

## 实验六 IIR 数字滤波器的设计与软件实现

### 一、 实验目的

1. 掌握双线性变换法及脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器的具体设计方法；
2. 熟悉用双线性变换法及脉冲响应不变法设计低通、高通和带通 IIR 数字滤波器的计算机编程。

### 二、 实验原理与方法

**原理：**IIR 数字滤波器是一种离散时间系统，其系统函数为：

$$H(Z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (6-1)$$

假设  $M \leq N$ ，当  $M > N$  时，系统函数可以看作一个 IIR 的子系统和一个  $(M-N)$  的 FIR 子系统的级联。IIR 数字滤波器的设计实际上是求解滤波器的系数  $a_k$  和  $b_k$ ，它是数学上的一种逼近问题，即在规定意义上（通常采用最小均方误差准则）去逼近系统的特性。如果在  $S$  平面上去逼近，就得到模拟滤波器；如果在  $z$  平面上去逼近，就得到数字滤波器。

#### 1. 脉冲响应不变法

脉冲响应不变法是从滤波器的脉冲响应出发，使数字滤波器的单位脉冲响应序列  $h(n)$  模仿模拟滤波器的冲激响应  $h_a(t)$ ，即将  $h_a(t)$  进行等间隔采样，使  $h(n)$  正好等于  $h_a(t)$  的采样值，满足： $h(n) = h_a(nT)$  式中， $T$  是采样周期。

如果令  $H_a(s)$  是  $h_a(t)$  的拉普拉斯变换， $H(z)$  为  $h(n)$  的  $Z$  变换，利用采样序列的  $Z$  变换与模拟信号的拉普拉斯变换的关系得

$$X(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(s - jk\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a \left( s - j \frac{2\pi}{T} k \right) \quad (6-2)$$

则可看出，脉冲响应不变法将模拟滤波器的  $S$  平面变换成数字滤波器的  $Z$  平面，这个从  $s$  到  $z$  的变换  $z=e^{sT}$  是从  $S$  平面变换到  $Z$  平面的标准变换关系式。

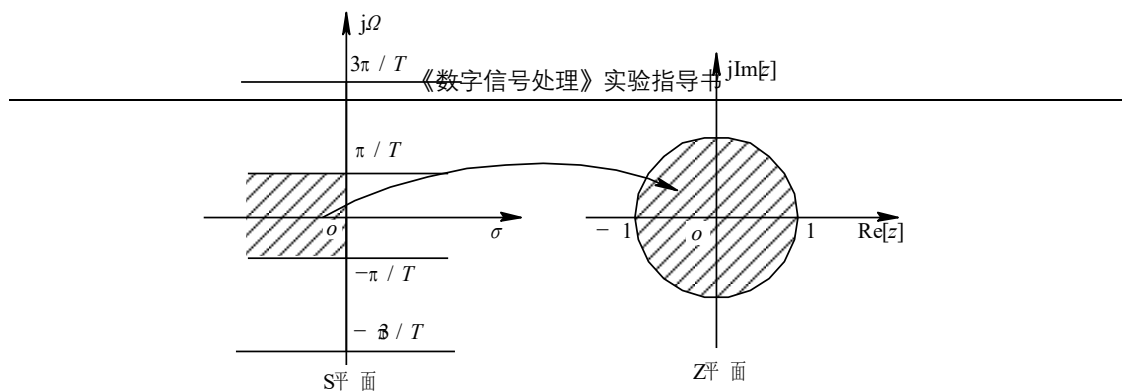


图 6-1 脉冲响应不变法的映射关系

由 (6-2) 式, 数字滤波器的频率响应和模拟滤波器的频率响应间的关系为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right) \quad (6-3)$$

这就是说, 数字滤波器的频率响应是模拟滤波器频率响应的周期延拓。正如采样定理所讨论的, 只有当模拟滤波器的频率响应是限带的, 且带限于折叠频率以内时, 即

$$H_a(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2} \quad (6-4)$$

才能使数字滤波器的频率响应在折叠频率以内重现模拟滤波器的频率响应, 而不产生混叠失真, 即

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad |\omega| < \pi \quad (6-5)$$

