abitur.nrw
BERUFSKOLLEG
Berufliches Gymnasium

Zentrale Abiturprüfung 2017
Haupttermin
04.05.2017

Weiteres Leistungskursfach
Mathematik

Fachbereich Informatik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel CAS

Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler

Aufgabenstellung

Sie können in sämtlichen Aufgaben bei Ihren Berechnungen – nicht aber bei den Ergebnissen – auf die Angabe physikalischer Einheiten verzichten.

Aufgabe 2 – Analysis (32 Punkte)

Hinweis:
Bei sämtlichen Teilaufgaben sind die Lösungen mithilfe von Methoden der Differential- und Integralrechnung zu erstellen.

Beschreibung der Ausgangssituation

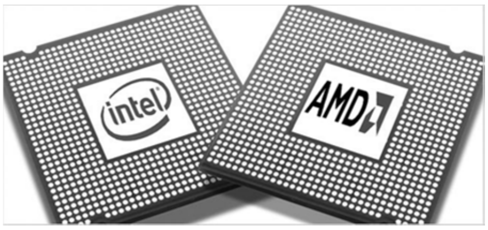

Abb. 1

Die mittlere Auslastung von Computern wird als CPU-Auslastung bezeichnet. Bei Tests mit unterschiedlichen Anforderungen wird der zeitliche Verlauf der CPU-Auslastung verschiedener Prozessoren über einen Zeitraum von 10 Minuten modellhaft durch die Funktionenschar $f_{a,b}$ mit der Funktionsgleichung

$$f_{a,b}(t) = a \cdot t \cdot e^{b \cdot t}$$

mit $a \in]0;\ 50],\ b \in [-1;\ -0{,}2[$ und $t \in [0;\ 10]$ dargestellt.
Dabei gibt t die Zeit in Minuten und $f_{a,b}(t)$ die CPU-Auslastung in Prozent zum Zeitpunkt t an. Die beiden Parameter a und b sind abhängig von den getesteten Prozessoren.

2.1 Berechnen Sie für $a = 20$ und $b = -0{,}23$ die CPU-Auslastung der Prozessoren nach 8 Minuten.

(2 Punkte)

2.2 Berechnen Sie die lokalen Hochpunkte von $f_{a,b}$ in Abhängigkeit von den Parametern a und b.

(6 Punkte)

Die maximale CPU-Auslastung der Prozessoren beträgt $-\frac{a}{b \cdot e}$ % und wird nach $t = -\frac{1}{b}$ Minuten erreicht, d. h. für die lokalen Hochpunkte der Funktionenschar $f_{a,b}$ gilt: $H_{a,b}\left(-\frac{1}{b} \mid -\frac{a}{b \cdot e}\right)$

2.3 Stellen Sie die Gleichung der Ortskurve der lokalen Hochpunkte auf.

Hinweis:
Auf die Angabe der Definitionsmenge der Ortskurve kann verzichtet werden.

(3 Punkte)

2.4 Die maximale CPU-Auslastung soll 50 % betragen.

Ermitteln Sie, welcher Zusammenhang für $a \in \left]0;\ 50\right]$ und $b \in \left[-1;\ -0{,}2\right[$ dann gelten muss und wie dieser Zusammenhang die Definitionsbereiche von a und b einschränkt.

(6 Punkte)

2.5 Durch das Beenden von laufenden Prozessen verringert sich die CPU-Auslastung.

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den Parametern a und b die Änderungsrate zu dem Zeitpunkt, zu dem sich die CPU-Auslastung am stärksten verringert.

Hinweis:
Auf eine Untersuchung an den Rändern des Definitionsbereichs kann verzichtet werden.

(5 Punkte)

2.6 Bei einem getesteten Prozessor tritt die maximale CPU-Auslastung von 20 % nach 2 Minuten auf.

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b in der Funktion $f_{a,b}$.

(5 Punkte)

2.7 Im Folgenden gilt für die CPU-Auslastung:

$$f_{10\cdot e,-\frac{1}{2}}(t) = 10 \cdot e \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t} = 10 \cdot t \cdot e^{1-\frac{1}{2}\cdot t} \text{ mit } t \in [0; 10]$$

Im Multitasking-Betrieb tritt eine Verlangsamung der Rechnerleistung ein, sobald die CPU-Auslastung mehr als 10 % beträgt.

