abitur.nrw
BERUFSKOLLEG
Berufliches Gymnasium

Zentrale Abiturprüfung 2020
Haupttermin
19.05.2020

Weiteres Leistungskursfach
Mathematik

Fachbereich Informatik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel CAS

<u>Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler</u>

Aufgabenstellung

Aufgabe 2 – Analysis (32 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation

Herr Müller ist Systemadministrator in einem großen Unternehmen und analysiert das Datenaufkommen im betrieblichen Netzwerk.

Die ganzrationale Funktionenschar f_a mit

$$f_a(t) = -\frac{5}{4 \cdot a} \cdot t^4 + (20 - 5 \cdot a) \cdot t^2 + 20 \cdot a + 400 \quad \text{mit} \quad t \in [-5;\ 5] \quad \text{und} \quad a \in [1;\ 2]$$

modelliert die Datenrate im internen Netzwerk des Unternehmens.

Dabei gibt t die Zeit in Stunden an, wobei $t = 0$ den Zeitpunkt 12:00 Uhr darstellt.
Die Datenrate $f_a(t)$ zum Zeitpunkt t ist in Gigabyte pro Stunde angegeben.
Der Parameter a hängt von dem Wochentag ab.

2.1 Geben Sie in Abhängigkeit von dem Parameter a die Datenrate um 17:00 Uhr an.

(2 Punkte)

2.2 Bestimmen Sie rechnerisch in Abhängigkeit von dem Parameter a, zu welchen Zeitpunkten die Datenrate maximal ist.

Hinweis: Auf die Betrachtung der Randwerte kann verzichtet werden.

(6 Punkte)

2.3 Ermitteln Sie rechnerisch in Abhängigkeit von dem Parameter a, wann vor 12:00 Uhr die Datenrate am stärksten abgenommen hat.

(8 Punkte)

2.4 Herr Müller hat an einem Donnerstag beobachtet, dass zwischen 12:00 Uhr und 16:00 Uhr insgesamt 1 816 Gigabyte Daten im Netzwerk bewegt worden sind.

Berechnen Sie den zugehörigen Wert für den Parameter a.

(4 Punkte)

2.5 Für diese Teilaufgabe gilt $a = 2$.
Herr Müller betrachtet den Datenverkehr ab 12:00 Uhr.

Berechnen Sie, bis zu welcher Uhrzeit insgesamt 1 744 Gigabyte Daten verschickt worden sind.

(3 Punkte)

2.6 Gegeben sind die beiden ganzrationalen Funktionen g_1 und g_2 durch

$$g_1(x) = 2 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 16 \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und}$$

$$g_2(x) = -2 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 16 \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.6.1 Die Tangente t berührt den Graphen von g_2 in dem Punkt $P(v \mid g_2(v))$ mit $v \in \mathbb{R}$ (vgl. Abb. 2.1).

Leiten Sie die Gleichung der Tangente t in Abhängigkeit von dem Parameter v her.

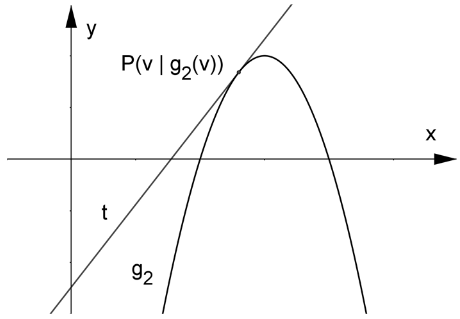

Abb. 2.1

(4 Punkte)

2.6.2 Zwischen den Funktionsgraphen von g_1 und g_2 lassen sich achsenparallele Rechtecke $ABCD$ so einbeschreiben, dass die Eckpunkte A und B auf dem Graphen von g_1 und die Eckpunkte C und D auf dem Graphen von g_2 liegen (vgl. Abb. 2.2).

Weisen Sie nach, dass sogar ein Quadrat existiert, das auf diese Art einbeschrieben werden kann.

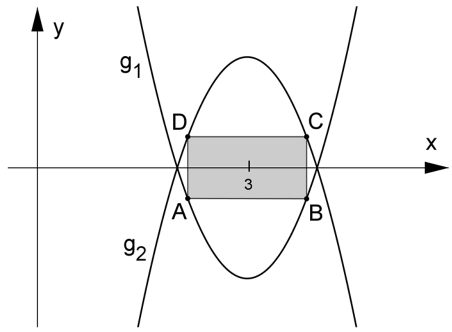

Abb. 2.2

(5 Punkte)

Aufgabe 3 – Stochastik (32 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation

Zahlreiche Filme und Serien können auf der Webseite des Streamingdienstes Netflix angeschaut werden.

Einige Netflix-Abonnenten verschaffen sich über VPN-Dienste Zugang zum Streaming, um auf ein erweitertes Angebot zugreifen zu können.