但是, 任何一个实际的模拟滤波器频率响应都不是严格限带的, 变换后就会产生周期延拓分量的频谱交叠, 即产生频率响应的混叠失真, 如图 6-2 所示。这时数字滤波器的频响就不同于原模拟滤波器的频响, 而带有一定的失真。当模拟滤波器的频率响应在折叠频率以上处衰减越大、越快时, 变换后频率响应混叠失真就越小。这时, 采用脉冲响应不变法设计的数字滤波器才能得到良好的效果。

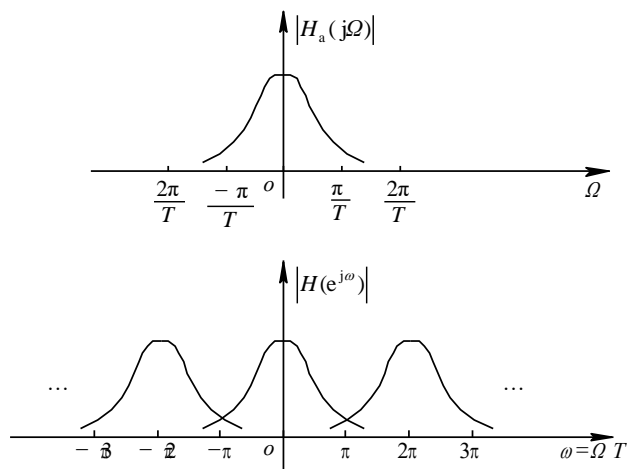


图 6-2 脉冲响应不变法中的频响混叠现象

对某一模拟滤波器的单位冲激响应  $h_a(t)$  进行采样, 采样频率为  $f_s$ , 若使  $f_s$  增加,

即令采样时间间隔 ( $T=1/f_s$ ) 减小, 则系统频率响应各周期延拓分量之间相距更远, 因而可减小频率响应的混叠效应。

## 2. 双线性变换法

脉冲响应不变法的主要缺点是产生频率响应的混叠失真。这是因为从  $S$  平面到  $Z$  平面是多值的映射关系所造成的。为了克服这一缺点, 可以采用非线性频率压缩方法, 将整个频率轴上的频率范围压缩到  $-\pi/T \sim \pi/T$  之间, 再用  $z=e^{sT}$  转换到  $Z$  平面上。这样就使  $S$  平面与  $Z$  平面建立了一一对应的单值关系, 消除了多值变换性就消除了频谱混叠现象, 映射关系如图 6-3 所示。

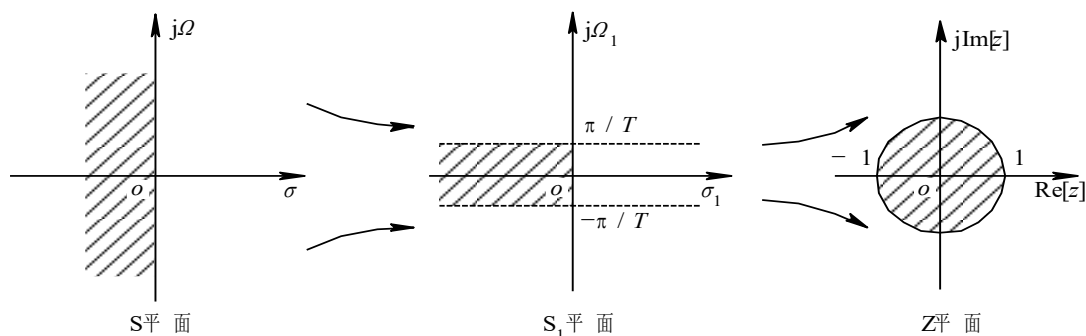


图 6-3 双线性变换的映射关系

为了将  $S$  平面的整个虚轴  $j\Omega$  压缩到  $S_1$  平面  $j\Omega_1$  轴上的  $-\pi/T$  到  $\pi/T$  段上, 可以通过以下的正切变换实现