Berechnen Sie den Zeitraum, in dem die Verlangsamung der Rechnerleistung eintritt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3 – Stochastik (32 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation

Vor einem Jahrzehnt waren elektronische Hotelbewertungsportale wenig bekannt, heute sind sie kaum noch aus dem Alltag wegzudenken.

Es wird geschätzt, dass sich 65 % aller deutschen Reisenden vor Reiseantritt in Hotelbewertungsportalen informieren.

Diese und alle folgenden relativen Häufigkeiten sollen auch als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

3.1 90 % aller deutschen Reisenden, die sich vor Reiseantritt in Hotelbewertungsportalen informieren, halten diese Berichte für glaubwürdig.

Insgesamt geben 31 % aller deutschen Reisenden an, kein Vertrauen in diese Art der Hotelbewertungen zu haben.

3.1.1 Dokumentieren Sie den Sachverhalt in einer Vierfelder-Tafel oder in einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm mit dem 1. Merkmal „Reisende informieren sich vor Reiseantritt“ und dem 2. Merkmal „Reisende halten ein Hotelbewertungsportal für glaubwürdig“.

(5 Punkte)

3.1.2 Ein zufällig ausgewählter Reisender hält Hotelbewertungsportale für glaubwürdig.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er sich trotzdem vor Reiseantritt nicht in einem entsprechenden Portal informiert hat.

(4 Punkte)

3.2 Ein Reiseveranstalter befragt nacheinander unabhängig voneinander 22 Reisende, ob sie sich vor Antritt ihrer Reise in einem Hotelbewertungsportal informiert haben.

3.2.1 Dabei können folgende Ereignisse auftreten:

E_1: Genau 15 Reisende geben an, sich vor der Reise in einem Hotelbewertungsportal informiert zu haben.

E_2: Nur der 5. und der 12. Befragte haben sich nicht vor der Reise in einem Hotelbewertungsportal informiert.

E_3: Die ersten drei Reisenden haben sich nicht in einem Hotelbewertungsportal informiert. Trotzdem geben insgesamt genau 14 Reisende an, ein Hotelbewertungsportal vor Reiseantritt besucht zu haben.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

(6 Punkte)

3.2.2 Es gilt:

$$P(E) = 1 - \sum_{k=0}^{15} \binom{22}{k} \cdot 0{,}65^k \cdot 0{,}35^{22-k}$$

Beschreiben Sie in diesem Sachzusammenhang ein Ereignis E, das mit der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eintritt.

(3 Punkte)

3.3 Aus Studien ist bekannt, dass 2,34 % aller Reisenden schon einmal in einem Hotelbewertungsportal ihre Unterkunft negativ beurteilt haben. Ein Reiseveranstalter befragt unabhängig voneinander Reisende.

Ermitteln Sie, gegebenenfalls auch experimentell, die Anzahl der Reisenden, die mindestens befragt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % mindestens zwei Reisende zu finden, die schon einmal eine negative Bewertung abgegeben haben.

(5 Punkte)

3.4 Das Alter der Personen, die einen Aktivurlaub planen und die sich vor ihrer Buchung in Hotelbewertungsportalen informieren, soll als normalverteilt mit einem Erwartungswert von $\mu = 31{,}5$ Jahren und einer Standardabweichung von $\sigma = 8{,}2$ Jahren angesehen werden.

3.4.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein mindestens 50-jähriger Urlauber einen Aktivurlaub plant und sich in Hotelbewertungsportalen informiert.

(4 Punkte)

3.4.2 Wir betrachten 1 500 Reisende, die einen Aktivurlaub geplant haben und sich in einem Hotelbewertungsportal informiert haben.

Bestimmen Sie die zu erwartende Anzahl an Reisenden, die jünger als 25 Jahre sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 4 – Lineare Algebra/Analytische Geometrie (32 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation

In einem Computerspiel zu der Science Fiction Saga *Star Wars* geht es in einer Spielsequenz um die Zerstörung des Todessterns

Dieser Todesstern wird dabei von der Allianz der Rebellen um Luke Skywalker und Obi-Wan Kenobi bekämpft.

Luke Skywalker und Obi-Wan Kenobi sind in der Rebellenhochburg auf dem Planeten Alderan und beobachten den Todesstern.

