

Estudio de estrellas de Planck

Alejandro Hernández A.
201219580

Director: Pedro Bargueño de Retes

1. Introducción

Desde la publicación del famoso artículo *The Foundation of the General Theory of Relativity* [1] por Albert Einstein en el año de 1916, la búsqueda de soluciones exactas a sus ecuaciones de campo ha sido uno de los principales motores de investigación en relatividad general (GR). La primera solución matemática exacta de dichas ecuaciones fue la métrica de Schwarzschild, que describe la geometría generada en el exterior de un cuerpo esféricamente simétrico, sin carga y sin momento angular. Además de la anterior, otra métrica que presenta simetría esférica es la de Reissner Nordström, la cual describe un cuerpo cargado sin rotación. Estas métricas comparten una característica particular, a saber, ambas poseen una singularidad física en $r = 0$. Esto dificulta el tratamiento de ese punto tanto en el espaciotiempo de Schwarzschild como en el de Reissner Nordström, puesto que la teoría no es aplicable en el susodicho punto singular.

Teniendo en cuenta lo anterior, los puntos singulares de un espaciotiempo dado dejan entrever fallas de la teoría general de la relatividad puesto que no permite describir las propiedades físicas de los mismos. Con el fin de evadir estas dificultades, se dice que un agujero es regular, o sin puntos singulares, cuando los invariantes de curvatura R , $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ son finitos en todos los puntos del espaciotiempo en cuestion. Dado esto, desde hace más de cincuenta años el estudio de espaciotiempos (agujeros negros) regulares ha sido de gran interés para múltiples físicos y matemáticos, entre ellos, James M. Bardeen.

En el año de 1968, Bardeen fue el primero en proponer una solución regular de las ecuaciones de campo de Einstein. Si bien el documento [2] en el que se propuso el modelo no está disponible, una revisión detallada de la métrica de Bardeen puede ser consultada en [3]. La importancia de esta métrica no solo se debe a que fue la primera de su estilo sino también a que fue crucial para orientar las futuras investigaciones sobre agujeros negros regulares. Al respecto, Ayón-Beato y García propusieron una interpretación física del modelo de Bardeen en términos de electrodinámica no lineal [4] y construyeron muchas otras métricas correspondientes a agujeros negros regulares [5, 6, 7, 8].

Ayende de lo anterior, trabajos más recientes [9, 10, 11] tratan de generalizar el modelo que propuso Bardeen de regularización de agujeros negros, de tal forma que se incluyan correcciones efectivas de teoría cuántica de campos en relatividad general. En estos modelos se definen el concepto de Estrella de Planck, que corresponde a una métrica regular, esféricamente simétrica, asintóticamente plana, que satisface la condición de energía débil y que no posee horizontes de Cauchy (¡OJO!).

Precisamente, el objetivo de este trabajo es entender el proceso mediante el cual se formulan las métricas correspondientes a estrellas de Planck, entender el mecanismo mediante el cual dichas métricas evaden la singularidad en $r = 0$ (¡OJO!), además de tratar de interpretar físicamente el tensor de energía-momento (SET) asociado a las mismas. Teniendo en cuenta lo previamente mencionado, la organización de este documento se da a continuación. En la Sec. 2 se establecen las condiciones de energía de forma usual en términos de SET y se establece la metodología general que se empleará para estudiar todas las métricas presentadas. En la Sec. 3 se estudian en detalle las métricas de Bardeen y de Vaidya, las cuales constituyen la base sobre la cual se definen las estrellas de Planck. Posteriormente, en la Sec. 4 se estudia a fondo la métrica que define las aludidas estrellas de Planck y se da la interpretación física de las mismas. Finalmente, en la sección 6 se resumen los resultados del trabajo y en la sección

7 se habla sobre las correcciones cuánticas que introducen las estrellas de Planck en relatividad general.

¡OJO! Teoremas de singularidad.

2. Preliminares

2.1. Condiciones de energía

De vital importancia para el estudio de las métricas a lo largo de todo este documento son las denominadas condiciones de energía. Si bien en la mayoría de los casos resulta útil estudiar las ecuaciones de campo sin especificar la fuente de materia $T_{\mu\nu}$ en el espacio-tiempo descrito, en algunas ocasiones resulta interesante estudiar las propiedades de dichas ecuaciones que son válidas para diversas fuentes de materia. En esta última situación es fundamental imponer condiciones de energía que limiten la arbitrariedad de $T_{\mu\nu}$ con el fin de que sean fuentes razonables de energía y momento [13].