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) \quad (6-6)$$

式中,  $T$  仍是采样间隔。

当  $\Omega_1$  由  $-\pi/T$  经过 0 变化到  $\pi/T$  时,  $\Omega$  由  $-\infty$  经过 0 变化到  $+\infty$ , 也即映射了整个  $j\Omega$  轴。将式 (6-6) 写成

$$j\Omega = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j\Omega_1 T/2} - e^{-j\Omega_1 T/2}}{e^{j\Omega_1 T/2} + e^{-j\Omega_1 T/2}} \quad (6-7)$$

将此关系解析延拓到整个  $S$  平面和  $S_1$  平面, 令  $j\Omega=s$ ,  $j\Omega_1=s_1$ , 则得

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{s_1 T/2} - e^{-s_1 T/2}}{e^{s_1 T/2} + e^{-s_1 T/2}} = \frac{2}{T} \tanh\left(\frac{s_1 T}{2}\right) = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}} \quad (6-8)$$

再将  $S_1$  平面通过以下标准变换关系映射到  $Z$  平面  $z=e^{s_1 T}$ , 从而得到  $S$  平面和  $Z$  平面的单值映射关系为:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (6-9)$$

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s} \quad (6-10)$$

式(6-9)与式(6-10)是S平面与Z平面之间的单值映射关系,这种变换都是两个线性函数之比,因此称为双线性变换。式(6-9)与式(6-10)的双线性变换符合映射变换应满足的两点要求。

首先,把 $z=e^{j\omega}$ , 可得

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = j\Omega \quad (6-11)$$

即S平面的虚轴映射到Z平面的单位圆。其次,将 $s = \sigma + j\Omega$ 代入式(6-11),得

$$z = \frac{\frac{2}{T} + \sigma + j\Omega}{\frac{2}{T} - \sigma - j\Omega} \quad (6-12)$$

因此

$$|z| = \frac{\sqrt{\left(\frac{2}{T} + \sigma\right)^2 + \Omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{2}{T} - \sigma\right)^2 + \Omega^2}} \quad (6-13)$$

由此看出,当 $\sigma < 0$ 时,  $|z| < 1$ ; 当 $\sigma > 0$ 时,  $|z| > 1$ 。也就是说,S平面的左半平面映射到Z平面的单位圆内,S平面的右半平面映射到Z平面的单位圆外,S平面的虚轴映射到Z平面的单位圆上。因此,稳定的模拟滤波器经双线性变换后所得的数字滤波器也一定是稳定的。

**方法:** 在MATLAB中,可以用下列函数辅助设计IIR数字滤波器:

(1) 求滤波器阶数和截止频率:

$[N, Wn] = \text{buttord}(Wp, Ws, Rp, Rs, 's')$  (巴特沃斯滤波器)

$[N, Wn] = \text{cheb1ord}(Wp, Ws, Rp, Rs, 's')$  (切比雪夫滤波器)

(2) 设计低通滤波器:

$[\text{num}, \text{den}] = \text{butter}(N, Wn)$  (巴特沃斯滤波器)

$[\text{num}, \text{den}] = \text{cheby1}(N, Wn)$  (切比雪夫型 I 滤波器)

$[\text{num}, \text{den}] = \text{cheby2}(N, Wn)$  (切比雪夫 II 型滤波器)

(3) lp2hp, lp2bp, lp2bs 可以完成低通滤波器到高通、带通、带阻滤波器的

转换；高通、带通、带阻滤波器在 matlab 中不能直接产生，它们的生成都是有低通滤波器转换而来的，所以要生成这些滤波器就必须先生成低通滤波器，然后通过转换函数做相应的转换就可。下面介绍这些转换函数。

