



Zentrale Abiturprüfung 2022

Haupttermin

03.05.2022

Weiteres Leistungskursfach

Mathematik

Fachbereich Informatik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel CAS

Bearbeitungszeit

Teil A: max. 60 Minuten

Teil B: mind. 210 Minuten

Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler



Aufgabenstellung

Aufgabe 2 – Analysis (32 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation

Bei der Programmierung von Robotern werden Simulationen eingesetzt, so dass Bewegungsabläufe virtuell getestet und optimiert werden, bevor sie durch einen realen Roboter ausgeführt werden.

Betrachtet wird ein Roboterarm mit einem Drehgelenk. Durch dieses Drehgelenk kann der Roboterarm mit dem Greifer gegen den Uhrzeigersinn oder im Uhrzeigersinn bewegt werden.

In allen Funktionen gibt t die Zeit in Sekunden an.

Für verschiedene Simulationen der Bewegung des Roboterarmes werden Funktionen aus der Funktionenschar $f_{a,b}$ mit

$$f_{a,b}(t) = a \cdot t^3 \cdot e^{-1,5 \cdot b \cdot t^2} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, a \in [-300; 300] \text{ und } b \in [0,5; 2]$$

verwendet.

Dabei gibt $f_{a,b}(t)$ die Drehgeschwindigkeit in Grad pro Sekunde zum Zeitpunkt t an.

Positive Funktionswerte bedeuten eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn, negative Funktionswerte eine Drehung im Uhrzeigersinn. Mittels der Parameter a und b wird der Bewegungsablauf variiert.

2.1 Es ist $t > 0$.

Beschreiben Sie, welche Bedeutungen der Parameter a im Sachzusammenhang hat.

(3 Punkte)

2.2 Zeigen Sie, dass der Roboterarm zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Drehgeschwindigkeit von $0 \frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ hat und

begründen Sie, dass er sich dieser Drehgeschwindigkeit mit zunehmender Dauer wieder annähert.

(4 Punkte)



- 2.3** Zeigen Sie, dass die Graphen von $f_{a,b}$ punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung sind.

(3 Punkte)

- 2.4** Im Folgenden werden Simulationen für $a = 200$ betrachtet, d. h. die Funktionenschar f_b mit

$$f_b(t) = 200 \cdot t^3 \cdot e^{-1,5 \cdot b \cdot t^2} \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } b \in [0,5; 2]$$

gibt die Drehgeschwindigkeit in Grad pro Sekunde zum Zeitpunkt t an.

- 2.4.1** Bestimmen Sie rechnerisch in Abhängigkeit von Parameter b den Zeitpunkt $t > 0$ mit maximaler Drehgeschwindigkeit und geben Sie die maximale Drehgeschwindigkeit an.

(7 Punkte)

- 2.4.2** Die Funktionenschar f_b besitzt in Abhängigkeit von Parameter b Wendepunkte W_b mit

$$W_b \left(\frac{1}{\sqrt{3 \cdot b}} \mid \frac{200}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot e^{-0,5} \cdot \frac{1}{b \cdot \sqrt{b}} \right).$$

Leiten Sie die Funktionsgleichung der Ortskurve dieser Wendepunkte her.

Hinweis: Auf die Angabe des Definitionsbereichs kann verzichtet werden.

(4 Punkte)



- 2.5** Für $a = 200$ und $b = 1$ bewegt sich der Roboterarm mit der Drehgeschwindigkeit f mit

$$f(t) = 200 \cdot t^3 \cdot e^{-1,5 \cdot t^2} \quad \text{für } t \in [0; 3].$$

Der in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ überstrichene Drehwinkel in Grad lässt sich mit Hilfe des bestimmten Integrals

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

berechnen und gibt denjenigen Winkel an, um den sich der Roboterarm in dem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ dreht.

- 2.5.1** Berechnen Sie den im gesamten Zeitintervall überstrichenen Drehwinkel und

die durchschnittliche Drehgeschwindigkeit im gesamten Zeitintervall.

(6 Punkte)

- 2.5.2** Der Roboterarm startet bei $t = 0$.

Bestimmen Sie rechnerisch, wie lange der Roboterarm benötigt, um einen Drehwinkel von 40 Grad zu überstreichen.