Das Zentrum der Rebellenhochburg befindet sich im Punkt $Z(10 \mid 28 \mid 0)$ (s. Abb. 2).

Luke Skywalker sieht den Todesstern T vom Punkt $A(10 \mid 12 \mid 0)$ in Richtung $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

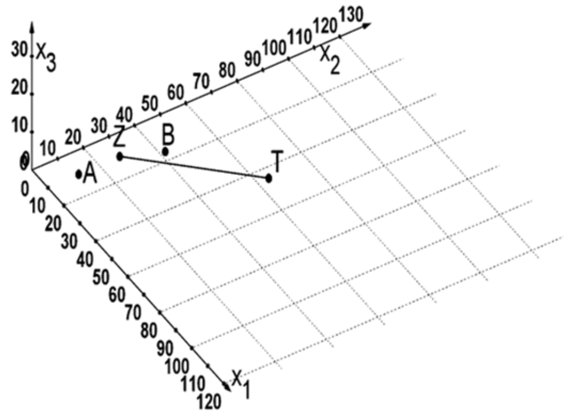

Abb. 2

Obi-Wan Kenobi befindet sich zum gleichen Zeitpunkt im Punkt $B(16 \mid 42 \mid 0)$ und sieht den Todesstern in Richtung $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Die x_1-x_2-Ebene bildet die Planetenoberfläche. Eine Längeneinheit entspricht 1 km.

4.1. Berechnen Sie die Koordinaten des Todessterns im Punkt T.

(5 Punkte)

Der Todesstern verfügt über ein umfangreiches Waffenarsenal. Hierzu gehören Laserkanonen und Raketen, die auf frei wählbaren Bahnen fliegen können.

Ein Angriff auf die Allianz mit einem Laserstrahl würde auf einer durch die Gleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 30 \\ 36 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ 1 \\ 18 \end{pmatrix}$ mit $t \in [0;\ 2]$ beschriebenen Bahn erfolgen.

4.2 Im Punkt $P_1(115 \mid 105 \mid 22)$ befindet sich eine kleine Beobachtungsstation der Allianz.

Untersuchen Sie, ob der Laserstrahl diese Beobachtungsstation treffen kann.

(5 Punkte)

4.3 Ein Abwehrsatellit der Allianz befindet sich im Punkt $S_1(50 \mid 10 \mid 30)$.

Bestimmen Sie rechnerisch die minimale Entfernung, in der der Laserstrahl den Abwehrsatelliten passieren würde.

(7 Punkte)

Um Angriffe mit Lasern und Raketen abzuwehren, verfügt die Allianz über einen riesigen Schutzschild in Form eines Dreiecks. Dieser Schutzschild wird von Abwehrsatelliten in den Punkten $S_1(50 \mid 10 \mid 30)$, $S_2(50 \mid 50 \mid 30)$ und $S_3(60 \mid 8 \mid 2)$ aufgespannt (s. Abb. 3).

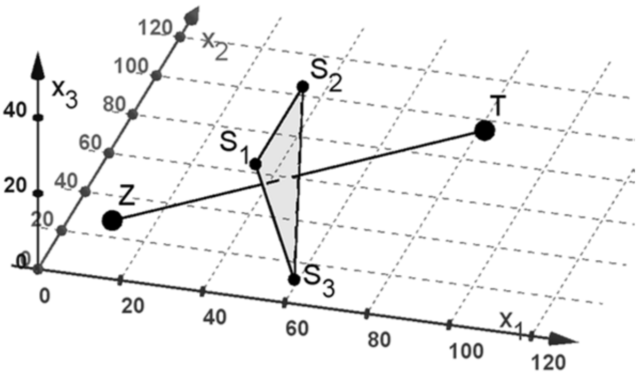

Abb. 3

4.4 Der Laser trifft auf den Schutzschild.

Berechnen Sie die Koordinaten des Auftreffpunktes.

(4 Punkte)

Die Allianz weiß, dass der Todesstern über Raketen verfügt, die den Schutzschild überfliegen können (s. Abb. 4).

