abitur.nrw
BERUFSKOLLEG
Berufliches Gymnasium

Zentrale Abiturprüfung 2018
Haupttermin
17.04.2018

Weiteres Leistungskursfach
Mathematik

Fachbereich Informatik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel CAS

Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler

Aufgabenstellung

Aufgabe 2 – Analysis (32 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation

Bei der Entwicklung neuer Fahrzeuge ersetzen Computersimulationen immer häufiger die Fahrten auf Teststrecken.

Voraussetzung dafür ist eine mathematische Modellierung durch einen funktionalen Zusammenhang (Zeit → Geschwindigkeit).

Bei allen Funktionen wird die Zeit t in Sekunden und die Geschwindigkeit in m/s angegeben.

2.1 Für ein neues Elektroauto soll eine Testfahrt simuliert werden. Dabei geht man davon aus, dass sich das Fahrzeug nur in eine Richtung bewegt und die Testfahrt $40\ s$ dauert.

Zudem müssen folgende Vorgaben berücksichtigt werden:

(1) Das Fahrzeug fährt zum Zeitpunkt $t = 5$ mit einer Geschwindigkeit von $35\ m/s$.

(2) Es erreicht zum Zeitpunkt $t = 10$ die Höchstgeschwindigkeit von $45\ m/s$.

(3) Ist die Höchstgeschwindigkeit erreicht, verringert sich die Geschwindigkeit innerhalb der nächsten 5 Sekunden um $7{,}5\ m/s$.

2.1.1 Eine erste Idee der Entwickler ist die Beschreibung der Testfahrt mit Hilfe einer ganzrationalen Funktion dritten Grades.

Die Funktion g mit

$$g(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } t \in [0;\ 40]$$

beschreibt dabei die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit.

Leiten Sie die Funktionsgleichung von g her.

(6 Punkte)

2.1.2 In Abb. 2.2 ist der Graph der Funktion g gegeben.

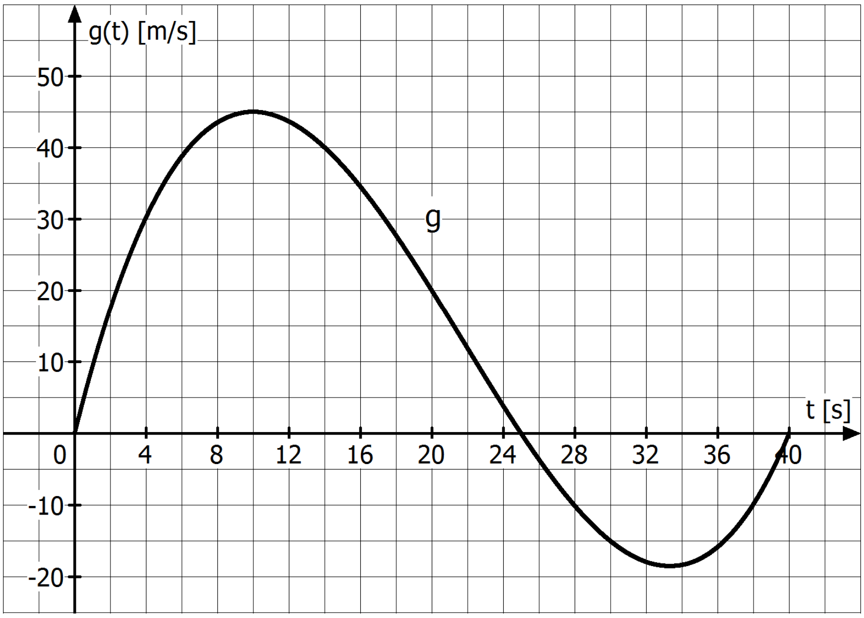

Abb. 2.2

Die Funktion g eignet sich nicht zur Modellierung der oben beschriebenen Testfahrt.

Bestätigen Sie diese Behauptung anhand des Graphen.

(2 Punkte)

2.2 Statt der Funktion g wird nun die Geschwindigkeitsfunktion v mit

$$v(t) = 3{,}3 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} \quad \text{mit} \quad t \in [0;\ 40]$$

für die Simulation einer Testfahrt verwendet.

2.2.1 Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs für die simulierte Testfahrt von $40\ s$ Dauer.

(4 Punkte)

2.2.2 Nach den Simulationen erfolgt eine reale Testfahrt mit dem Prototyp. Das Fahrzeug verhält sich in der Realität gemäß der Simulation mit der Funktion v.