Im Folgenden sollen die genannten Anteile als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

Hinweis:
Aus urheberrechtlichen Gründen kann das Bild nicht veröffentlicht werden; es kann jedoch in der unten angegebenen Quelle eingesehen werden.

Abb. 3.1

3.1 Weltweit verwenden 12 % aller Internetnutzer VPN-Dienste, von diesen nutzen 30 % Netflix.

Von den Internetnutzern, die keine VPN-Dienste verwenden, nutzen 96 % kein Netflix.

Folgende Ereignisse werden betrachtet:

V: Ein Internetnutzer nutzt VPN-Dienste.

N: Ein Internetnutzer nutzt Netflix.

3.1.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einer Vierfeldertafel oder in einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm dar.

(4 Punkte)

3.1.2 Bestimmen Sie rechnerisch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Internetnutzer VPN-Dienste oder Netflix nutzt.

(3 Punkte)

3.1.3 Zwei Internetnutzer werden zufällig ausgewählt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass einer VPN-Dienste nutzt und einer nicht.

(3 Punkte)

3.2 Bei einer Onlineumfrage in Deutschland wurden 50 zufällig ausgewählte Internetnutzer danach befragt, ob sie ein Netflix-Abonnement besitzen.

Der Anteil der Netflix-Abonnenten liegt in Deutschland bei etwa 8 % aller Internetnutzer.

Die Zufallsgröße

X: Anzahl der Netflix-Abonnenten

wird als binomialverteilt angesehen.

3.2.1 Es können folgende Ereignisse auftreten:

E_1: Genau fünf der Befragten geben an, ein Netflix-Abonnement zu besitzen.

E_2: Die Anzahl der Netflix-Abonnenten weicht um mindestens zwei vom Erwartungswert ab.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

(6 Punkte)

3.2.2 Die Wahrscheinlichkeit eines weiteren Ereignisses wird durch den Term

$$0{,}08^{10} \cdot \left(\sum_{k=0}^{5} \binom{40}{k} \cdot 0{,}08^{k} \cdot 0{,}92^{40-k} \right)$$

berechnet.

Formulieren Sie ein mögliches Ereignis im Sachzusammenhang.

(3 Punkte)

3.2.3 Bei einer aktuellen Onlineumfrage in Deutschland werden mehr als 50 zufällig ausgewählte Internetnutzer befragt, ob sie ein Netflix-Abonnement besitzen. So sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens fünf Netflix-Abonnenten gefunden werden.

Ermitteln Sie – eventuell experimentell – die Mindestanzahl der Internetnutzer, die befragt werden müssen, um dieses Ziel zu erreichen.

(3 Punkte)

3.3 Eine Studie untersucht das Nutzungsverhalten der Netflix-Abonnenten. Dabei wird die Zufallsgröße

Y: Tägliche Nutzungsdauer von Netflix in Minuten

betrachtet.

Die Zufallsgröße ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 120$ Minuten und der Standardabweichung $\sigma = 16$ Minuten.

3.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Abonnent täglich mindestens 130 Minuten Netflix nutzt.

(2 Punkte)

3.3.2 Bestimmen Sie rechnerisch das um den Erwartungswert symmetrische Intervall, in dem 85 % der täglichen Nutzungsdauern liegen.

(4 Punkte)

3.3.3 Die 5 % der Netflix-Abonnenten mit der niedrigsten täglichen Nutzungsdauer kann man als „Geringnutzer" bezeichnen.

Bestimmen Sie die Nutzungsdauer, bis zu der ein Abonnent als Geringnutzer gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4 – Lineare Algebra/Analytische Geometrie (32 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation

Bei Drohnenrennen steuern die Wettkämpfer ihre Drohnen durch einen Parcours, der in möglichst kurzer Zeit durchflogen werden muss. Das Kamerabild einer Wettkampfdrohne wird auf die Videobrille des Teilnehmers übertragen.

Abb. 4.1

Die Strecken werden in Meter (m), die Zeit in Sekunden (s) und die Geschwindigkeiten in m/s angegeben.

Zur Vereinfachung werden die Drohnen als punktförmig angesehen. Sie bewegen sich auf Geraden.

4.1 Eine Wettkampfdrohne fliegt ausgehend vom Startpunkt $S(1 \mid 1 \mid 1)$ in Richtung des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ und soll die beiden Rechtecke R_1 und R_2 durchfliegen (vgl. Abb. 4.2).

Für die Eckpunkte der beiden Rechtecke gilt:

R_1: $A_1(5 \mid 2 \mid 2)$, $B_1(5 \mid 3 \mid 2)$, $C_1(5 \mid 3 \mid 1)$ und D_1

R_2: $A_2(6{,}5 \mid 2{,}5 \mid 3)$, $B_2(6{,}5 \mid 3{,}5 \mid 3)$, $C_2(6{,}5 \mid 3{,}5 \mid 2)$ und $D_2(6{,}5 \mid 2{,}5 \mid 2)$

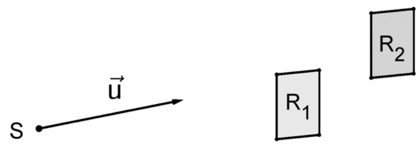

Abb. 4.2

4.1.1 Geben Sie die Koordinaten des Eckpunktes D_1 an
und
bestätigen Sie, dass es sich bei dem Rechteck R_1 um ein Quadrat handelt.