Diese Raketenangriffe können auf parabelförmigen Bahnen erfolgen, die durch die Schar

$$h_p: \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 - 90 \cdot s \\ 30 - 2 \cdot s \\ 36 + p \cdot s - 48 \cdot s^2 \end{pmatrix}$$

mit $s \geq 0,\ p > 0$ beschrieben werden.

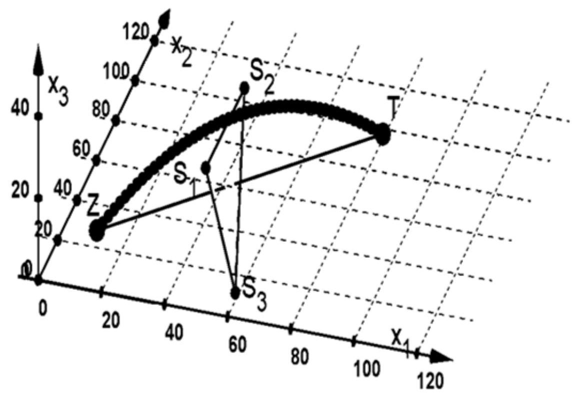

Abb. 4

4.5 Der Parameter p muss entsprechend angepasst werden, damit die Rakete die obere Kante S_1S_2 des Schutzschildes überfliegen kann.

Leiten Sie denjenigen Wert her, den p dann mindestens annehmen muss.

(5 Punkte)

4.6 In der Kommandozentrale wird eine zweidimensionale Draufsicht der Lage erzeugt. Dabei werden zunächst die Rebellenhochburg Z, der Schutzschild $S_1S_2S_3$ und der Todesstern T angezeigt.
In dieser Draufsicht (s. Abb. 5) ergeben sich folgende zweidimensionale Bildschirmkoordinaten:
$\mathrm{Z}(100 \mid 280)$, $S_1(500 \mid 100)$ und $S_2(500 \mid 500)$

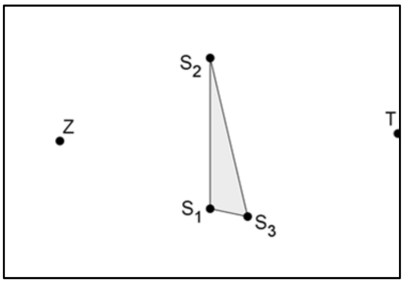

Abb. 5

Durch eine affine Abbildung wird die Rebellenhochburg nun zentral und die Lage vergrößert dargestellt (s. Abb. 6). Hier ergeben sich folgende Bildschirmkoordinaten:
$Z'(500 \mid 300)$, $S_1'(980 \mid 84)$ und $S_2'(980 \mid 564)$

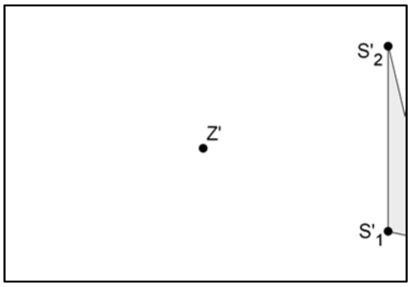

Abb. 6

Leiten Sie die zugehörige affine Abbildung α in der Form
$\alpha\colon \overrightarrow{x'} = M \cdot \vec{x} + \vec{b}$ mit $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

mit $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22},\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ her.

(6 Punkte)

Materialgrundlage

Aufgabe 2

Abb. 1:
http://ultrabooks-test.de/wp-content/uploads/2012/01/amd-gegen-intel.jpg,
zuletzt aufgerufen am 18.06.2016

Aufgabe 3

Abb. 1:
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Hotel#/media/File:Meliton1.jpg,
zuletzt aufgerufen am 27.02.2017

Aufgabe 4

Abb. 1:
Quelle: http://jedipedia.wikia.com/wiki/Erster_Todesstern,
zuletzt aufgerufen am 27.02.2017

Zugelassene Hilfsmittel

- Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten
- Computeralgebrasystem (CAS)

Arbeitszeit und Punktevergabe

	Arbeitszeit		Punktevergabe			
Teil A	max. 50 Min.	insgesamt 255 Min.	24 Punkte	Inhaltliche Leistung Teil A und B 120 Punkte	Darstellungsleistung Teil A und B 5 Punkte	Gesamtpunktzahl Teil A und B 125 Punkte
Teil B	mind. 205 Min.		96 Punkte			