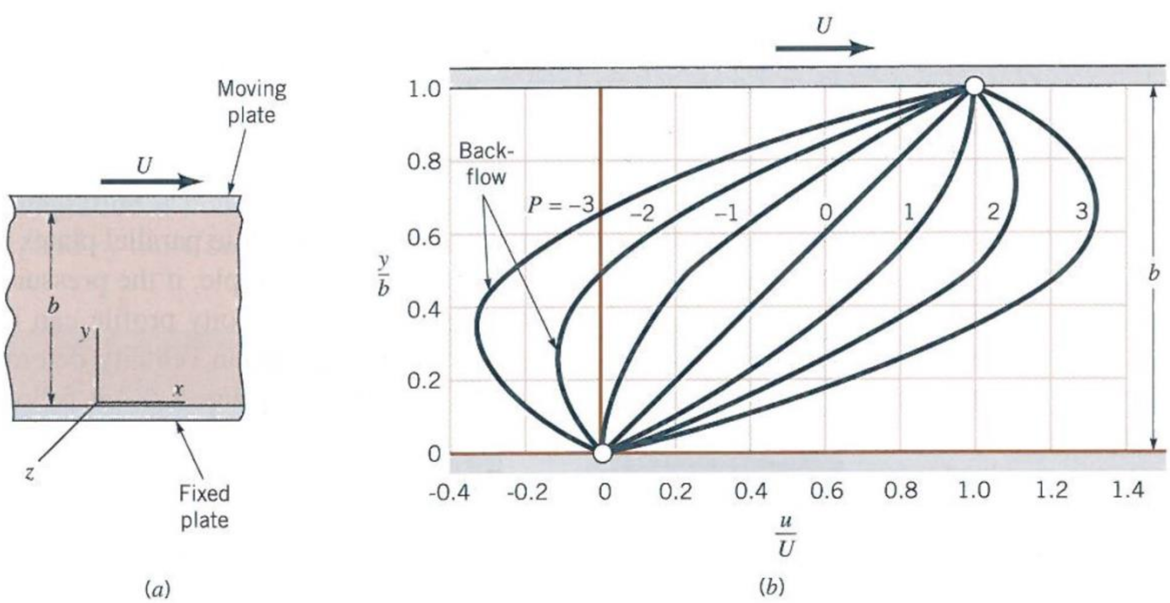
6.9.2 Couette Flow

Another simple parallel-plate flow can be developed by fixing one plate and letting the other plate move with a constant velocity, U, as is illustrated in Fig. 6.32*a*. The Navier–Stokes equations reduce to the same form as those in the preceding section, and the solution for the pressure and velocity distribution are still given by Eqs. 6.132 and 6.133, respectively. However, for the moving plate problem the boundary conditions for the velocity are different. For this case we locate the origin of the coordinate system at the bottom plate and designate the distance between the two plates as b (see Fig. 6.32*a*). The two constants c_1 and c_2 in Eq. 6.133 can be determined from the no-slip boundary conditions, $u = 0$ at $y = 0$ and $u = U$ at $y = b$. It follows that

$$u = U\frac{y}{b} + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - by) \tag{6.140}$$

or, in dimensionless form,

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{b} - \frac{b^2}{2\mu U}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \tag{6.141}$$



■ **Figure 6.32** **The viscous flow between parallel plates with bottom plate fixed and upper plate moving (Couette flow): (*a*) coordinate system and notation used in analysis; (*b*) velocity distribution as a function of parameter, P, where $P = -(b^2/2\mu U)\ \partial p/\partial x$. (Data from Ref. 8.)**