Aus Sicherheitsgründen müssen die Beschleunigung des Fahrzeugs bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 10$ und das anschließende Abbremsen auf gerader Strecke erfolgen. Erst wenn die Geschwindigkeit auf $22\ m/s$ gesunken ist, darf das Testfahrzeug in eine Kurve gelenkt werden.

Eine Teststrecke besitzt einen geraden Streckenabschnitt von $600\ m$ Länge, bevor es in eine Kurve geht.

Prüfen Sie, ob die Länge des geraden Streckenabschnitts ausreicht.

(5 Punkte)

2.3 Zur Untersuchung einer Elektroauto-Modellreihe werden in einer Simulation die Geschwindigkeiten durch die Funktionenschar v_a mit

$$v_a(t) = 3{,}3 \cdot a \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}2 \cdot a \cdot t} \quad \text{mit } t \in [0;\ 40] \text{ und } a \in [0{,}7;\ 1]$$

beschrieben.

Der Parameter a berücksichtigt dabei die verschiedenen Fahrzeugtypen (z. B. unterschiedliche Motoren).

2.3.1 Bestimmen Sie rechnerisch in Abhängigkeit vom Parameter a die maximale Geschwindigkeit und den Zeitpunkt, zu dem dieses absolute Maximum erreicht wird.

(7 Punkte)

Für die absoluten Hochpunkte H_a der Funktionenschar v_a gilt: $\mathrm{H}_a\left(\frac{10}{a} \,\middle|\, \frac{330}{e^2 \cdot \mathrm{a}}\right)$

2.3.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte und ihren Definitionsbereich.

(4 Punkte)

2.3.3 Die Simulation einer Testfahrt des Fahrzeugtyps mit $a = 0{,}8$ erfolgt bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit gemäß der Funktion $v_{0,8}$.

Sobald die Höchstgeschwindigkeit erreicht ist, beginnt direkt der Bremsvorgang. Dabei nimmt die Geschwindigkeit linear in jeder Sekunde um $7\ m/s$ ab.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Fahrzeug zum Stillstand kommt, und berechnen Sie die Länge des Bremsweges.

(4 Punkte)

Aufgabe 3 – Stochastik (32 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation

Die Partnersuche findet heutzutage häufig im Internet statt.

3.1 In Deutschland nutzen 7,2 Millionen Singles das Internet zur Partnersuche.

Von diesen verwenden 900 000 Singles Partnervermittlungsseiten. Auf diesen Seiten werden auf Grundlage eines Persönlichkeitstests passende Partner vorgeschlagen.

Die übrigen Singles nutzen keine Partnervermittlungsseiten, sondern verwenden andere Portale im Internet zur Partnersuche.

Singles, die Partnervermittlungsseiten nutzen, sind zu 46 % männlich. Bei den anderen Portalen beträgt der Anteil der Männer 57 %.

Diese und alle folgenden relativen Häufigkeiten sollen als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

3.1.1 Folgende Merkmale werden definiert:

1. Merkmal: Single nutzt eine Partnervermittlungsseite / Single nutzt keine Partnervermittlungsseite

2. Merkmal: Single ist ein Mann / Single ist eine Frau

Stellen Sie die Daten mit Hilfe eines vollständig beschrifteten Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel dar.

(5 Punkte)

3.1.2 Eine Frau ist im Internet auf Partnersuche.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie eine Partnervermittlungsseite nutzt.

(4 Punkte)

3.2 Die mittlere Verweildauer der Singles zur Partnersuche im Internet beträgt 35,8 Stunden im Monat mit einer Standardabweichung von 15,1 Stunden. Diese Zufallsgröße wird als normalverteilt angesehen.

3.2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Single mehr als 40 Stunden im Monat im Internet auf Partnersuche ist.

(4 Punkte)

3.2.2 Es werden 130 Singles, die im Internet auf Partnersuche sind, zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße

Z: „Anzahl der Singles, die monatlich weniger als 30 Stunden im Internet nach einem Partner suchen“

ist binomialverteilt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es unter diesen 130 Singles mindestens 50 Singles gibt, die monatlich weniger als 30 Stunden im Internet nach einem Partner suchen.

(6 Punkte)

3.3 Ein Onlineportal bietet die Möglichkeit, sich zu einem Speed-Dating anzumelden. An diesem Dating nehmen jeweils 12 Frauen und 12 Männer teil.

Der Veranstalter hat 12 Tische in einer Reihe aufgestellt. An diesen Tischen sitzen alle Männer nebeneinander in einer Reihe und behalten ihre Position während der Veranstaltung bei. Ihnen gegenüber soll dann jeweils eine Frau Platz nehmen.