- lp2hp

**功能：**模拟低通滤波器到模拟高通滤波器的变换。

**格式：** $[bt,at] = lp2hp(b,a,Wo)$

$[At,Bt,Ct,Dt] = lp2hp(A,B,C,D,Wo)$

**说明：**lp2hp 函数将截止频率为 1（弧度/秒）的模拟低通滤波器变换成截止频率为  $Wo$  的模拟高通滤波器。函数的第一种形式是有传递函数描述的滤波器相应参数，第二种为状态空间描述的滤波器相应参数，下同。

- lp2bp

**功能：**模拟低通滤波器到模拟带通滤波器的变换。

**格式：** $[bt,at] = lp2bp(b,a,Wo,Bw)$

$[At,Bt,Ct,Dt] = lp2bp(A,B,C,D,Wo,Bw)$

**说明：**lp2bp 函数将截止频率为 1（弧度/秒）的模拟低通滤波器变换成带宽为  $Bw$ 、中心频率为  $Wo$  的模拟带通滤波器。

- lp2bs

**功能：**模拟低通滤波器到模拟带阻滤波器的变换。

**格式：** $[bt,at] = lp2bs(b,a,Wo,Bw)$

$[At,Bt,Ct,Dt] = lp2bs(A,B,C,D,Wo,Bw)$

**说明：**lp2bs 函数将截止频率为 1（弧度/秒）的模拟低通滤波器变换成带宽为  $Bw$ 、中心频率为  $Wo$  的模拟带阻滤波器。

- lp2lp

**功能：**模拟低通滤波器到模拟低通滤波器的变换。

**格式：** $[bt,at] = lp2lp(b,a,Wo)$

$[At,Bt,Ct,Dt] = lp2lp(A,B,C,D,Wo)$

**说明：**lp2lp 函数将截止频率为 1（弧度/秒）的模拟低通滤波器变换成截止频率为  $Wo$  的模拟低通滤波器。

(4) 利用impinvar 可以完成脉冲响应不变法的模拟滤波器到数字滤波器的转

换。

(5) 使用 `bilinear` 可以对模拟滤波器进行双线性变换，求得数字滤波器的传输函数系数；

### 三、 实验内容

利用 MATLAB 编程，用脉冲响应不变法和双线性变换法设计一个数字低通滤波器，指标要求如下：通带边缘频率： $\omega_p = 0.3\pi$ ，通带峰值起伏： $\alpha_p \leq 1dB$ ；阻带边缘频率： $\omega_s = 0.8\pi$ ，最小阻带衰减： $\alpha_s \geq 40dB$ 。画出两种设计方法下的损耗函数和幅频特性。