Las formulaciones matemáticas de las múltiples condiciones de energía se establecen a continuación:

- **Condición de energía débil (WEC):** Para todo vector timelike t^μ se satisface $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$. Para el caso particular de un fluido perfecto esta condición se traduce en $\rho \geq 0$ y $\rho + p \geq 0$.
- **Condición de energía débil (NEC):** Como caso especial de WEC, se exige que para cualquier vector nulo l^μ se tenga $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$. En el caso de un fluido perfecto, esta condición exige $\rho + p \geq 0$.
- **Condición de energía dominante (DEC):** Esta condición incluye a WEC y se puede dividir en dos partes: la primera es exactamente igual a lo requerido por WEC; y la segunda exige que $T_{\mu\nu}T_\lambda^\nu t^\mu t^\lambda \geq 0$ para todo t^μ timelike. Para fluidos perfectos esta condición se traduce en $\rho \geq |p|$.
- **Condición de energía fuerte (SEC):** Esta última condición exige que $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq \frac{1}{2}T_\lambda^\lambda t^\sigma t_\sigma$ para todo vector t^μ timelike. Equivalentemente, se demanda que $\rho + p \geq 0$ y que $\rho + 3p \geq 0$ en el caso de un fluido perfecto. Cabe mencionar que la SEC no implica a WEC pero sí implica a NEC.

¡OJO! Hawking y Ellis - Tipos de fluidos

2.2. Procedimiento General

Teniendo en cuenta el Teorema de Birkhoff y la derivación de [14, Cap. 7], la forma más general de una métrica estática y esféricamente simétrica es

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.1)$$

donde la función $f(r)$ puede ser escrita como

$$f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \quad (2.2)$$

Ahora bien, dado que nos interesa estudiar agujeros negros regulares, es preciso aclarar que la SEC se debe violar en algún lugar dentro del horizonte [15], a la vez que la WEC o la DEC pueden ser satisfechas en todo el espaciotiempo generado [16]. Al considerar el elemento de línea (2.1) junto con (2.2), es posible escribir los componentes de SET como [23]

$$T_t^t = T_r^r = \frac{2}{8\pi r^2} \frac{dm(r)}{dr}, \quad T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = \frac{1}{8\pi r} \frac{d^2m(r)}{dr^2}, \quad (2.3)$$

y por ende, se concluye que la WEC puede expresarse de manera equivalente en términos de la función de masa $m(r)$ mediante las siguientes desigualdades

$$\frac{1}{r^2} \frac{dm(r)}{dr} \geq 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{2}{r} \frac{dm(r)}{dr} \geq \frac{d^2m(r)}{dr^2}. \quad (2.5)$$

Como se mencionó previamente, la DEC incluye por continuidad a la WEC. Esto permite argumentar que, por simplicidad, la única condición de energía que se va a exigir para los agujeros negros regulares presentados en secciones posteriores será la WEC.

3. Métricas relevantes (¡OJO!)

3.1. Métrica de Bardeen

Como se mencionó en la introducción, la métrica de Bardeen [2, 3, 17] fue la primera en describir un espaciotiempo regular. En coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , la métrica de Bardeen se expresa como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + g^2)^{3/2}} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + g^2)^{3/2}} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.1)$$

con m y g parámetros no negativos, en algunos casos llamados parámetros de regularización. Claramente, para esta métrica tenemos que

$$m(r) = \frac{2mr^3}{(r^2 + g^2)^{3/2}}, \quad (3.2)$$

por tanto, la WEC se satisface automáticamente en cualquier punto del espacio tiempo puesto que

$$\frac{1}{r^2} \frac{dm(r)}{dr} = \frac{6mg^2}{(g^2 + r^2)^{5/2}}, \quad (3.3)$$

$$\frac{2}{r} \frac{dm(r)}{dr} = \frac{12mg^2r}{(g^2 + r^2)^{5/2}}, \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2m(r)}{dr^2} = \frac{6m(2g^4r - 3g^2r^3)}{(g^2 + r^2)^{7/2}}. \quad (3.5)$$