3.3.1 Berechnen Sie, wie viele Möglichkeiten es für die Frauen gibt, an den 12 Tischen Platz zu nehmen.

(3 Punkte)

3.3.2 Vier Frauen sind 20 Jahre, drei Frauen sind 24 Jahre und fünf Frauen sind 30 Jahre alt.

Leiten Sie die Anzahl möglicher Sitzordnungen für die Frauen her, wenn jeweils alle gleichaltrigen Frauen nebeneinander sitzen sollen.

(4 Punkte)

3.4 Zufällig werden 20 Personen ausgewählt, die sich nicht kennen und einen Partner haben. Diese werden unabhängig voneinander befragt, ob sie ihren Partner im Internet kennengelernt haben.

Die Zufallsgröße

Y: „Anzahl der Personen, die angeben, dass sie ihren Partner im Internet kennengelernt haben“

kann als binomialverteilt mit $p = \frac{1}{3}$ angesehen werden.

3.4.1 Folgendes Ereignis wird betrachtet:

„Nur die ersten beiden und die letzten beiden der Befragten geben an, dass sie ihren Partner im Internet kennengelernt haben.“

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis.

(3 Punkte)

3.4.2 Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis E, das mit der folgenden Wahrscheinlichkeit auftritt:

$$P(E) = 1 - \sum_{k=0}^{6} \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{20-k}$$

(3 Punkte)

Aufgabe 4 – Lineare Algebra/Analytische Geometrie (32 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation

Seit wenigen Jahren kann durch das optische System COELUX natürliches Licht in fensterlosen Räumen simuliert werden.

Die künstlichen Lichtquellen sehen aus wie Fenster, durch die Tageslicht fällt. Architekturbüros werben für COELUX mit virtuellen Ausstellungsräumen.

Abb. 4.1

In einem solchen Ausstellungsraum, der mit einer Leiter und einem Würfel möbliert ist, lassen sich Schattenwurf und Bewegung eines Objektes simulieren.

Der Boden dieses Ausstellungsraumes liegt in der x_1-x_2-Ebene. Dabei entspricht eine Längeneinheit 1 cm.

An der Wand lehnt eine Leiter, die aus zwei Holmen und fünf Sprossen besteht (s. Abb. 4.2).

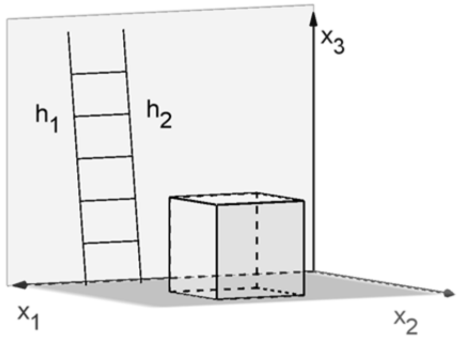

Abb. 4.2

Die beiden Holme und die fünf Sprossen werden als Strecken betrachtet und mit Hilfe von Geradengleichungen beschrieben.

Dabei gilt für die beiden Holme h_1 und h_2:

$$h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 62{,}7 \end{pmatrix} \text{ und } h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 155 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 62{,}7 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \le t \le 3$$

Für die fünf Sprossen s_i mit $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ gilt:

$$s_i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 27 - 4{,}5 \cdot i \\ 31{,}35 \cdot i \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \le r \le 3$$

4.1 Zunächst müssen einige Angaben über die Leiter ermittelt werden.

4.1.1 Die Punkte A_1, A_2 und B liegen auf Holm 2, dabei ist $A_1(155 \mid 20{,}7 \mid 43{,}89)$ und $B(155 \mid 15{,}3 \mid 81{,}51)$ (s. Abb. 4.3).

Bestimmen Sie die Koordinaten von Punkt A_2 so, dass die Punkte A_1 und A_2 jeweils die gleiche Entfernung von B haben.

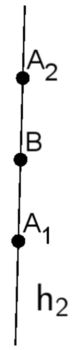

Abb. 4.3

(4 Punkte)

4.1.2 Die Sprossen sind in zwei Punkten rechts und links in den beiden Holmen eingepasst.

Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte in Abhängigkeit von dem Parameter i an.

(3 Punkte)

Das künstlich erzeugte Licht fällt „durch" ein viereckiges COELUX-Fenster in der Dachschräge in den virtuellen Ausstellungsraum.

4.2 Dieses COELUX-Fenster $KLMN$ hat die Form eines Parallelogramms mit den Eckpunkten $K(0 \mid 123{,}2 \mid 184)$, $L(163{,}75 \mid 136{,}2 \mid 212{,}75)$ und $M(200 \mid 324 \mid 230)$ (s. Abb. 4.4).

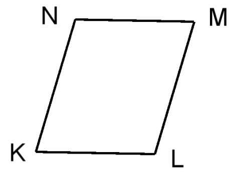

Abb. 4.4

4.2.1 Der Punkt mit den Koordinaten $(40 \mid 310 \mid 200)$ ist nicht der vierte Eckpunkt des Fensters $KLMN$.

Zeigen Sie, dass dieser Punkt und die Punkte K, L und M nicht in einer Ebene liegen.

(6 Punkte)

4.2.2 Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes N (s. Abb. 4.4).

(4 Punkte)

Der auf dem Boden stehende Würfel hat die Eckpunkte
$Q_1(100 \mid 100 \mid 0)$, $Q_3(171 \mid 171 \mid 0)$, $Q_4(171 \mid 100 \mid 0)$ und $R_4(171 \mid 100 \mid 71)$.

Durch das parallel einfallende Licht in Richtung des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 125 \\ -260 \\ -575 \end{pmatrix}$ wirft der Würfel einen Schatten auf den Boden des virtuellen Ausstellungsraumes. Für die Schattenpunkte des Würfels gilt gerundet:
$R_1'(115{,}43 \mid 67{,}9 \mid 0)$, $R_3'(186{,}43 \mid 138{,}9 \mid 0)$ und $R_4'(186{,}43 \mid 67{,}9 \mid 0)$ (s. Abb. 4.5).

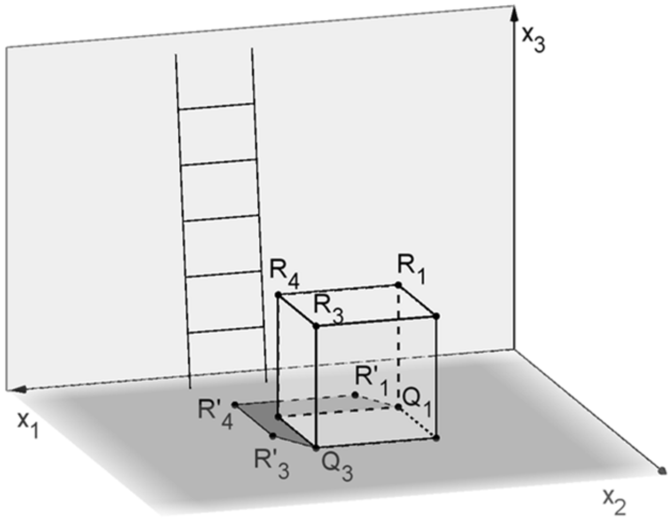

Abb. 4.5

4.3 Bestätigen Sie, dass R_4' und R_1' die Schattenpunkte von R_4 und R_1 sind.

(7 Punkte)

4.4 In einer Videoanimation für eine COELUX-Umgebung bewegt sich ein punktförmiges Objekt durch den Ausstellungsraum.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet es sich in dem Punkt $\mathrm{P}(155 \mid 27 \mid 0)$ unten am rechten Holm der Leiter. Es bewegt sich auf einer Geraden hinter dem Würfel durch den Schatten des Würfels mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 40 \\ 110 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Das Objekt tritt durch die Ebene $R_4'R_1'R_1R_4$ in den Schatten des Würfels ein und verlässt den Schatten durch die Ebene $R_3'R_3R_4R_4'$ (s. Abb. 4.5).

Die Zeit t wird in Sekunden, der Weg in cm und die Geschwindigkeit in cm/s angegeben.

Bestimmen Sie rechnerisch, wie lange sich das Objekt durch den Schatten des Würfels bewegt.

(8 Punkte)

Materialgrundlage

Aufgabe 4

Abb. 4.1:
https://www.wired.com/2015/02/nanotech-skylight-looks-just-like-sun-shining-overhead/,
zuletzt geprüft: 09.02.2018

Zugelassene Hilfsmittel

- Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten
- Computeralgebrasystem (CAS)

Arbeitszeit und Punktevergabe

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Arbeitszeit</td><td colspan="4">Punktevergabe</td></tr>
<tr><td>Teil A</td><td>max.
50 Min.</td><td rowspan="2">insgesamt
255 Min.</td><td>24 Punkte</td><td rowspan="2">Inhaltliche Leistung
Teil A und B
120 Punkte</td><td rowspan="2">Darstellungs-leistung
Teil A und B
5 Punkte</td><td rowspan="2">Gesamt-punktzahl
Teil A und B
125 Punkte</td></tr>
<tr><td>Teil B</td><td>mind.
205 Min.</td><td>96 Punkte</td></tr>
</table>