#### 1. 脉冲响应不变法变换法

代码：%IIR 滤波器设计：脉冲响应不变变换法

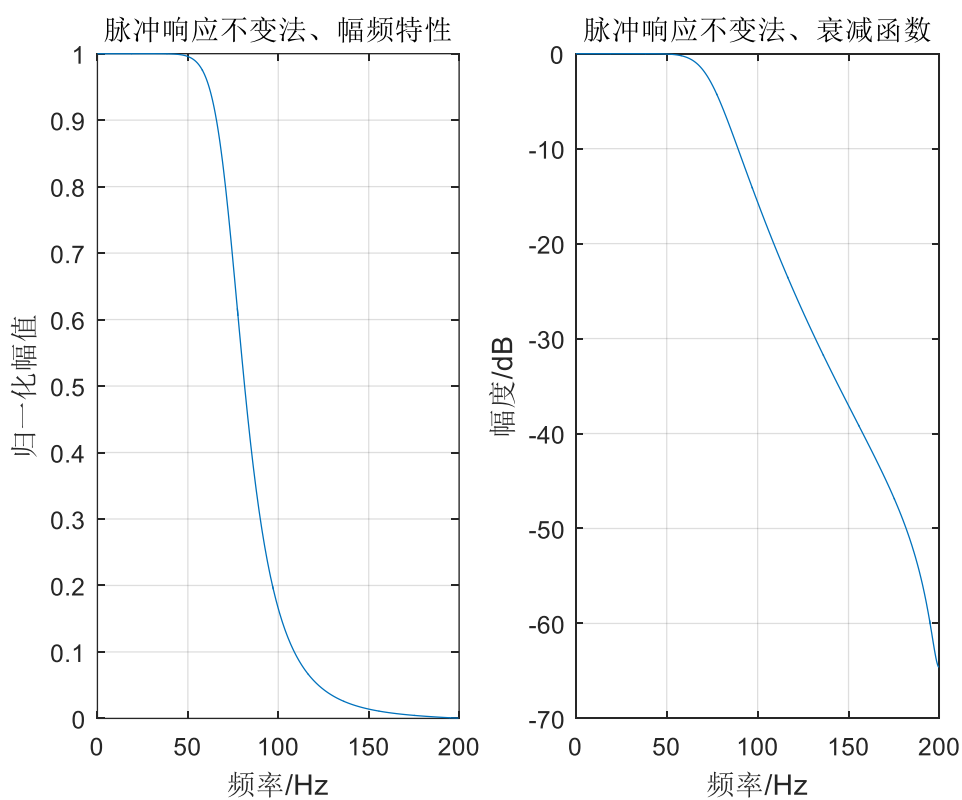
```
Fs=400;          %
T=1/Fs;          %抽样时间间隔
wp=0.3*pi;       %通带边缘频率
ws=0.8*pi;       %阻带边缘频率
Wp=wp*Fs;
Ws=ws*Fs;
Ap=1;            %通带峰值起伏
As=40;           %最小阻带衰减
[N,Wc]=buttord(Wp,Ws,Ap,As,'s');
[B,A]=butter(N,Wc,'s');
[D,C]=impinvar(B,A,Fs);
[Hz,W]=freqz(D,C);
f=(W*Fs)/(2*pi);
subplot(121);
plot(f,abs(Hz));
grid on;
title('脉冲响应不变法、幅频特性');
xlabel('频率/Hz');
ylabel('归一化幅值');
```

```

subplot(122);
a=20*log10(abs(Hz));
plot(f,a);
grid on;
title('脉冲响应不变法、衰减函数')
xlabel('频率/Hz');
ylabel('幅度/dB');

```

结果:



## 2. 双线性变换法

代码: %IIR 滤波器设计: 双线性变换法

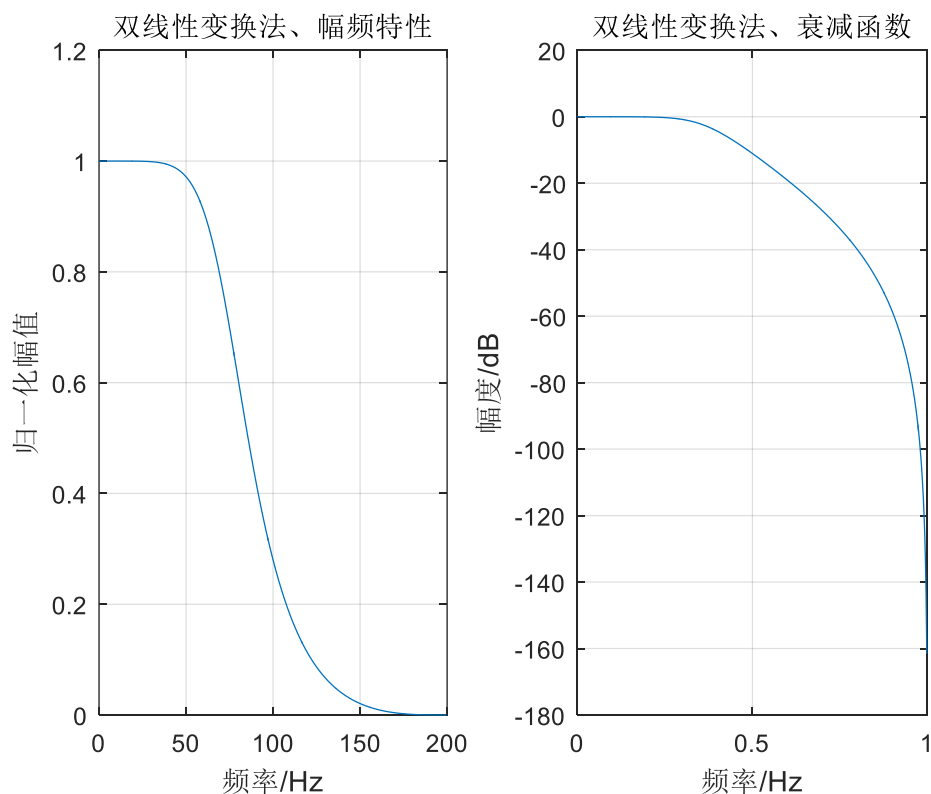
```

Fs=400;      %
T=1/Fs;      %抽样时间间隔
wp=0.3*pi;   %通带边缘频率
ws=0.8*pi;   %阻带边缘频率
Wp=(2/T)*tan(wp/2);
Ws=(2/T)*tan(ws/2);

