abitur.nrw
BERUFSKOLLEG
Berufliches Gymnasium

Zentrale Abiturprüfung 2023
Haupttermin
25.04.2023

Weiteres Leistungskursfach
Mathematik
Fachbereich Informatik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel CAS

Bearbeitungszeit
Teil A: max. 60 Minuten
Teil B: mind. 210 Minuten

Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler

Aufgabenstellung

Aufgabe 2 – Analysis (32 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation

Seit Juni 2019 ergänzen E-Scooter die Mobilitätslandschaft in Deutschland.

Die E-Scooter des Vermieters LI senden Daten an den Anbieter. Unter anderem wird der Ladezustand der Akkus gesendet.

Abb. 2.1

Für die Reichweite der E-Scooter ist eine Untersuchung des Ladezustands des Akkus im Tagesverlauf von Bedeutung. Dazu werden die Durchschnittswerte eines Kalenderjahres für zwei Wochentage verglichen, d. h. im Folgenden sind alle Funktionswerte Durchschnittswerte.

Der Ladezustand der Akkus lässt sich sonntags durch die Funktionenschar s_a mit

$$s_a(t) = a \cdot t^2 \cdot e^{-a \cdot t} + 0{,}2$$

und montags durch die Funktionenschar m_a mit

$$m_a(t) = 2 \cdot a \cdot t \cdot e^{-1{,}2 \cdot t} + 0{,}4$$

für $t \in [0;\ 5]$ und $a \in [0{,}75;\ 0{,}9]$ modellieren.

Dabei hängt der Parameter a von der Außentemperatur ab.

Die Variable t beschreibt in beiden Funktionen die Zeit in Stunden nach 7.00 Uhr, so dass für 7.00 Uhr $t = 0$ ist. Die Funktionswerte geben den Ladezustand als Anteil an der Kapazität der Batterie an. So entspricht ein Funktionswert von $0{,}6$ einem Anteil von 60 % der Batteriekapazität.

2.1 Vergleichen Sie den Ladezustand an den beiden Wochentagen um 7.00 Uhr.

(3 Punkte)

2.2 Es ist $a = 0{,}85$.

Bestimmen Sie rechnerisch, zu welcher Uhrzeit der Ladezustand an beiden Wochentagen gleich hoch ist.

(3 Punkte)

2.3 Nun gilt $a \in [0{,}75;\ 0{,}9]$.

2.3.1 Ein Ladezustand von 30 % soll nicht unterschritten werden.

Erläutern Sie anhand des Funktionsterms, dass dies bei der Modellierung für den Montag eingehalten wird.

(3 Punkte)

2.3.2 Am Sonntagvormittag wird mit 92,18 % der höchste Ladezustand erreicht.

Zeigen Sie rechnerisch, dass es am Montagvormittag eine lokale Maximalstelle gibt, und

prüfen Sie, für welche Werte von a die lokalen Maxima am Montagvormittag den Ladezustand von 92,18 % überschreiten.

(7 Punkte)

2.3.3 Ermitteln Sie rechnerisch in Abhängigkeit vom Parameter a die stärkste Zunahme des Ladezustands s_a am Sonntagvormittag zwischen 7.00 Uhr und 12.00 Uhr.

Hinweis:
Auf eine Betrachtung der Randwerte darf verzichtet werden.

(6 Punkte)

2.4 Für die Vermietung von E-Scootern ist eine Auswertung über ihre Verteilung innerhalb einer Stadt wichtig. Dazu sammelt der Anbieter LI für beliebte Standorte zahlreiche Daten.

Im Folgenden werden nur Daten über die **neu** abgestellten E-Scooter pro Stunde in Abhängigkeit von der Tageszeit betrachtet.

2.4.1 Auf Grundlage der Beobachtungen sollen die für den Hauptbahnhof erfassten Daten mithilfe einer ganzrationalen Funktion f mit

$$f(t) = a_4 \cdot t^4 + a_3 \cdot t^3 + a_2 \cdot t^2 + a_1 \cdot t + a_0$$

$$\text{für } t \in [0;\ 10] \quad \text{und} \quad a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

modelliert werden.