(4 Punkte)

4.1.2 Prüfen Sie rechnerisch, ob die Wettkampfdrohne auf ihrer Flugbahn das Rechteck R_2 durchfliegt.

(5 Punkte)

4.2 Der neue Startpunkt S_N der Wettkampfdrohne soll in der Ebene E mit

$$E:\ \ 21 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 36$$

liegen.
Die neue Flugbahn geht durch die beiden Punkte $\mathrm{P}(5 \mid 2{,}5 \mid 1{,}8)$ und $\mathrm{Q}(6{,}5 \mid 2{,}8 \mid 2{,}1)$.

4.2.1 Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Startpunkt S_N so gewählt werden kann, dass er auf der neuen Flugbahn liegt.

(5 Punkte)

4.2.2 Die Wettkampfdrohne legt die Strecke $\overline{PQ}$ in 0,1 Sekunden zurück.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$.

(4 Punkte)

4.3 Mittels farbiger Laserstrahlen werden zwei unterschiedliche Ebenen F_1 und F_2 mit

$$F_1:\ \ 6 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = 110 \quad \text{und}$$

$$F_2:\ \ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 = 350$$

erzeugt, welche sich in einer Geraden schneiden. Die Wettkämpfer sollen ihre Wettkampfdrohne möglichst exakt entlang der Schnittgeraden steuern.

Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung dieser Geraden.

(5 Punkte)

4.4 Die Eckpunkte eines rechteckigen Hindernisses befinden sich in den Punkten $A(10 \mid 3 \mid 15)$, $B(10 \mid 6{,}2 \mid 15)$, $C(6{,}5 \mid 6{,}2 \mid 13)$ und $D(6{,}5 \mid 3 \mid 13)$.

4.4.1 Das rechteckige Hindernis $ABCD$ wird um die Kante $\overline{AB}$ um $\alpha = 60°$ gedreht.

Dadurch wird der Punkt C auf den Bildpunkt C' und der Punkt D wird auf den Bildpunkt D' abgebildet.

Die Drehung des Punktes D findet in der Ebene $x_2 = 3$ statt.

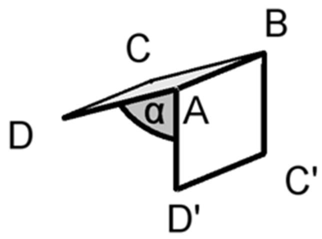

Abb. 4.3

Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Bildpunktes D'.

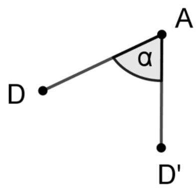

Abb. 4.4

Hinweis:
Für eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung gilt im zweidimensionalen Koordinatensystem:

$$\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

(5 Punkte)

4.4.2 Die Punkte A, B und C liegen in einer Ebene F_3.

Die Punkte T_k haben die Koordinaten $T_k(1{,}75 \cdot k - 16{,}25 \mid 0 \mid k^2)$ für $k \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte T_k so, dass die Punkte T_k in der Ebene F_3 liegen.

(4 Punkte)

Materialgrundlage

Aufgabe 2

Abb. 2.1 und Abb. 2.2 selbst erstellt

Aufgabe 3

Abb. 3.1:
https://asset.barrons.com/public/resources/images/ON-CM999_disney_B620_20180427125228.jpg [10.01.2020]

Aufgabe 4

Abb. 4.1:
Commanderbryce, Racing Drone, CC BY-SA 4.0
https://de.wikipedia.org/wiki/FPV_Racing#/media/File:Racing_Drone.jpg [10.01.2020]

Abb. 4.2, Abb. 4.3 und Abb. 4.4 selbst erstellt

Zugelassene Hilfsmittel

- Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten
- Computeralgebrasystem (CAS)

Arbeitszeit und Punktevergabe

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Arbeitszeit</td><td colspan="4">Punktevergabe</td></tr>
<tr><td>Teil A</td><td>max.
50 Min.</td><td rowspan="2">insgesamt
255 Min.</td><td>24 Punkte</td><td rowspan="2">Inhaltliche
Leistung
Teil A und B
120 Punkte</td><td rowspan="2">Darstellungs-
leistung
Teil A und B
5 Punkte</td><td rowspan="2">Gesamt-
punktzahl
Teil A und B
125 Punkte</td></tr>
<tr><td>Teil B</td><td>mind.
205 Min.</td><td>96 Punkte</td></tr>
</table>