```

```
Ap=1;
As=40;
[N,Wc]=buttord(Wp,Ws,Ap,As,'s');
[B,A]=butter(N,Wc,'s');
[D,C]=bilinear(B,A,Fs);
[Hz,W]=freqz(D,C);
f=(W*Fs)/(2*pi);
subplot(121);
plot(f,abs(Hz));
grid on;
title('双线性变换法、幅频特性');
xlabel('频率/Hz');
ylabel('归一化幅值');
subplot(122);
a=20*log10(abs(Hz));
plot(W/pi,a);
grid on;
title('双线性变换法、衰减函数');
xlabel('频率/Hz');
ylabel('幅度/dB');
结果:
```





#### 四、 学生作业

1. 利用 MATLAB 编程，用脉冲响应不变法和双线性变换法设计一个数字低通滤波器，指标要求如下：通带边缘频率： $\omega_p = 0.1\pi$ ，通带峰值起伏：

$$\alpha_p \leq 2\text{dB}; \quad \text{阻带边缘频率：} \omega_s = 0.9\pi, \quad \text{最小阻带衰减：} \alpha_s \geq 30\text{dB}。$$

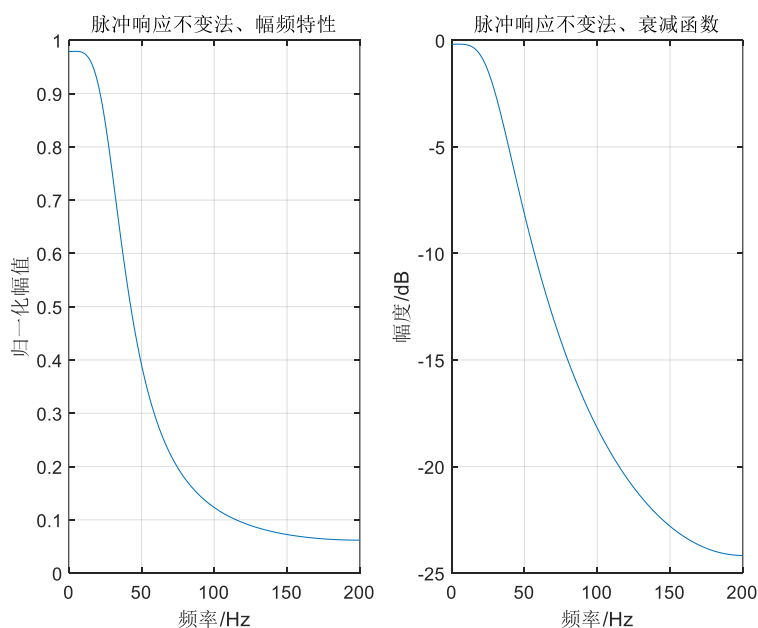
画出两种设计方法下的损耗函数和幅频特性。

程序代码：

```
Fs=400;          %
T=1/Fs;          %抽样时间间隔
wp=0.1*pi;       %通带边缘频率
ws=0.9*pi;       %阻带边缘频率
Wp=wp*Fs;
Ws=ws*Fs;
Ap=2;            %通带峰值起伏
As=30;           %最小阻带衰减
[N,Wc]=buttord(Wp,Ws,Ap,As,'s');
```

```
[B,A]=butter(N,Wc,'s');  
[D,C]=impinvar(B,A,Fs);  
[Hz,W]=freqz(D,C);  
