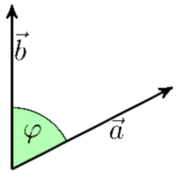
M 4 Erarbeitung: Infotext Skalarprodukt

Das Skalarprodukt, auch als inneres Produkt oder Punktprodukt bekannt, ist eine grundlegende mathematische Operation in der Vektorrechnung. Es ermöglicht uns, die Beziehung zwischen Vektoren zu analysieren und wichtige geometrische Konzepte zu verstehen.



https://raabe.click/skalarprodukt

Es gibt zwei unterschiedliche Wege, um das Skalarprodukt zu berechnen. Für die erste Variante wird der Winkel φ zwischen den beiden Vektoren benötigt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

Es ist auch möglich, das Skalarprodukt nur mithilfe der Komponenten der beiden Vektoren zu berechnen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Mit Hilfe des Kosinussatzes kann man beweisen, dass beide Formeln äquivalent sind.
Das Skalarprodukt wird insbesondere verwendet, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Häufig möchte man dabei herausfinden, ob zwei Vektoren orthogonal zueinanderstehen. Wenn zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander sind, dann ist $\varphi = 90°$ und damit $\cos(\varphi) = 0$, also $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = 0$. Ist das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, dann sind beide Vektoren senkrecht zueinander. Mithilfe der Formel $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ kann man also schnell prüfen, ob das Skalarprodukt gleich 0 ist.

Auf ähnliche Art und Weise kann man auch den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen, in dem man die Formel für das Skalarprodukt nach φ umstellt:

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Beispielaufgabe – Prüfen auf Orthogonalität

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es soll geprüft werden, ob $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal (senkrecht) zueinander sind. Dazu wird das Skalarprodukt der beiden Vektoren berechnet:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 = 4 - 2 - 2 = 0.$$

Da das Skalarprodukt gleich 0 ist, sind beide Vektoren senkrecht zueinander.

Beispielaufgabe - Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen

https://raabe.click/winkel-zwischen-vektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$$

Es soll der Winkel φ zwischen beiden Vektoren berechnet werden.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot4+2\cdot0+(-2)\cdot0=4+0+0=4$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3,|\vec{b}|=\sqrt{4^2+0^2+0^2}=4$$

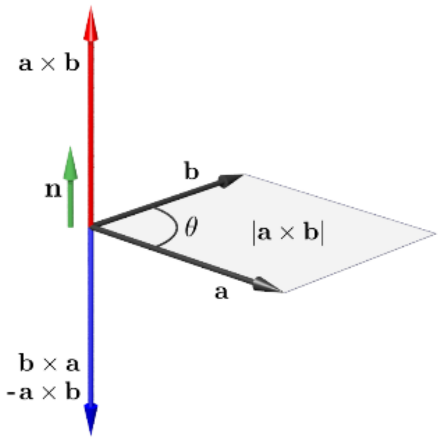
$$\varphi=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{4}{3\cdot4}\right)\approx70{,}53°$$

Der Winkel zwischen beiden Vektoren beträgt ungefähr 70,53°.

M 5 Erarbeitung: Infotext Vektorprodukt

https://raabe.click/vektorprodukt

Das Vektorprodukt, auch als Kreuzprodukt bekannt, ist eine wichtige mathematische Operation in der Vektorrechnung. Es ermöglicht uns, einen neuen Vektor zu erzeugen, der senkrecht zu den beiden gegebenen Vektoren steht. Das Vektorprodukt ist besonders nützlich in der Geometrie und in physikalischen Anwendungen. Besonders häufig wird das Vektorprodukt benötigt, um einen senkrechten Vektor zu einer Ebene zu konstruieren, oder um Flächeninhalte zu berechnen.



Das Kreuzprodukt wird folgendermaßen berechnet:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\\a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3\\a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\end{pmatrix}$$

Mithilfe des Skalarproduktes kann man zeigen, dass dieser Vektor immer senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. Im Gegensatz zum Skalarprodukt ist das Ergebnis des Kreuzproduktes ein Vektor!

https://raabe.click/Vektorprodukt-Flächeninhalt

Beispiel – Berechnung Vektorprodukt und Flächeninhalt

Berechne das Kreuzprodukt der Vektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-7\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}3\cdot5-(-2)\cdot(-7)\\(-2)\cdot3-1\cdot5\\1\cdot(-7)-3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-11\\-16\end{pmatrix}$$

Die Länge des Vektors $\vec{a}\times\vec{b}$ entspricht dabei dem Flächeninhalt des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+(-11)^2+(-16)^2}\approx19{,}44$$

Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms würde in diesem Fall 19,44 Flächeneinheiten betragen.

https://raabe.click/schnittwinkel

Schnittwinkel Gerade und Ebene berechnen

Um den Schnittwinkel zwischen einer Geraden $g:\vec{x}=\vec{u}+t\cdot\vec{v}$ und einer Ebenen $E:\vec{x}=\vec{u_E}+r\cdot\vec{v_E}+s\cdot\vec{w_E}$ zu bestimmen, berechnet man mithilfe des Vektorproduktes einen Normalenvektor $\vec{n}=\vec{v_E}\times\vec{w_E}$ zu E.

Anschließend berechnet man dann mithilfe des Skalarproduktes den Winkel γ zwischen Richtungsvektor der Geraden $\vec{v}$ und Normalenvektor $\vec{n}$. Der Schnittwinkel α ist dann $\alpha=90°-\gamma$.