(5 Punkte)

Aufgabe 3 – Stochastik (32 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation

Im Zeitalter des Online-Handels sind für den Erfolg eines Produktes Kundenmeinungen zunehmend entscheidend.

Die Sentiment¹-Analyse wertet Kundenkommentare automatisiert anhand ihrer Wortwahl aus. Dabei wird lediglich zwischen positivem und negativem Feedback unterschieden.

Die betrachtete Erkennungssoftware der Sentiment-Analyse nutzt Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

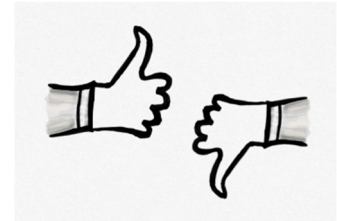


Abb. 3.1

Alle Anteile sollen als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

Ein Unternehmen analysiert mit diesem Verfahren Kommentare zu einem neuen Onlinespiel in sozialen Netzwerken.

3.1 Dazu werden insgesamt 600 Kundenkommentare ausgewertet.

432 Kommentare werden durch die Erkennungssoftware als positiv und die übrigen Kommentare als negativ eingestuft.

Der Ausdruck „omg“ tritt in einer positiv eingestuften Bewertung mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,5 % auf.

Insgesamt wird der Ausdruck „omg“ in 7 % aller Kommentare verwendet.

3.1.1 Stellen Sie diesen Sachverhalt mit Hilfe eines vollständig beschrifteten Baumdiagramms oder in einer vollständigen Vierfelder-Tafel dar.

(4 Punkte)

3.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kommentar mit dem Ausdruck „omg“ von der Erkennungssoftware als negativ eingestuft wird.

(3 Punkte)

3.1.3 In sechs Kommentaren kommen der Ausdruck „omg“ und das Wort „krass“ vor. 144 Kommentare enthalten das Wort „krass“, aber nicht den Ausdruck „omg“.

Prüfen Sie, ob das Vorkommen von „krass“ und „omg“ voneinander stochastisch unabhängig ist.

(3 Punkte)

¹ sentiment (franz.): Gefühl, Stimmung



3.2 Die Erkennungssoftware soll optimiert werden.

Bisher stützt sich die Erkennung der Kundenkommentare auf insgesamt 18 unterschiedliche Schlüsselwörter.

Für eine bestimmte Sentiment-Analyse sollen vier unterschiedliche Schlüsselwörter ausgewählt werden.

Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten.

(2 Punkte)

3.3 Die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Stichprobe ein Kommentar positiv eingestuft ist, beträgt 72 %.

Die Zufallsgröße

X : Anzahl der positiv eingestuften Kommentare

ist binomialverteilt.

3.3.1 Es werden zufällig 35 Kommentare ausgewählt und folgende Ereignisse betrachtet:

E_1 : Mehr als 25 Kommentare sind positiv eingestuft.

E_2 : Genau sieben Kommentare sind negativ eingestuft.

E_3 : Die Anzahl der positiv eingestuften Kommentare weicht vom Erwartungswert höchstens um den Wert 2 ab.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse.

(7 Punkte)

3.3.2 Es werden zufällig 35 Kommentare ausgewählt.

In Abb. 3.2 ist das zugehörige Histogramm der kumulierten Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X dargestellt.