f=(W*Fs)/(2*pi);  
subplot(121);  
plot(f,abs(Hz));  
grid on;  
title('脉冲响应不变法、幅频特性');  
xlabel('频率/Hz');  
ylabel('归一化幅值');  
subplot(122);  
a=20*log10(abs(Hz));  
plot(f,a);  
grid on;  
title('脉冲响应不变法、衰减函数')  
xlabel('频率/Hz');  
ylabel('幅度/dB');
```

运行截图：



2. 利用 MATLAB 编程设计一个 Butterworth 高通数字滤波器，通带边界频

率为 300Hz，阻带边界频率为 200Hz，通带波纹小于 1dB，阻带衰减大于 20dB，采样频率为 1000Hz，画出损耗函数和幅频特性。

运行代码:

```
% 指定滤波器参数
Fs = 1000; % 采样频率
Fpass = 300; % 通带边界频率
Fstop = 200; % 阻带边界频率
Ap = 1; % 通带波纹
Ast = 20; % 阻带衰减

% 计算滤波器阶数和截止频率
[N, Wn] = buttord(Fpass/(Fs/2), Fstop/(Fs/2), Ap, Ast);

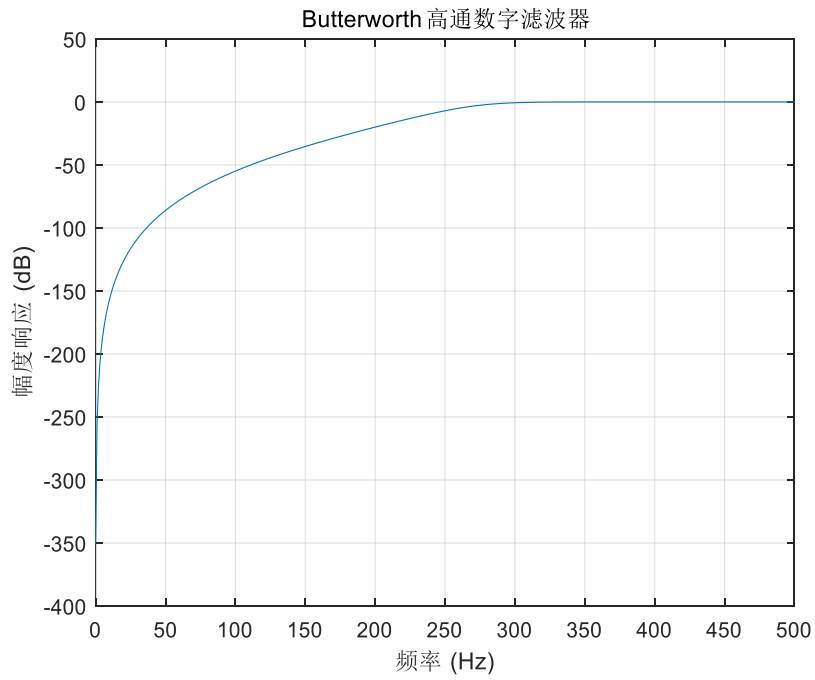
% 设计 Butterworth 高通数字滤波器
[b, a] = butter(N, Wn, 'high');

% 绘制损耗函数
fvtool(b, a, 'Fs', Fs, 'Analysis', 'freq', 'MagnitudeDisplay', 'Magnitude (dB)');

% 绘制幅频特性
f = 0:1:Fs/2;
H = freqz(b, a, f, Fs);

figure;
plot(f, 20*log10(abs(H)));
xlabel('频率 (Hz)');
ylabel('幅度响应 (dB)');
title('Butterworth 高通数字滤波器');
grid on;
```

运行截图:



滤波可视化工具:

