Analysis

Marvin Baeumer **2023-12-06 10:23**

Ableitungsregeln

Produktregel

> Die Produktregel verwendet man dann um eine Funktion abzuleiten die das Produkt aus zweier anderen Funktionen bildet.

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\text{Produktregel} &= u' \cdot v + u \cdot v' \\
\\
f(x) &= (x^2 + 3x) \cdot (2x - 1) \\
\\
u &= (x^2 + 3x) \\
u' &= (2x + 3) \\
v &= (2x - 1) \\
v' &= 2 \\
\\
\Leftrightarrow \text{Produktregel} \\
\\
f'(x) &= (2x + 3) \cdot (2x - 1) + (x^2 + 3x) \cdot 2
\end{aligned}
$$

Kettenregel

> Die Kettenregel verwendet man um die Ableitung einer Zusammengesetzen Funktion zu berechnen. Dabei steht g fuer die aeussere Funktion und h fuer die innere Funktion.

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\text{Kettenregel} &= g(h(x)) \\
\text{Kettenregel}' &= g'(h(x)) \cdot h'(x) \\
\\
f(x) &= (3x^2 + 2)^5 \\
\\
g &= h^5 \\
g' &= 5h^4 \\
h &= (3x^2 + 2) \\
h' &= 6x \\
\\
\Leftrightarrow \text{Kettenregel} \\
\\
f'(x) &= 5(3x^2 + 2)^4 \cdot 6x
\end{aligned}
$$

Ableitungen bilden

> Eine Ableitung beschreibt die Steigung einer Funktion, also ist die Ableitung die Steigungsfunktion der Stammfunktion. Die zweite Ableitung beschreibt die änderungsrate der Stammfunktion. Eine Ableitung stellt man mit $f'(x)$ da vorausgesetzt unsere ursprüngliche Funktion war $f(x)$. Die zweite Ableitung stellt man dann mit $f''(x)$ da.

Berechnung - Formel

> Die Berechnung erfolgt mit Wert vor dem $x \cdot Exponent$, dann zieht man -1 vom Exponenten ab. Konstanten fallen somit weg.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \\ f'(x) &= 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c \\ f''(x) &= 6a \cdot x + 2b \end{aligned}$$

Ableitungen von e Funktionen

> Eine Ableitung von e^x ist immer e^x selbst. Meistens steht die Ableitung von e Funktionen in Verbindung mit der Produkt- und Kettenregel.

Beispiel

$$f_a(x) = x \cdot e^{(-a \cdot x)}$$

> Um die Funktion $f_a(t)$ abzuleiten benoetigen wir die Produkt regel, weil wir $x \cdot e$ haben.

$$\text{Produktregel}$$

$$\begin{aligned} u' &= 1 \\ u &= x \\ v' &= ? \\ v &= e^{(-a \cdot x)} \end{aligned}$$

> Um nun die Ableitung von v zu bekommen benötigen wir die Kettenregel, weil wir eine verkettet Funktion $e^{(-a \cdot x)}$

$$\text{Kettenregel}$$

$$\begin{aligned} I_a(x) &= e^{(-a \cdot x)} \\ \\ g &= e^x \\ g' &= e^x \\ h &= (-a \cdot x) \\ h' &= -a \\ \\ I_a'(x) &= e^{(-a \cdot x)} \cdot -a \end{aligned}$$

> Nun kennen wir also die Ableitung von der e Funktion somit haben wir das fehlende $v' = e^{(-a \cdot x)}$ das uns in der Produktregel fehlte. Somit können wir jetzt alles in die Produktregel einsetzen.

$$\Leftrightarrow \text{Produktregel}$$

$$u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$f_a'(x) = 1 \cdot e^{(-a \cdot x)} + x \cdot (-a) \cdot e^{(-a \cdot x)}$$

$$\text{Zusammenfassen}$$

$$f_a'(x) = (1 - a \cdot x) \cdot e^{-a \cdot x}$$

Extremstellen

> Bei der Extremstellen Berechnung schaut man sich Hochpunkte, Tiefpunkte und Wendepunkte an. Bei Hochpunkten und Tiefpunkten betrifft die Steigung 0 das heißt also man nimmt die erste Ableitung und setzt diese $= 0$ sprich $f'(x) = 0$ somit bekommt man dann den $X - Wert$. Um nun zu prüfen ob sich um einen Hochpunkt oder Tiefpunkt handelt muss man mit der zweiten Ableitung prüfen. Wenn das Ergebnis des eingesetzten $X - Wertes$ negativ ist handelt es sich um einen Hochpunkt, ist dieser positiv handelt es sich um einen Tiefpunkt. Bei Einem Wendepunkt setzt man die zweite Ableitung $= 0$ und prüft mit der dritten Ableitung.

Hochpunkt

1. $f'(x)$ aufstellen
2. $f''(x)$ aufstellen
3. Erste Ableitung $= 0$ stellen | $f'(x) = 0$
4. Ergebnis prüfen $f''(\dots) < 0$
5. In $f(x)$ einsetzen für den $Y - Wert$

```
f[x_]:= a*x^3+b*x^2+c*x+d

f'[x]
f''[x]
%liefert die beiden Ableitungen%

Solve[f'[x] == 0]
x -> ...
f''(...)
%Ergebnis muss < 0 sein%
f[...]
```

Tiefpunkt

1. $f'(x)$ aufstellen
2. $f''(x)$ aufstellen
3. Erste Ableitung $= 0$ stellen | $f'(x) = 0$
4. Ergebnis prüfen $f''(\dots) > 0$
5. In $f(x)$ einsetzen für den $Y - Wert$

```
f[x_]:= a*x^3+b*x^2+c*x+d

f'[x]
f''[x]
%liefert die beiden Ableitungen%

Solve[f'[x] == 0]
x -> ...
f''[...]
%Ergebnis muss > 0 sein%
f[...]
```

Wendepunkt

1. $f''(x)$ aufstellen
2. $f'''(x)$ aufstellen
3. Zweite Ableitung $= 0$ | $f''(x) = 0$
4. Ergebnis prüfen $f'''(...) < 0$
5. In $f(x)$ einsetzen für den $Y - Wert$

```
f[x_]:= a*x^3+b*x^2+c*x+d

f''[x]
f'''[x]
%liefert die beiden Ableitungen%

Solve[f''[x] == 0]
x -> ...
f'''[...]
%Ergebnis muss < 0 sein%
f[...]
```

Funktion aus Bedingungen aufstellen

Integrale