El carácter regular de la métrica de Bardeen es evidente a partir del hecho de que, por un lado

$$g_{tt} \underset{r \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{2mr^2}{g^3} + \mathcal{O}(r^4), \quad (3.6)$$

es decir, posee un comportamiento de de Sitter en la vecindad de $r = 0$, y por otro

$$R = \frac{6g^2m(4g^2 - r^2)}{(g^2 + r^2)^{7/2}} \quad (3.7)$$

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{18g^4m^2(8g^4 - 4g^2r^2 + 13r^4)}{(g^2 + r^2)^7} \quad (3.8)$$

$$R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{12m^2(8g^8 - 4g^6r^2 + 47g^4r^4 - 12g^2r^6 + 4r^8)}{(g^2 + r^2)^7}, \quad (3.9)$$

y por tanto, los escalares de curvatura son finitos en todo el espaciotiempo.

Ahora bien, debido a que el elemento de línea (3.1) es diagonal, es posible obtener los horizontes de eventos de esta métrica al solucionar

$$g_{tt} = 1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + q^2)^{3/2}} = 0. \quad (3.10)$$

Y analizar las condiciones para la existencia de soluciones reales se concluye que la métrica (3.1) describe un agujero negro (es decir, posee horizontes de eventos) para $q^2 < (16/27)m^2$: cuando $q^2 < (16/27)m^2$ existen dos horizontes de eventos r_+, r_- y cuando $q^2 = (16/27)m^2$ solo hay un horizonte de eventos degenerado $r_+ = r_-$. En este último caso se dice que el agujero negro es extremal, tal y como en la métrica de Reissner Norström, en tanto que posee un único horizonte de eventos. Es importante recalcar que en cualquier caso, los horizontes de eventos para el agujero negro de Bardeen tan solo constituyen singularidades debidas al sistema de coordenadas puesto que ya se mencionó que los invariantes de curvatura (3.7-3.9) son finitos en todo el espaciotiempo. La extensión de la métrica de Bardeen más allá de los horizontes de eventos se puede hacer al cambiar a las coordenadas de Eddington-Finkelstein, en términos de las cuales la métrica es bien comportada incluso en el caso del agujero negro extremal.

Considere nuevamente la componente temporal g_{tt} de la métrica (3.1). Note que

$$g_{tt} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} 1 - \frac{2m}{r} + \frac{3mg^2}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^5}\right). \quad (3.11)$$

Los dos primeros términos de la expansión corresponden, como es de esperarse, al comportamiento asintóticamente plano de la métrica de Bardeen, y por tanto, es posible identificar al parámetro m como la masa de la configuración descrita por esta métrica. No obstante, el término $1/r^3$ impide asociar el parámetro de regularización g con algún tipo de carga de Coulomb, a diferencia de la métrica de Reissner Norström, en la que el parámetro q es automáticamente asociado a una carga eléctrica al comparar el SET de esta métrica con el del campo eléctrico para una carga puntual. Este hecho fue el principal obstáculo para la interpretación física del parámetro g en la métrica de Bardeen hasta que Ayón-Beato y García propusieron su interpretación en términos de electrodinámica no-lineal [4].

El modelo de Ayón-Beato y García parte la suposición de que la dinámica de la métrica de Bardeen está regida por

$$\mathcal{S} = \int dv \left(\frac{1}{16\pi} R - \frac{1}{4\pi} \mathcal{L}(F) \right), \quad (3.12)$$

donde R es el escalar de curvatura; \mathcal{L} es una función de $F = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, con $F_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu} A_{\nu]}$ el tensor electromagnético; y v es la coordenada avanzada de Eddington-Finkelstein. Las ecuaciones de Einstein resultantes del acople con electrodinámica no-lineal resultantes de la acción \mathcal{S} son

Este aspecto de la métrica de Bardeen también hace eco de una de las características fundamentales de la métrica de Reissner-Nordström en tanto que las propiedades globales del espacio-tiempo descrito tanto por la métrica de Reissner-Nordström como por la métrica de Bardeen dependen fuertemente de las magnitudes relativas entre q y m .

¡OJO! Explicar brevemente lo del cambio de topología para evitar la singularidad.

¡OJO! La forma en la que se evita la singularidad en este y otros modelos que son considerados como Bardeen-like involucra una explicación que no he logrado entender. Discutir con Pedro.

¡OJO! Borde 1994 habla de global Cauchy surface condition. Tengo que leer un poco más para entenderlo.

3.2. Métrica de Vaidya

La métrica de Vaidya [19] es una generalización de la métrica de Schwarzschild que puede ser interpretada como un espacio-tiempo con una radiación saliente y esféricamente simétrica de partículas sin masa.

Para hallar esta métrica a partir de la de Schwarzschild es necesario pasar a coordenadas de Eddington-Finkelstein (¡OJO! Sería bueno ponerlo en un apéndice, junto con los cálculos mencionados en otros OJO, poner lo de tortoise en el Gravitation), en las que la coordenada temporal t es reemplazada por una nueva coordenada u que satisface

$$dt = du + \frac{dr}{(1 - 2M/r)} \quad (3.13)$$

¡OJO! Hablar de la opción con el menos

¡OJO! Significado físico de u

Con dicha transformación, el elemento de línea se convierte en

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2 \quad (3.14)$$

Dado que nos interesa llegar a una métrica debida a fotones dirigidos radialmente hacia afuera (¡OJO! Entender esto), el elemento de línea anterior puede ser generalizado al considerar $M = M(u)$. Teniendo en cuenta lo anterior, y después de algunos cálculos (¡OJO! Cálculos en anexo, Padmanabhan), tenemos que el tensor energía-momento que genera la métrica (3.14) tiene como única componente distinta de cero $T_{uu} = -(M'/4\pi r^2)$. Esto es exactamente igual al tensor que se obtendría para un rayo de fotones moviéndose radialmente hacia afuera con cuádrimomento $k_a = \nabla_a u$. El tensor energía-momento en este caso es $T^{ab} = -(M'/4\pi r^2)k^a k^b$ (¡OJO!). Dado lo anterior, podemos interpretar la métrica de Vaidya como debida a una fuente esférica que pierde masa al emitir fotones de una forma simétrica.

Con respecto a las condiciones de energía, es claro que por la forma del EMT para la métrica de Vaidya, la única condición que vale la pena estudiar es WEC, la cual requiere $T_{uu} \geq 0$ y en términos de r requiere que $r > 0$, $m'(u) \leq 0$. Esta última condición coincide precisamente con la interpretación previamente mencionada sobre que la métrica de Vaidya describe una estrella que pierde masa conforme pasa el tiempo mediante la emisión de radiación en forma de fotones.

¡OJO! Hasta aquí Padmanabhan

¡OJO! Hablar más al tener en cuenta a Joshi.

4. Métrica de las Estrellas de Planck

4.1. Métrica de Hayward

Teniendo todas las herramientas estudiadas en la sección anterior, es posible comenzar a estudiar el tema de interés para este trabajo.

¡OJO! Elaborar un poco más.

La métrica de Hayward está dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{Mr^2}{r^3 + 2ML^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{Mr^2}{r^3 + 2ML^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.1)$$

El EMT asociado a esta métrica es

$$\begin{aligned} T_{tt} &= \frac{12L^2m^2 (2L^2m + r^2(r - 2m))}{(2L^2m + r^3)^3} \\ T_{rr} &= -\frac{12L^2m^2}{(2L^2m + r^3)(2L^2m + r^2(r - 2m))} \\ T_{\theta\theta} &= -\frac{24L^2m^2r^2 (L^2m - r^3)}{(2L^2m + r^3)^3} \\ T_{\phi\phi} &= -\frac{24L^2m^2r^2 \sin^2(\theta) (L^2m - r^3)}{(2L^2m + r^3)^3} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Es claro que este EMT corresponde, de manera semejante que en la métrica de Bardeen, a un fluido tipo I y por tanto las condiciones de energía pueden ser inicialmente formuladas en los mismos términos.

¡OJO! Hacer conexión lógica con lo que sigue

La corrección efectiva de teoría cuántica de campos al potencial Newtoniano es

$$\Phi(r) = -\frac{M}{r} \left(1 + \beta \frac{l_p^2}{r^2}\right) + \mathcal{O}(r^{-4}), \quad (4.3)$$

donde l_p es la longitud de Planck.

¡OJO! Elaborar un poco más

Para remover la singularidad en el origen, la métrica de Hayward satisface

$$g_{tt}(r) \sim_{r \rightarrow 0} 1 - \frac{r^2}{l^2} \quad (4.4)$$

Y teniendo en cuenta lo anterior, es posible definir una constante cosmológica para la métrica de Hayward, a saber

$$\Lambda = \frac{3}{l^2} \quad (4.5)$$

5. Métrica de Hayward modificada

La métrica de Hayward modificada está dada por

$$ds^2 = -G(r)F(r)dt^2 + \frac{1}{F(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (5.1)$$

donde

$$F(r) = 1 - \frac{Mr^2}{r^3 + 2ML^2} \quad (5.2)$$

$$G(r) = 1 - \frac{\beta M \alpha}{\alpha r^3 + \beta M} \quad (5.3)$$

6. Conclusiones

7. Anexos

¡OJO! Correcciones cuánticas

Referencias

- [1] A. Einstein. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7):769–822, 1916.
- [2] J. M. Bardeen. Non-singular general-relativistic gravitational collapse. In *Proceedings of International Conference GR5*, page 174, Tbilisi, 1968.
- [3] A. Borde. Open and closed universes, initial singularities, and inflation. *Phys. Rev. D*, 50:3692–3702, September 1994.
- [4] Ayón-Beato, E. and García, A. The Bardeen model as a nonlinear magnetic monopole. *Physics Letters B*, 493:149–152, November 2000.
- [5] Ayón-Beato, E. and García, A. Four-parametric regular black hole solution. *General Relativity and Gravitation*, 37:635–641, April 2005.
- [6] Ayón-Beato, E. and García, A. Regular Black Hole in General Relativity Coupled to Nonlinear Electrodynamics. *Physical Review Letters*, 80:5056–5059, June 1998.
- [7] Ayón-Beato, E. and García, A. Non-Singular Charged Black Hole Solution for Non-Linear Source. *General Relativity and Gravitation*, 31:629, May 1999.
- [8] Ayón-Beato, E. and García, A. New regular black hole solution from nonlinear electrodynamics. *Physics Letters B*, 464:25–29, October 1999.
- [9] S. A. Hayward. Formation and Evaporation of Nonsingular Black Holes. *Physical Review Letters*, 96(3):031103, January 2006.
- [10] T. De Lorenzo, C. Pacilio, C. Rovelli, and S. Speziale. On the effective metric of a Planck star. *General Relativity and Gravitation*, 47:41, April 2015.
- [11] C. Rovelli and F. Vidotto. Planck stars. *International Journal of Modern Physics D*, 23:1442026, December 2014.
- [12] Matthias Blau. *Lecture Notes on General Relativity*. Albert Einstein Center for Fundamental Physics, 2015.
- [13] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*, volume 1. Addison Wesley, 1st edition, 2004.
- [14] S. M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*. December 1997.
- [15] O. B. Zaslavskii. Regular black holes and energy conditions. *Physics Letters B*, 688:278–280, May 2010.
- [16] I. Dymnikova. Regular electrically charged vacuum structures with de Sitter centre in nonlinear electrodynamics coupled to general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 21:4417–4428, September 2004.
- [17] A. Borde. Regular black holes and topology change. *Phys. Rev. D*, 55:7615–7617, June 1997.

- [18] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-time*, volume 1. Cambridge University Press, 20th edition, 1973.
- [19] Thanu Padmanabhan. *Gravitation: foundations and frontiers*. Cambridge University Press, 2010.
- [20] Ray D’Inverno. *Introducing Einstein’s relativity*. Clarendon press, 1992.
- [21] Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, and Charles W. Misner. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1st. edition, 1973.
- [22] L. Balart and E. C. Vagenas. Regular black holes with a nonlinear electrodynamics source. *Phys. Rev. D*, 90(12):124045, December 2014.
- [23] L. Balart and E. C. Vagenas. Regular black hole metrics and the weak energy condition. *Physics Letters B*, 730:14–17, March 2014.