Estudio de Estrellas de Planck

Alejandro Hernández A.

Asesor: Pedro Bargueño.

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

Mayo 24, 2016

Contenidos

Introducción

- Soluciones estáticas y esféricamente simétricas de las ecuaciones de campo de Einstein (Agujeros negros).
- Problemas de las singularidades en el espaciotiempo $\leftrightarrow$ Fallas de la relatividad general.
- Agujeros negros regulares.

Motivación

- Obtener un conocimiento más profundo de la relatividad general.
- Conocer algunas limitaciones y fallas de dicha teoría.
- Entender la regularización de agujeros negros y los conceptos físicos detrás de este proceso.
- Conocer un poco acerca de teoría cuántica de campos efectiva en relatividad general.

Condiciones de energía

Las condiciones de energía son [1, 2]

- **NEC:** $\rho \geq 0$
- **WEC:** $\rho \geq 0$, $\rho + p_i \geq 0$ para $i \in \{1, 2, 3\}$.
- **DEC:** $\rho \geq 0$, $\rho + p_i \geq 0$, $\rho \geq |p_i|$ para $i \in \{1, 2, 3\}$.
- **SEC:** $\rho + p_i \geq 0$ y $\rho + 3p_i \geq 0$.

Para el estudio de agujeros negros regulares, la única condición de energía que nos interesa es la WEC.

Procedimiento general

Forma general del elemento de línea esféricamente simétrico y estático:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{2.1}$$

$$f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \tag{2.2}$$

En términos de $m(r)$ la WEC se expresa como [3]

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{dm(r)}{dr} &\geq 0, \\ \frac{2}{r}\frac{dm(r)}{dr} &\geq \frac{d^2 m(r)}{dr^2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Métrica de Bardeen

La métrica de Bardeen está dada por [4]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2mr^2}{(r^2+g^2)^{3/2}}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2mr^2}{(r^2+g^2)^{3/2}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.1)$$

$$f_{bardeen}(r) \underset{r\to 0}{\sim} 1 - \frac{2mr^2}{g^3} + \mathcal{O}(r^4), \quad (3.2)$$

$$f_{bardeen}(r) \underset{r\to \infty}{\sim} 1 - \frac{2m}{r} + \frac{3mg^2}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^5}\right). \quad (3.3)$$

Métrica de Bardeen

Los invariantes de curvatura de esta métrica están dados por

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{6g^2 m\left(4g^2 - r^2\right)}{\left(g^2 + r^2\right)^{7/2}}, \\
R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} &= \frac{18g^4 m^2\left(8g^4 - 4g^2 r^2 + 13r^4\right)}{\left(g^2 + r^2\right)^{7}}, \\
R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho} &= \frac{12m^2\left(8g^8 - 4g^6 r^2 + 47g^4 r^4 - 12g^2 r^6 + 4r^8\right)}{\left(g^2 + r^2\right)^{7}}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Métrica de Bardeen

La condición de energía débil se satisface automáticamente puesto que al considerar la función de masa

$$m(r) = \frac{mr^3}{(r^2+g^2)^{3/2}}, \tag{3.5}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{dm(r)}{dr} &= \frac{6mg^2}{(g^2+r^2)^{5/2}}, \\ \frac{2}{r}\frac{dm(r)}{dr} &= \frac{12mg^2r}{(g^2+r^2)^{5/2}}, \\ \frac{d^2m(r)}{dr^2} &= \frac{6m\left(2g^4r-3g^2r^3\right)}{(g^2+r^2)^{7/2}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Métrica de Bardeen

Para la interpretación física de la métrica de Bardeen, se requiere acoplar RG con electrodinámica no-lineal [5]

$$\mathcal{S} = \int dv \left(\frac{1}{16\pi} R - \frac{1}{4\pi} \mathcal{L}(F) \right), \tag{3.7}$$

$$\mathcal{L}(F) = \frac{3}{2sg^2} \left(\frac{\sqrt{2g^2 F}}{1 + \sqrt{2g^2 F}} \right)^{5/2}, \quad s = \frac{|g|}{2m} \tag{3.8}$$

Con el ansatz $F_{\mu\nu} = 2\delta^{\theta}{}_{[\mu}\delta^{\varphi}{}_{\nu]}B(r,\theta)$,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^\infty} \mathbf{F} = \frac{g}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta d\varphi = g$$

$\rightsquigarrow$ g corresponde a la carga de monopolo autogravitante.

Métrica de Bardeen

Para la interpretación del carácter regular de la métrica de Bardeen

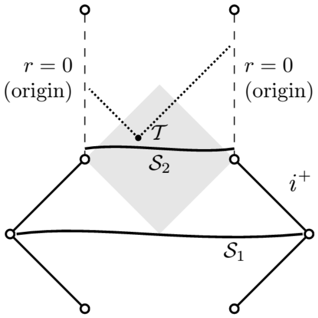

Figura : Estructura global de una porción del agujero negro de Bardeen. Imagen tomada de [6].

Métrica de Bardeen

Teorema (Borde, 1996)

Suponga que una espaciotiempo $\mathcal{M}$ satisface que

- I *contiene una superficie eventualmente futuramente atrapada $\mathcal{T}$,*
- II *obedece la condición de convergencia nula,*
- III *el conjunto de geodésicas nulas futuras es completo,*
- IV *su futuro causal es simple, con $E^{+}(X) \neq \emptyset$, $\forall X \subset \mathcal{M}$ acronal.*

Entonces hay una sección espacial compacta en el futuro de $\mathcal{T}$.

Métrica de Bardeen

Teorema (Penrose, 1965)

Si un espaciotiempo satisface que

- I *contiene una hipersuperficie de Cauchy Σ no-compacta y conexa,*
- II *contiene una superficie cerrada futuramente atrapada (future-trapped surface),*
- III *cumple con la condición de convergencia nula $R_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} \geq 0$ para cualquier vector nulo u^{μ} (o equivalentemente, cumple la NEC),*

entonces dicho espacio tiempo posee geodésicas incompletas de tipo nulo futuro.

Un **horizonte de Cauchy** básicamente es una superficie que separa dos regiones del espacio: una que contiene geodésicas cerradas tipo espacio y otra que contiene curvas cerradas tipo tiempo.

Métrica de Vaidya

En la métrica de Schwarzschild, considerar

$$dt = du + \frac{dr}{(1 - 2m/r)}, \tag{3.9}$$

y al generalizar $m = m(u)$, se obtiene

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(u)}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2. \tag{3.10}$$

Diferencia crucial con Schwarzschild: $r = 2m(u)$ deja de ser un horizonte de eventos y se convierte en un horizonte aparente.

Definición (Horizonte aparente)

Un horizonte aparente es una hipersuperficie que separa las regiones que poseen superficies atrapadas de las regiones que no contienen este tipo de superficies.

Métrica de Hayward estática

La métrica de Hayward está dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2ml^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2ml^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.1)$$

$$f_{hayward}(r) \underset{r \to 0}{\sim} 1 - \frac{r^2}{l^2} + \mathcal{O}(r^5), \quad (4.2)$$

$$f_{hayward}(r) \underset{r \to \infty}{\sim} 1 - \frac{2m}{r} + \frac{4l^2 m^2}{r^4} + \mathcal{O}(r^{-5}), \quad (4.3)$$

¿Interpretación física del parámetro l?

¿Cómo aplica el teorema de Borde en este caso?

Métrica de Hayward estática

Los invariantes de curvatura de esta métrica son

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{24l^2 m^2 \left(4l^2 m - r^3\right)}{\left(2l^2 m + r^3\right)^3}, \\
R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} &= \frac{288 m^4 \left(8l^8 m^2 - 4l^6 m r^3 + 5l^4 r^6\right)}{\left(2l^2 m + r^3\right)^6}, \\
R_{\mu\nu\sigma\rho} R^{\mu\nu\sigma\rho} &= \frac{48 m^2 \left(32 l^8 m^4 - 16 l^6 m^3 r^3 + 72 l^4 m^2 r^6 - 8 l^2 m r^9 + r^{12}\right)}{\left(2l^2 m + r^3\right)^6},
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Métrica de hayward estática

Nuevamente se satisface la condición de energía débil puesto que dada la función de masa

$$m(r) = \frac{mr^3}{r^3 + 2ml^2}. \tag{4.5}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{dm(r)}{dr} &= \frac{12l^2m^2}{(2l^2m + r^3)^2}, \\ \frac{2}{r}\frac{dm(r)}{dr} &= \frac{24l^2m^2r}{(2l^2m + r^3)^2}, \\ \frac{d^2m(r)}{dr^2} &= \frac{48m^2\left(l^4mr - l^2r^4\right)}{(2l^2m + r^3)^3}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Métrica de Hayard dinámica

Al considerar

$$dt = du + \frac{dr}{(1 - 2m(r)/r)}. \tag{4.7}$$

y generalizar $m = m(u)$ tenemos que

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(u)r^2}{r^3 + 2m(v)l^2}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2, \tag{4.8}$$

Métrica de Hayward modificada

Las métricas de las estrellas de Planck deberían incluir [7]

- La corrección de loop quantum gravity al potencial Newtoniano, dada por

$$\Phi(r) = -\frac{m}{r}\left(1+\beta\frac{l_p^2}{r^2}\right)+\mathcal{O}(r^{-4}). \tag{4.9}$$

- Dilatación de tiempo finita entre $r=0$ y $r\to\infty$.

Métrica de Hayward Modificada

Dado que

$$g_{00} = -(1 + 2\phi), \tag{4.10}$$

para incluir las correcciones previamente mencionadas se da la métrica

$$ds^2 = -G(r)F(r)dt^2 + \frac{1}{F(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{4.11}$$

donde

$$F(r) = 1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2ml^2}, \tag{4.12}$$

y la función $G(r)$ se explica a continuación.

Métrica de Hayward Modificada

Las condiciones físicas que se le exigen a $G(r)$ son

- Preservar el comportamiento de Schwarzschild para $r \to \infty$.
- Incluir la corrección cuántica del potencial newtoniano (4.9).
- Permitir dilataciones de tiempo finitas entre $r \to 0$ y $r \to \infty$.

La forma más general de satisfacer las condiciones anteriormente impuestas es considerar $G(r)$ dada por

$$G(r) = 1 - \frac{\beta M \alpha}{\alpha r^3 + \beta M}, \tag{4.13}$$

donde α está dado por

$$-g_{00}(r = 0) = 1 - \alpha, \ 0 \leq \alpha < 1. \tag{4.14}$$

Conclusiones

- La teoría de la relatividad general clásica presenta fallas potencialmente debidas a la no cosideración de la teoría cuántica.
- El proceso de regularización de agujeros negros puede ser esclarecido mediante la inclusión de la teoría cuántica en gravedad.
- Las estrellas de Planck son una alternativa de regularización de agujeros negros, que plantea una nueva instancia el la vida de un agujero negro.
- Las estrellas de Planck pueden alcanzar una densidad del orden de la densidad de Planck a escalas de longitud mucho mayores que la longitud de Planck.

Trabajo Futuro

- Entender profundamente el teorema de Borde y sus múltiples aplicaciones en este trabajo.
- Entender el carácter regular de la métrica de Bardeen en términos del teorema de Borde.
- Entender la derivación de las correcciones de teoría cuántica de campos efectiva del potencial Newtoniano.
- Entender la solución de la paradoja de la pérdida de información en agujeros negros [8].

Referencias I

[1] Sean M Carroll.
Spacetime and geometry: An introduction to general relativity, volume 1.
Addison Wesley, 1st edition, 2004.

[2] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis.
The Large Scale Structure of Space-time, volume 1.
Cambridge University Press, 20th edition, 1973.

[3] L. Balart and E. C. Vagenas.
Regular black hole metrics and the weak energy condition.
Physics Letters B, 730:14–17, March 2014.

[4] J. M. Bardeen.
Non-singular general-relativistic gravitational collapse.
In *Procceedings of International Conference GR5*, page 174, Tbilisi, 1968.

Referencias II

[5] Ayón-Beato, E. and García, A.
The Bardeen model as a nonlinear magnetic monopole.
Physics Letters B, 493:149–152, November 2000.

[6] A. Borde.
Open and closed universes, initial singularities, and inflation.
Phys. Rev. D, 50:3692–3702, September 1994.

[7] T. De Lorenzo, C. Pacilio, C. Rovelli, and S. Speziale.
On the effective metric of a Planck star.
General Relativity and Gravitation, 47:41, April 2015.

[8] H. M. Haggard and C. Rovelli.
Quantum-gravity effects outside the horizon spark black to white hole tunneling.
Phys. Rev. D, 92(10):104020, November 2015.

¡Gracias por su atención!