Dabei beschreibt t die Zeit in Stunden nach 7.00 Uhr. Die Funktionswerte geben die durchschnittliche Anzahl der am Hauptbahnhof pro Stunde neu abgestellten E-Scooter an.

Die Datenauswertung ergibt diese Informationen:

- Morgens um 8.00 Uhr werden 11,5 E-Scooter pro Stunde neu abgestellt.
- Um 9.00 Uhr wird mit 14 neu abgestellten E-Scootern pro Stunde ein lokales Maximum erreicht.
- Mittags um 13.00 Uhr wird ein lokales Minimum der neu abgestellten E-Scooter pro Stunde festgestellt.
- Nachmittags um 15.00 Uhr hat die Zunahme der neu abgestellten E-Scooter pro Stunde ein lokales Maximum.

Leiten Sie die Funktionsgleichung von f her und

überprüfen Sie alle hinreichenden Bedingungen.

(7 Punkte)

2.4.2 Daten am Rathausplatz lassen sich am Rechner durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades g mit

$$g(t) = 0{,}064 \cdot t^3 - 1{,}2 \cdot t^2 + 6{,}4 \cdot t + 3 \quad \text{für} \quad t \in [0;\ 10]$$

modellieren. Dabei gibt t die Zeit in Stunden nach 7.00 Uhr und der Funktionswert die Anzahl der neu abgestellten E-Scooter pro Stunde am Rathausplatz an.

Berechnen Sie die Anzahl der insgesamt zwischen 11.00 Uhr und 15.00 Uhr neu abgestellten E-Scooter.

(3 Punkte)

Aufgabe 3 – Stochastik (32 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation

In den Sommerferien zu Hause abhängen oder das eigene Land erkunden?

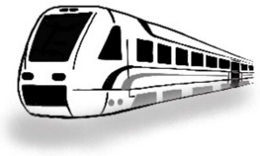

Abb. 3.1

3.1 In NRW können Jugendliche das im öffentlichen Nahverkehr gültige SuperHolidayTicket kaufen. In Paderborn besitzen in den Sommerferien insgesamt 512 Jugendliche ein solches Ticket.

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Jugendlichen an, die am ersten Tag der Sommerferien das SuperHolidayTicket nutzen. Die Zufallsgröße X wird mit der Erfolgswahrscheinlichkeit von 20 % als binomialverteilt angesehen.

Alle relativen Häufigkeiten sollen im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten angenommen werden.

3.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 100 Jugendliche am ersten Tag der Sommerferien das SuperHolidayTicket nutzen.

(2 Punkte)

3.1.2 Es gilt $P(X \geq 128) \approx 0{,}0034$.

Interpretieren Sie diese Aussage im Anwendungskontext.

(3 Punkte)

3.1.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Jugendlichen, die am ersten Tag der Sommerferien das SuperHolidayTicket nutzen, um mehr als die Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.

(4 Punkte)

3.1.4 Eine Auswertung ergibt:
Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine bestimmte Anzahl k der Jugendlichen das SuperHolidayTicket tatsächlich am ersten Tag der Sommerferien nutzt, ist kleiner als 0,4.

Bestimmen Sie die größte Anzahl k, für die diese Auswertung zutrifft.

(3 Punkte)

3.1.5 Drei der ticketbesitzenden Jugendlichen aus Paderborn werden zufällig ausgewählt.

Ermitteln Sie rechnerisch die Wahrscheinlichkeit, dass entweder alle drei oder keiner der drei Jugendlichen das SuperHolidayTicket am ersten Tag der Sommerferien nutzen.

(3 Punkte)

3.2 Vier Jugendliche möchten nach Münster fahren und informieren sich über Zugverbindungen.

Täglich um 10.09 Uhr fährt der RY32 von Paderborn nach Münster.

3.2.1 Dieser Zug erreicht erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit p den Zielbahnhof in Münster planmäßig.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der RY32 innerhalb einer beliebigen Woche an mindestens sechs aufeinanderfolgenden Tagen planmäßig in Münster ankommt, beträgt 39,6 %.

Bestimmen Sie rechnerisch die Wahrscheinlichkeit p.

(3 Punkte)

3.2.2 Die vier Jugendlichen belegen ein freies Abteil mit sechs nummerierten Sitzplätzen. Jeder Jugendliche soll genau einen Sitzplatz einnehmen.

Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die vier Jugendlichen auf die sechs Sitzplätze zu verteilen.

(2 Punkte)

3.3 Sonntags zwischen 6.00 Uhr und 24.00 Uhr werden die Uhrzeiten erfasst, zu denen Personen den Paderborner Bahnhof betreten.

Betrachtet wird die normalverteilte Zufallsgröße

Y: Zeit in Stunden nach 0.00 Uhr, zu der eine Person den Bahnhof betritt.

3.3.1 Die zugehörige Dichtefunktion φ für den ersten Sonntag der Sommerferien ist in Abb. 3.2 dargestellt.

Dabei beschreibt t die seit 0.00 Uhr verstrichene Zeit in Stunden.

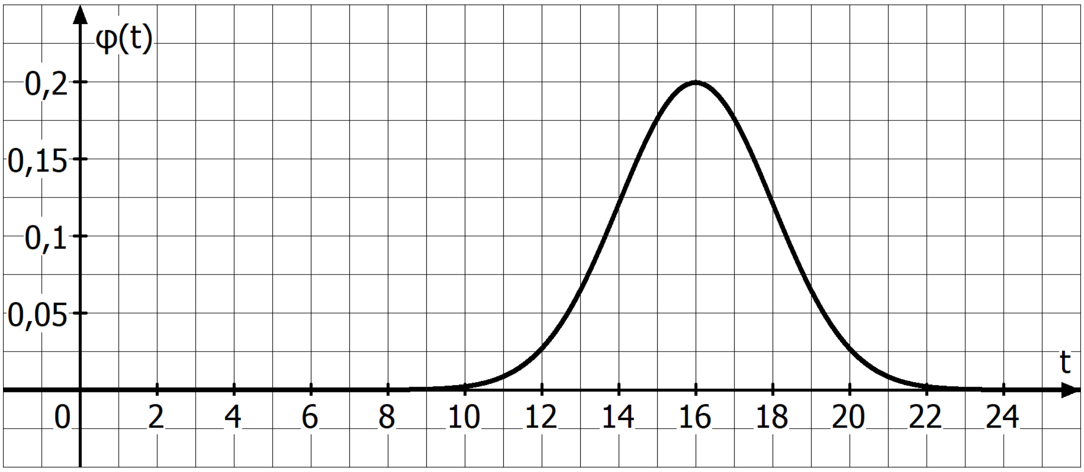

Abb. 3.2

Geben Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße Y anhand von Abb. 3.2 an und

geben Sie begründet denjenigen einstündigen Zeitraum an, zu dem die Anzahl eintreffender Personen am größten ist.

(4 Punkte)

3.3.2 Am zweiten Sonntag der Sommerferien beträgt für die Zufallsgröße Y der Erwartungswert 17 und die Standardabweichung 2,5. An diesem Sonntag betreten insgesamt 1 500 Personen den Paderborner Hauptbahnhof.

Bestimmen Sie rechnerisch, zu welcher Uhrzeit die 500. Person den Bahnhof betritt.

(3 Punkte)

3.4 Im Verkehrsverbund wird vermutet, dass sonntags höchstens 3 % der Fahrgäste ohne gültiges Ticket fahren. An einem Sonntag werden 1 234 Fahrgäste kontrolliert. Von ihnen hatten am Ende des Tages 51 kein gültiges Ticket dabei.

Prüfen Sie die Vermutung des Verkehrsverbunds auf einem Signifikanzniveau von 5 %, indem Sie die Vermutung als Nullhypothese annehmen.

(5 Punkte)

Aufgabe 4 – Lineare Algebra/Analytische Geometrie (32 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation

Unter den Sportspielen wird in Zukunft auch die Trendsportart Padel, eine Mischung aus Tennis und Squash, den Spielekonsolenmarkt erobern. Der Hersteller I24-Sports implementiert bei der Programmierung die grundlegende Spielidee.

Padel wird in einem Raum aus Glaselementen gespielt, dessen Wände das 10 m x 20 m große Spielfeld begrenzen (s. Abb. 4.1). Es ist ein Rückschlagspiel mit Ball und Schläger, bei dem die Wände in das Spiel einbezogen werden. Es wird zu viert gespielt, d. h. zwei Paare stehen sich auf den beiden zueinander symmetrischen Spielfeldhälften, die durch ein Netz getrennt sind, gegenüber.

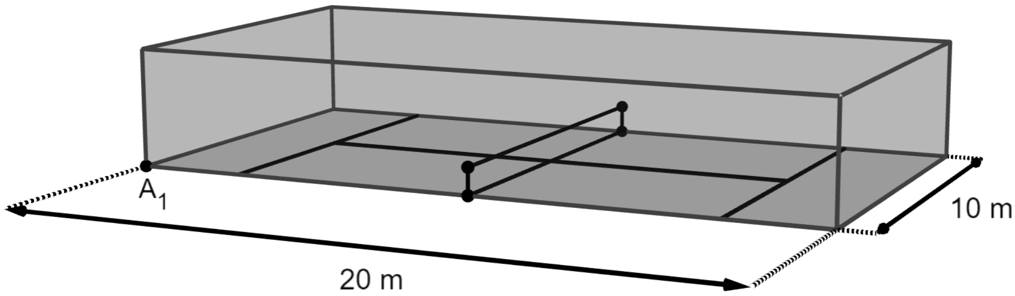

Abb. 4.1

Abb. 4.2 zeigt die Abmessungen eines Padel-Feldes.

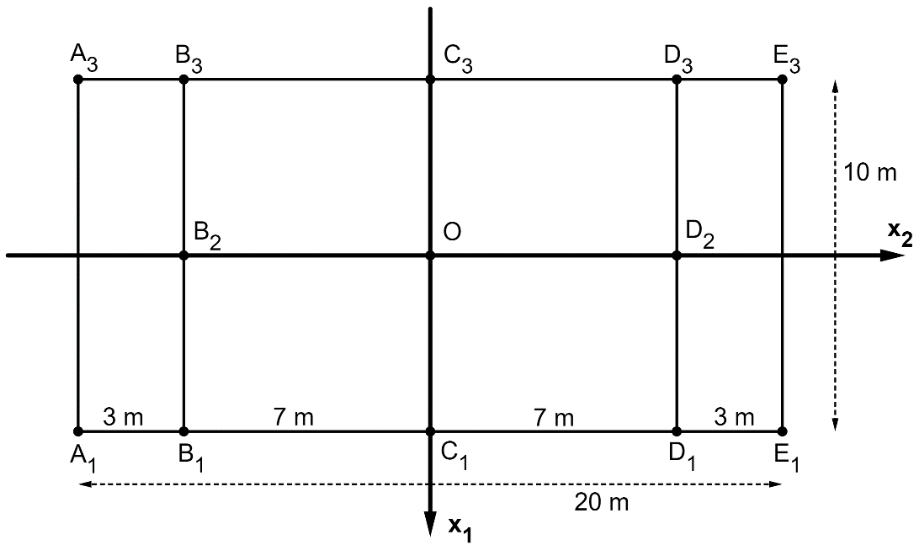

Abb. 4.2

Das Spielfeld ist mit Kunstrasen belegt und liegt in der x_1-x_2-Ebene.
Die positive x_3-Achse zeigt vom Koordinatenursprung O aus senkrecht zur x_1-x_2-Ebene nach oben. Der Koordinatenursprung befindet sich genau im Mittelpunkt des rechteckigen Kunstrasenplatzes.

Zur Vereinfachung werden Bälle als punktförmig und Begrenzungen als Strecken angesehen. Flugbahnen verlaufen entlang von Geraden oder Parabeln.
Alle Angaben sind in Meter.

4.1 Geben Sie die Koordinaten der Punkte A_1 und B_3 des linken Spielfeldes im $\mathbb{R}^3$ an.

(2 Punkte)

4.2 Die parabelförmige Netzoberkante verläuft oberhalb der Strecke $\overline{C_1C_3}$ und wird beschrieben durch die Punkte N_t mit Ortsvektoren der Form

$$\overrightarrow{ON_t} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0{,}88 + 0{,}0016 \cdot t^2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [-5; 5].$$

Der tiefste Punkt der Netzoberkante liegt oberhalb des Koordinatenursprungs.

Berechnen Sie, in welchem Mindestabstand von den seitlichen Spielfeldbegrenzungen sich ein Ball befinden muss, damit er in einer Höhe von 0,8996 m das Netz überfliegen kann.

(3 Punkte)

4.3 Der Ball muss bei einem Schlag zunächst über die höchstens 0,92 m hohe Netzkante fliegen und dann auf der Kunstrasenfläche der gegnerischen Seite aufkommen. Erst danach darf er an die Glaswände treffen.

Der Ball wird im Punkt $S_1(1 \mid -0{,}5 \mid 1{,}5)$ getroffen und fliegt entlang einer Geraden in Richtung des Vektors $\vec{v}$ mit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 1{,}4 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie rechnerisch, dass der Ball über das Netz fliegt und

untersuchen Sie rechnerisch, ob der Ball regelkonform auf der Kunstrasenfläche der gegnerischen Seite aufkommt.

(6 Punkte)

4.4 Bei einem anderen Schlag wird der Ball im Punkt $S_2(-3 \mid -2{,}1 \mid 1{,}8)$ getroffen, fliegt entlang einer Geraden und landet im Punkt $P(1 \mid 8 \mid 0)$ auf dem Kunstrasen des gegenüberliegenden Spielfeldes. Ein digitales Geschwindigkeitsmessgerät zeigt eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 15 $\frac{m}{s}$ an.

Berechnen Sie die Flugzeit des Balls.

(3 Punkte)

4.5 Beim Padel wird zu Beginn eines Ballwechsels diagonal und von unten aufgeschlagen, so dass sich der Ball entlang einer parabelförmigen Flugkurve bewegt. Die Flugkurve verläuft beim Aufschlag in einer zur x_1-x_2-Ebene senkrechten Ebene E.

Ein Spieler schlägt aus der linken Spielfeldhälfte diagonal auf. Er trifft den Ball im Punkt $S_3(2 \mid -7 \mid 1)$. Dann fliegt der Ball durch den Punkt $\mathrm{Q}(-2 \mid 3 \mid 1)$ und landet regelkonform auf der gegenüberliegenden Spielfeldhälfte. Die maximale Höhe dieser parabelförmigen Flugkurve beträgt 1,5 m über dem Kunstrasen und wird mittig zwischen den beiden Punkten S_3 und Q erreicht.

Geben Sie die Koordinaten des höchsten Punktes H dieser Flugkurve an und

bestimmen Sie rechnerisch eine Ebenengleichung in Koordinatenform für die Ebene E, in der diese Flugkurve liegt.

(5 Punkte)

4.6 Zur Ballverfolgung wird das System Hawk-Eye eingesetzt. Dabei erfassen Kameras den Ball aus verschiedenen Blickwinkeln. Die Kameras befinden sich in den Punkten $K_1(5 \mid 0 \mid 3)$ und $K_2(-5 \mid 6 \mid 4)$.

Der Aufschlag soll in dem Aufschlagfeld $OD_2D_3C_3$ landen (s. Abb. 4.2). Das System erfasst den auf dem Kunstrasen aufkommenden Ball: Er ist von Kamera K_1 9,08955 m und von Kamera K_2 6,38905 m entfernt.

Bestimmen Sie rechnerisch mögliche Positionen des Balls und

prüfen Sie, ob der Ball innerhalb des betrachteten Aufschlagfeldes den Kunstrasen trifft.

(6 Punkte)

4.7 Beim Online-Padel soll es möglich sein, Teams über das Internet zu finden. Zu Beginn steht ein Zweierteam auf dem Spielfeld $ABCD$ (s. Abb. 4.3). Sobald ein gegnerisches Team das Spielfeld betritt, startet die Animation in vier aufeinanderfolgenden Schritten.

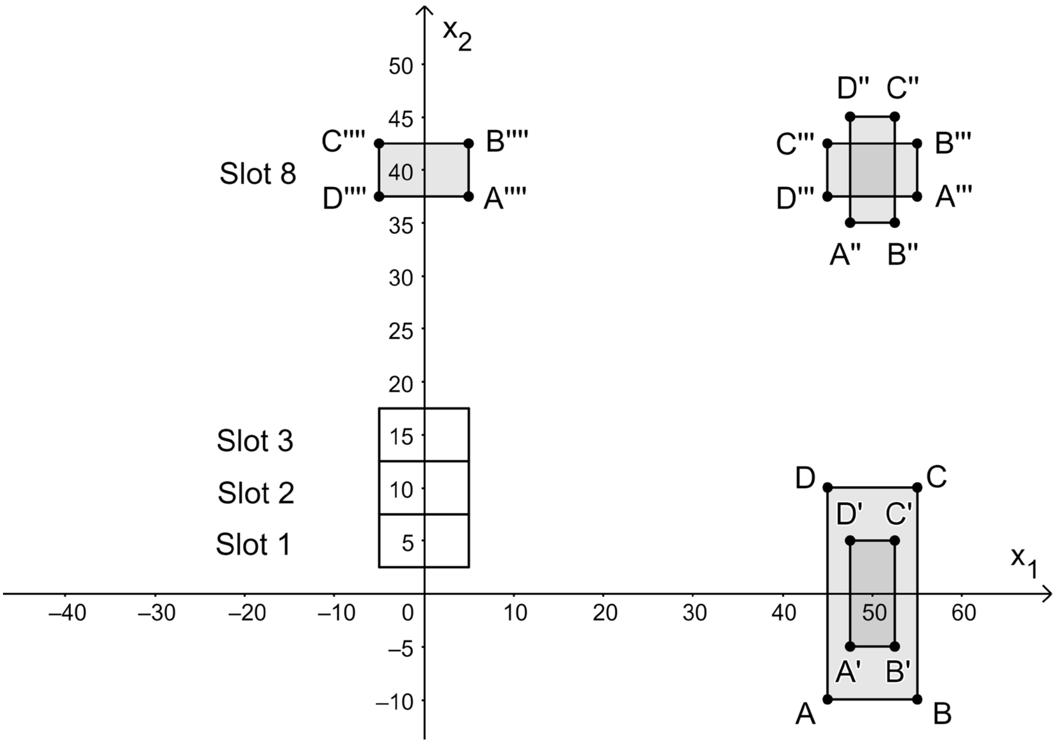

Abb. 4.3

Schritt 1: Das Spielfeld wird an dem Punkt $E(50 \mid 0)$ zentrisch um den Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt.

Schritt 2: Das verkleinerte Spielfeld wird um 40 Einheiten in x_2-Richtung verschoben.

Schritt 3: Das verschobene Spielfeld wird gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt $E'(50 \mid 40)$ um 90 Grad gedreht.

Schritt 4: Das gedrehte Spielfeld wird in den freien Slot 8 verschoben.

Leiten Sie für die vier Animationsschritte die zugehörigen affinen Abbildungen α, β, γ und δ her.

(7 Punkte)

Materialgrundlage

Alle Abbildungen wurden selbst erstellt.

Zugelassene Hilfsmittel

- Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten
- Computeralgebrasystem (CAS)

Arbeitszeit und Punktevergabe

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Arbeitszeit</td><td colspan="4">Punktevergabe</td></tr>
<tr><td>Teil A</td><td>max.
60 Min.</td><td rowspan="2">insgesamt
270 Min.</td><td>24 Punkte</td><td rowspan="2">Inhaltliche
Leistung
Teil A und B
120 Punkte</td><td rowspan="2">Darstellungs-
leistung
Teil A und B
5 Punkte</td><td rowspan="2">Gesamt-
punktzahl
Teil A und B
125 Punkte</td></tr>
<tr><td>Teil B</td><td>mind.
210 Min.</td><td>96 Punkte</td></tr>
</table>