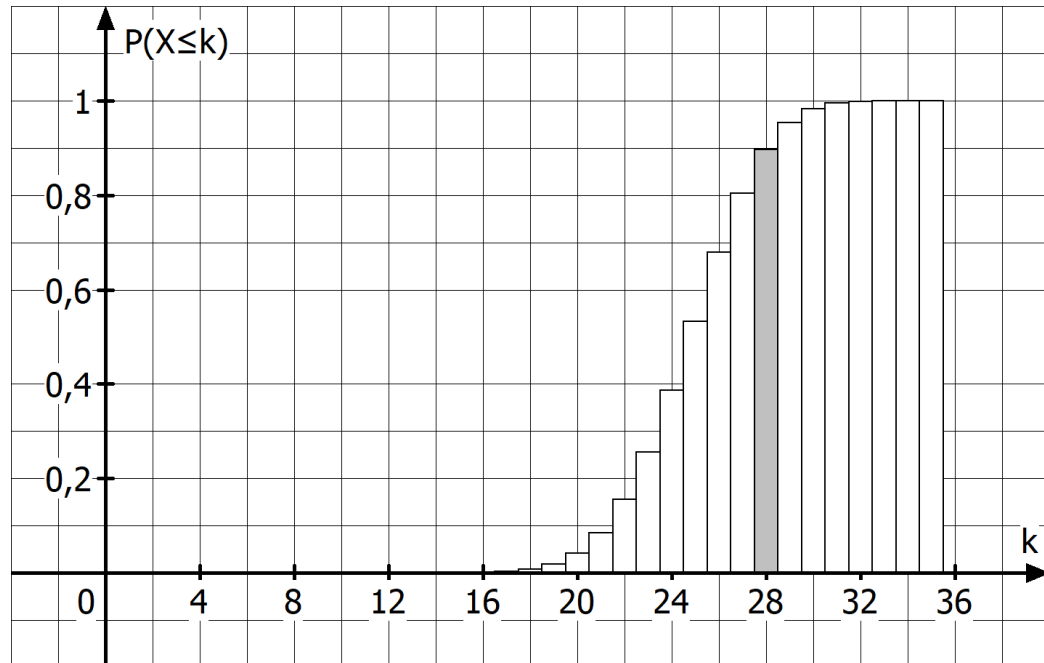


Abb. 3.2

Formulieren Sie eine zur grau markierten Fläche passende Aussage im Sachzusammenhang.

(2 Punkte)

3.3.3 Zur Optimierung des Onlinespiels werden negativ eingestufte Kommentare genauer analysiert.

Ermitteln Sie, wie viele Kommentare mindestens ausgewählt werden müssen, damit sich mit mehr als 95 %-iger Wahrscheinlichkeit darunter mindestens zwei negativ eingestufte Kommentare befinden.

(3 Punkte)



- 3.4** Algorithmen und künstliche Intelligenz wie die Sentiment-Analyse können komplexe Moderationsaufgaben bisher nicht zufriedenstellend übernehmen. Daher werden Kommentare in sozialen Netzwerken weiterhin von geschultem Personal geprüft.

Um den Personalbedarf einschätzen zu können, wird die Lesedauer von Kommentaren erfasst.

Die Zufallsgröße Y gibt diese Lesedauer in Sekunden an und wird mit $\mu = 20$ und $\sigma = 4$ als normalverteilt betrachtet.

- 3.4.1** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Lesedauer eines Kommentars mehr als 30 Sekunden beträgt.

(2 Punkte)

- 3.4.2** Bei der Erfassung interessieren diejenigen 25 % der Kommentare, deren Lesedauer um höchstens $r \cdot \sigma$ Sekunden vom Erwartungswert abweicht. Bestimmen Sie rechnerisch den Faktor r .

(3 Punkte)

- 3.4.3** Kommentare in englischer Sprache werden separat erfasst. Dabei erhöht sich der Erwartungswert für die Lesedauer auf $\mu = 22$ Sekunden. Die Wahrscheinlichkeit für eine Lesedauer von über 30 Sekunden beträgt nun 8 %.

Ermitteln Sie die zugehörige Standardabweichung.

(3 Punkte)

Aufgabe 4 – Lineare Algebra/Analytische Geometrie (32 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation

Mähroboter ersetzen immer häufiger den klassischen Rasenmäher.

Das Unternehmen Elektroschaf GmbH untersucht die Bewegungsabläufe verschiedener Mähroboter auf einem Testgelände (s. Abb. 4.2).

Hinweis:

Aus urheberrechtlichen Gründen kann das Bild nicht veröffentlicht werden; es kann jedoch unter der unten angegebenen URL eingesehen werden.

Abb. 4.1

Die Mähroboter werden vereinfacht als punktförmig betrachtet.

Bei der Visualisierung am Computer wird die viereckige Rasenfläche 1 mit den Eckpunkten P_1 , P_2 , P_3 und P_5 betrachtet. Sie befindet sich in der x_1 - x_2 -Ebene.

Die geneigte dreieckige Rasenfläche 2 mit den Eckpunkten P_3 , P_4 und P_5 befindet sich in der Ebene E_2 mit

$$E_2: -2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 20 \cdot x_3 = 90.$$

Es gilt $P_1(0 \mid 0 \mid 0)$, $P_2(30 \mid 0 \mid 0)$, $P_3(30 \mid 50 \mid 0)$, $P_4(0 \mid 50 \mid 3)$ und $P_5(0 \mid 30 \mid 0)$.

Alle Längenangaben sind in Meter.

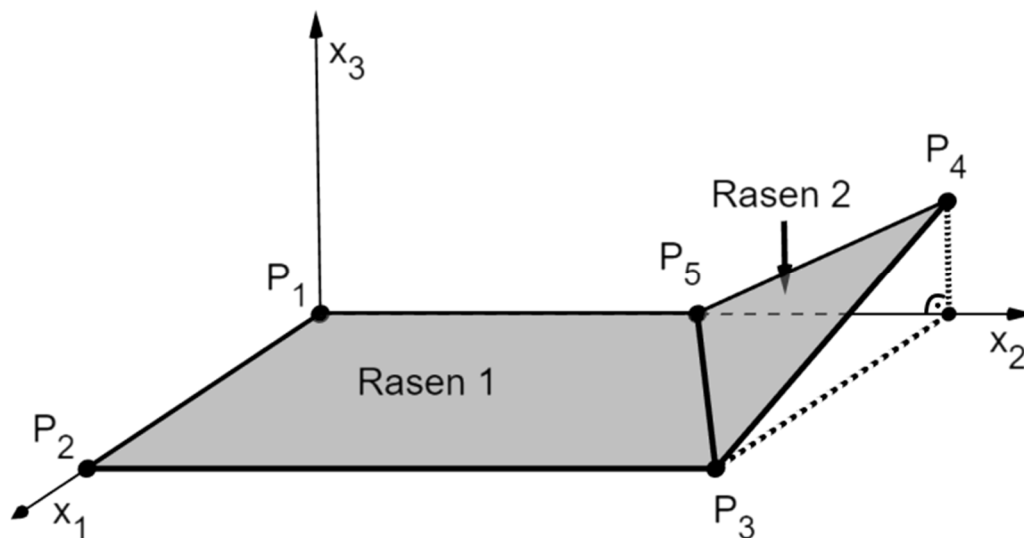


Abb. 4.2

Die Mähroboter sind so programmiert, dass ihre Fahrbahnen entlang von Geraden verlaufen.

4.1 Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E_2 in Parameterform auf.

(3 Punkte)

In Abb. 4.3 ist der Übergang zwischen den beiden Rasenflächen für eine Fahrbahn eines Mähroboters dargestellt.

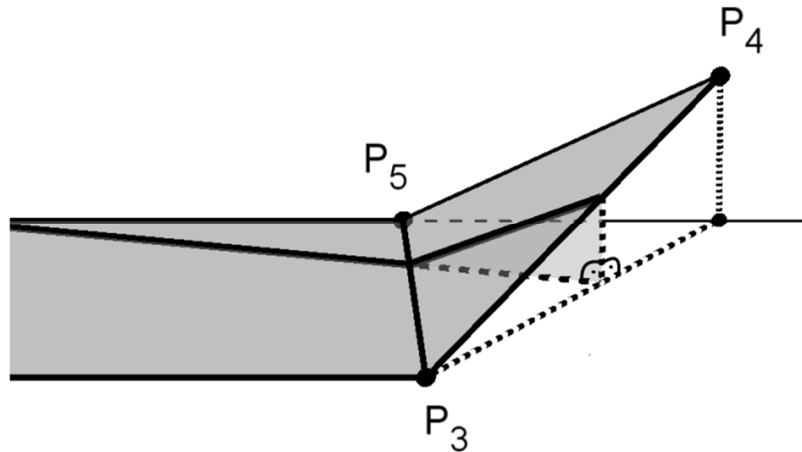


Abb. 4.3

Zunächst bewegt sich ein Mähroboter auf der Rasenfläche 1 entlang einer Geraden (durchgezogenes Geradenstück).

Erreicht er die Kante $\overline{P_3P_5}$, wird die virtuelle Fortsetzung der Fahrbahn (gestricheltes Geradenstück) senkrecht zur x_1-x_2 -Ebene in die Rasenfläche 2 projiziert. Die Fortsetzung der Fahrbahn befindet sich in der Rasenfläche 2 (durchgezogenes Geradenstück).

4.2 Der Punkt $M(15 \mid 40 \mid 0)$ liegt auf der Kante $\overline{P_3P_5}$.

Mähroboter Timmy fährt auf der Rasenfläche 1 geradlinig von Punkt $Q(20 \mid 10 \mid 0)$ zu Punkt M .

4.2.1 Bestätigen Sie, dass der Punkt M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{P_3P_5}$ ist.

(3 Punkte)

4.2.2 Die Gerade g verläuft durch die Punkte Q und M .

Der Punkt $A(5,5 \mid 47 \mid 2)$ liegt in der Rasenfläche 2 und wird in die x_1-x_2 -Ebene auf den Punkt A' projiziert.

Untersuchen Sie, ob A' auf der Geraden g liegt.

(4 Punkte)

4.2.3 Timmy setzt seine Fahrt auf der Rasenfläche 2 fort.

Ermitteln Sie rechnerisch eine Parameterdarstellung der Geraden, auf der die Fortsetzung dieser Fahrbahn liegt.

(6 Punkte)

4.3 Mähroboter Shaun fährt von P_2 nach P_4 (s. Abb. 4.4).

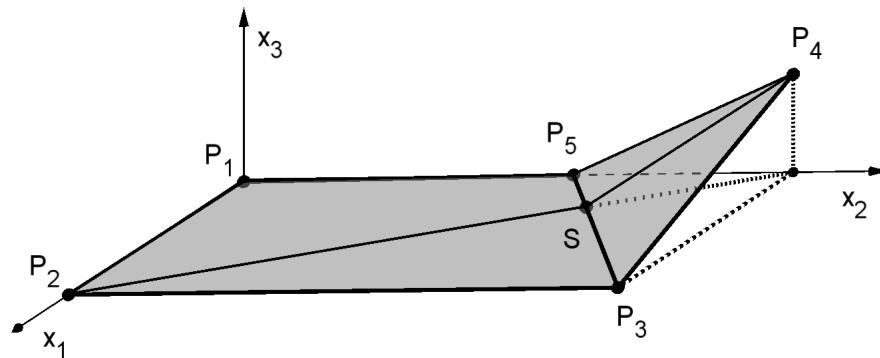


Abb. 4.4

Bestimmen Sie rechnerisch die Länge dieser Strecke.

(6 Punkte)

4.4 Die Mähroboter Shaun und Timmy bewegen sich nun auf einer Rasenfläche entlang der Fahrbahnen

Shaun: $g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,15 \end{pmatrix}$ mit $t \geq 0$

Timmy: $g_T: \vec{x} = \begin{pmatrix} 29 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0,1 \\ -0,1 \end{pmatrix}$ mit $t \geq 0$

Um Kollisionen zu vermeiden, erhält das Steuergerät der beiden Mähroboter ständig Daten über Position und Geschwindigkeit, aus denen eine Vorhersage über ihren Abstand ermittelt wird. Ein Sicherheitsabstand darf nicht unterschritten werden.

Hierbei gibt t die Zeit in Sekunden ab Beobachtungsbeginn an. Alle Abstände sind in Meter und alle Geschwindigkeiten in m/s angegeben.

4.4.1 Zeigen Sie, dass Shaun und Timmy den Sicherheitsabstand von 1,5 m unterschreiten.

(4 Punkte)

4.4.2 Wird der Sicherheitsabstand unterschritten, ist Timmy „vorfahrtsberechtigt“. Shaun hält 1,2 m vor dem Schnittpunkt der Fahrbahnen an.

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Fahrbahnen von Shaun und Timmy und

ermitteln Sie rechnerisch, in welchem Punkt Shaun anhält.

(6 Punkte)



Materialgrundlage

Aufgabe 3

Abb. 3.1 und 3.2 selbst erstellt

Aufgabe 4

Abb. 4.1

https://de.wikipedia.org/wiki/Rasenm%C3%A4hroboter#/media/Datei:Automower_HC1.jpg [03.09.2021]

Abb. 4.2, 4.3 und 4.4 selbst erstellt

Zugelassene Hilfsmittel

- Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten
- Computeralgebrasystem (CAS)

Arbeitszeit und Punktevergabe

	Arbeitszeit		Punktevergabe			
Teil A	max. 60 Min.	insgesamt 270 Min.	24 Punkte	Inhaltliche Leistung	Darstellungs- leistung	Gesamt- punktzahl
Teil B	mind. 210 Min.		96 Punkte	Teil A und B 120 Punkte	Teil A und B 5 Punkte	Teil A und B 125 Punkte