

数字信号处理



教师：吕巨建

电话：13430329713

邮箱：190067774@qq.com



数字信号处理主要知识点总结与复习

目录

1. 数字信号处理知识点概要
2. 离散时间信号与系统的时域分析
3. 离散时间信号与系统的 z 域分析和频域分析
4. 离散傅里叶变换
5. 快速离散傅里叶变换
6. 数字滤波器结构
7. 无限冲激响应(IIR) 数字滤波器设计
8. 有限冲激响应(FIR) 数字滤波器设计

1

数字信号处理知识点概要与基础

- 一. 数字信号处理知识点概要
- 二. 信号分类及相互关系
- 三. 数字信号的产生
- 四. 典型数字信号处理系统的主要构成



一、数字信号处理知识点概要



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

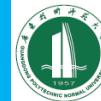


二、信号分类及相互关系



- ◆ **连续时间信号**：是指时间自变量在其定义的范围内，除若干不连续点以外均是连续的，且信号幅值在自变量的连续值上都有定义的信号。信号时间离散、幅值可以是连续的也可以是离散的。
- ◆ **模拟信号**：模拟信号是指用连续变化的物理量表示的信息，其信号的幅度，或频率，或相位随时间作连续变化，或在一段连续的时间间隔内，其代表信息的特征量可以在任意瞬间呈现为任意数值的信号。信号时间是连续、幅值是连续的。
- ◆ **离散时间信号**：只在一系列离散的时间点上才有确定值的信号，而在其他的时间点上无意义的信号就是离散时间信号。因此，离散时间信号在时间上是不连续的序列，并是离散时间变量的函数。信号时间是离散的、幅值可以是连续的也可以是离散的。
- ◆ **数字信号**：数字信号指自变量是离散的、因变量也是离散的信号，这种信号的自变量用整数表示，因变量用有限数字中的一个数字来表示。信号时间是离散、幅值是离散的。

三、数字信号的产生



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

模拟信号：时间和幅值均为连续的信号。

取样

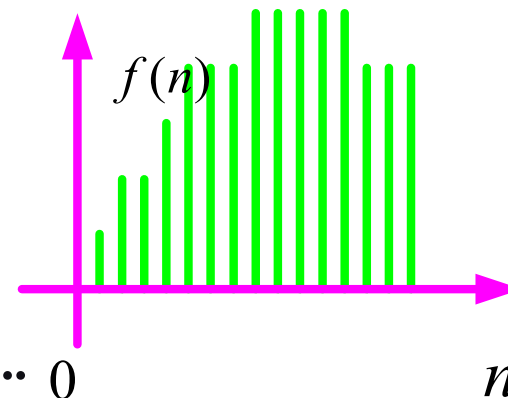
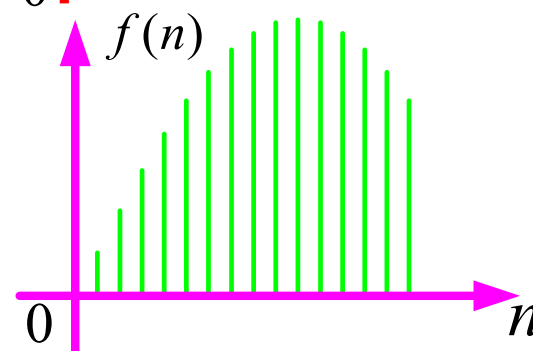
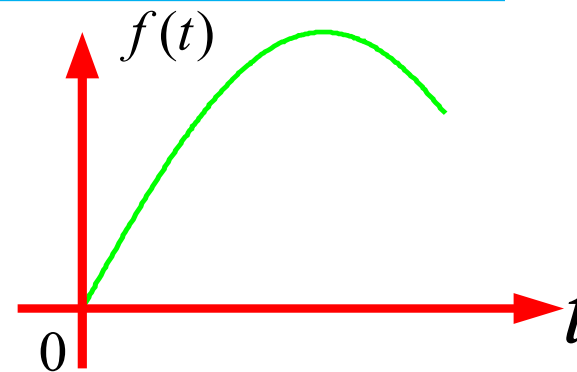
离散信号：时间是离散的，幅值是连续的信号。

量化

数字信号：时间和幅值均为离散的信号。

编码

001,010,010,011,100,100,100,101,101,101,101,101,.....

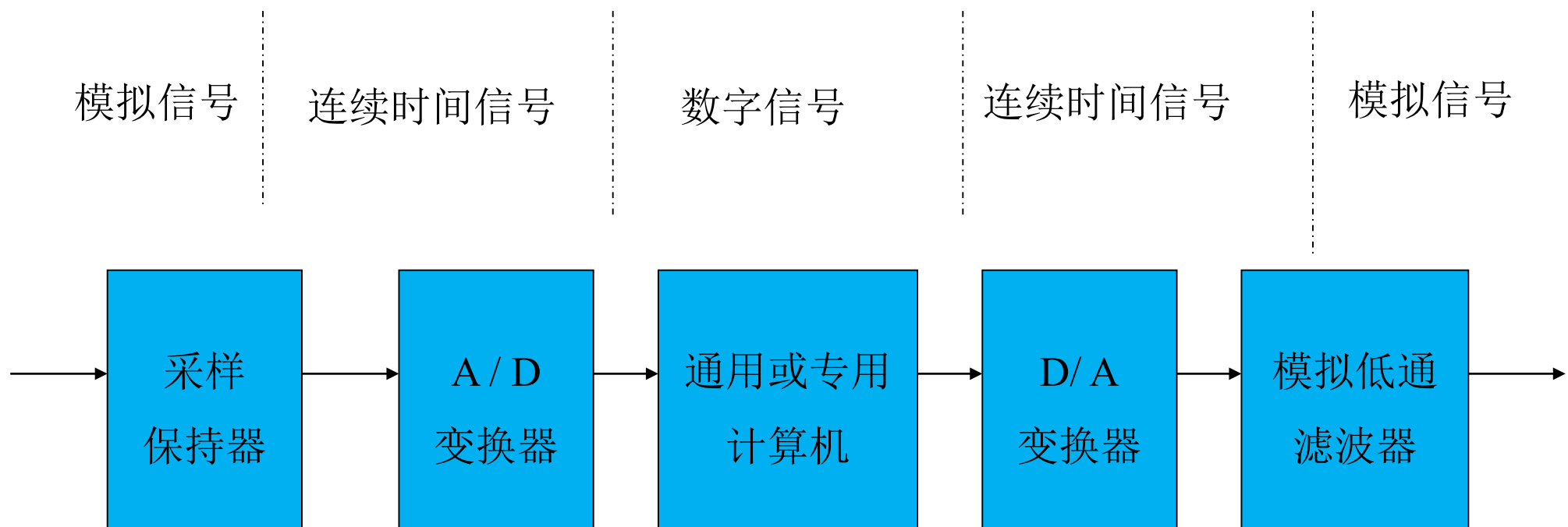




四、数字信号处理系统



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University



数字信号处理系统

2

离散时间信号与系统的时域分析

- 一. 典型序列及序列的基本运算
- 二. 周期序列的判断与周期 T 的求取
- 三. 线性时不变系统的判定
- 四. 线性卷积计算
- 五. 系统稳定性与因果性的判定
- 六. 线性时不变离散时间系统的表示方法



一、典型序列及序列的基本运算



◆ 典型序列

1. 单位采样序列 $\delta(n)$
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$
2. 单位阶跃序列 $u(n)$
$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$
3. 矩形序列 $R_N(n)$
$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases}$$
4. 实指数序列
$$x(n) = a^n u(n), \quad a \text{ 为实数}$$
5. 正、余弦序列
$$x(n) = A \sin(\omega n + \varphi)$$
$$x(n) = B \cos(\omega n + \varphi)$$
6. 复指数序列
$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega)n}$$

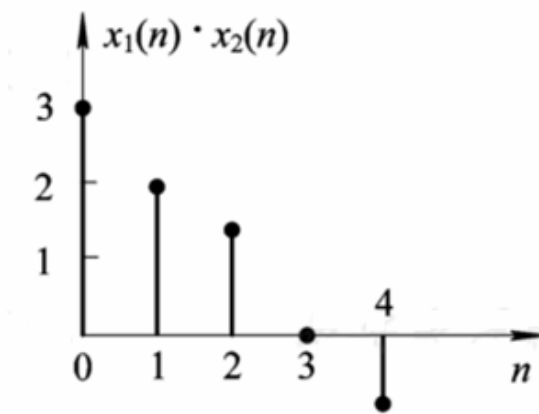
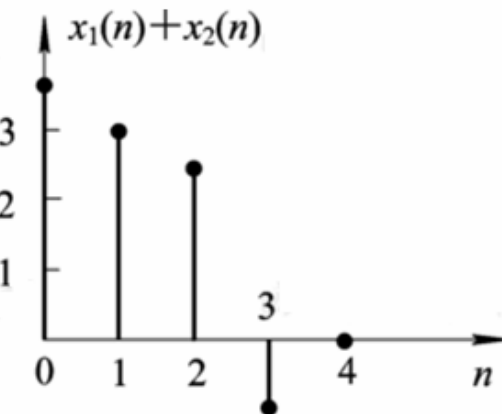
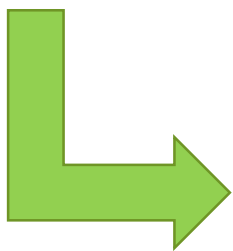
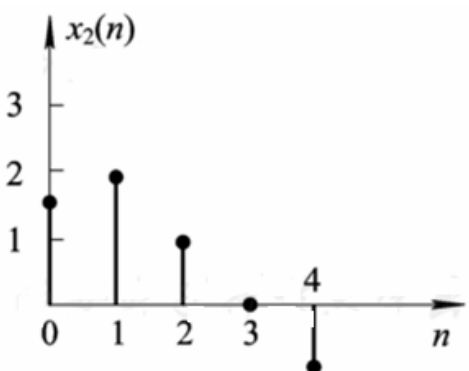
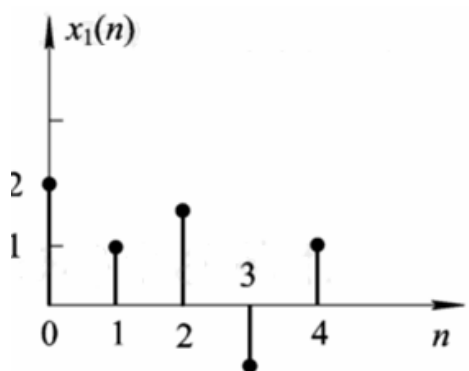


一、典型序列及序列的基本运算

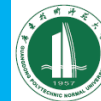


1. 加法和乘法

序列之间的加法和乘法，是指同一时刻的序列值逐项对应相加和相乘。



一、典型序列及序列的基本运算

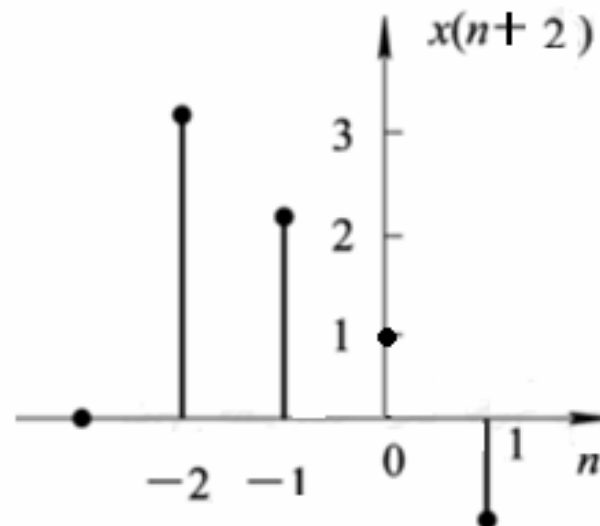
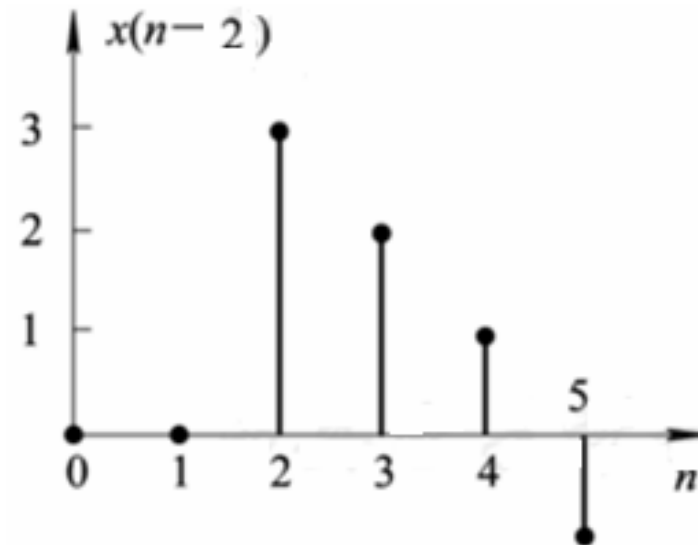
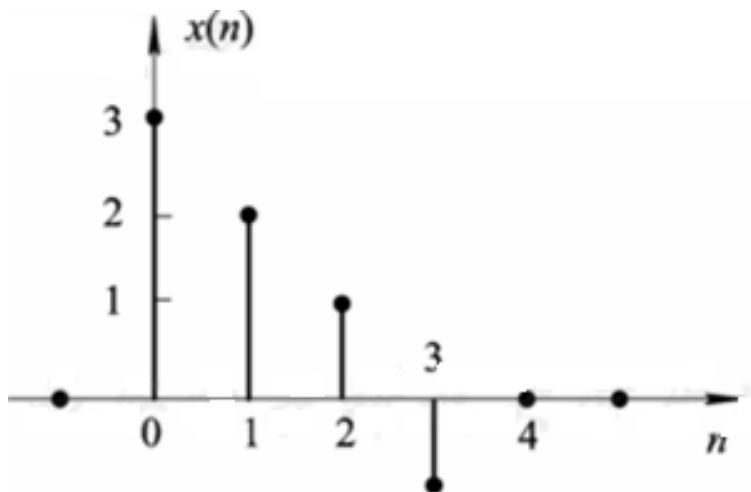


2. 移位

移位序列 $x(n - n_0)$,

当 $n_0 > 0$ 时称为 $x(n)$ 的延序列;

当 $n_0 < 0$ 时称为 $x(n)$ 的超前序列。

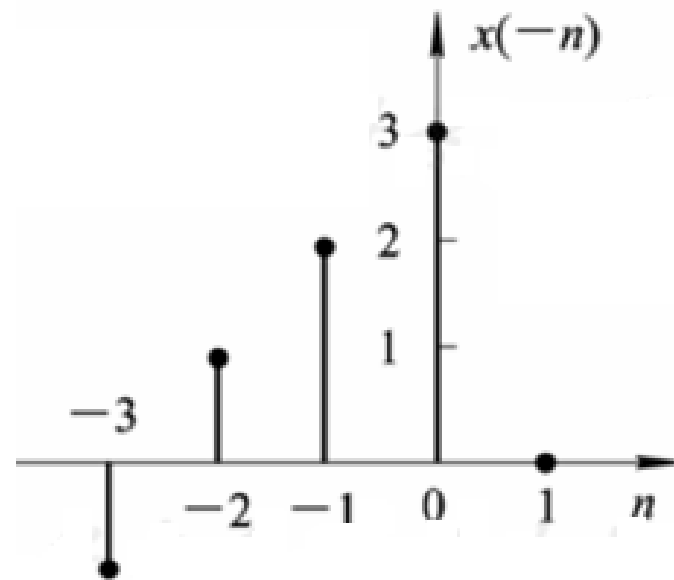
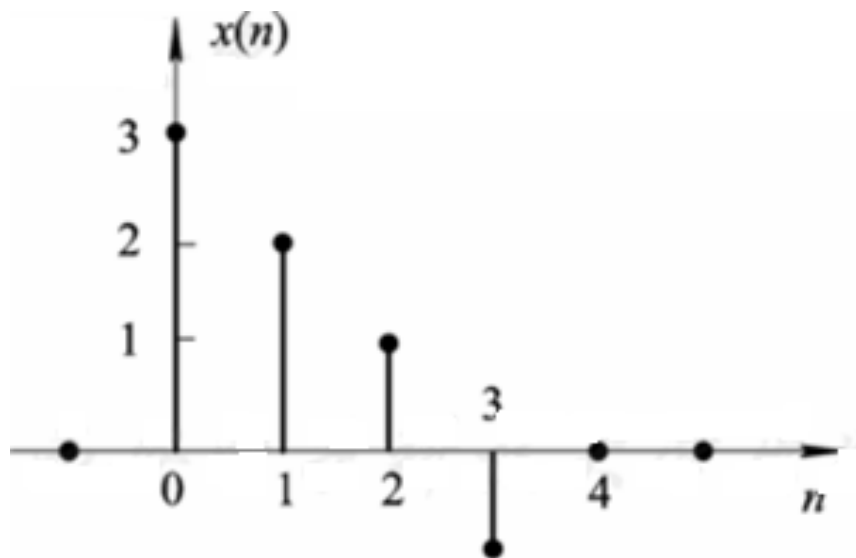


一、典型序列及序列的基本运算



3. 翻转

以纵轴为对称翻转。



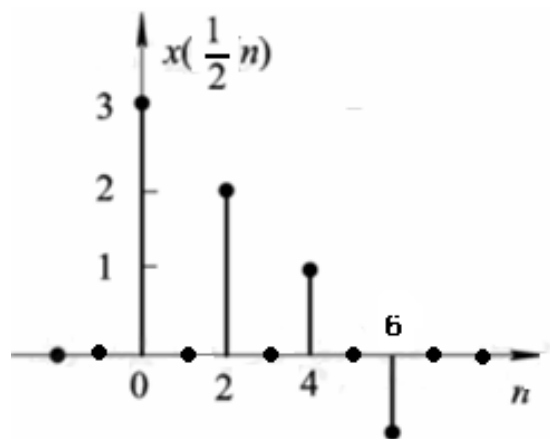
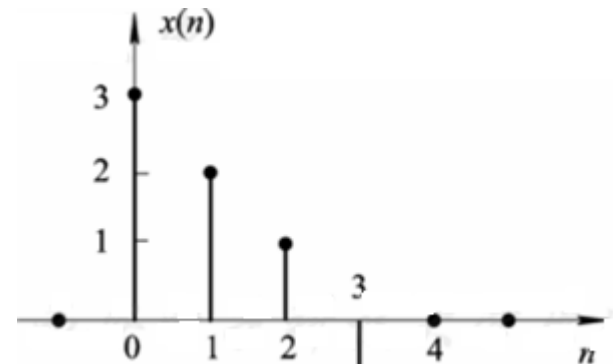
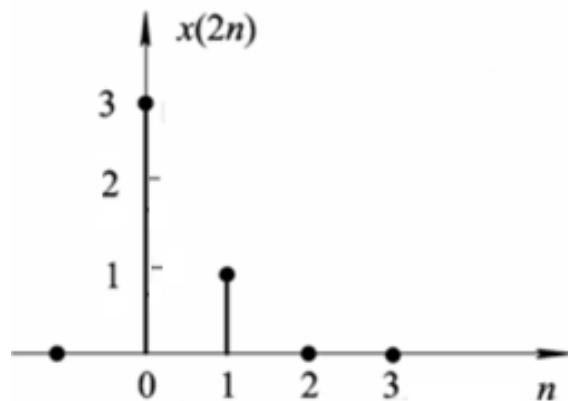
一、典型序列及序列的基本运算



4. 尺度变换

抽取: $x(Cn)$ 是 $x(n)$ 序列每连续 C 点取一点形成的序列, C 为正整数。

零值插入: $x[n/C]$ 表示把序列的两个相邻抽样值之间插入 $C-1$ 个零值, C 为正整数。



二、周期序列的判断与周期T的求取



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

序列的周期

◆定义:

如果对所有 n 存在一个最小的正整数 N , 使下面等式成立:

$$x(n) = x(n + N), \quad -\infty < n < \infty$$

则称序列 $x(n)$ 为周期性序列, 周期为 N 。

二、周期序列的判断与周期T的求取



◆ 一般正弦序列的周期性

设 $x(n) = A \sin(\omega_0 n + \varphi)$

式中， A 为幅度， ω_0 为数字域频率， φ 为初相。

那么 $x(n+N) = A \sin[\omega_0(n+N) + \varphi]$
 $= A \sin(\omega_0 n + \omega_0 N + \varphi)$

如果

$$x(n) = x(n+N)$$

则要求 $\omega_0 N = 2\pi k$ ，即 $N = \frac{2\pi}{\omega_0} k$ ， N, k 为整数，

且 k 的取值保证 N 是最小的正整数

- 1) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数时
- 2) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为有理数时
- 3) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数时

二、周期序列的判断与周期T的求取



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

◆ 一般正弦序列的周期性

1) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数时,

取 $k=1$, $x(n)$ 即是周期为 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 的周期序列

例:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad \omega_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{2\pi}{\omega_0} = 8 = N$$

该序列是周期为8的周期序列



二、周期序列的判断与周期T的求取



◆ 一般正弦序列的周期性

2) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为有理数时,

表示成 $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{P}{Q}$, P, Q 为互为素数的整数

取 $k = Q$, 则 $N = P$, $x(n)$ 即是周期为 P 的周期序列

例:

$$\sin\left(\frac{4\pi}{5}n\right), \quad \omega_0 = \frac{4\pi}{5}, \quad \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{5}{2},$$

该序列是周期为5的周期序列

二、周期序列的判断与周期T的求取



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

◆ 一般正弦序列的周期性

3) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数时,

取任何整数 k 都不能使 N 为正整数,
 $x(n)$ 不是周期序列

例:

$$\text{如 } \sin\left(\frac{1}{4}n\right), \quad \omega_0 = \frac{1}{4}, \quad \frac{2\pi}{\omega_0} = 8\pi$$

该序列不是周期序列



二、周期序列的判断与周期T的求取



习题: 判断下面的序列是否是周期的，若是周期的，确定其周期。

$$(1) \quad x(n) = A \cos\left(\frac{3}{7}\pi n - \frac{\pi}{8}\right) \quad A \text{是常数};$$

$$(2) \quad x(n) = e^{j\left(\frac{1}{8}n - \pi\right)}$$

解:

$$(1) \quad \omega = \frac{3}{7}\pi, \frac{2\pi}{\omega} = \frac{14}{3}$$

这是有理数，因此是周期序列，周期是 $T=14$;

$$(2) \quad \omega = \frac{1}{8}, \frac{2\pi}{\omega} = 16\pi$$

这是无理数，因此是非周期序列。

三、线性时不变系统的判定



1、线性系统：对于任何线性组合信号的响应等于系统对各个分量的响应的线性组合。

线性系统
判别准则

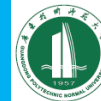
$$\begin{aligned} \text{若 } y_1(n) &= T[x_1(n)] \quad y_2(n) = T[x_2(n)] \\ \text{则 } T[ax_1(n) + bx_2(n)] &= ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned}$$

2、时不变系统：系统的参数不随时间而变化，不管输入信号作用时间的先后，输出信号的响应的形状均相同，仅是出现时间的不同

时不变系统
判别准则

$$\begin{aligned} \text{若 } y(n) &= T[x(n)] \\ \text{则 } T[x(n - n_0)] &= y(n - n_0) \end{aligned}$$

三、线性时不变系统的判定



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

例：判断下列系统是否为线性系统。

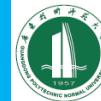
$$(a) y(n) = nx(n);$$

$$(b) y(n) = x(n^2);$$

$$(c) y(n) = x^2(n);$$

$$(d) y(n) = 3x(n) + 5$$

三、线性时不变系统的判定



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

解：(a)

$$y(n) = nx(n)$$

$$\because y_1(n) = nx_1(n) = T[x_1(n)], y_2(n) = nx_2(n) = T[x_2(n)]$$

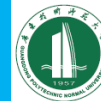
$$\therefore T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$$

$$= a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$$

$$= a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)]$$

故为线性系统。

三、线性时不变系统的判定



$$(b) \quad y(n) = x(n^2)$$

$$\because y_1(n) = x_1(n^2) = T[x_1(n)], y_2(n) = x_2(n^2) = T[x_2(n)]$$

$$\therefore T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1x_1(n^2) + a_2x_2(n^2)$$

$$= a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$$

$$= a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)]$$

故为线性系统。

三、线性时不变系统的判定



$$(c) \quad y(n) = x^2(n)$$

$$\because y_1(n) = x_1^2(n) = T[x_1(n)], y_2(n) = x_2^2(n) = T[x_2(n)]$$

$$\begin{aligned} \therefore T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] &= [a_1x_1(n) + a_2x_2(n)]^2 \\ &= a_1^2x_1^2(n) + a_2^2x_2^2(n) + 2a_1a_2x_1(n)x_2(n) \end{aligned}$$

$$a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)] = a_1x_1^2(n) + a_2x_2^2(n)$$

$$\text{可见: } T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] \neq a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)]$$

故不是线性系统。

三、线性时不变系统的判定



$$(d) \quad y(n) = 3x(n) + 5$$

$$\because y_1(n) = 3x_1(n) + 5 = T[x_1(n)], y_2(n) = 3x_2(n) + 5 = T[x_2(n)]$$

即，系统操作为乘3加5。

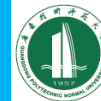
$$\therefore T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = 3[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] + 5$$

$$a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)] = 3a_1x_1(n) + 5a_1 + 3a_2x_2(n) + 5a_2$$

$$\text{可见: } T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] \neq a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)]$$

故不是线性系统。

三、线性时不变系统的判定



例：判断系统 $y(n) = ax(n) + b$ 是否是移不变系统。

其中a和b均为常数。

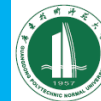
解： \because

$$T[x(n)] = ax(n) + b = y(n)$$

$$T[x(n-m)] = ax(n-m) + b = y(n-m)$$

故为移不变系统。

三、线性时不变系统的判定



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

例：判断系统 $y(n) = x(n) \sin(2\pi n + 0.1\pi)$ 是否是移不变系统。

解：

$$\because T[x(n)] = x(n) \sin(2\pi n + 0.1\pi) = y(n)$$

$$\therefore T[x(n-m)] = x(n-m) \sin(2\pi n + 0.1\pi)$$

又：

$$y(n-m) = x(n-m) \sin[2\pi(n-m) + 0.1\pi]$$

显然

$$T[x(n-m)] \neq y(n-m)$$

故不是移不变系统。



四、线性卷积的计算



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

离散卷积定义：

$$x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

计算方法：

- (1) 图示法（图解法）
- (2) 列表法
- (3) 解析法

计算特性：

- ① $y(n)$ 的长度—— $L_x + L_h - 1$ ；
- ② 两个序列中只要有一个是无限长序列，则卷积之后是无限长序列；
- ③ 卷积是线性运算，长序列可以分成短序列再进行卷积，但必须看清起点在哪里。



四、线性卷积的计算



卷积性质：

◆代数运算性质（交换律、结合律、分配律）

◆延迟性质

$$\text{若 } x_1(n) * x_2(n) = y(n)$$

$$\text{则 } x_1(n - m_1) * x_2(n - m_2) = y(n - m_1 - m_2)$$

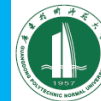
• 典型信号的卷积

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

$$x(n) * u(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$$



四、线性卷积的计算



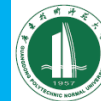
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

等效为翻褶、移位、相乘和相加四个步骤。

- 1) 翻褶: $x(n) \rightarrow x(m) \quad h(n) \rightarrow h(m) \rightarrow h(-m)$
 - 2) 移位: $h(-m) \rightarrow h(n-m)$
 - 3) 相乘: $x(m) \cdot h(n-m) \quad -\infty < m < \infty$
 - 4) 相加: $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$
- } $-\infty < n < \infty$



四、线性卷积的计算

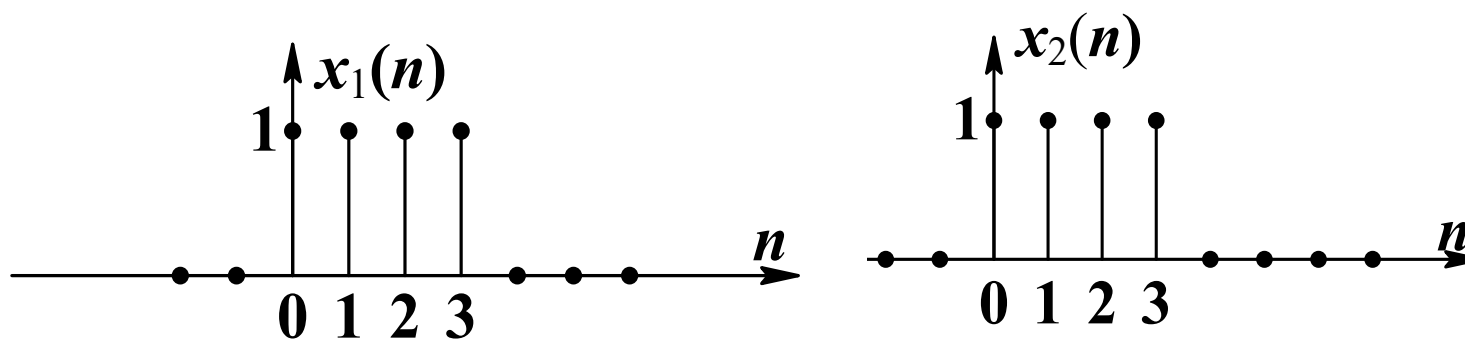


广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

◆ 图示法（图解法）

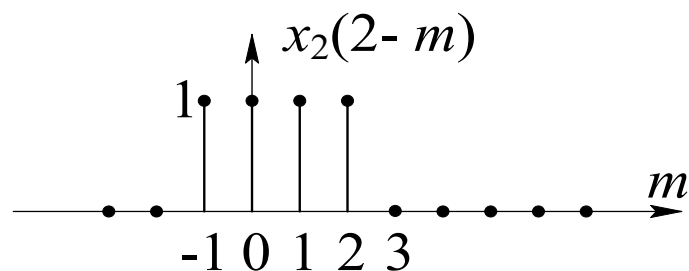
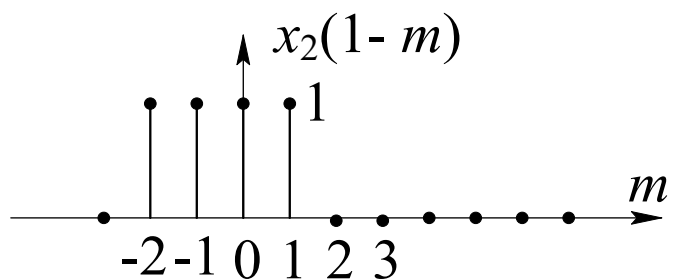
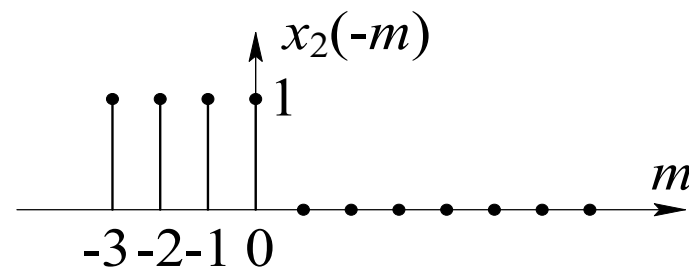
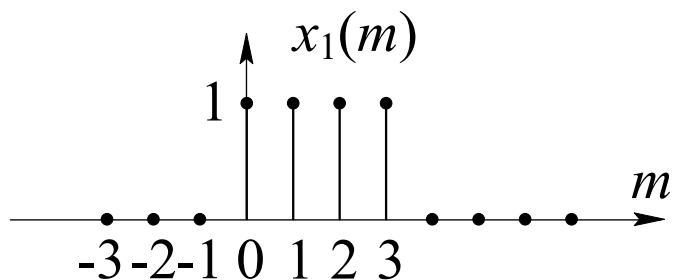
例：设 $x(n] = R_4(n)$ $x_2(n) = R_4(n)$

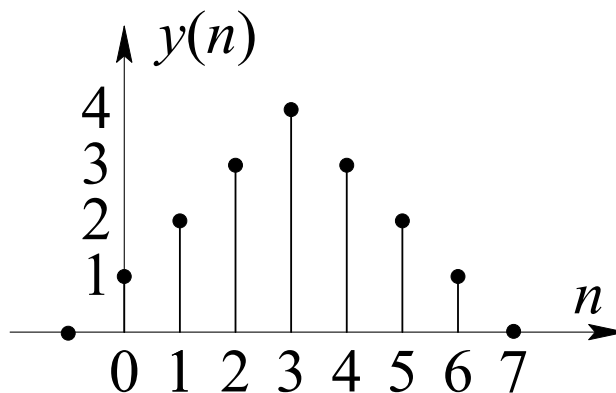
求： $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$





四、线性卷积的计算







四、线性卷积的计算



◆ 列表法

此法适用于两个有限长序列的卷积和

例:

若 $x(n)$ 在 $N_3 \leq n \leq N_4$ 范围内有非零值, $h(n)$ 在 $N_1 \leq n \leq N_2$ 范围内有非零值。求 $y(n) = x(n) * h(n)$ 在 n 的什么范围有值。

解:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_m x(m)h(n-m)$$

显然应满足 $N_3 \leq m \leq N_4$ $N_1 \leq n-m \leq N_2$

因而, 将两个不等式相加, 可得

$$N_1 + N_3 \leq n \leq N_2 + N_4$$



四、线性卷积的计算



◆ 列表法

例:

已知 $x(n) = \{1, 2, 4, 3\}$, $h(n) = \{2, 3, 5\}$

试用列表法求 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。

解:

$y(n)$ 的有值范围由 $N_1 + N_3 \leq n \leq N_2 + N_4$

应为 $-2 \leq n \leq 3$

而 m 的取值范围则由表达式确定

若取 $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_m x(m)h(n-m)$ 则 m 应为 $-2 \leq m \leq 1$

若取 $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_m h(m)x(n-m)$ 则 m 应为 $0 \leq m \leq 2$

取 $0 \leq m \leq 2$ 来列表



四、线性卷积的计算



$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_m h(m)x(n-m) \quad -2 \leq n \leq 3, \quad 0 \leq m \leq 2$$
$$x(n) = \{1, 2, \underline{4}, 3\} \quad h(n) = \{\underline{2}, 3, 5\}$$

m	0	1	2	
$\begin{array}{l} h(m) \\ x(n-m) \\ n \end{array}$	2	3	5	$y(n)$
-2	1	0	0	2
-1	2	1	0	7
0	4	2	1	19
1	3	4	2	28
2		3	4	29
3			3	15

$$y(n) = \{2, 7, \underline{19}, 28, 29, 15\}$$

◆ 四、线性卷积的计算



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

◆ 解析法

适用于有限长序列。

例：

$$\text{设 } x(n) = \{4, 2, 3, 1\}, \quad h(n) = \{2, 4, 1\}$$

$$\text{求 } y(n) = x(n) * h(n)。$$

解：

首先将两序列排成两行，且将其各自 n 最大的序列值对齐（即按右端对齐），然后做乘法运算，但是不要进位，最后将同同一列的乘积值相加即得到卷积的结果。



四、线性卷积的计算



例： 设 $x(n) = \{4, 2, 3, 1\}$, $h(n) = \{2, \underline{4}, 1\}$

求 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。

解：

$$\begin{array}{rcccccc} & & & 4 & 2 & 3 & 1 \\ & & \times & & 2 & 4 & 1 \\ \hline & & & 4 & 2 & 3 & 1 \\ & 16 & 8 & 12 & 4 & & \\ 8 & 4 & 6 & 2 & & & \\ \hline 8 & 20 & 18 & 16 & 7 & 1 \end{array}$$

由于 $x(n)$ 的取值为 $n = 0$ 至3区间，而 $h(n)$ 的取值为 $n = -2$ 至0，所以 $y(n)$ 的取值应为 $n = -2$ 至3区间，
 $y(n) = \{8, 20, \underline{18}, 16, 7, 1\}$

◆ 五、系统稳定性与因果性的判定



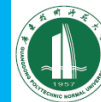
◆ 因果系统：

- (1) 响应不出现于激励之前；
- (2) $h(n)=0, \quad n<0$ （线性、时不变系统）。

◆ 稳定系统：

- (1) 有界输入导致有界输出；
- (2) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ （线性、时不变系统）；
- (3) $H(z)$ 的极点均位于 z 平面单位圆内（因果系统）。

◆ 五、系统稳定性与因果性的判定



系统	时域充要条件	Z域充要条件
因果	$h(n) \equiv 0 \ (n < 0)$	ROC: $R_1 < Z \leq \infty$
稳定	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) < \infty$	ROC: 包含单位圆

五、系统稳定性与因果性的判定



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

例：判断下列系统是否为因果系统。

$$(a)y(n) = x(n) - x(n-2) \quad (b)y(n-1) = x(n) - x(n-1)$$

$$(c)y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) \quad (d)y(n) = x(-n)$$

解：

(a) $y(n) = x(n) - x(n-2)$ 为因果系统，由定义可知。

(b) $y(n-1) = x(n) - x(n-1)$ 由于 $y(n-1)$ 领先于 $x(n)$ ，故为非因果系统。

(c) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$ 由于 $y(n)$ 由目前和过去的输入所决定，故为因果系统。

(d) $y(n) = x(-n)$ 由于 $n=-1$ 时，有 $y(-1) = x(1)$ ；

五、系统稳定性与因果性的判定



例： 设LTI系统的单位系统脉冲响应 $h(n)=a^n u(n)$ ，式中 a 是实常数，试分析该系统的因果稳定性。

解： (1) 因果性：

由于 $n < 0$ 时， $h(n) = 0$ ，因此系统是因果的。

(2) 稳定性：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \begin{cases} \frac{1}{1-|a|} & |a| < 1 \\ \infty & |a| \geq 1 \end{cases}$$

$\therefore |a| < 1$ 时，系统稳定； $|a| \geq 1$ 时，系统不稳定。

稳定的因果系统是物理可实现系统。

◆ 六、线性时不变离散时间系统的表示方法



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

5、差分方程——描述系统输入输出之间的运算关系

N阶线性常系数差分方程的一般形式：

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N b_i y(n-i)$$

其中 a_i 、 b_i 都是常数。

离散系统差分方程表示法有两个主要用途：

- ① 求解系统的瞬态响应；
- ② 由差分方程得到系统结构；

◆ 六、线性时不变离散时间系统的表示方法



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

◆ 差分方程表达式

连续时间线性时不变系统 \longrightarrow 线性常系数微分方程

离散时间线性时不变系统 \longrightarrow 线性常系数差分方程

一个 N 阶线性常系数差分方程用下式表示：

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

离散系统差分方程表示法有两个主要用途：

- ① 求解系统的瞬态响应；
- ② 由差分方程得到系统结构；

◆ 六、线性时不变离散时间系统的表示方法



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

◆ 差分方程求解方法

求解差分方程的基本方法有三种：

- 经典法 → 求齐次解、特解、全解。
- 递推法 → 求解时需用初始条件启动计算。
- 变换域法 → 将差分方程变换到Z域进行求解。

◆ 六、线性时不变离散时间系统的表示方法



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

例：设差分方程为 $y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) - b_1y(n-1)$ 求输出序列。

设系统参数 $a_0 = 1.5, a_1 = 0, b_1 = -\frac{1}{2}$

$$y(n) = 1.5x(n) + \frac{1}{2}y(n-1)$$

设输入为 $x(n) = \delta(n)$ 初始条件为 $y(n) = 0, n < 0$

解：

$$n = 0, \quad y(0) = 1.5x(0) + \frac{1}{2}y(-1) = 1.5$$

$$n = 1, \quad y(1) = 1.5x(1) + \frac{1}{2}y(0) = 1.5 \times \frac{1}{2}$$

$$n = 2, \quad y(2) = 1.5x(2) + \frac{1}{2}y(1) = 1.5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

.....

依次类推

$$y(n) = 1.5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$y(n) = 0, \quad n < 0$$

◆ 六、线性时不变离散时间系统的表示方法



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

例：

已知系统函数 $H(z) = \frac{2 + 0.25z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1} + 0.3z^{-2}}$ ，求其差分方程。

解：

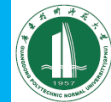
$$H(z) = \frac{2 + 0.25z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1} + 0.3z^{-2}}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + 0.25z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1} + 0.3z^{-2}}$$

$$Y(z)(1 - 0.25z^{-1} + 0.3z^{-2}) = X(z)(2 + 0.25z^{-1})$$

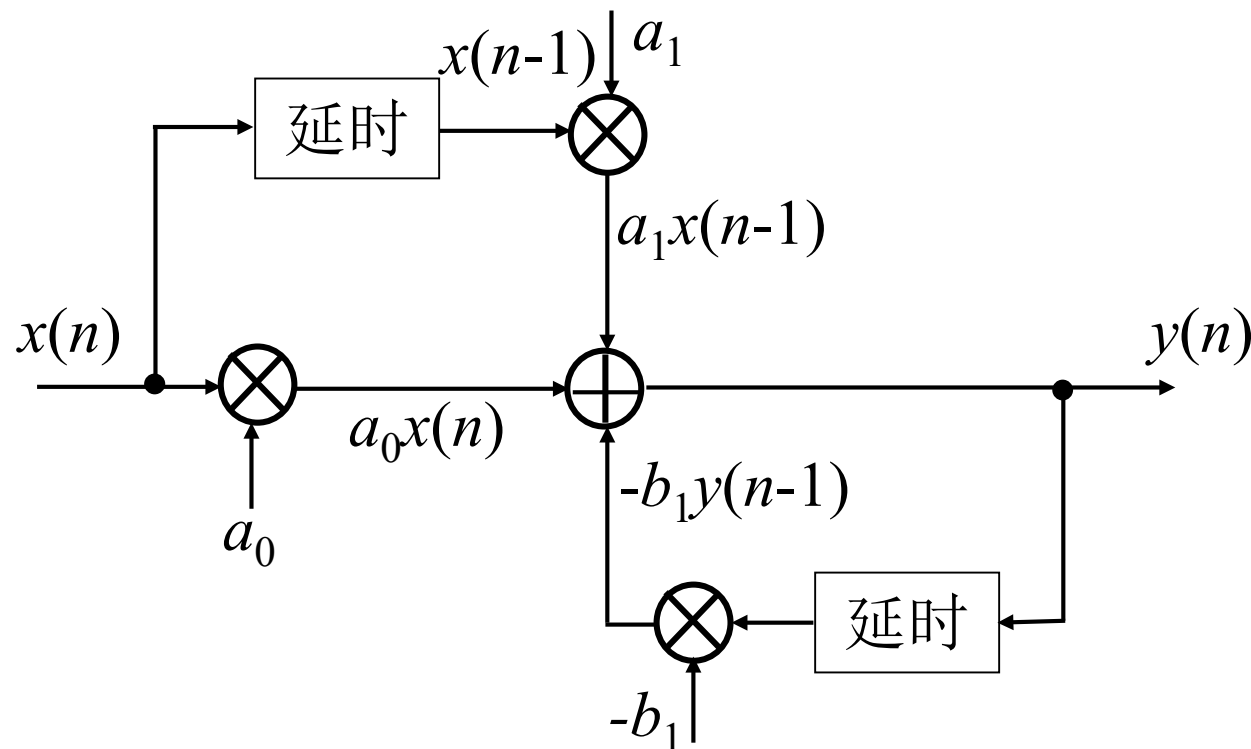
$$y(n) - 0.25y(n-1) + 0.3y(n-2) = 2x(n) + 0.25x(n-1)$$

◆ 六、线性时不变离散时间系统的表示方法



差分方程表示法可以直接得到系统的结构。

$$y(n] = a_0x(n) + a_1x(n-1) - b_1y(n-1)$$



3

离散时间信号与系统的 z 域分析和频域分析

- 一. z 变换的定义及收敛域
- 二. z 变换的反变换
- 三. z 变换的基本性质和定理
- 四. 离散系统的 z 变换法描述
- 五. 时间信号与频谱信号波形之间的一般关系



一. z 变换的定义及收敛域



定义:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$x(n) \Leftrightarrow X(z), |z|: (\gamma_1, \gamma_2)$$

z 是复变量, 所在的复平面称为 z 平面。

收敛域: 对于任意给定序列 $x(n)$, 使其 z 变换 $X(z)$ 收敛的所有 z 值的集合称为 $X(z)$ 的收敛域。收敛的充要条件是满足绝对可和:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = M < \infty$$

一. z变换的定义及收敛域



◆ 1) 有限长序列

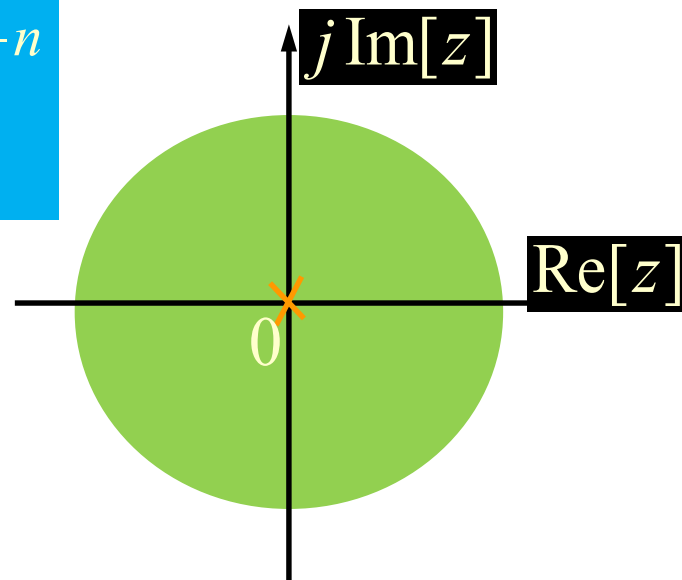
$$x(n) = \begin{cases} x(n) & n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases}$$

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} q^n = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}$$

$n_2 \rightarrow \infty$ 时须满足 $|q| < 1$

$$\text{其Z变换: } X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

Roc 至少为: $0 < |z| < \infty$





一. z 变换的定义及收敛域



$$X(z) = x(n_1)z^{-n_1} + x(n_1 + 1)z^{-(n_1+1)} + \cdots + x(-1)z^1 \\ + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + \cdots + x(n_2 - 1)z^{-(n_2-1)} + x(n_2)z^{-n_2}$$

除0和 ∞ 两点是否收敛与 n_1 和 n_2 取值情况有关外，整个 z 平面均收敛。

- 如果 $n_2 \leq 0$ ，则收敛域不包括 ∞ 点

$$n_1 < 0, n_2 \leq 0 \text{ 时, } 0 \leq |z| < \infty$$

- 如果 $n_1 \geq 0$ ，则收敛域不包括0点

$$n_1 \geq 0, n_2 > 0 \text{ 时, } 0 < |z| \leq \infty$$

- 如果 $n_1 < 0 < n_2$ ，收敛域不包括0、 ∞ 点

$$n_1 < 0, n_2 > 0 \text{ 时, } 0 < |z| < \infty$$

一. z变换的定义及收敛域



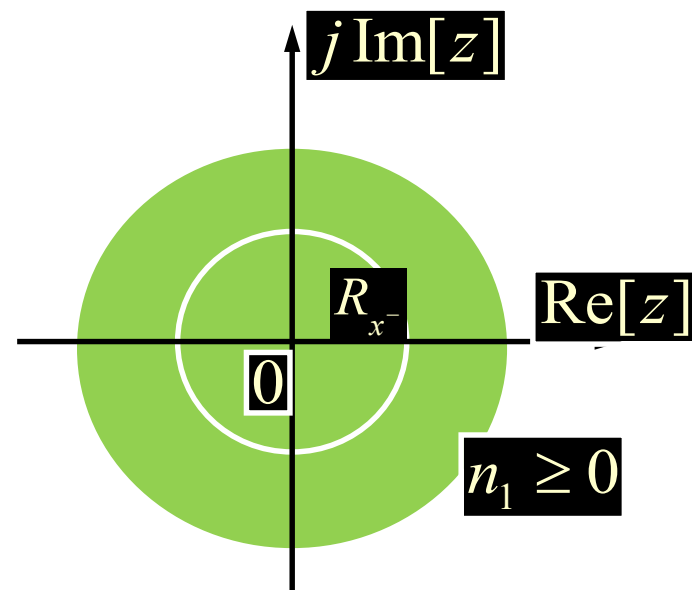
广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

◆ 2) 右边序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n) & n \geq n_1 \\ 0 & n < n_1 \end{cases}$$

∴ 当 $n_1 \geq 0$ 时, $Roc: R_{x^-} < |z| \leq \infty$

当 $n_1 < 0$ 时, $Roc: R_{x^-} < |z| < \infty$



因果序列的z变换必在 ∞ 处收敛 包括 $z = \infty$ 处
在 ∞ 处收敛的z变换, 其序列必为因果序列。

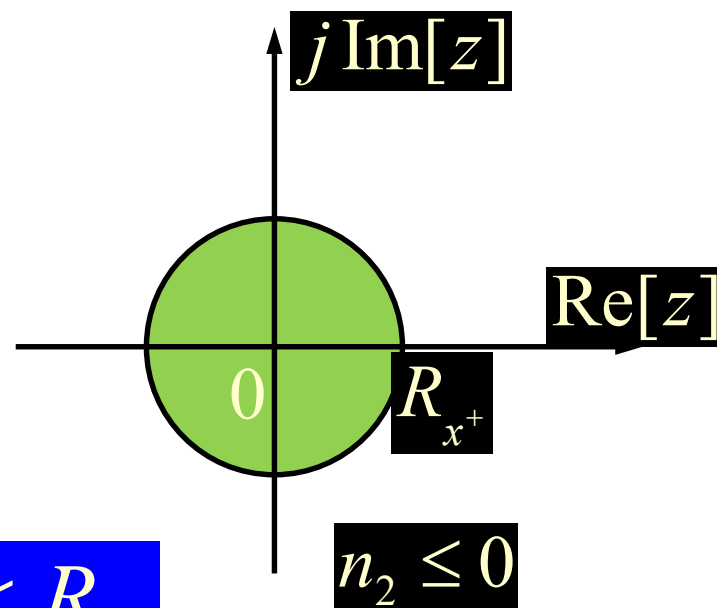
一. z 变换的定义及收敛域



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

◆ 3) 左边序列

$$x(n) = \begin{cases} 0 & n > n_2 \\ x(n) & n \leq n_2 \end{cases}$$



\therefore 当 $n_2 \leq 0$ 时, $Roc: 0 \leq |z| < R_{x^+}$

当 $n_2 > 0$ 时, $Roc: 0 < |z| < R_{x^+}$



一. z变换的定义及收敛域



◆ 4) 双边序列

n 为任意值时皆有值

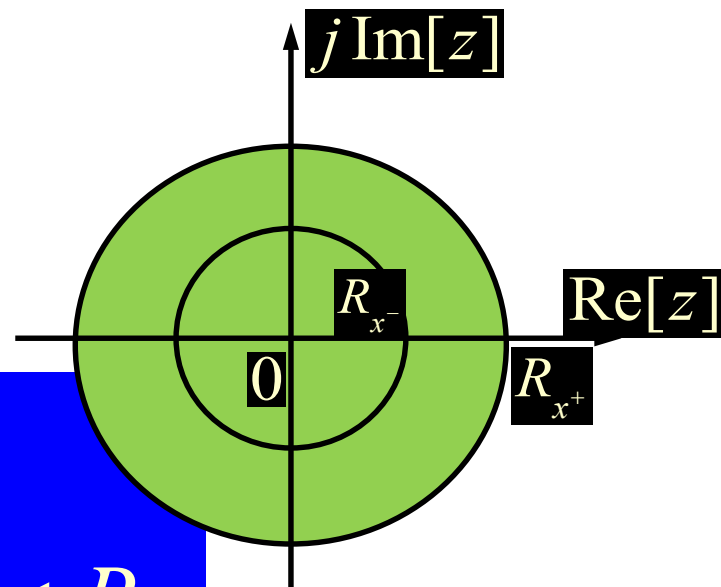
$$\text{其}z\text{变换: } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$\text{前式Roc: } 0 \leq |z| < R_{x^+}$$

$$\text{后式Roc: } R_{x^-} < |z| \leq \infty$$

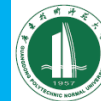
\therefore 当 $R_{x^-} \geq R_{x^+}$ 时, $Roc: \emptyset$

当 $R_{x^-} < R_{x^+}$ 时, $Roc: R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$





一. z 变换的定义及收敛域



例:

$$\delta[n] \xleftrightarrow{ZT} 1, 0 \leq |z| \leq \infty$$

$$\because \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$$

收敛域应是整个 z 的闭平面。



一. z 变换的定义及收敛域



例：求 $x(n)=R_N(n)$ 的 z 变换及其收敛域。

$$\text{解： } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n)z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z - 1)}$$

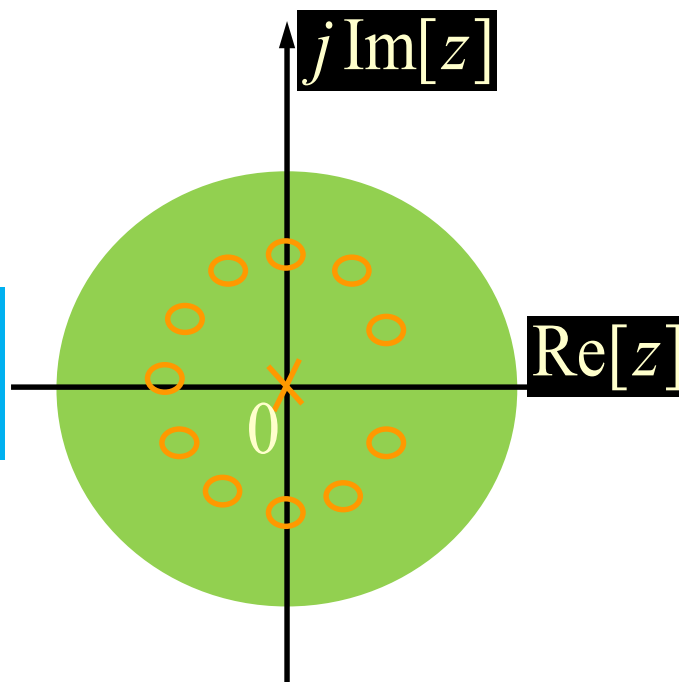
$$\text{零点： } z = e^{j\frac{2\pi r}{N}} \quad r = 1, \dots, N-1$$

$$\text{极点： } z = 0 \quad (N-1) \text{ 阶}$$

$$\text{Roc： } 0 < |z| < \infty$$

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} q^n = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1 - q}$$

$n_2 \rightarrow \infty$ 时须满足 $|q| < 1$



一. z 变换的定义及收敛域



例：求 $x(n)=a^n u(n)$ 的变换及其收敛域。

$$\text{解： } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

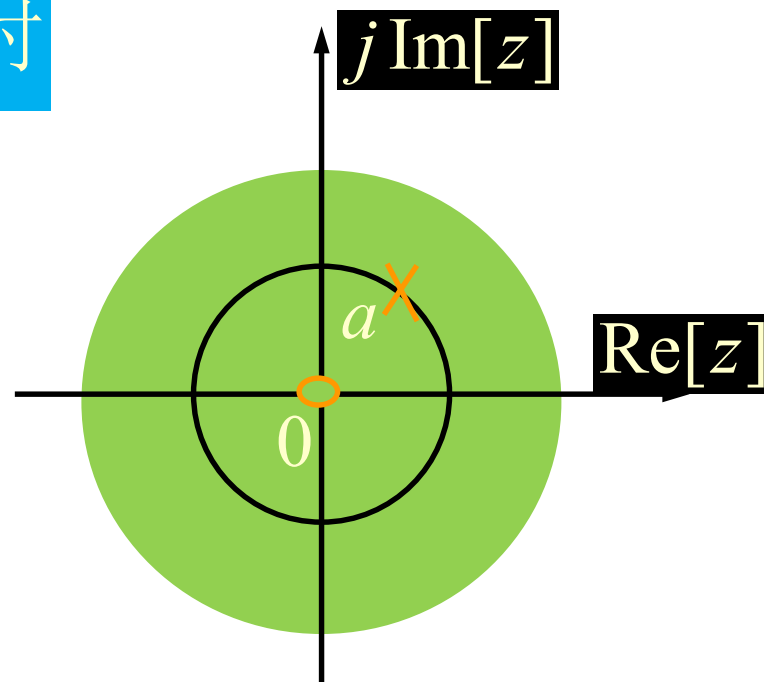
$$= \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$\text{当 } |az^{-1}| < 1 \text{ 时}$$

$$\text{Roc: } |z| > |a|$$

$$\text{零点: } z = 0$$

$$\text{极点: } z = a$$





一. z 变换的定义及收敛域



例：求 $x(n)=-a^n u(-n-1)$ 的变换及其收敛域。

$$\text{解： } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-1}^{-\infty} -a^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -a^{-n} z^n$$

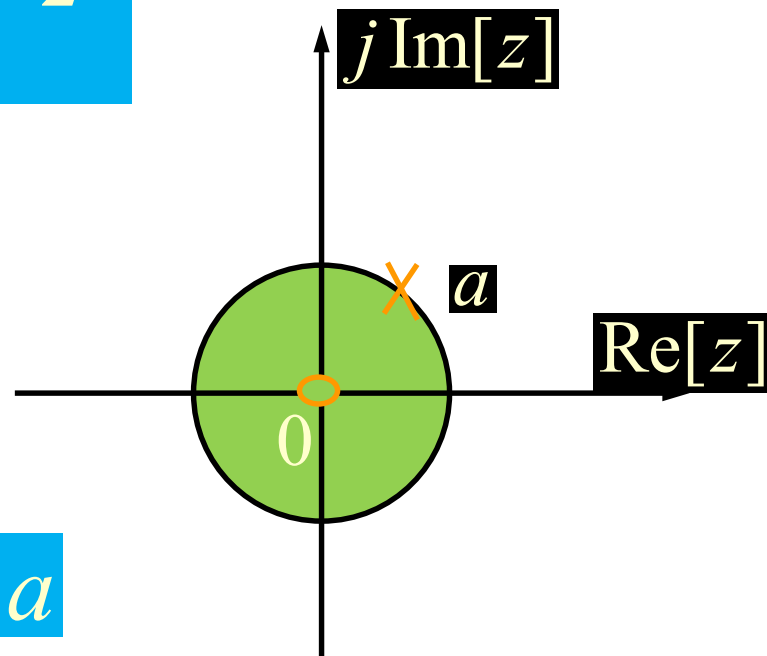
$$= \frac{-a^{-1} z}{1 - a^{-1} z} = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$

$$\text{Roc: } |z| < |a|$$

零点: $z = 0$

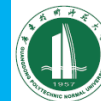
极点: $z = a$

当 $|a^{-1} z| < 1$ 时





一. z变换的定义及收敛域



例：求 $x(n)=a^{|n|}$ ， a 为实数，求ZT及其收敛域。

$$\text{解： } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|}z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$\because \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n = \frac{az}{1-az}$$

$$|az| < 1 \Rightarrow |z| < 1/|a|$$

$$\because \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$



一. z 变换的定义及收敛域



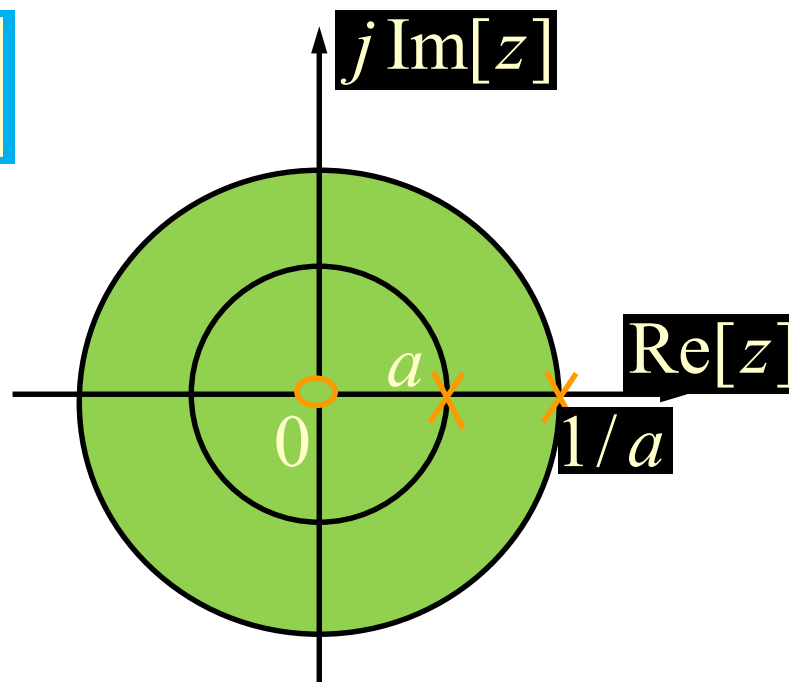
\therefore 当 $|a| \geq 1$ 时, 无公共收敛域, $X(z)$ 不存在

$$\text{当 } |a| < 1 \text{ 时, } X(z) = \frac{az}{1-az} + \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z(1-a^2)}{(1-az)(z-a)}$$

$$Roc: |a| < |z| < 1/|a|$$

零点: $z = 0, \infty$

极点: $z = a, a^{-1}$





一. z 变换的定义及收敛域



z 变换的收敛性总结:

- 1. 有限长序列: 在除原点外的全 z 平面上收敛;
- 2. 无限长右序列: 在一个半径为 r (称为收敛半径) 的圆外的全 z 平面上收敛;
- 3. 无限长左序列: 在一个半径为 r (也称为收敛半径) 的圆内收敛;
- 4. 双向无限序列: 右序列和右序列收敛区的 (环形) 公共区, 也可能没有。



一. z 变换的定义及收敛域



* 给定 z 变换 $X(z)$ 不能唯一地确定一个序列，只有同时给出收敛域才能唯一确定！！！！

$X(z)$ 在收敛域内解析，不能有极点，故：

➤ 右边序列的 z 变换收敛域一定在模最大的有限极点所在圆之外；

➤ 左边序列的 z 变换收敛域一定在模最小的有限极点所在圆之内。



二. Z变换的反变换



z反变换: 从 $X(z)$ 中还原出原序列 $x(n)$ 。

$$x(n) = IZT[X(z)]$$

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

实质: 求 $X(z)$ 幂级数展开式。



二. Z变换的反变换



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

z 反变换的求解方法:

- ◆ 围线积分法（留数法）
- ◆ 部分分式法
- ◆ 长除法

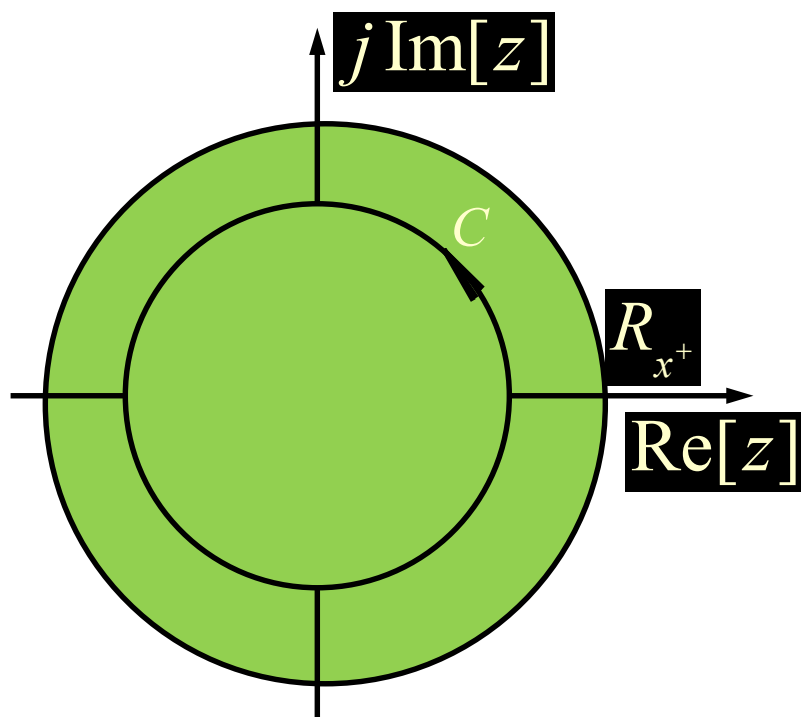


二. Z变换的反变换



◆ 1、围数积分法求解（留数法）

若函数 $X(z)z^{n-1}$ 在围数 C 上连续，在 C 以内有 K 个极点 z_k ，而在 C 以外有 M 个极点 z_m ，则有：



$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

$$= \sum_k \text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_k}$$

$$\text{or} = - \sum_m \text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_m}$$

$$\text{Res}[F(z)]_{z=z_r} = [(z - z_r)F(z)]_{z=z_r}$$



二. Z变换的反变换



根据复变函数理论，若函数 $X(z)$ 在环状区域

$$R_{x^-} < |z| < R_{x^+}, \quad (R_{x^-} \geq 0, R_{x^+} \leq \infty)$$

内是解析的，则在此区域内 $X(z)$ 可展开成罗朗级数，即

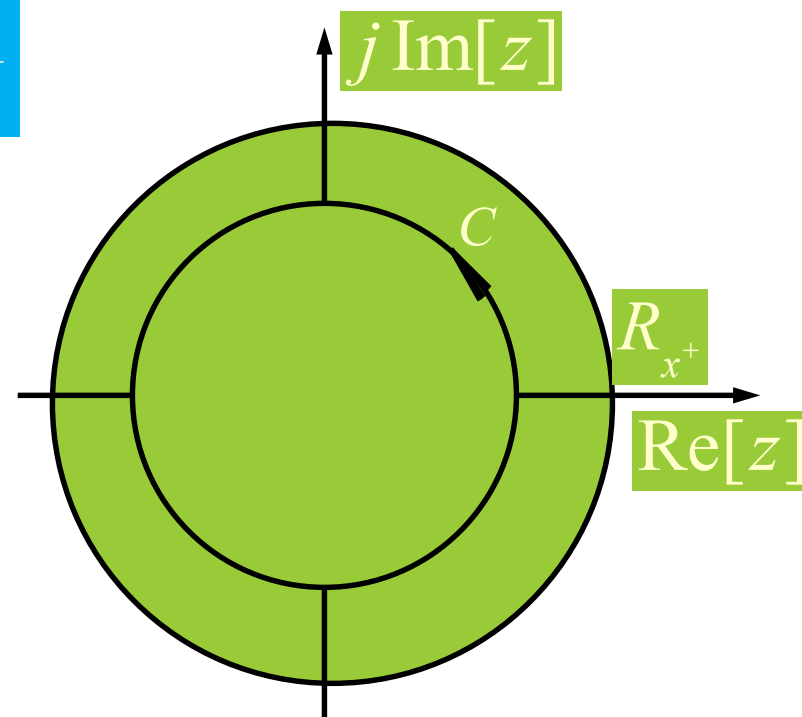
而

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^{-n} \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

其中围线 c 是在 $X(z)$ 的环状收敛域内环绕原点的一条反时针方向的闭合单围线。

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$





二. Z变换的反变换



$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad c \in (R_{x^-}, R_{x^+})$$

利用留数定理求围线积分，令

$$F(z) = X(z) z^{n-1}$$

若 $F(z)$ 在围线 c 上连续，在 c 内有 K 个极点 z_k ，则：

$$x(n) = \sum_k \text{Res}[F(z)]_{z=z_k}$$

若 $F(z)$ 在 c 外 M 个极点 z_m ，且分母多项式 z 的阶次比分子多项式高二阶或二阶以上，则：

$$x(n) = - \sum_m \text{Res}[F(z)]_{z=z_m}$$

单阶极点的留数：

$$\text{Res}[F(z)]_{z=z_r} = [(z - z_r)F(z)]_{z=z_r}$$



二. Z变换的反变换



例1: $X(z) = \frac{z^2}{(4-z)(z-1/4)}$, $1/4 < |z| < 4$, 求其z反变换

解: $x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z^2}{(4-z)(z-1/4)} z^{n-1} dz \quad c \in (R_{x^-}, R_{x^+})$

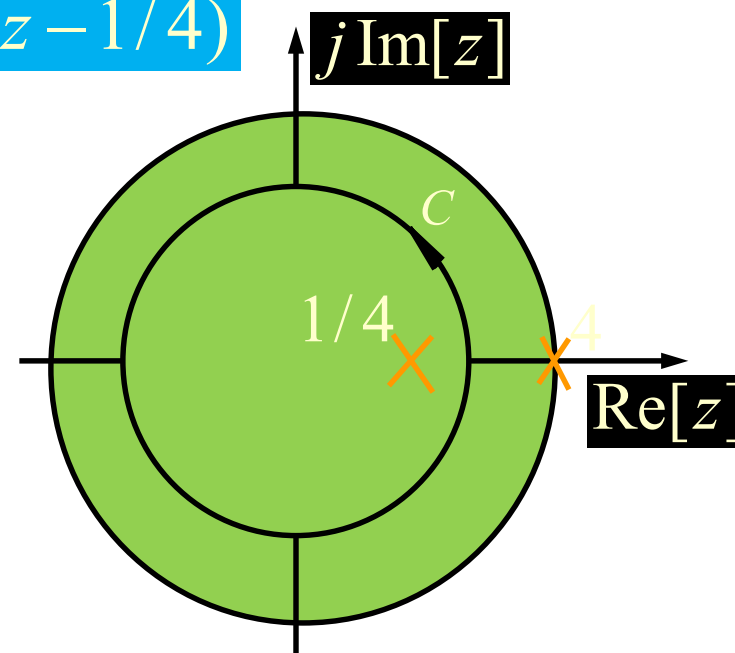
其中: $F(z) = \frac{z^2}{(4-z)(z-1/4)} z^{n-1} = \frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-1/4)}$

当 $n \geq -1$ 时

$F(z)$ 在围线 c 内只有一阶极点 $z = \frac{1}{4}$

$x(n) = \text{Res}[F(z)]_{z=\frac{1}{4}}$

$$= \left[\left(z - \frac{1}{4} \right) \frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-1/4)} \right]_{z=\frac{1}{4}} = \frac{4^{-n}}{15}$$





二. Z变换的反变换



当 $n < -1$ 时

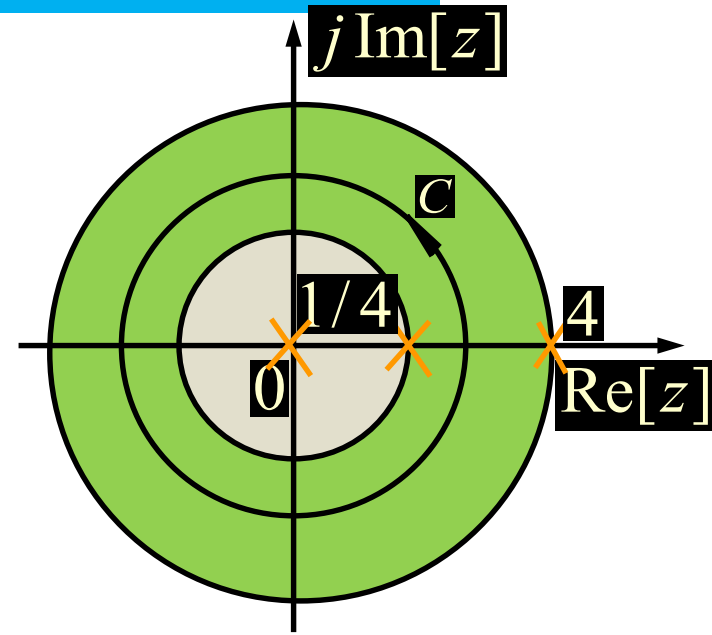
$F(z)$ 在围线 c 内有一阶极点 $z = \frac{1}{4}$ 和 $-(n+1)$ 阶极点 $z = 0$

而围线 c 外只有一阶极点 $z=4$ ，且 $F(z)$ 的分母多项式阶次高于分子多项式阶次两次以上

$$x(n) = -\text{Res}[F(z)]_{z=4}$$

$$= -\left[(z-4) \frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-1/4)} \right]_{z=4} = \frac{4^{n+2}}{15}$$

$$\therefore x(n) = \frac{4^{-n}}{15} u(n+1) + \frac{4^{n+2}}{15} u(-n-2)$$





二. Z变换的反变换



例2: $X(z) = \frac{z^2}{(4-z)(z-1/4)}$, $|z| > 4$, 求其z反变换

解: \because 收敛域是圆的外部

$\therefore x(n)$ 是右边序列

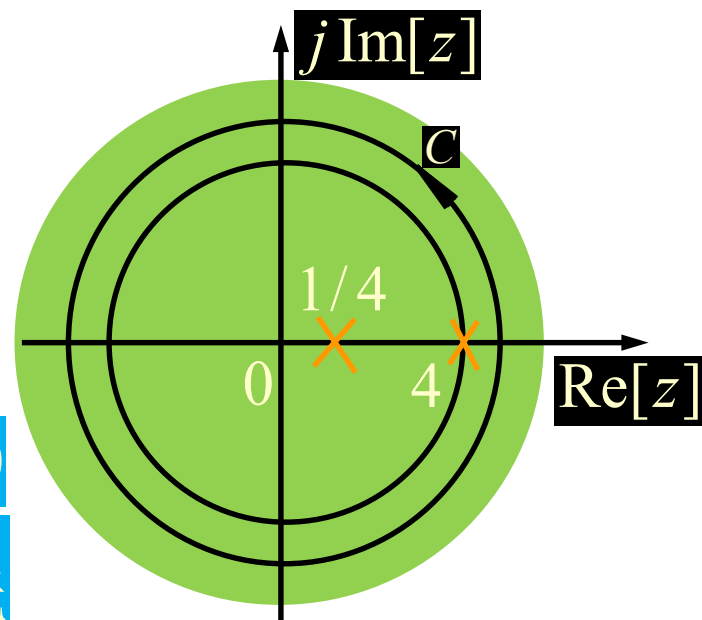
又 $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = -1$,

即 $X(z)$ 在 $z = \infty$ 处收敛

$\therefore x(n)$ 是一个因果序列, 即 $x(n) = 0, n < 0$

同样当 $n < 0$ 时, 由 $F(z) = \frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-1/4)}$ 在 c 外无

极点, 且分母阶次比分子阶次高两阶以上, 由围线外极点留数为0可得 $x(n) = 0$





二. Z变换的反变换

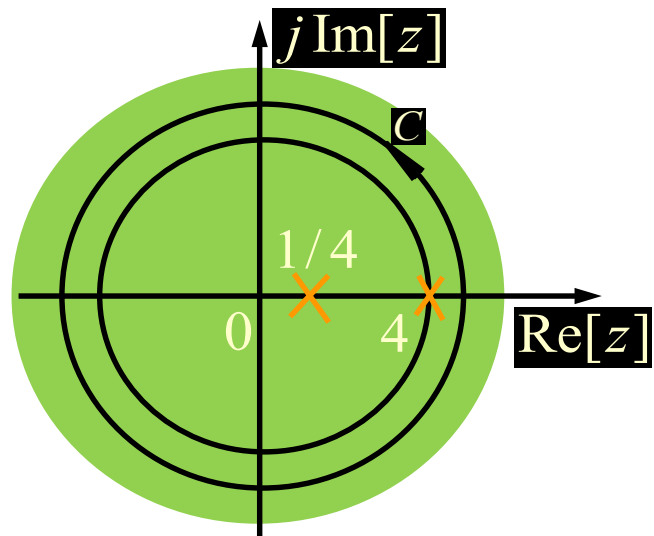


当 $n \geq 0$ 时

$$F(z) = \frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-1/4)}$$

在围线 c 内有一阶极点 $z = 4$, $\frac{1}{4}$

$$x(n) = \text{Res}[F(z)]_{z=4} + \text{Res}[F(z)]_{z=1/4}$$



$$= \left[(z-4) \frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})} \right]_{z=4} + \left[(z-\frac{1}{4}) \frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})} \right]_{z=\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{15} (4^{-n} - 4^{n+2})$$

$$\therefore x(n) = \frac{1}{15} (4^{-n} - 4^{n+2}) u(n)$$



二. Z变换的反变换



◆2、部分分式展开法

若函数 $X(z)$ 是 z 的有理分式，可表示为：

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \sum_{n=0}^{M-N} B_n z^{-n} + \sum_{k=1}^{N-r} \frac{A_k}{1 - z_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^r \frac{C_k}{(1 - z_i z^{-1})^k}$$

利用部分分式的 z 反变换和可以得到函数 $X(z)$ 的 z 反变换。

用留数定理求系数：

$$A_k = \text{Res} \left[\frac{X(z)}{z} \right]_{z=z_k} \quad k = 1, 2, \dots, N - r$$

常见序列的ZT参见书p.38页的表2-1



二. Z变换的反变换



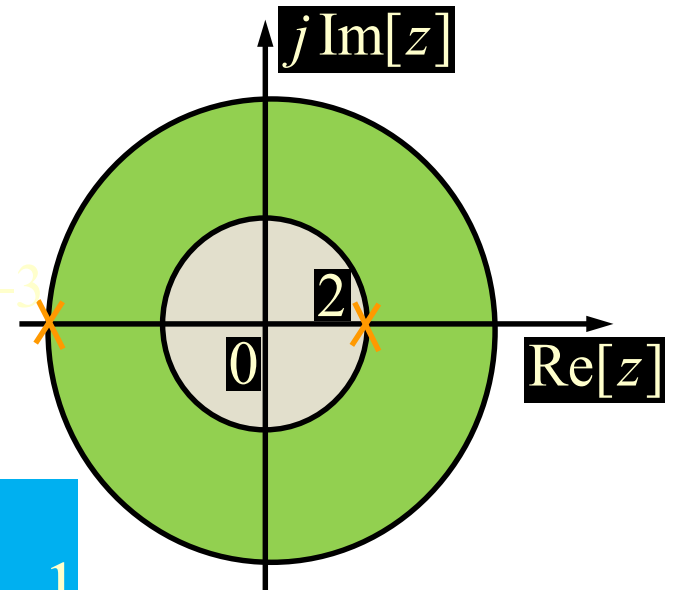
例: $X(z) = \frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$, $2 < |z| < 3$, 求z反变换

解: $X(z) = \frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}} = \frac{5z}{z^2+z-6} = \frac{5z}{(z-2)(z+3)}$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{5}{(z-2)(z+3)} = \frac{A_1}{z-2} + \frac{A_2}{z+3}$$

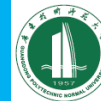
$$A_1 = \text{Res} \left[\frac{X(z)}{z} \right]_{z=2} = (z-2) \frac{5}{(z-2)(z+3)} \Big|_{z=2} = 1$$

$$A_2 = \text{Res} \left[\frac{X(z)}{z} \right]_{z=-3} = (z+3) \frac{5}{(z-2)(z+3)} \Big|_{z=-3} = -1$$





二. Z变换的反变换



$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-2} + \frac{-1}{z+3}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{-z}{z+3} = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{-1}{1+3z^{-1}}$$

$$\because 2 < |z| < 3$$

$$ZT[a^n u(n)] = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$ZT[a^n u(-n-1)] = \frac{-1}{1-az^{-1}} \quad |z| < |a|$$

$$\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$|z| > 2$$

$$2^n u(n)$$

$$\frac{-1}{1+3z^{-1}}$$

$$|z| < 3$$

$$(-3)^n u(-n-1)$$

$$\therefore x(n) = 2^n u(n) + (-3)^n u(-n-1)$$



二. Z变换的反变换



例2 设 $X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})}, \quad |z| > 2$

利用部分分式法求z反变换。

解：

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z^2}{(z-2)(z-0.5)} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{z}{z-2} - \frac{1}{3} \times \frac{z}{z-0.5} \end{aligned}$$

$$\therefore x(n) = \left[\frac{4}{3} \times 2^n - \frac{1}{3} \times (0.5)^n \right] u(n)$$



二. Z变换的反变换



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

◆ 3、幂级数展开法求解（长除法）

一般 $X(z)$ 是有理分式，可利用分子多项式除分母多项式（长除法法）得到幂级数展开式，从而得到 $x(n)$ 。

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \cdots + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + \cdots$$



二. Z变换的反变换



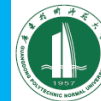
广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

根据收敛域判断 $x(n)$ 的性质，在展开成相应的 z 的幂级数：

	将 $X(z)$ $x(n)$ 展成 z 的	$X(z)$ 的 分子分母 按 z 的
$ z > R_{x^-}$	因果序列	负幂级数 降幂排列
$ z < R_{x^+}$	左边序列	正幂级数 升幂排列



二. Z变换的反变换



例1：长除法示例

ROC1:

$$|z| > |a|$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

解：由Roc判定 $x(n)$ 是因果序列，用长除法展成 z 的负幂级数

$$x[n] = \{1, a, a^2, \dots\}$$

$$\frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$= 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots$$

$$1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots$$

$$1 - az^{-1}$$

)

$$1 - az^{-1}$$

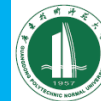
$$az^{-1}$$

$$az^{-1} - a^2 z^{-2}$$

$$a^2 z^{-2}$$



二. Z变换的反变换



ROC2:

$$|z| < |a|$$

解：由 Roc 判定
x(n) 是左边序列，
用长除法展成z的
正幂级数

$$x[n] = \{..., -a^{-2}, -a^{-1}, 0\}$$

$$\frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$= -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \dots$$

$$-az^{-1} + 1$$

$$)$$

$$1$$

$$1 - a^{-1}z$$

$$a^{-1}z$$

$$az^{-1} - a^2z^2$$

$$a^2z^2$$

$$-a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \dots$$



二. Z变换的反变换



例： $X(z) = \frac{z^2}{(4-z)(z-1/4)}$, $1/4 < |z| < 4$, 求z反变换

解： $X(z)$ 的Roc为环状，故 $x(n)$ 是双边序列

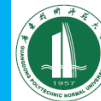
极点 $z=1/4$ 对应右边序列，极点 $z=4$ 对应左边序列

先把 $X(z)$ 展成部分分式

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(4-z)(z-1/4)} = \frac{\frac{16}{15}}{4-z} + \frac{\frac{1}{15}}{z-1/4}$$



二. Z变换的反变换



$$X(z) = \frac{1}{15} \left(\frac{16z}{4-z} + \frac{z}{z-1/4} \right)$$

$$4z + z^2 + \frac{1}{4}z^3 + \dots$$

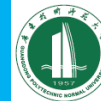
$$\begin{array}{r} 4-z \overline{) 16z} \\ \underline{16z - 4z^2} \\ 4z^2 \\ \underline{4z^2 - z^3} \\ z^3 \\ \vdots \end{array}$$

$$1 + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-2} + \dots$$

$$\begin{array}{r} z - \frac{1}{4} \overline{) z} \\ \underline{z - \frac{1}{4}} \\ \frac{1}{4} \\ \underline{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}z^{-1}} \\ \frac{1}{16}z^{-1} \\ \vdots \end{array}$$



二. Z变换的反变换



$$X(z) = \frac{1}{15} \left(\cdots + \frac{1}{16} z^{-2} + \frac{1}{4} z^{-1} + 1 + 4z + z^2 + \frac{1}{4} z^3 + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{15} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n z^{-n} + \sum_{n=-1}^{-\infty} 4^{n+2} z^{-n} \right]$$

$$\therefore x(n) = \frac{4^{-n}}{15} u(n) + \frac{4^{n+2}}{15} u(-n-1)$$



三、z变换的基本性质和定理



1、线性性

$$ax(n) + by(n) \Leftrightarrow aX(z) + bY(z)$$

$$R_1 \cap R_2$$

2、序列的移位

$$x(n - N) \Leftrightarrow z^{-N} X(z)$$

$$R$$

3、z域尺度变换 (乘以指数序列)

$$a^n x(n) \Leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$$

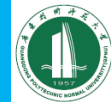
$$|a|R$$

4、z域求导 (序列线性加权)

$$nx(n) \Leftrightarrow -z \frac{d}{dz} X(z)$$

$$R$$

三、z变换的基本性质和定理



5、翻褶序列

$$x(-n) \Leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

1/R

6、共轭序列

$$x^*(n) \Leftrightarrow X^*(z^*)$$

R

7、初值定理

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

8、终值定理

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

三、z变换的基本性质和定理



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

9、有限项累加特性

$$y(n) = \sum_{m=0}^n x(m) \Leftrightarrow \frac{z}{z-1} X(z)$$

10、序列的卷积和

$$x(n) * y(n) \Leftrightarrow X(z)Y(z)$$

11、序列乘法

$$x(n)h(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint_c X\left(\frac{z}{v}\right) H(v) dv$$

12、帕塞瓦定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) h^*(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) H^*\left(\frac{1}{v^*}\right) v^{-1} dv$$

三、z变换的基本性质和定理



例：已知LSI系统的单位抽样响应：

$$h(n) = b^n u(n) - ab^{n-1} u(n-1),$$

求系统输入 $x(n) = a^n u(n)$ 的响应。

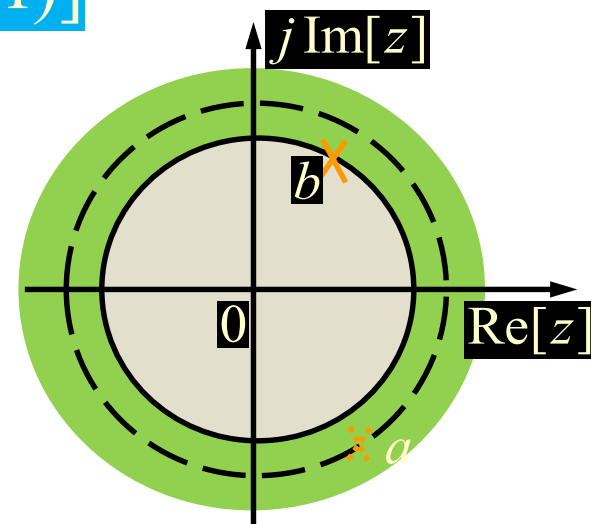
解： $X(z) = ZT[x(n)] = ZT[a^n u(n)] = \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a|$

$$\begin{aligned} H(z) &= ZT[h(n)] = ZT[b^n u(n) - ab^{n-1} u(n-1)] \\ &= ZT[b^n u(n)] - aZT[b^{n-1} u(n-1)] \end{aligned}$$

$$= \frac{z}{z-b} - az^{-1} \frac{z}{z-b} = \frac{z-a}{z-b} \quad |z| > |b|$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z}{z-b} \quad |z| > |b|$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = IZT[Y(z)] = b^n u(n)$$





四、离散系统的z变换法描述



LSI系统的系统函数 $H(z)$ ：

单位抽样响应 $h(n)$ 的z变换

$$H(z) = ZT[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

其中： $y(n) = x(n) * h(n)$ $Y(z) = X(z)H(z)$

系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ ：

单位圆上的系统函数, 单位抽样响应 $h(n)$ 的DTFT

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = DTFT[h(n)]$$



四、离散系统的z变换法描述



1) 因果:

$$R_x^- < |z| \leq \infty$$

2) 稳定:

序列 $h(n)$ 绝对可和, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

而 $h(n)$ 的z变换的Roc:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| < \infty$$

稳定系统的系统函数 $H(z)$ 的Roc须包含单位圆, 即频率响应存在且连续。

3) 因果稳定: Roc:

$$1 \leq |z| \leq \infty$$

$H(z)$ 须从单位圆到 ∞ 的整个z域内收敛即系统函数 $H(z)$ 的全部极点必须在单位圆内。



四、离散系统的z变换法描述



例：已知离散LSI系统的差分方程：

（设系统初始状态为零）

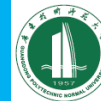
$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

其中： $x(n)$ 为输入， $y(n)$ 为输出。

- 1) 求系统函数，指出系统的零极点；
- 2) 若该系统是因果稳定的，指出系统的收敛域；
- 3) 求该因果稳定系统的单位抽样响应。



四、离散系统的z变换法描述



解：1) 对差分方程两边取z变换：

$$Y(z) - \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

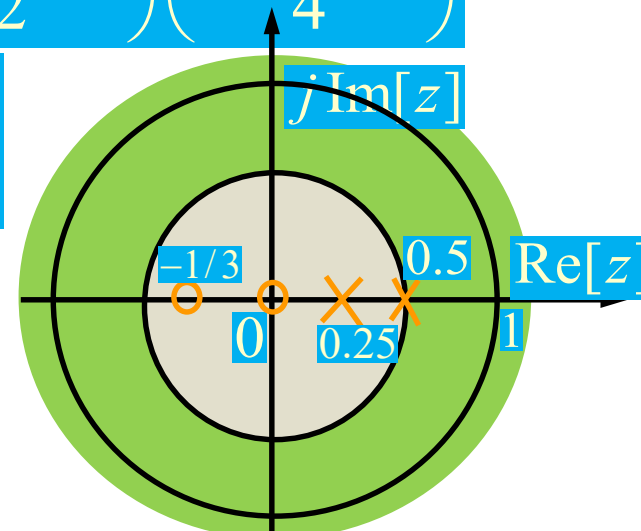
系统函数：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

零点： $z = -\frac{1}{3}, 0$ 极点： $z = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

2) 由于系统为因果稳定系统，

故收敛域： $|z| > \frac{1}{2}$





四、离散系统的z变换法描述



3) 对 $H(z)$ 求 z 反变换即得单位抽样响应 $h(n)$,
用部分分式法

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{\left(z + \frac{1}{3}\right)z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{\left(z + \frac{1}{3}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} = \frac{A_1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{A_2}{z - \frac{1}{4}}$$

$$A_1 = \text{Res} \left[\frac{H(z)}{z} \right]_{z=\frac{1}{2}} = \left(z - \frac{1}{2} \right) \frac{z + \frac{1}{3}}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{4} \right)} \bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}$$



四、离散系统的z变换法描述



$$A_2 = \text{Res} \left[\frac{H(z)}{z} \right]_{z=\frac{1}{4}} = \left(z - \frac{1}{4} \right) \frac{z + \frac{1}{3}}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{4} \right)} \bigg|_{z=\frac{1}{4}} = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore H(z) = \frac{\frac{10}{3}z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{-\frac{7}{3}z}{z - \frac{1}{4}}$$

根据 $Roc: |z| > \frac{1}{2}$, 查表2-1得

$$h(n) = \left[\frac{10}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{7}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] u(n)$$

五、时间信号与频谱信号波形之间的一般关系



时域（或频域）-----频域（或时域）
连续 ←-----→ 非周期
周期 ←-----→ 离散

	时间信号		频谱信号	
模拟信号	连续	非周期	非周期	连续
	连续	周期	非周期	离散
序列信号	离散	非周期	周期	连续
	离散	周期	周期	离散

4 离散傅里叶变换

- 一. 傅里叶变换概述
- 二. 离散傅里叶级数 (DFS)
- 三. 离散傅里叶变换 (DFT)
- 四. 圆周卷积



一、傅里叶变换概述



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

傅里叶变换的几种形式：

时间函数 \longleftrightarrow 频率函数

- ◆ 连续时间(非周期)、 连续频率—傅里叶变换 (FT)
- ◆ 连续时间(周期)、 离散频率—傅里叶级数 (FS)
- ◆ 离散时间(非周期)、 连续频率—序列的傅里叶变换 (DTFT)
- ◆ 离散时间 (周期延拓)、 离散频率—离散傅里叶变换 (DFT)



一、傅里叶变换概述

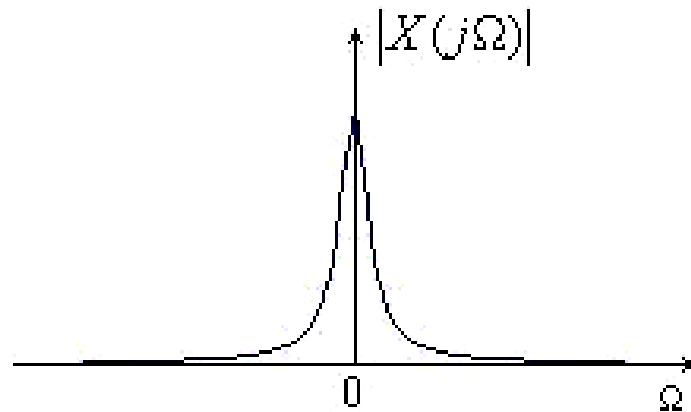
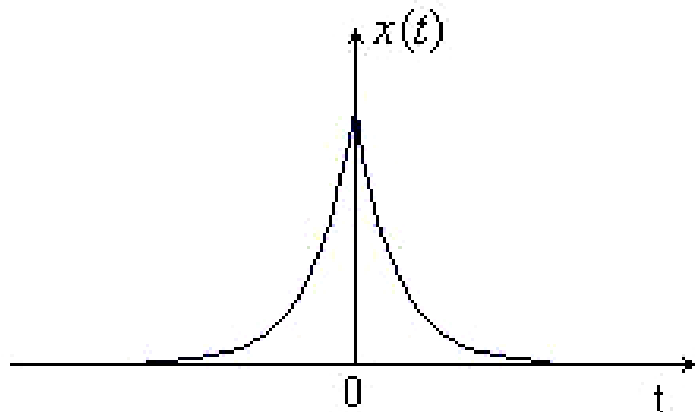


广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

FT

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$





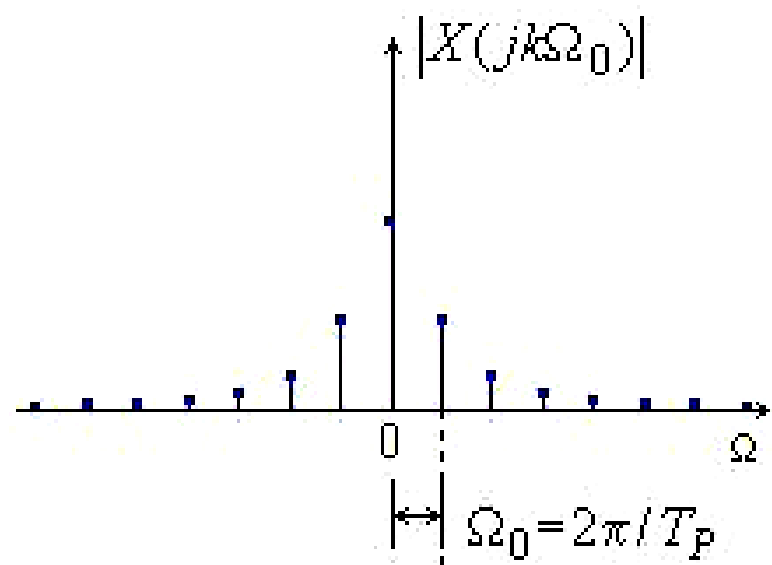
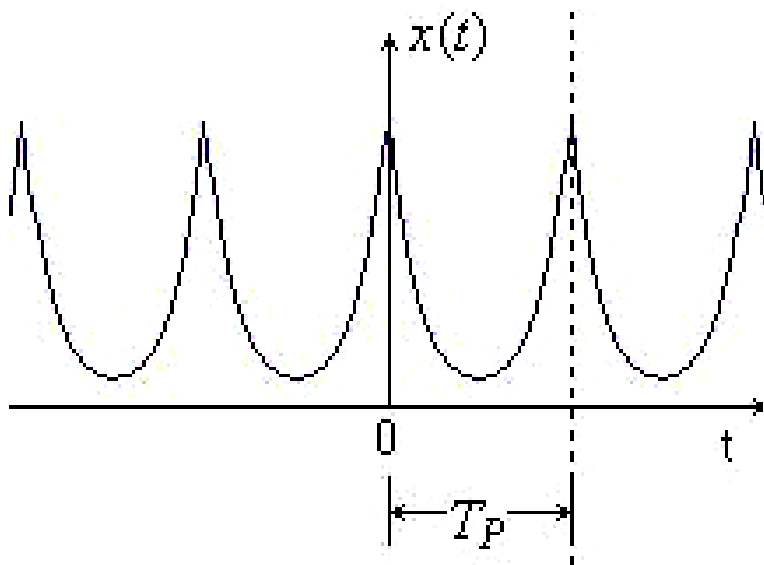
一、傅里叶变换概述



FS

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}_a(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt = \left. \frac{X_a(j\Omega)}{T} \right|_{\Omega=k\Omega_0}$$

$$\tilde{x}_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$$





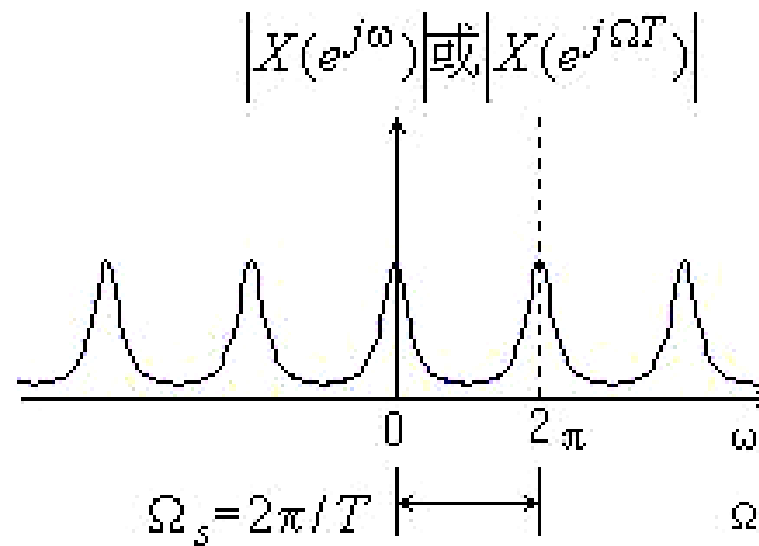
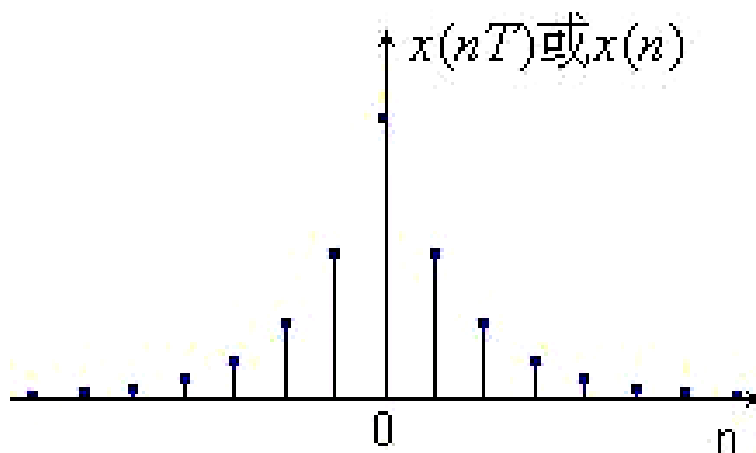
一、傅里叶变换概述



DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$





一、傅里叶变换概述



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$X(k) = DFT\{x(n)\}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

$$x(n) = IDFT\{X(k)\}$$

$$x(n) \Leftrightarrow X(k)$$

$$n : [0, N-1]$$

$$k : [0, N-1]$$

$$\text{或} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} R_N(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} R_N(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$$



一、傅里叶变换概述



四种傅里叶变换形式的归纳

	时间函数	频率函数
FT	连续和非周期	非周期和连续
FS	连续和周期(T_0)	非周期和离散($\Omega_0=2\pi/T_0$)
DTFT	离散(T)和非周期	周期($\Omega_s=2\pi/T$)和连续
DFT	离散(T)和周期(T_0)	周期($\Omega_s=2\pi/T$)和离散($\Omega_0=2\pi/T_0$)

二、离散傅里叶级数DFS



周期序列的DFS正变换和反变换：

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

其中：

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$



二、离散傅里叶级数DFS



例：已知序列 $x(n) = R_4(n)$ ，将 $x(n)$ 以 $N = 8$ 为周期进行周期延拓成 $\tilde{x}(n)$ ，求 $\tilde{x}(n)$ 的DFS。

解法一：数值解

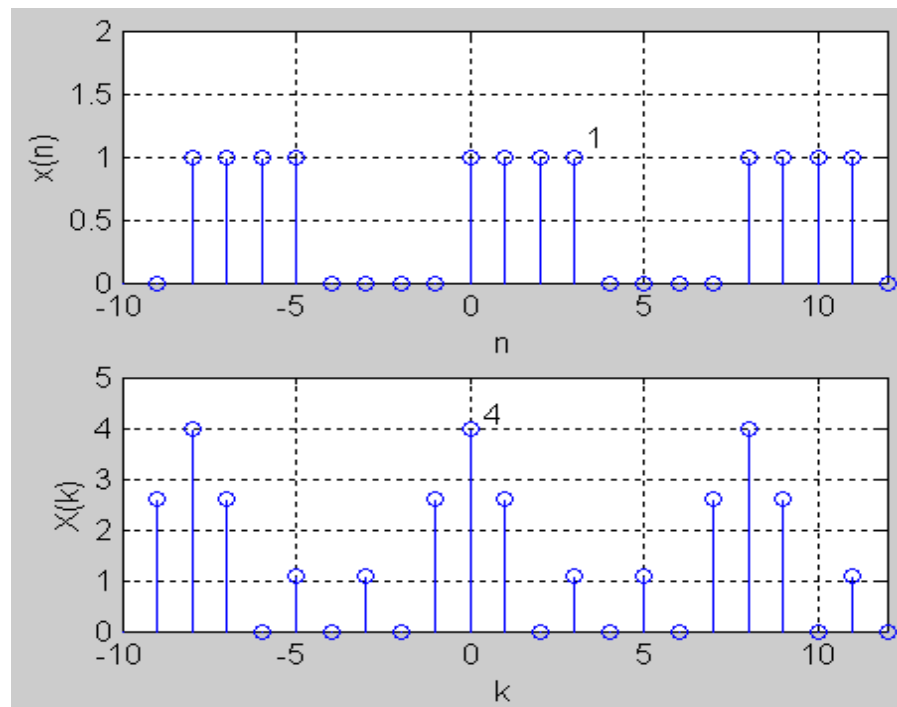
$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^7 \tilde{x}(n) W_8^{nk} = \sum_{n=0}^3 W_8^{nk}$$

$$= 1 + e^{-j\frac{2\pi}{8}k} + e^{-j\frac{2\pi}{8}2k} + e^{-j\frac{2\pi}{8}3k}$$

$$\tilde{X}(0) = 4 \quad \tilde{X}(1) = 1 - j(\sqrt{2} + 1) \quad \tilde{X}(2) = 0 \quad \tilde{X}(3) = 1 - j(\sqrt{2} - 1)$$

$$\tilde{X}(4) = 0 \quad \tilde{X}(5) = 1 + j(\sqrt{2} - 1) \quad \tilde{X}(6) = 0 \quad \tilde{X}(7) = 1 + j(\sqrt{2} + 1)$$



二、离散傅里叶级数DFS



解法二：公式解

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

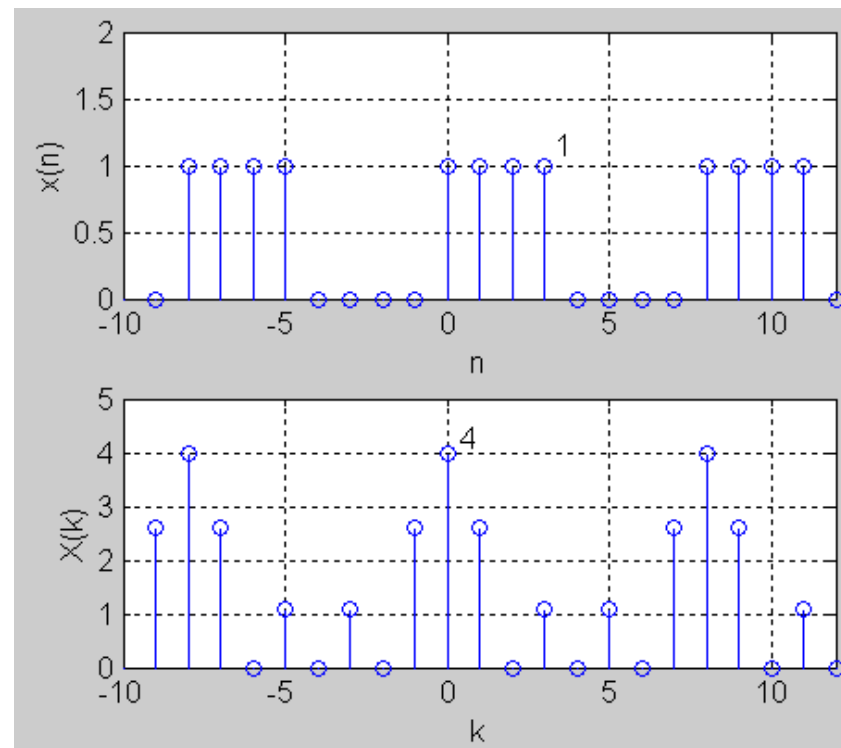
$$= \sum_{n=0}^7 \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}$$

$$= \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{\pi}{4}kn}$$

$$= \frac{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k \cdot 4}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

$$= \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k} \left(e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k} \right)}{e^{-j\frac{\pi}{8}k} \left(e^{j\frac{\pi}{8}k} - e^{-j\frac{\pi}{8}k} \right)}$$

$$= e^{-j\frac{3}{8}\pi k} \frac{\sin \frac{\pi}{2}k}{\sin \frac{\pi}{8}k}$$





三、离散傅里叶变换DFT



有限长序列的DFT定义式:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$x(n) \Leftrightarrow X(k)$$

$$X(k) = DFT\{x(n)\}$$

$$n : [0, N-1]$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$k : [0, N-1]$$

$$x(n) = IDFT\{X(k)\}$$

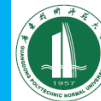
$$\text{或} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} R_N(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} R_N(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$$

DFT隐含有周期性, 周期为N, 有限N长序列x(n)的N点离散傅里叶变换(DFT) X(k)也可以定义为x(n)的周期延拓序列X((n))N的离散傅里叶级数(DFS)的主值序列。



三、离散傅里叶变换DFT



*DFT*与序列的DTFT和 z 变换的关系:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

$x(n)$ 的 N 点DFT是

- $x(n)$ 的 z 变换在单位圆上的 N 点等间隔抽样;
- $x(n)$ 的DTFT在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔抽样。



三、离散傅里叶变换DFT



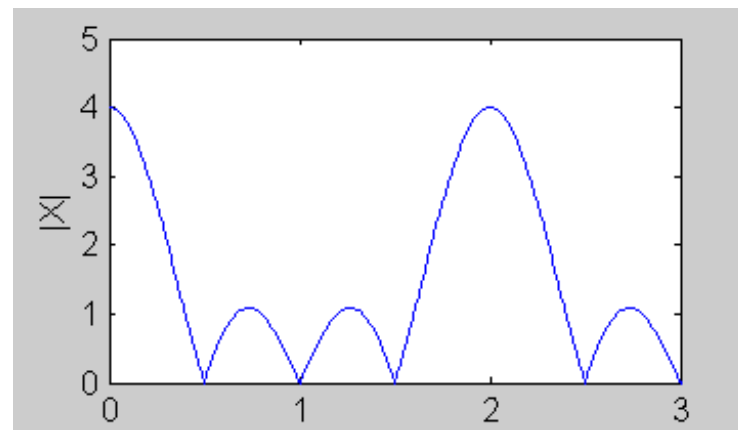
例：已知序列 $x(n) = R_4(n)$, 求 $x(n)$ 的8点和16点DFT。

解：求 $x(n)$ 的DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j4\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{e^{-j2\omega} (e^{j2\omega} - e^{-j2\omega})}{e^{-j\frac{\omega}{2}} \left(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}} \right)}$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega} \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$$





三、离散傅里叶变换DFT

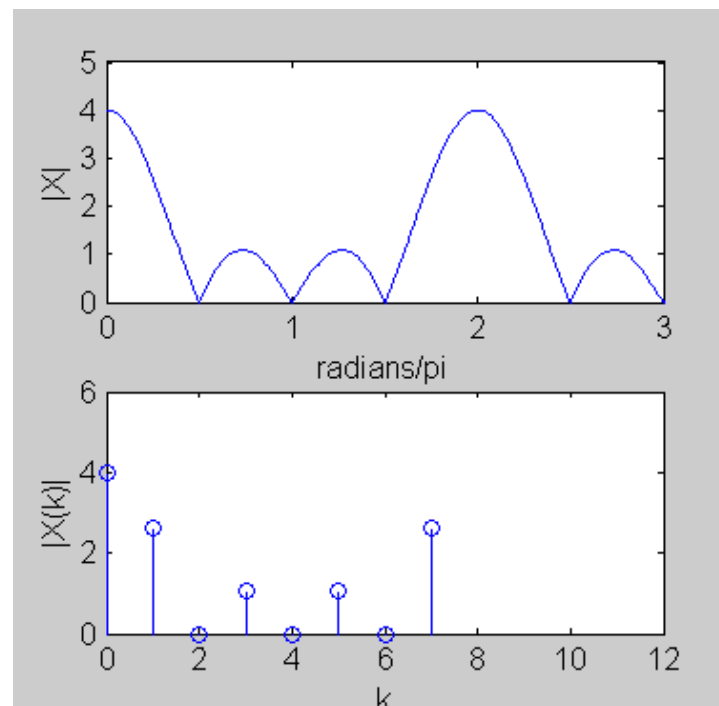


求 $x(n)$ 的8点DFT $N = 8$

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{8}k}$$

$$= e^{-j\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4}k} \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{8}k\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{8}k\right)}$$

$$= e^{-j\frac{3}{8}\pi k} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)}$$





三、离散傅里叶变换DFT

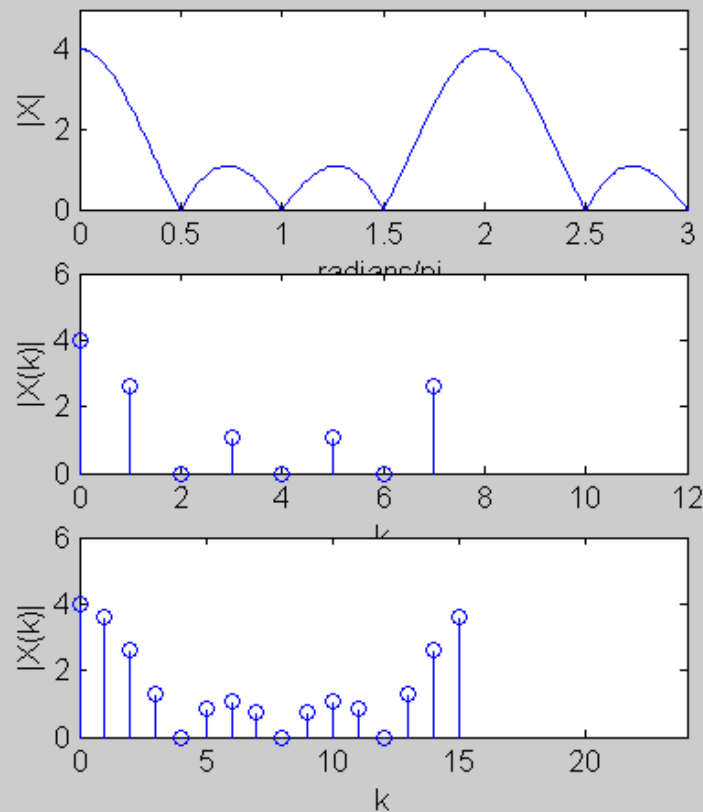


求 $x(n)$ 的16点DFT $N = 16$

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{16}k}$$

$$= e^{-j\frac{3}{2} \cdot \frac{2\pi}{16}k} \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{16}k\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{16}k\right)}$$

$$= e^{-j\frac{3}{16}\pi k} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{16}k\right)}$$





四、圆周卷积



圆周卷积A: 设 $F(k) = X(k)Y(k)$ $f(n) \Leftrightarrow F(k)$

则
$$f(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)y((n-m))_N \right] R_N(n)$$

圆周卷积记为 $f(n) = x(n) \textcircled{N} y(n)$

实际上, 圆周卷积为周期卷积的主值序列。即

$$f(n) = [\tilde{x}(n) * \tilde{y}(n)] R_N(n) = \tilde{f}(n) R_N(n)$$

圆周卷积B: 设 $f(n) = x(n)y(n)$ $f(n) \Leftrightarrow F(k)$

$$F(k) = \frac{1}{N} \left[\sum_{l=0}^{N-1} X(l)Y((k-l))_N \right] R_N(k) = X(k) \textcircled{N} Y(k)$$



四、圆周卷积



◆ 圆周卷积公式：

$$y(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n) = x_1(n) \textcircled{N} x_2(n)$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n) = x_2(n) \textcircled{N} x_1(n)$$

◆ 圆周卷积计算方法：

- 1. 序列图解法
- 2. 圆周图解法
- 3. 矩阵求解法
- 4. 行列式求解法



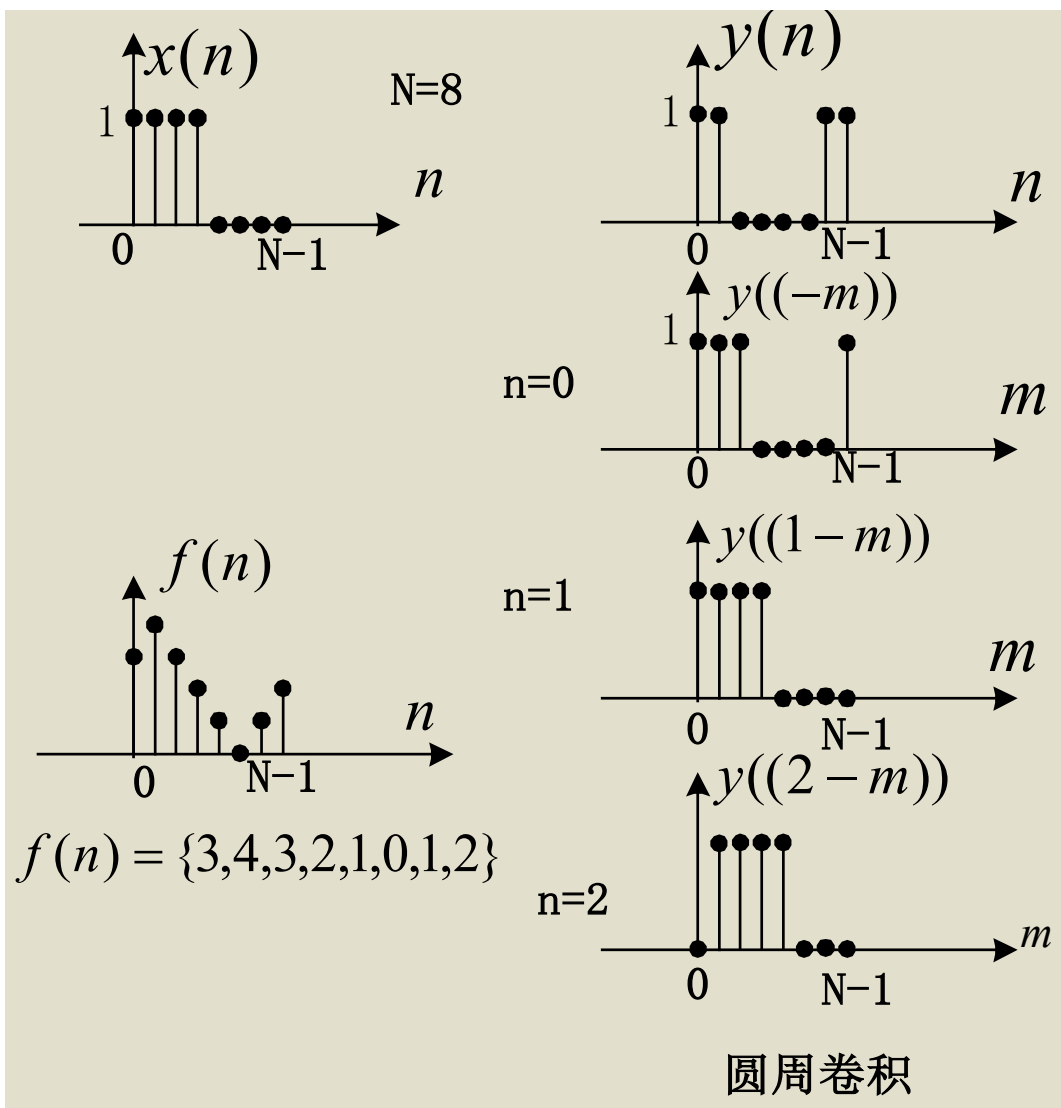
四、圆周卷积



1. 序列图解法

圆周卷积序列图解法过程：

- 1) 补零
- 2) 周期延拓
- 3) 翻褶，取主值序列
- 4) 圆周移位
- 5) 相乘相加



两个N点序列
的N点圆周卷
积得到的结果
仍为N点序列。

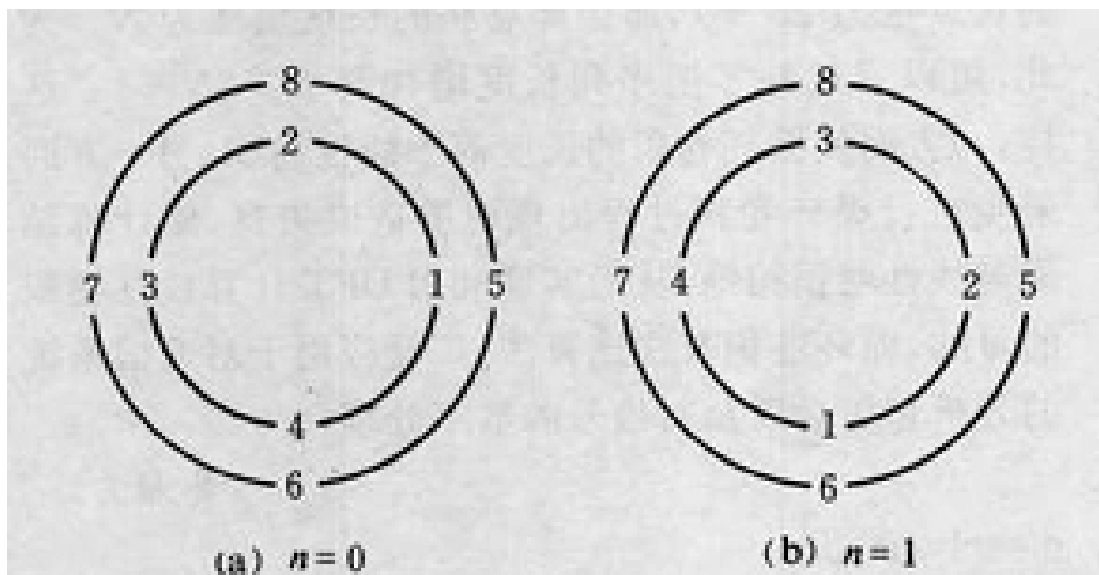
m	$N-m$
1	$N-1$
2	$N-2$
3	$N-3$
...	...



四、圆周卷积



2. 圆周图解法



设 $x_1(n)=(1, 2, 3, 4)$, $N=4$, 按逆时针方向均匀分布在一个圆周上。如图1中(a)的内圆所示, 而把 $x_2(n)$, 设 $x_2(n)=\{5, 6, 7, 8\}$, 按顺时针的方向均匀分布在另一个同心圆上, 然后求两圆上相应序列的乘积, 并把 V 项乘积叠加起来作为 $n=0$ 时刻的卷积值 $y(0)$, 即

$$y(0)=1 \times 5 + 4 \times 6 + 3 \times 7 + 2 \times 8 = 66$$

若求 $n=1$ 时刻的 $y(1)$ 值, 可将外圆的: $x_2(n)$ 固定, 把内圆上的序列 $x_1(n)$ 顺时针旋转一个单位时间 (或将 $x_1(n)$ 固定, 把外圆上的序列 $x_2(n)$ 逆时针旋转), 然后把对应项的乘积叠加起来, 即为所求。如图1中的(b)图所示, 即

$$y(1)=2 \times 5 + 1 \times 6 + 4 \times 7 + 3 \times 8 = 68$$

样依次将内圆序列进行循环移位一周, 便可以求得: $y(2)=66$, $y(3)=60$ 。



四、圆周卷积



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

3. 矩阵求解法

用解析式计算

$$y_N(n) = x(n) \otimes h(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)h((n-m)_N) \right] R_N(n)$$

此式可用矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} y_N(0) \\ y_N(1) \\ y_N(2) \\ \vdots \\ y_N(N-2) \\ y_N(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & h(N-1) & h(N-2) & \cdots & h(1) \\ h(1) & h(0) & h(N-1) & \cdots & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) & \cdots & h(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(N-2) & h(N-3) & h(N-4) & \cdots & h(N-1) \\ h(N-1) & h(N-2) & h(N-3) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

在实际运用时只需要按照h矩阵中元素排列的规律直接写出这个矩阵。



四、圆周卷积



例 设 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $x_2(n) = \{6, 7, 8, 9\}$, 计算 5 点循环卷积。

解: $x_2(n)$ 为 4 点序列, 在其尾部填零使其成为 5 点序列, 再进行循环

卷积运算。 $x_3(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$

$$\begin{bmatrix} x_3(0) \\ x_3(1) \\ x_3(2) \\ x_3(3) \\ x_3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 9 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 0 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 95 \\ 85 \\ 70 \\ 100 \end{bmatrix}$$



四、圆周卷积



4. 行列式求解法

例1、已知序列 $x_1(n) = \{\underline{1}, 1, 1, 1\}$, $x_2(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 4\}$

求序列的 $x_1(n) \textcircled{4} x_2(n)$ 和 $x_1(n) \textcircled{8} x_2(n)$

$$x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m))_L \right] R_L(n)$$

$$x_1(n) \textcircled{4} x_2(n) = \left[\sum_{m=0}^{\overset{3}{}} x_1(m) x_2((n-m))_{\underset{4}{}} \right] R_{\underset{4}{}}(n)$$



四、圆周卷积



4. 行列式求解法

解：1) 按对位相乘相加法列式的

				1	2	3	4		
				×	1	1	1	1	
				<hr/>					
					1	2	3	4	序列右对齐
					1	2	3	4	
			1	2	3	4			对位做乘法
		1	2	3	4				
	+	1	2	3	4				每列相加
	<hr/>								
	<u>1</u>	3	6	10	9	7	4		

得到卷积和序列： $x_1(n) * x_2(n) = \{\underline{1}, 3, 6, 10, 9, 7, 4\}$



四、圆周卷积



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

2) 按循环卷积区间处理上述计算结果

4点循环卷积

L位保留序列

截余序列

1 3 6 10 : 9 7 4

9 7 4

截余序列对齐首位
做对位加法

10 10 10 10

循环卷积区间比卷积和生成的序列长度小，截余序列对齐首位做加法



四、圆周卷积



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

2) 按循环卷积区间处理上述计算结果

8点循环卷积

N位保留序列

1 3 6 10 9 7 4

1 3 6 10 9 7 4 0

补零

循环卷积区间比卷积和生成的序列长度大，在序列后补零

† 使圆周卷积等于线性卷积而不产生混淆的必要条件是 $L \geq N+M-1$ 。



四、圆周卷积



DFS	DFT
线性	线性
序列移位 $\begin{cases} DFS[\tilde{x}(n+m)] = w_N^{-mk} \tilde{X}(k) \\ IDFS[\tilde{X}(k+l)] = w_N^{nl} \tilde{x}(n) \end{cases}$	循环移位 $\begin{cases} DFT[f(n)] = w_N^{-mk} X(k) \\ IDFT[X((k+l))R_N(k)] = w_N^{nl} x(n) \end{cases}$
共轭对称性 $\begin{aligned} DFS[\tilde{x}^*(n)] &= \tilde{X}^*(-k) \\ DFS[\tilde{x}^*(-n)] &= \tilde{X}^*(k) \end{aligned}$	共轭对称性 $DFT[x^*(n)] = X^*(N-k)$
周期卷积 $\begin{aligned} \tilde{F}(k) &= \tilde{X}(k)\tilde{Y}(k) \\ \tilde{f}(n) &= IDFS[\tilde{F}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m)\tilde{y}(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{y}(m)\tilde{x}(n-m) \end{aligned}$	循环卷积 $\begin{aligned} F(k) &= X(k)Y(k) \\ f(n) &= IDFT[F(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y((n-m))_N R_N(n) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} y(m)x((n-m))_N R_N(n) \end{aligned}$



四、圆周卷积



圆周卷积	线性卷积
针对FFT引出的一种表示方法	信号通过线性系统时，信号输出等于输入与系统单位冲激响应的卷积
两序列长度必须相等，不等时按要求补足零值点	两序列长度可以不等 如 $x_1(n)$ 为 N_1 点， $x_2(n)$ 为 N_2 点
卷积结果长度与两信号长度相等皆为 N	卷积结果长度为 $N=N_1+N_2-1$

5 快速傅里叶变换FFT

- 一. FFT计算原理
- 二. 基2时间抽取算法和频率抽取算法
- 三. DFT、FFT算法的运算量比较



一、FFT计算原理



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

FFT算法的基本思想:

- 利用**DFT**系数的特性, 合并**DFT**运算中的某些项;
- 把长序列**DFT**→短序列**DFT**, 从而减少运算量。

FFT算法分类:

时间抽选法

DIT: Decimation-In-Time

频率抽选法

DIF: Decimation-In-Frequency



一、FFT计算原理



1、利用**DFT**运算的系数 W_N^{kn} 的固有对称性和周期性，改善**DFT**的运算效率。

- ◆ 1) 对称性
- ◆ 2) 周期性
- ◆ 3) 可约性

$$W_N^{nk} \text{ 的特性} \quad W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$



一、FFT计算原理



对称性 $(W_N^{nk})^* = W_N^{-nk} = W_N^{(N-n)k} = W_N^{n(N-k)}$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ & W_N^{Nk} \cdot W_N^{-nk} & W_N^{nN} \cdot W_N^{-nk} \end{array}$$

周期性 $W_N^{nk} = W_N^{(N+n)k} = W_N^{n(N+k)}$

可约性 $W_N^{nk} = W_{mN}^{mnk} \quad W_N^{nk} = W_{N/m}^{nk/m}$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \\ e^{-j\frac{2\pi}{mN}mnk} & e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1 & \uparrow \end{array}$$

特殊点: $W_N^0 = 1 \quad W_N^{N/2} = -1 \quad W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$



一、FFT计算原理



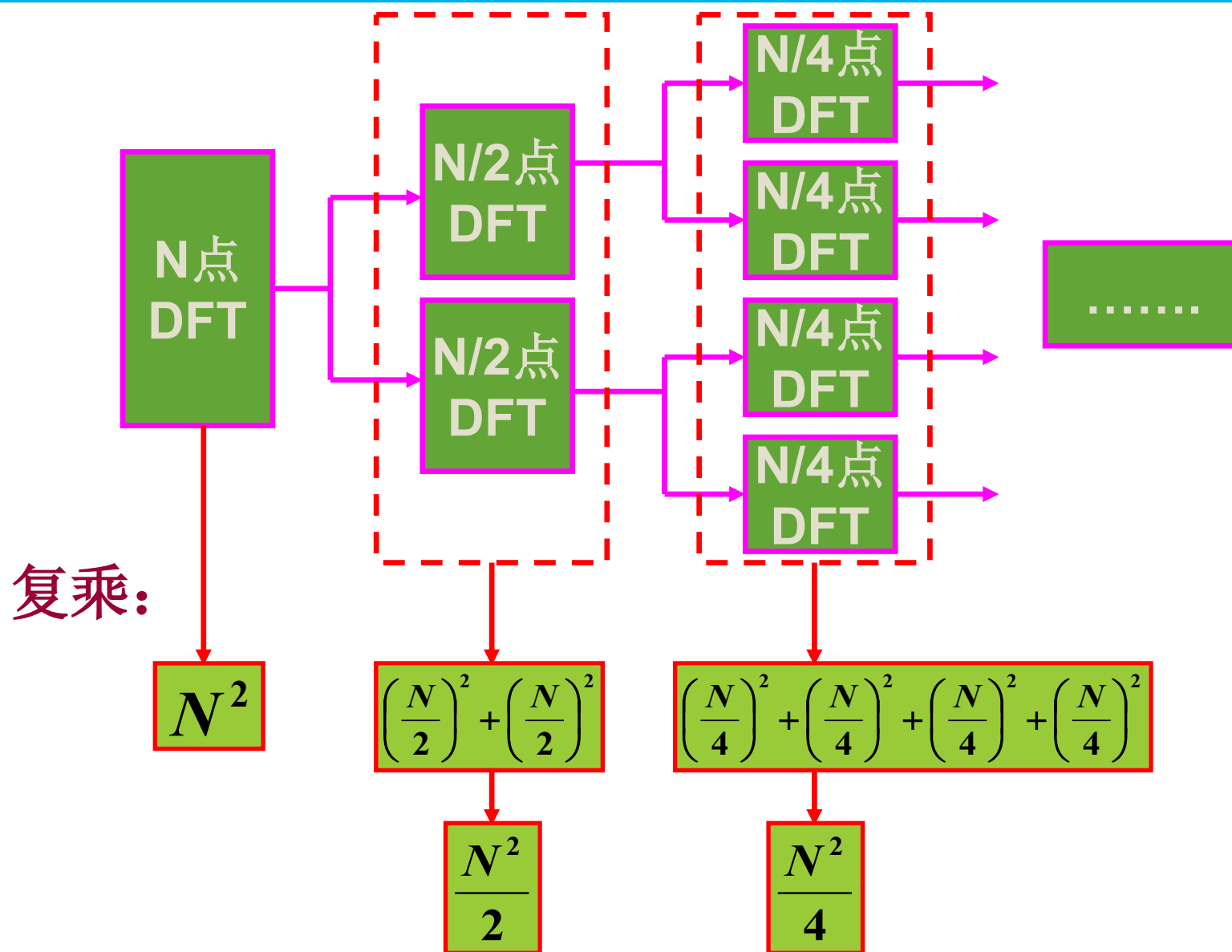
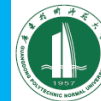
广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

2、将长序列DFT利用对称性和周期性分解为短序列DFT的思路

因为DFT的运算量与 N^2 成正比的，如果一个**大点数N的DFT**能分解为**若干小点数DFT的组合**，则显然可以达到**减少运算工作量的效果**。



一、FFT计算原理



二、基2时间抽取算法和频率抽取算法



◆ 基2-FFT时间抽取算法

1、算法原理

设输入序列长度为 $N=2^M$ (M 为正整数), 将该序列按时间顺序的奇偶分解为越来越短的子序列, 称为基2按时间抽取的FFT算法。也称为Coolkey-Tukey算法。

其中基2表示: $N=2^M$, M 为整数. 若不满足这个条件, 可以人为地加上若干零值 (加零补长) 使其达到 $N=2^M$ 。

二、基2时间抽取算法和频率抽取算法



2、算法步骤

➤ 分组，变量置换

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad \underline{0 \leq k \leq N-1}$$

先将 $x(n)$ 按 n 的奇偶分为两组，作变量置换：

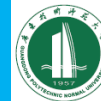
当 n =偶数时，令 $n=2r$;

当 n =奇数时，令 $n=2r+1$;

得到：

$$\left. \begin{array}{l} x(2r) = x_1(r) \\ x(2r+1) = x_2(r) \end{array} \right\} r = 0, \dots, N/2 - 1$$

二、基2时间抽取算法和频率抽取算法

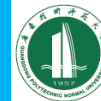


➤ 代入DFT中

$$X(k) = DFT[x(n)]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ 为偶数}}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ 为奇数}}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} \underline{x(2r)} W_N^{\underline{2rk}} + \sum_{r=0}^{N/2-1} \underline{x(2r+1)} W_N^{\underline{(2r+1)k}} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_N^{2rk} + \underline{W_N^k} \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r) W_N^{2rk} \end{aligned}$$

二、基2时间抽取算法和频率抽取算法



由于

$$W_N^{2n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2n} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}n} = W_{N/2}^n$$

所以

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_N^{2rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r) W_N^{2rk} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r) W_{N/2}^{rk} \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \end{aligned}$$

$$k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

$$k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

二、基2时间抽取算法和频率抽取算法



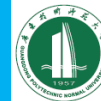
$X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 只有 $N/2$ 个点，以 $N/2$ 为周期；而 $X(k)$ 却有 N 个点，以 N 为周期。要用 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 表达全部的 $X(k)$ 值，还必须利用 W_N 系数的周期特性。

$$\because W_{N/2}^{r(N/2+k)} = W_{N/2}^{rk}$$

$$\therefore X_1(N/2+k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{r(N/2+k)} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1(N/2+k) = X_1(k) \\ X_2(N/2+k) = X_2(k) \end{cases}$$

二、基2时间抽取算法和频率抽取算法



又考虑到 W_N^k 的对称性:

$$W_N^{(N/2+k)} = W_N^{N/2} \cdot W_N^k = -W_N^k$$

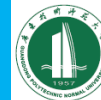
有:

$$\text{前半部分} \quad X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

$$\text{后半部分} \quad X(N/2 + k) = X_1(N/2 + k) + W_N^{(N/2+k)} X_2(N/2 + k)$$

$$= X_1(k) - W_N^k X_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

二、基2时间抽取算法和频率抽取算法



$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$

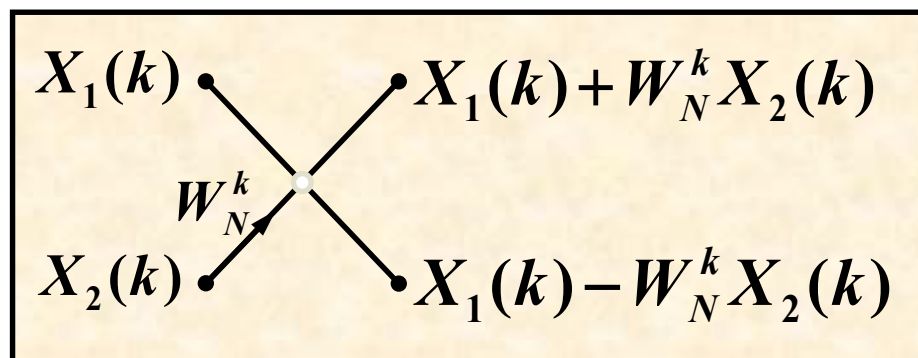
前半部分

$$k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

$$X(N/2 + k) = X_1(k) - W_N^k X_2(k)$$

后半部分

蝶形运算流程图符号

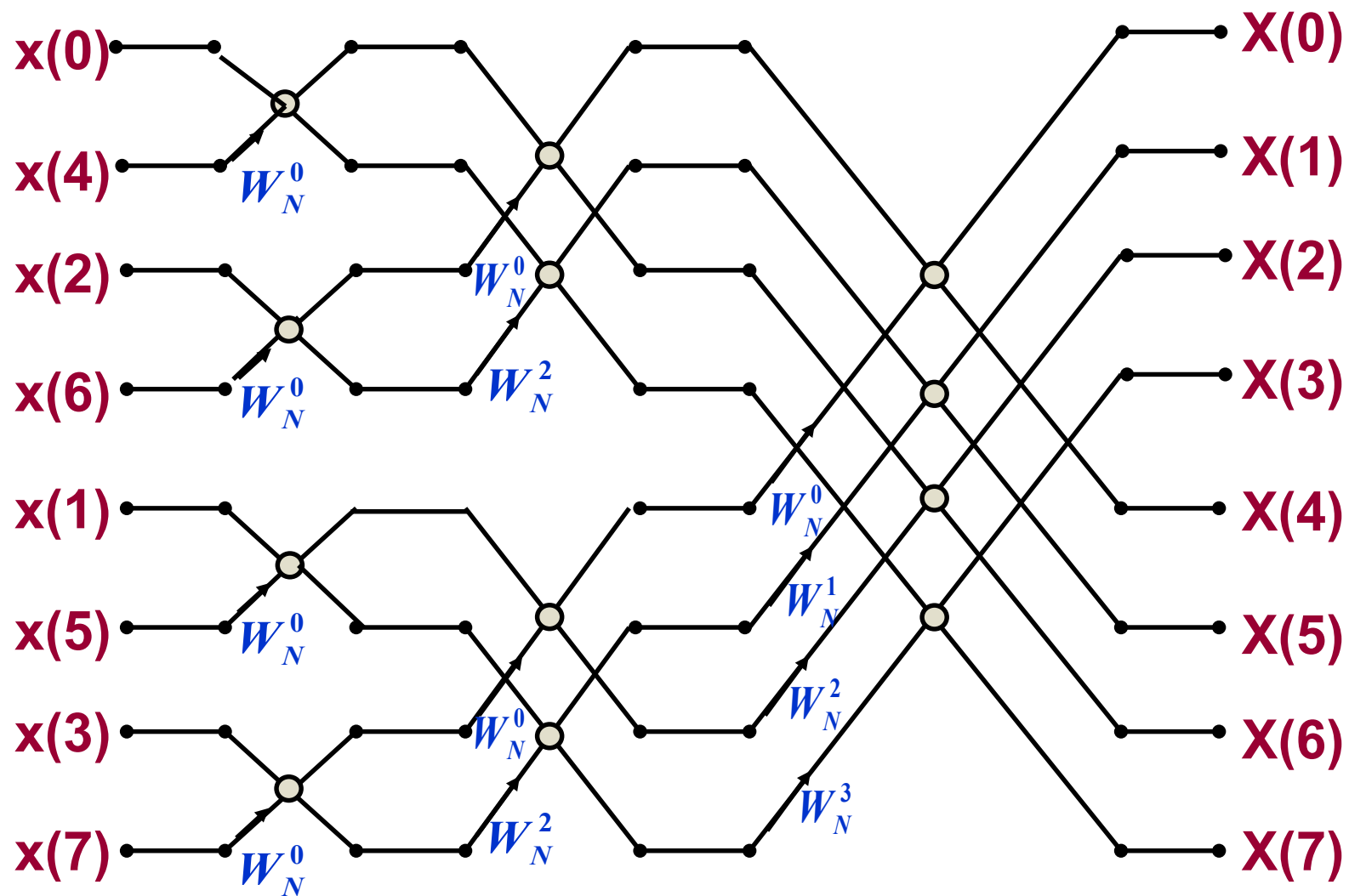
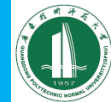


1个蝶形运算需要1次复乘，2次复加

说明：

- (1) 左边两路为输入
- (2) 右边两路为输出
- (3) 中间以一个小圆表示加、减运算（右上路为相加输出、右下路为相减输出）

二、基2时间抽取算法和频率抽取算法



8点DIT—FFT运算流图

二、基2时间抽取算法和频率抽取算法



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

◆ 基2-FFT频率抽取算法

在基2快速算法中，频域抽取法FFT也是一种常用的快速算法，简称DIF—FFT。

设序列 $x(n)$ 长度为 $N=2^M$ ，首先将 $x(n)$ 前后对半分开，得到两个子序列，其DFT可表示为如下形式

二、基2时间抽取算法和频率抽取算法



$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + N/2)W_N^{k(n+N/2)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} \underline{(-1)^k} x(n + N/2)W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{式中, } W_N^{kN/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}k} = e^{-jk\pi} = (-1)^k$$

$$\therefore X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + (-1)^k x(n + N/2)] W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

二、基2时间抽取算法和频率抽取算法



∴ 按 k 的奇偶可把 $X(k)$ 分为两部分:

令 $k = 2r$, 及 $k = 2r + 1$, $r = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$

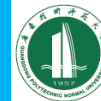
K 为偶数时,

$$\begin{aligned}\underline{X(2r)} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n + N/2)] W_N^{2rn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \underline{[x(n) + x(n + N/2)]} W_{N/2}^{rn}\end{aligned}$$

K 为奇数时,

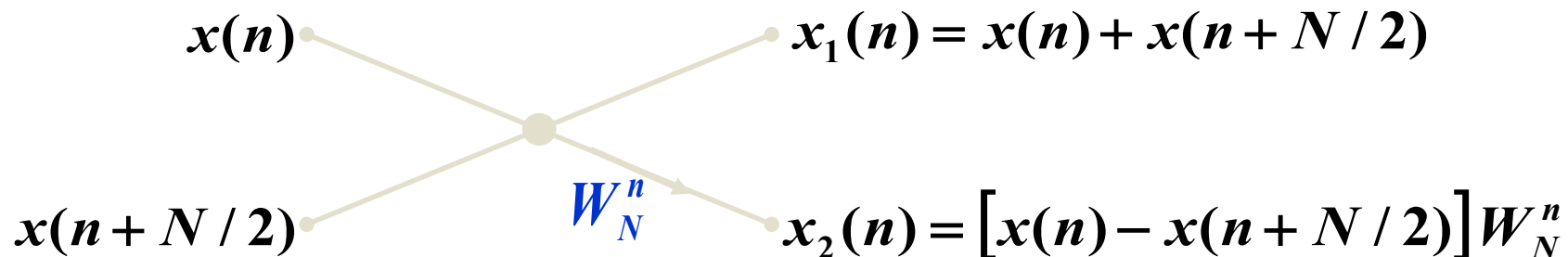
$$\begin{aligned}\underline{X(2r+1)} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n + N/2)] W_N^{(2r+1)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \underline{[x(n) - x(n + N/2)]} W_N^n W_{N/2}^{rn}\end{aligned}$$

二、基2时间抽取算法和频率抽取算法

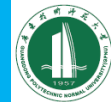


$$\text{令} \begin{cases} x_1(n) = \underline{x(n) + x(n + N/2)} \\ x_2(n) = \underline{[x(n) - x(n + N/2)]} W_N^n \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

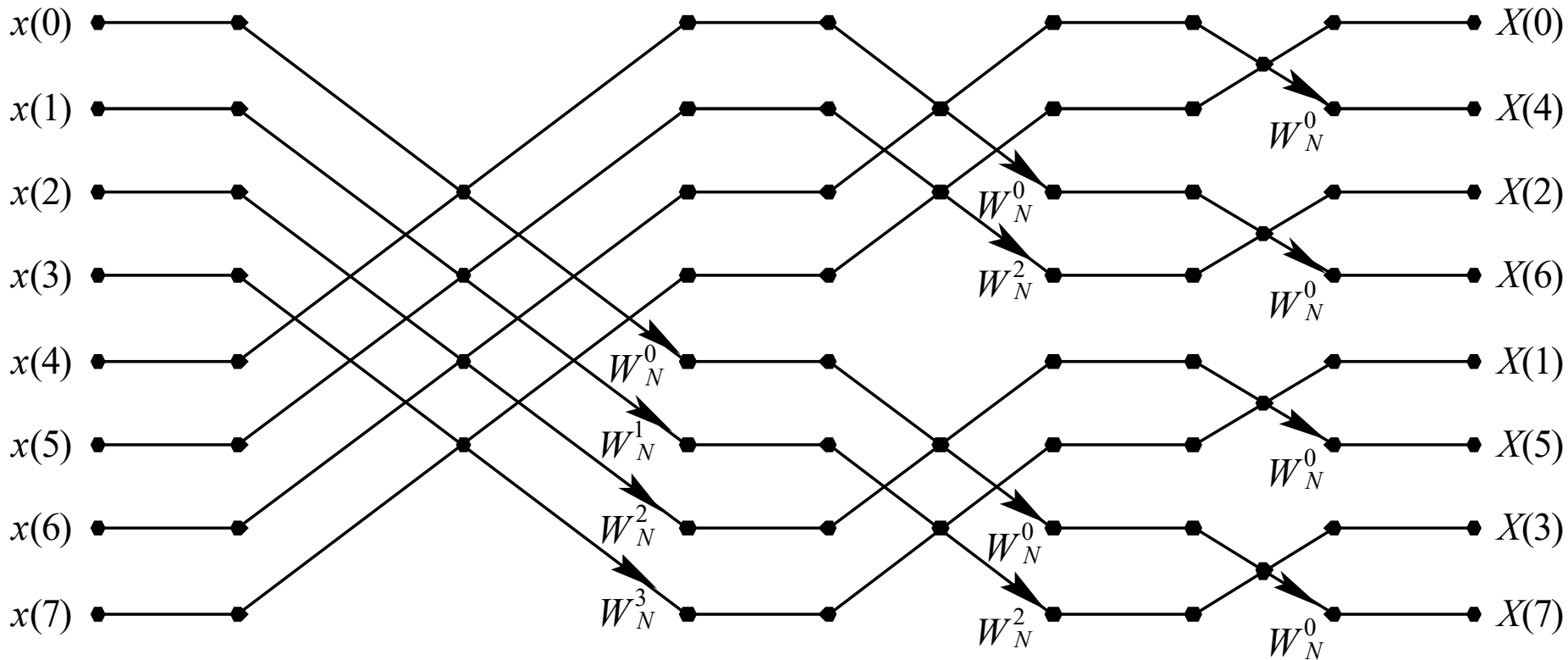
$$\Rightarrow \begin{cases} X_1(k) = X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^{nr} \\ X_2(k) = X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^{nr} \end{cases}$$



二、基2时间抽取算法和频率抽取算法



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University



8点DIF—FFT运算流图

二、基2时间抽取算法和频率抽取算法



➤ 时间抽取算法与频率抽取算法的比较

1) 频率抽选法和时间抽选法总的计算量是相同的

$$\text{复乘: } \frac{N}{2} \log_2 N$$

$$\text{复加: } N \log_2 N$$

2) 频率抽取法和时间抽取法一样，都适用于原位运算，即蝶形的输入和输出占用同一个存储单元。

3) 均存在码位倒序问题。

4) 频率抽选法和时间抽选法一样，基本运算也是蝶形运算。但两者的蝶形形式略有不同。



三、DFT、FFT算法的运算量比较



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

DFT、FFT算法的运算量比较

	复数乘法次数	复数加法次数
DFT算法	N^2	$N(N-1)$
FFT算法	$\log_2 N * N / 2$	$\log_2 N * N$



三、DFT、FFT算法的运算量比较

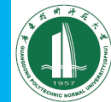


例1、如果通用计算机的速度为平均每次复乘需要 $5\mu\text{s}$ ，每次复加需要 $0.5\mu\text{s}$ ，用它来计算512点的DFT[x(n)]，问：

- 1) 直接计算需要多少时间？
- 2) 用FFT需要多少时间？



三、DFT、FFT算法的运算量比较



解：1) 用DFT进行运算：

$$\text{复乘： } T_1 = N^2 \times 5 \times 10^{-6} = 1.31072 \text{秒}$$

$$\text{复加： } T_2 = N(N-1) \times 0.5 \times 10^{-6} = 0.130816 \text{秒}$$

$$\text{总共： } T = T_1 + T_2 = 1.441536 \text{秒}$$

2) 用FFT进行运算：

$$\text{复乘： } T_1' = (N/2) \log_2 N \times 5 \times 10^{-6} = 0.01152 \text{秒}$$

$$\text{复加： } T_2' = N \log_2 N \times 0.5 \times 10^{-6} = 0.002304 \text{秒}$$

$$\text{总共： } T' = T_1' + T_2' = 0.013824 \text{秒}$$



三、DFT、FFT算法的运算量比较



例2、 对一个连续时间信号 $x_a(t)$ 采样1秒得到4096个采样点的序列，求：

1) 若采样后没有发生混叠现象， $x_a(t)$ 的最高频率是多少？

解：1秒内采样4096个点，说明采样频率是4096Hz。

$$\text{即： } f_s = 4096 \text{ Hz}$$

$$\because f_s \geq 2f_h$$

$$\therefore f_h \leq 2048 \text{ Hz}$$



三、DFT、FFT算法的运算量比较



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

2) 若计算采样信号的4096点DFT，DFT系数之间的频率间隔是多少？

解：(要求解的是频谱分辨的间隔F)

∴ 频谱范围是： $f_s = 4096Hz$

$$N = 4096$$

$$F = \frac{f_s}{N} = \frac{4096(Hz)}{4096} = 1(Hz)$$

6

数字滤波器的结构

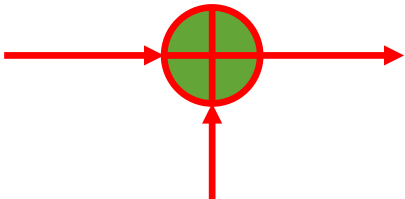
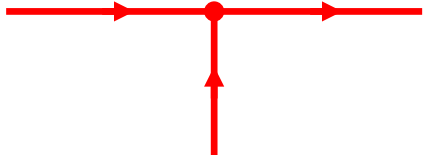
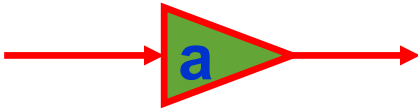


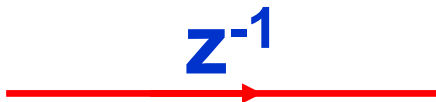
- 一. 数字滤波器的表示方法
- 二. 数字滤波器的分类
- 三. IIR数字滤波器结构
- 四. FIR数字滤波器结构



一、数字滤波器的表示方法



◆ 方框图、流图表示法

	方框图表示法	信号流图表示法
相加		
乘常数		
延时		



二、数字滤波器的分类



◆ 数字滤波器的分类

滤波器的种类很多，分类方法也不同。

- 1、从功能上分：低通、带通、高通、带阻数字滤波器。
- 2、从实现方法上分：FIR、IIR数字滤波器。
- 3、从设计方法上来分： Butterworth（巴特沃斯）、
Chebyshev(切比雪夫)、
Ellips（椭圆）数字滤波器等。
- 4、从处理信号分：经典滤波器、现代滤波器。



二、数字滤波器的分类



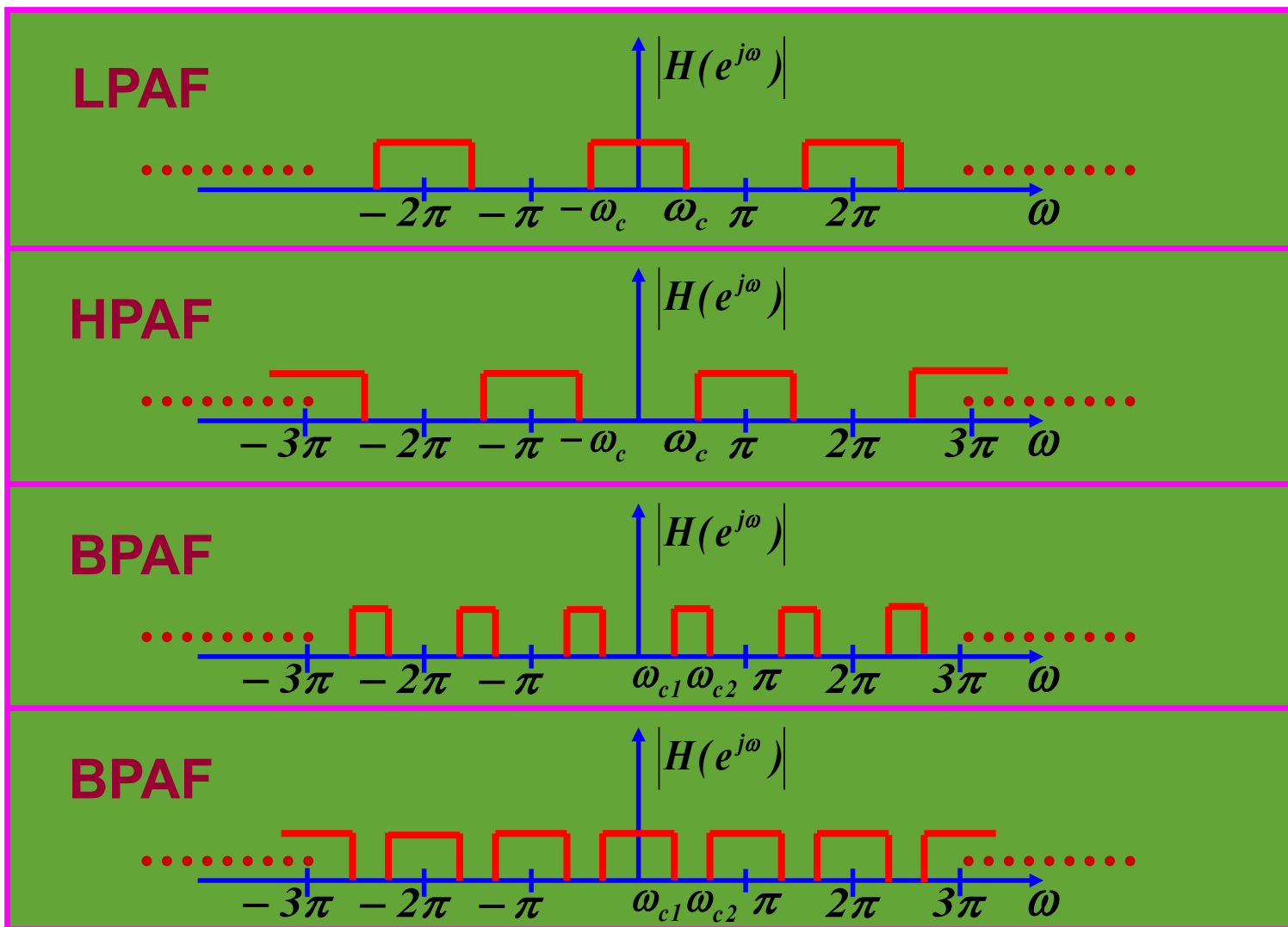
经典数字滤波器从功能上分又可分为：

- 1、低通数字滤波器 (Low Pass Digital Filter, LPDF)
- 2、高通数字滤波器 (High Pass Digital Filter, HPDF)
- 3、带通数字滤波器 (Band Pass Digital Filter, BPDF)
- 4、带阻数字滤波器 (Band Stop Digital Filter, BSDF)

二、数字滤波器的分类



◆ 数字滤波器的理想幅频特性





三、IIR数字滤波器结构



◆ 研究数字滤波器结构意义

- **滤波器的基本特性**（如有限长冲激响应FIR与无限长冲激响应IIR）决定了结构上有不同的特点。
- 不同结构所需的**存储单元及乘法次数不同**，前者影响**复杂性**，后者影响**运算速度**。
- **有限精度**（有限字长）实现情况下，不同运算结构的**误差及稳定性**不同。
- 好的滤波器结构应该易于**控制滤波器性能**，适合于模块化实现，便于时分复用。



三、IIR数字滤波器结构



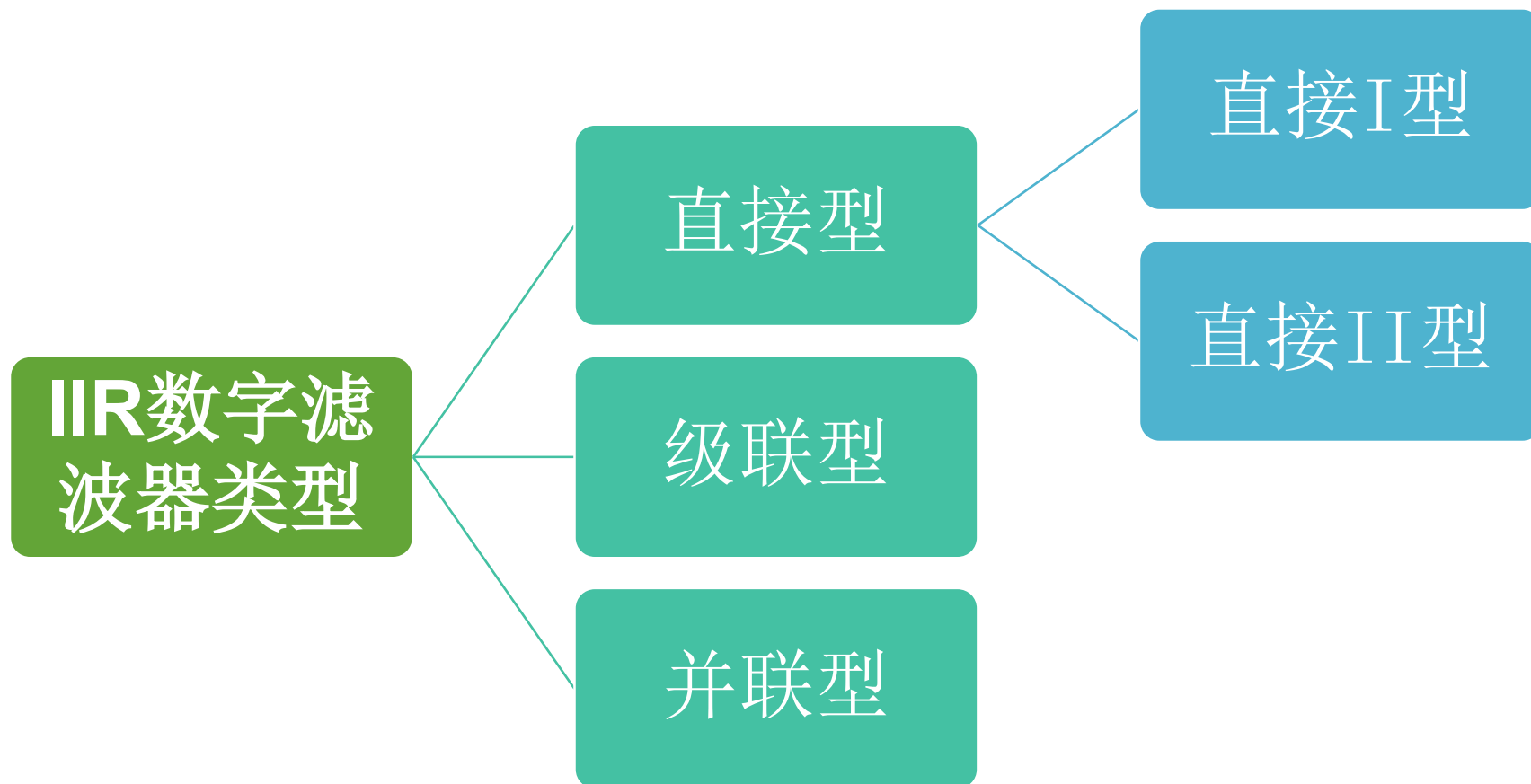
◆ IIR数字滤波器的特点

- 1、单位冲激响应 $h(n)$ 是无限长的： $n \rightarrow \infty$
- 2、系统函数 $H(z)$ 在有限长 z 平面 ($0 < |z| < \infty$) 有极点存在。
- 3、结构上存在输出到输入的反馈，也即结构上是递归型的。
- 4、因果稳定的IIR滤波器其全部极点一定在单位圆内。

三、IIR数字滤波器结构



◆ IIR 数字滤波器基本结构



三、IIR数字滤波器结构



◆ IIR 数字滤波器系统函数及差分方程

一个N阶IIR 数字滤波器有理的系统函数可能表示为:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i Z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i Z^{-i}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

则这一系统差分方程为:

$$y(n) = \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^M b_i x(n-i)$$



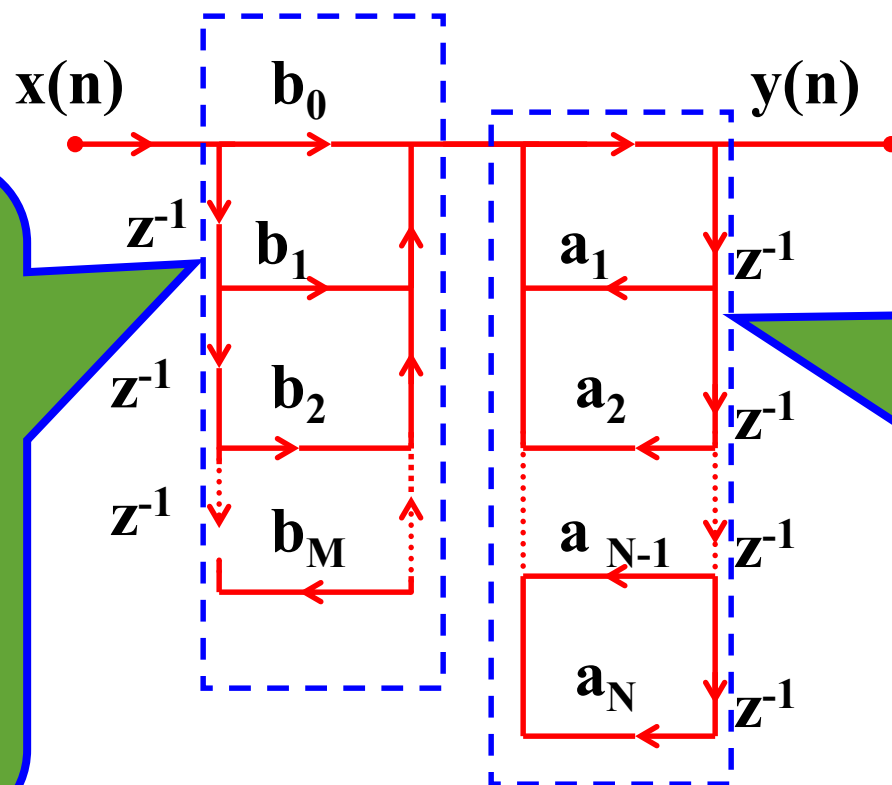
三、IIR数字滤波器结构

$$y(n) = \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^M b_i x(n-i)$$

➤ 直接I型流图

IIR 数字滤波器的差分方程就代表了一种最直接的计算公式，用流图表现出来的实现结构即为直接I型结构(即由差分方程直接实现)。

第一部分是一个对输入 $x(n)$ 的 M 节延时链结构。即每个延时抽头后加权相加，即是一个横向网络



第二部分是一个 N 节延时链结构网络。不过它是对 $y(n)$ 延时，因而是个反馈网络



三、IIR数字滤波器结构



➤ 直接I型数字滤波器结构的特点

- 1、两个网络级联：第一个横向结构 M 节延时网络实现零点，第二个有反馈的 N 节延时网络实现极点。
- 2、共需 $(N+M)$ 级延时单元。
- 3、系数 a_i 、 b_i 不是直接决定单个零极点，因而不能很好地进行滤波器性能控制。
- 4、极点对系数的变化过于灵敏，从而使系统频率响应对系统变化过于灵敏，也就是对有限精度（有限字长）运算过于灵敏，容易出现不稳定或产生较大误差。

注：直接型结构多用于低阶（2~3阶）滤波器。

三、IIR数字滤波器结构



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

➤ 直接II型原理

一个线性时不变系统，若交换其级联子系统的次序，系统函数不变。把此原理应用于直接I型结构。

即：

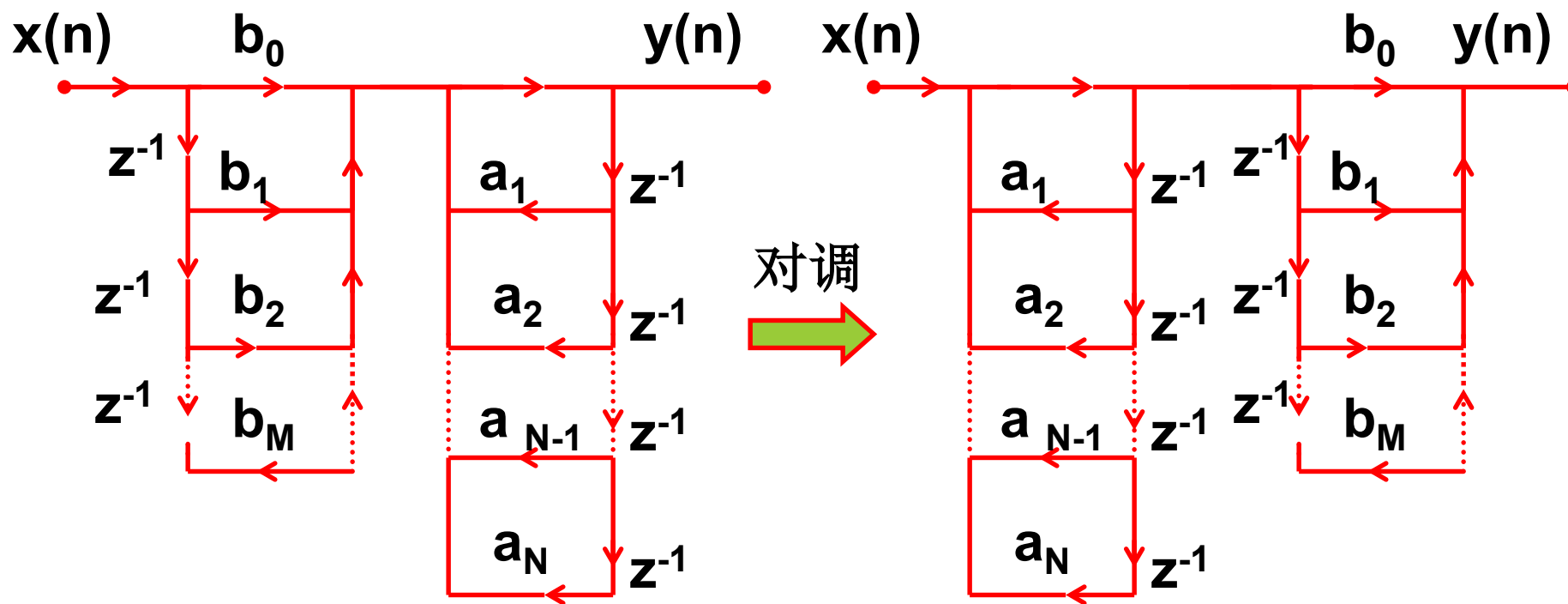
- (1) 交换两个级联网络的次序。
- (2) 合并两个具有相同输入的延时支路。



三、IIR数字滤波器结构



➤ 直接II型的结构流图：过程1--对调



第一部分

第二部分

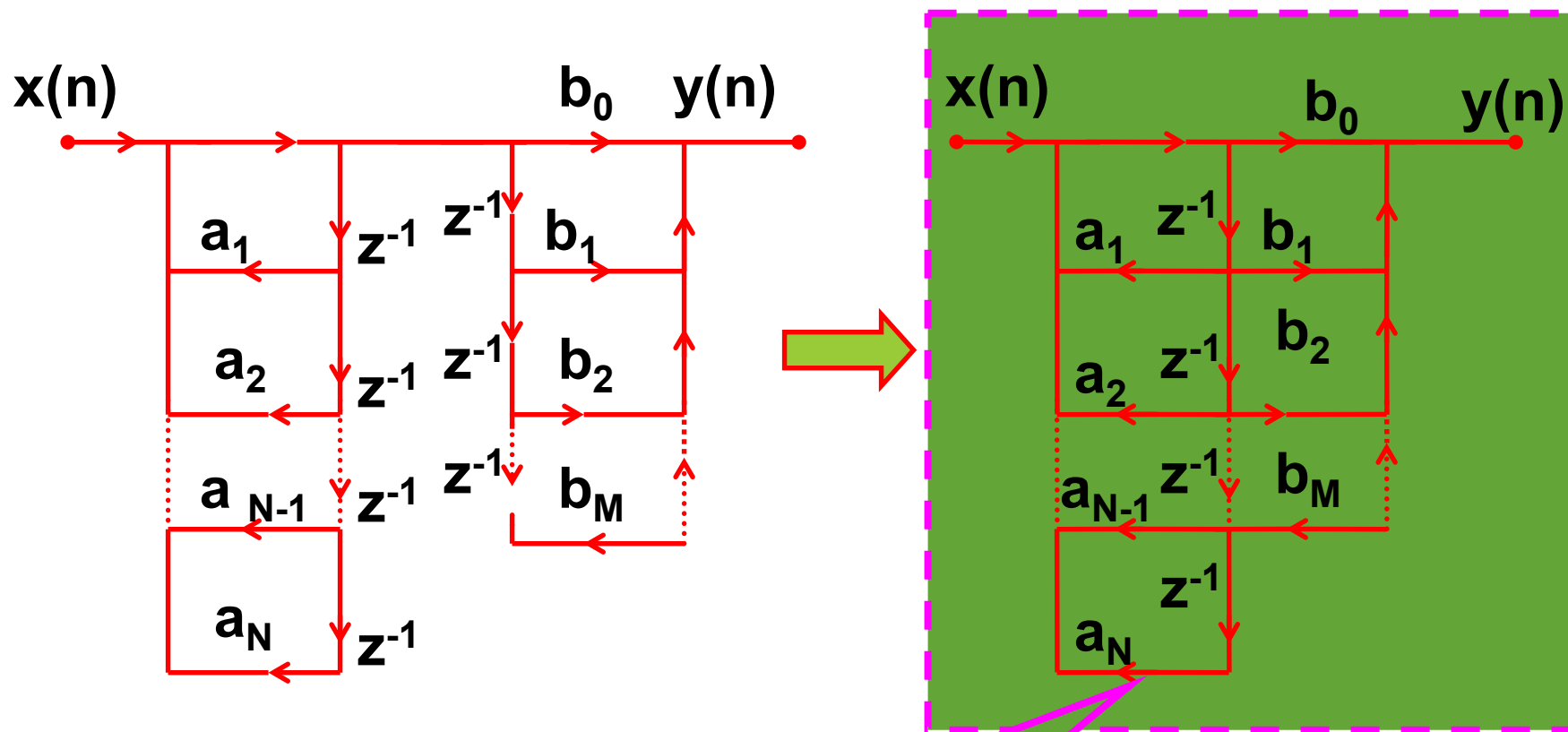
对调



三、IIR数字滤波器结构



➤ 直接II型的结构流图：过程2—合并



直接II型的结构流图



三、IIR数字滤波器结构



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

➤ 直接II型特点

(1) 两个网络级联。

第一个有反馈的N节延时网络实现极点；
第二个横向结构M节延时网络实现零点。

(2) 实现N阶滤波器

只需N级($N \geq M$)延时单元，所需延时单元最少。
故称典范型。

(3) 同直接I型一样，具有直接型实现的一般缺点。



三、IIR数字滤波器结构



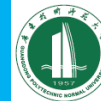
例：已知IIR 数字滤波器系统函数，画出直接I型、直接II型的结构流图。

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{8z^3 - 4z^2 + 11z - 2}{(z - \frac{1}{4})(z^2 - z + \frac{1}{2})} \\ &= \frac{8z^3 - 4z^2 + 11z - 2}{z^3 - \frac{5}{4}z^2 + \frac{3}{4}z - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}} \end{aligned}$$

必须将H(z)代为 z^{-1} 的有理式

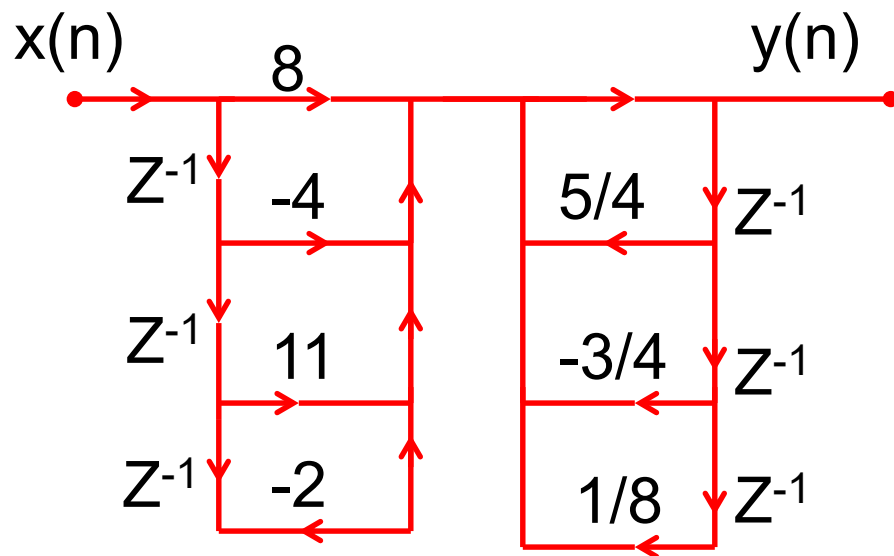


三、IIR数字滤波器结构

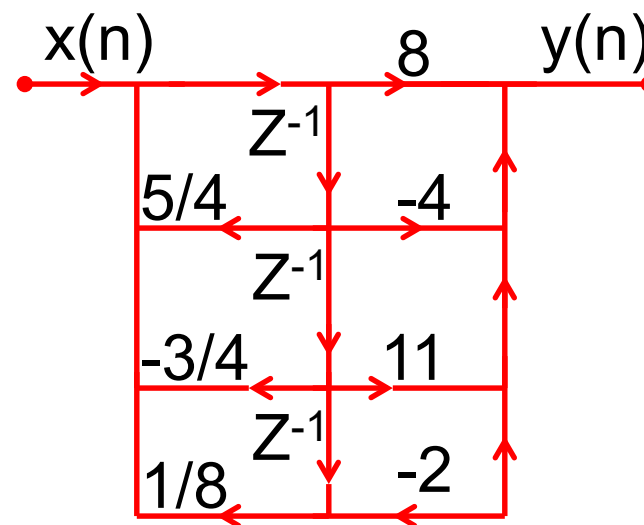


$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

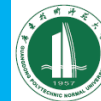
直接I型



直接II型



注意反馈部分系数符号!!!



➤ 级联型结构

➤ 系统函数因式分解

一个N阶系统函数可用它的零、极点来表示，即系统函数的分子、分母进行因式分解：

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i Z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i Z^{-i}} = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - d_i z^{-1})}$$

零、极点 c_i 和 d_i 只有两种情况：

(a)或者是实根

(b)或者是共轭复根



三、IIR数字滤波器结构



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

➤ 系统函数系数分析

$$H(z) = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - d_i z^{-1})} = A \frac{\prod_{i=1}^{M_1} (1 - g_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{M_2} (1 - h_i z^{-1})(1 - h_i^* z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N_1} (1 - p_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{N_2} (1 - q_i z^{-1})(1 - q_i^* z^{-1})}$$

式中： g_i, p_i 为实根； h_i, q_i 为复根。

其中： $N_1 + 2N_2 = N$ ； $M_1 + 2M_2 = M$

若将每一对共轭因子合并起来构成一个实系数的二阶因子，则：

$$H(z) = A \frac{\prod_{i=1}^{M_1} (1 - g_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{M_2} (1 + \beta_{1i} z^{-1} + \beta_{2i} z^{-2})}{\prod_{i=1}^{N_1} (1 - p_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{N_2} (1 - \alpha_{1i} z^{-1} - \alpha_{2i} z^{-2})}$$



三、IIR数字滤波器结构



➤ 基本二阶节的级联结构

$$H(z) = A \frac{\prod_{i=1}^{M1} (1 - g_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{M2} (1 + \beta_{1i} z^{-1} + \beta_{2i} z^{-2})}{\prod_{i=1}^{N1} (1 - p_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{N2} (1 - \alpha_{1i} z^{-1} - \alpha_{2i} z^{-2})}$$

若把单实因子 $\prod_{i=1}^{M1} (1 - g_i z^{-1})$ 及 $\prod_{i=1}^{N1} (1 - p_i z^{-1})$ 看作二阶因子的特例。

即为二次项系数 $(\alpha_{2i}, \beta_{2i}) = 0$ 的二阶因子。那么，整个 $H(z)$ 就可以完全分解成实系数二阶因子形式：

$$H(z) = A \prod_{i=1}^M \frac{(1 + \beta_{1i} z^{-1} + \beta_{2i} z^{-2})}{(1 - \alpha_{1i} z^{-1} - \alpha_{2i} z^{-2})}$$



三、IIR数字滤波器结构



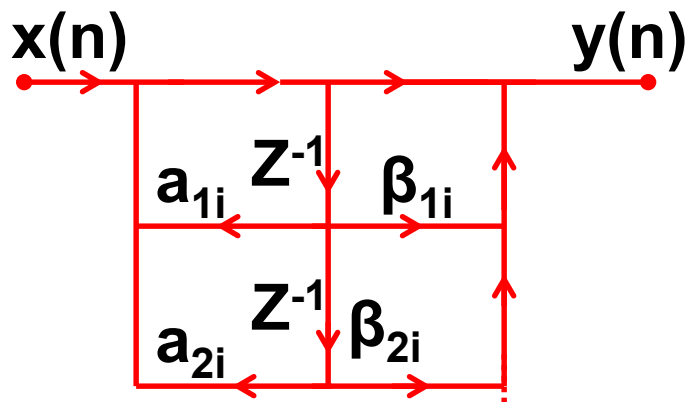
➤ 滤波器的基本二阶节

滤波器可以用若干个二阶网络级联起来构成。这每一个二阶网络也称滤波器的基本二阶节（即滤波器的二阶节）。

一个基本二阶节的系统函数的形式为：

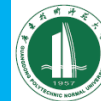
$$H_i(z) = \frac{1 + \beta_{1i}z^{-1} + \beta_{2i}z^{-2}}{1 - \alpha_{1i}z^{-1} - \alpha_{2i}z^{-2}}$$

一般用直接II型（正准型、典范型表示）





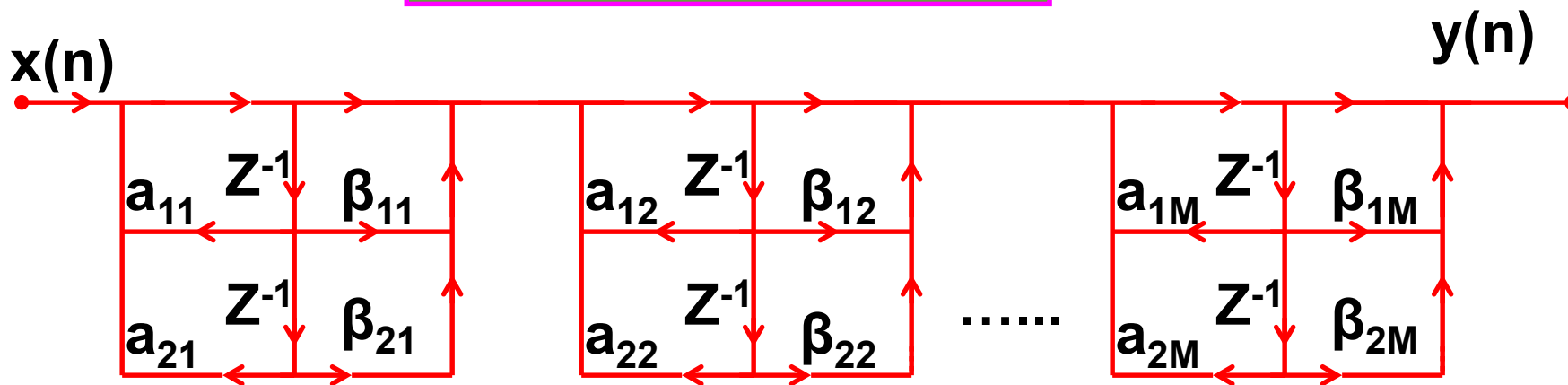
三、IIR数字滤波器结构



➤ 用二阶节级联表示的滤波器系统

整个滤波器则是多个二阶节级联：

$$H(z) = A \prod_{i=1}^M H_i(z)$$



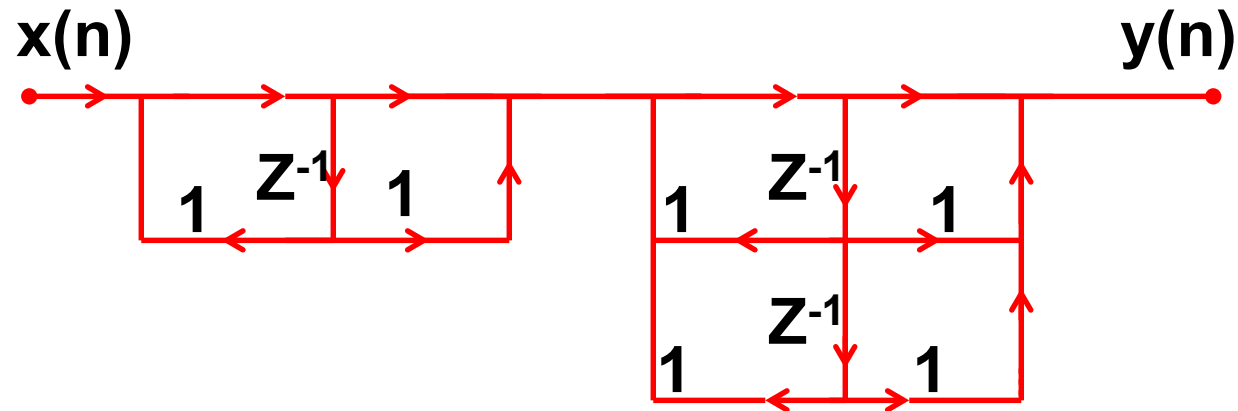


三、IIR数字滤波器结构



例：设IIR数字滤波器系统函数为，画出其级联结构图：

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - 2z^{-1} + z^{-3}}$$
$$= \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1})(1 - z^{-1} - z^{-2})}$$





三、IIR数字滤波器结构



➤ 级联结构的特点

数字滤波器级联结构的每一个基本节只关系到滤波器的某一对极点和一对零点。调整 β_{1i} 、 β_{2i} 只单独调整滤波器第 i 对零点，而不影响其它零点。同样，调整 a_{1i} 、 a_{2i} 只单独调整滤波器第 i 对极点，而不影响其它极点。

- 1、每个二阶节系数单独控制一对零点或一对极点，有利于控制频率响应，滤波器调整方便。
- 2、极点和零点的配对方式及二阶节的级联顺序有许多种排列组合，具有很大的灵活性。
- 3、有限字长效应的影响小。

三、IIR数字滤波器结构



◆ 并联型结构

➤ 系统函数的部分分式展开

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} \frac{A_i}{1 - c_i z^{-1}} + \sum_{i=1}^{N_2} \frac{B_i (1 - e_i z^{-1})}{(1 - d_i z^{-1})(1 - d_i^* z^{-1})} + \sum_{i=0}^{M-N} A_i z^{-i} \\ &= \sum_{i=1}^{\left[\frac{N+1}{2} \right]} \frac{\beta_{0i} + \beta_{1i} z^{-1}}{1 - \alpha_{1i} z^{-1} - \alpha_{2i} z^{-2}} + \sum_{i=0}^{M-N} G_i z^{-i} \end{aligned}$$

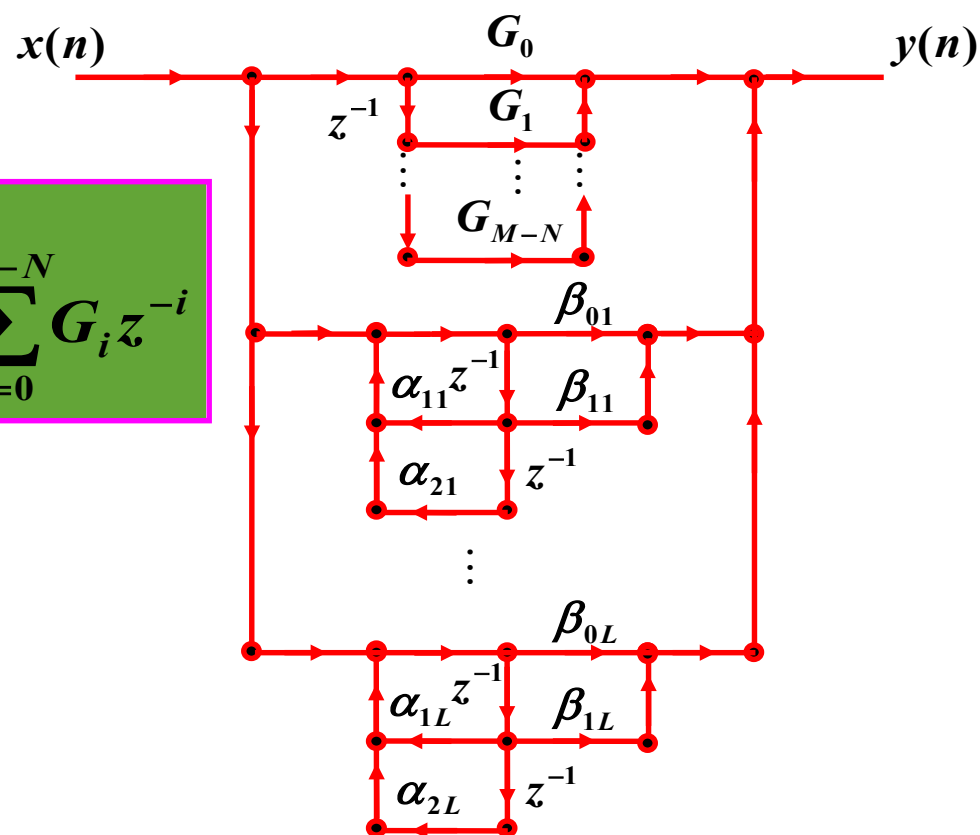


三、IIR数字滤波器结构



➤ 基本二阶节的并联结构

$$H(z) = \sum_{i=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} \frac{\beta_{0i} + \beta_{1i}z^{-1}}{1 - \alpha_{1i}z^{-1} - \alpha_{2i}z^{-2}} + \sum_{i=0}^{M-N} G_i z^{-i}$$





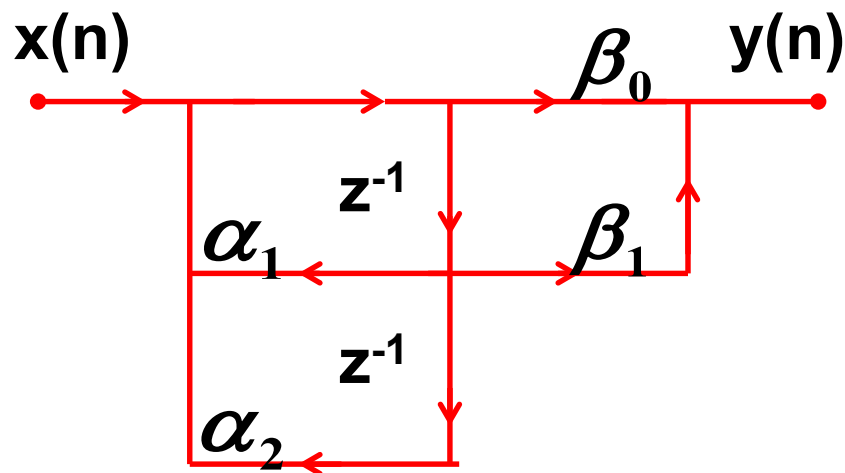
三、IIR数字滤波器结构



➤ 并联型的基本二阶节的形式：

$$H(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1}}{1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2}}$$

分子比分母小一阶：





➤ 并联型特点

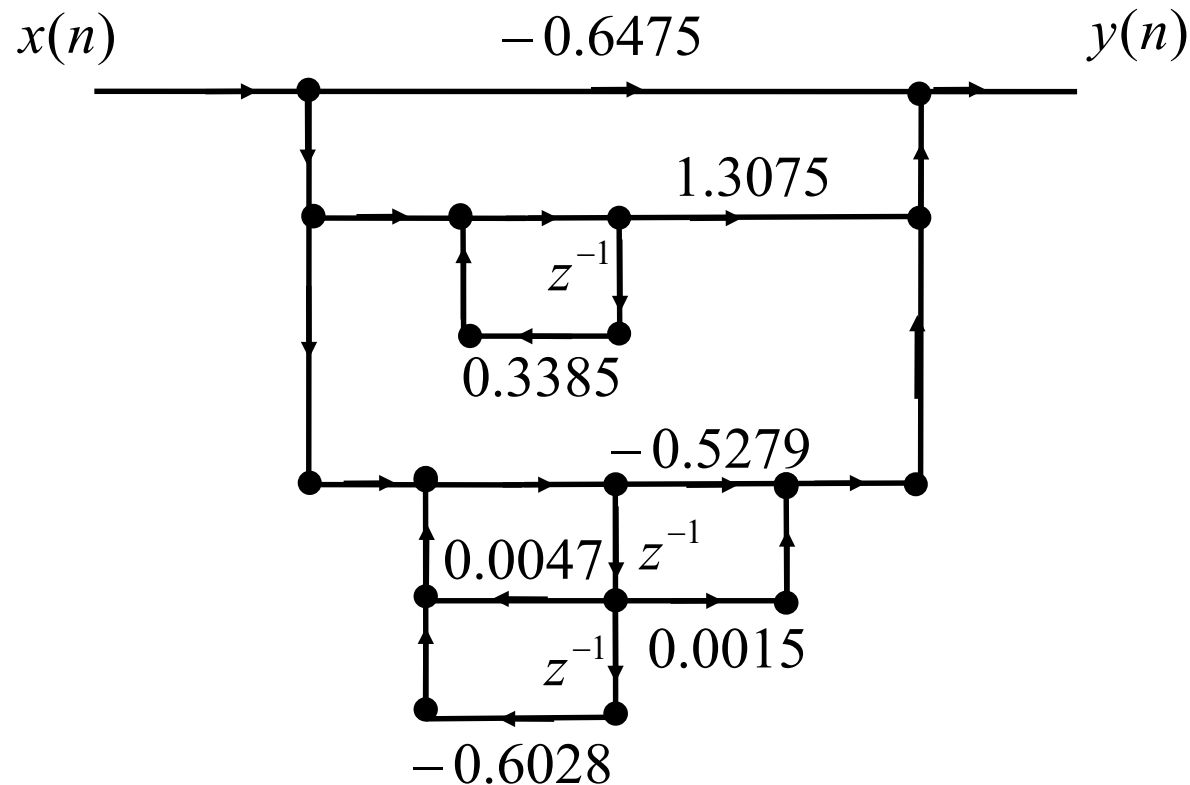
- ◆ 1、可以单独调整极点位置，但不能象级联那样直接控制零点(因为只为各二阶节网络的零点，并非整个系统函数的零点)。
- ◆ 2、误差最小。因为并联型各基本节的误差互不影响，所以比级联误差还少。若某一支路 a_1 误差为1%，但总系统的误差仍可达到少1%。(因为分成 $a_1, a_2 \cdots$ 支路)。



三、IIR数字滤波器结构



例:
$$H(z) = -0.6475 + \frac{1.3075}{1 - 0.3385z^{-1}} + \frac{-0.5279 + 0.0015z^{-1}}{1 - 0.0047z^{-1} + 0.6028z^{-2}}$$





三、IIR数字滤波器结构



例： 设系统用下面的差分方程描述：

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

试画出系统的直接型、级联型和并联型结构。

解：

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

将上式进行Z变换

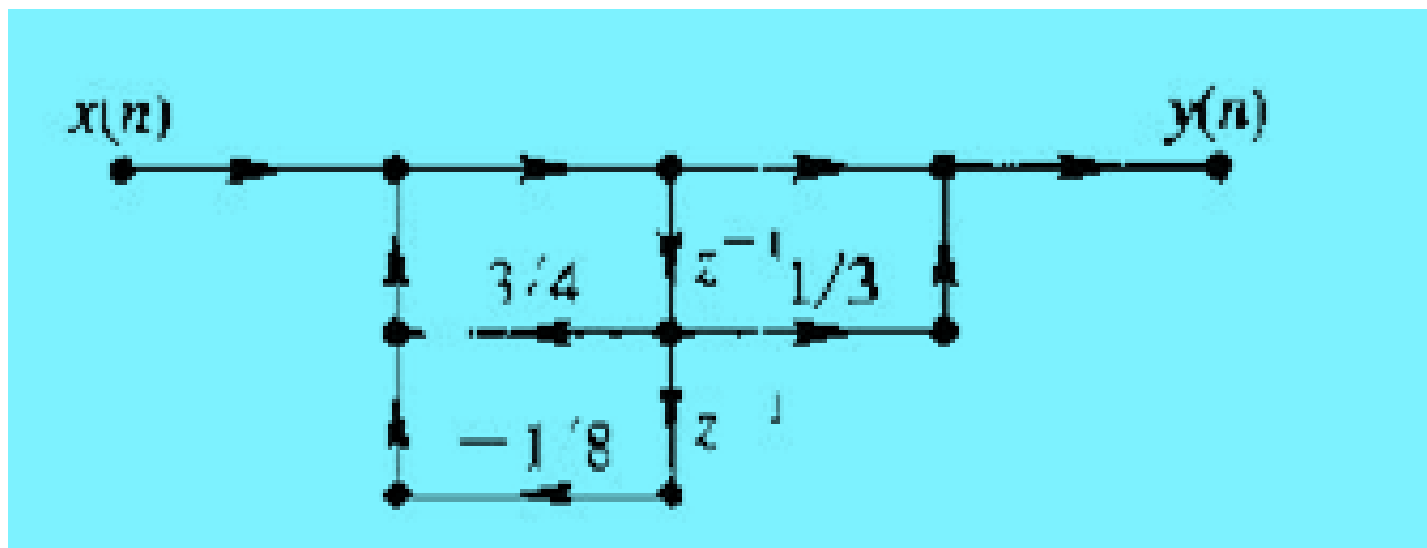
$$Y(z) - \frac{3}{4}Y(z)z^{-1} + \frac{1}{8}Y(z)z^{-2} = X(z) + \frac{1}{3}X(z)z^{-1}$$
$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$



三、IIR数字滤波器结构

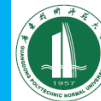


(1) 按照系统函数 $H(z)$ ，画出直接型结构如图（一）所示。





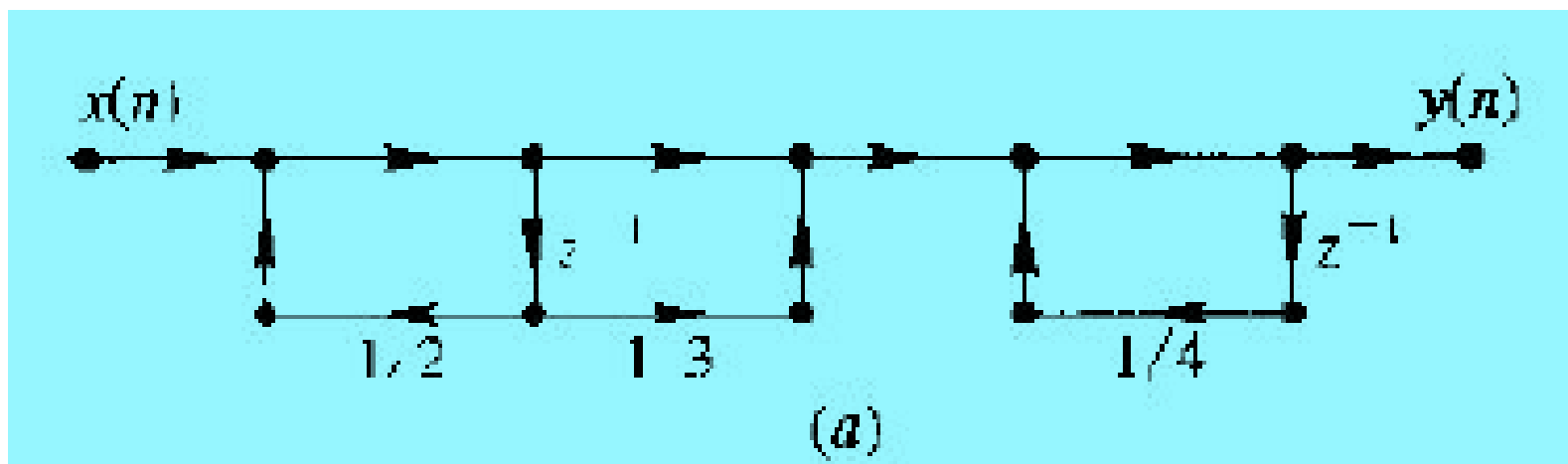
三、IIR数字滤波器结构



(2) 将 $H(z)$ 的分母进行因式分解

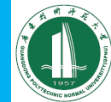
$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \bullet \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

按照上式可以有级联型结构 (a) :





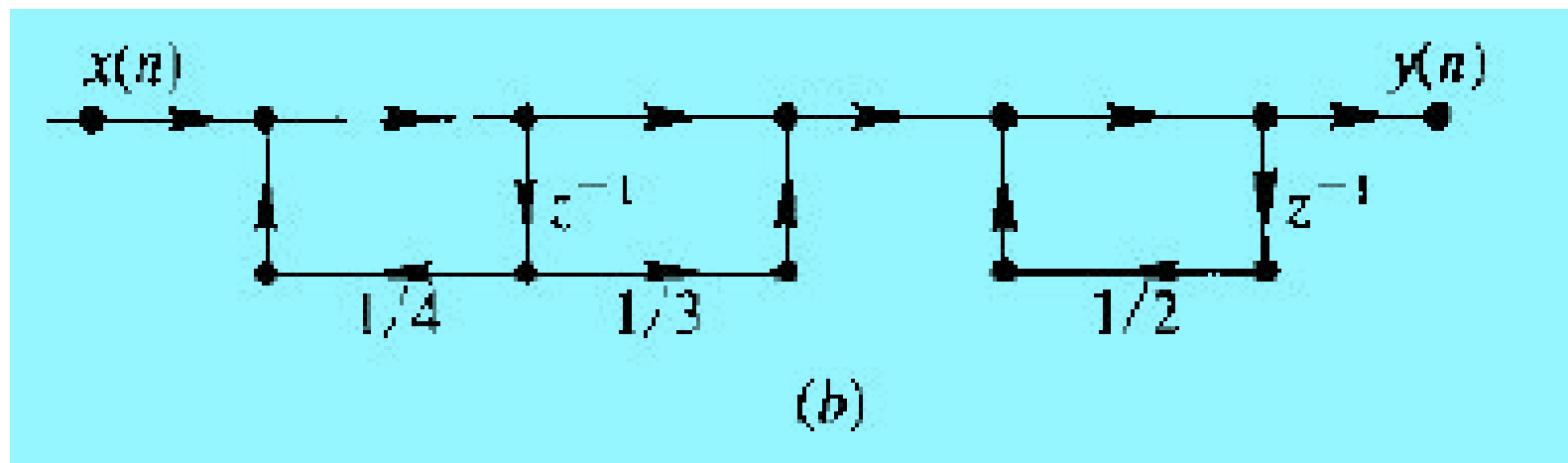
三、IIR数字滤波器结构



(2) 将 $H(z)$ 的分母进行因式分解

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

按照上式可以有级联型结构 (b) :





三、IIR数字滤波器结构



(3) 将 $H(z)$ 进行部分分式展开

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \quad \frac{H(z)}{z} = \frac{z + \frac{1}{3}}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} = \frac{A}{z - \frac{1}{2}} + \frac{B}{z - \frac{1}{4}}$$

$$A = \frac{z + \frac{1}{3}}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} \left(z - \frac{1}{2} \right) \bigg|_{z = \frac{1}{2}} = \frac{10}{3} \quad B = \frac{z + \frac{1}{3}}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} \left(z - \frac{1}{4} \right) \bigg|_{z = \frac{1}{4}} = -\frac{7}{3}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{\frac{10}{3}}{z - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{7}{3}}{z - \frac{1}{4}}$$

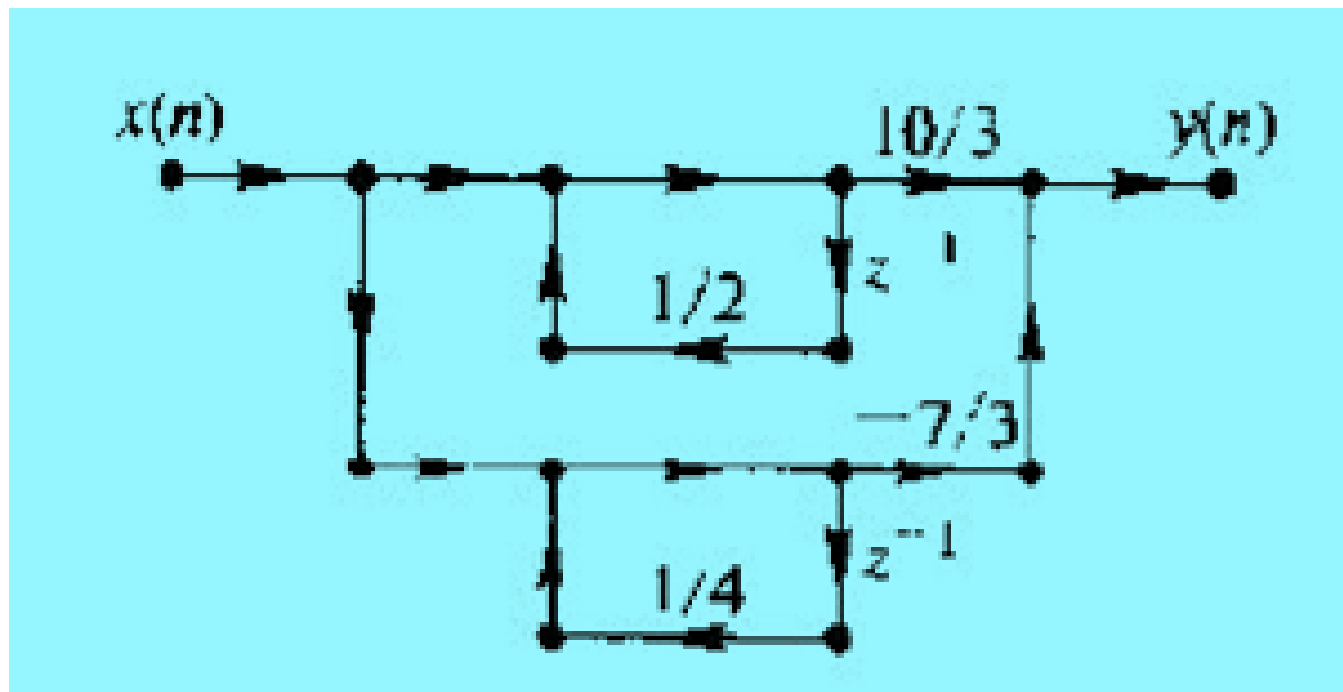


三、IIR数字滤波器结构



$$H(z) = \frac{\frac{10}{3}z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{7}{3}z}{z - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{7}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

根据上式画出并联型结构：





四、FIR数字滤波器结构



◆ FIR 数字滤波器的特点

- 1、系统的单位冲激响应 $h(n)$ 在有限个 n 值处不为零。
即 $h(n)$ 是个有限长序列。
- 2、系统函数 $H(z)$ 在 $|z|>0$ 处收敛，极点全部在 $z=0$ 处(即FIR一定为稳定系统)。
- 3、结构上主要是非递归结构，没有输出到输入反馈。但有些结构中（例如频率抽样结构）也包含有反馈的递归部分。



四、FIR数字滤波器结构



◆ FIR的系统函数及差分方程

长度为**N**的单位冲激响应**h(n)**的系统函数为：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

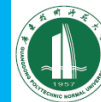
它实际是系统函数**H(z)**中**a_i=0**的无反馈情况：

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

差分方程为：

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(n)x(n-m)$$

❖ 四、FIR数字滤波器结构



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

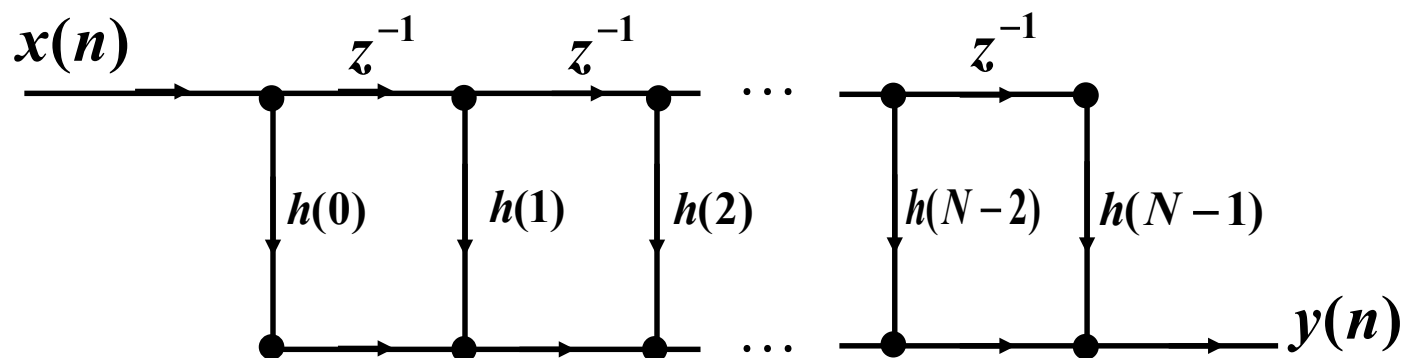
◆ FIR滤波器实现基本结构

- 1、FIR的横截型结构（直接型）
- 2、FIR的级联型结构
- 3、FIR的频率抽样型结构

◆ FIR直接型结构（卷积型、横截型）

➤ 流图

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m]$$

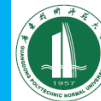


➤ 特点:

- (1) 简单直观，运算速度快；
- (2) 系数即为脉冲响应 $h(n]$ 的序列值；
- (3) 不能直接控制零点。



四、FIR数字滤波器结构

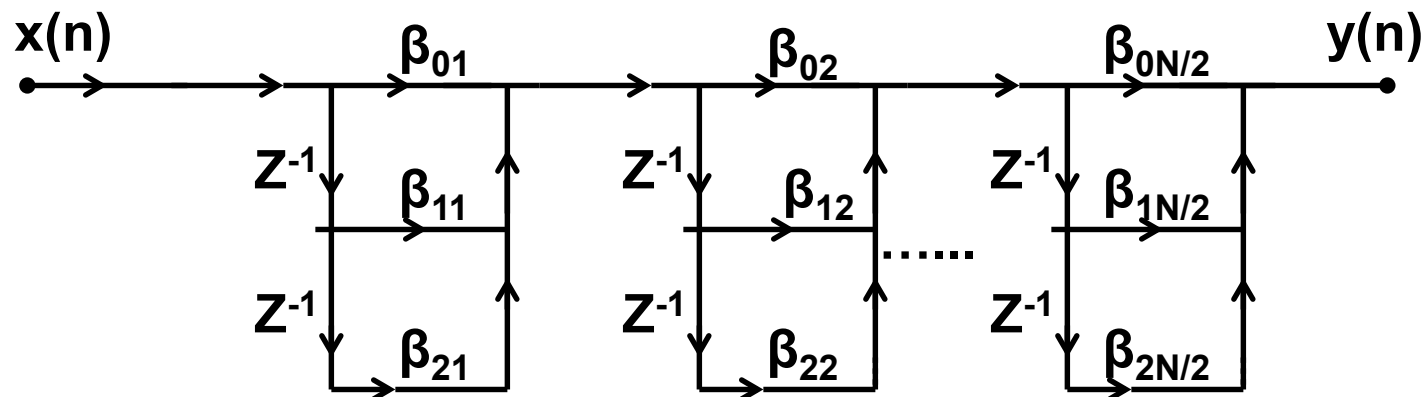


◆ 级联型结构

当需要控制滤波器的传输零点时，可将 $H(z)$ 系统函数分解成二阶实系数因子的形成：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{i=1}^{\frac{N}{2}} (\beta_{0i} + \beta_{1i}z^{-1} + \beta_{2i}z^{-2})$$

上式可由多个二阶节级联实现：





四、FIR数字滤波器结构



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

➤ 级联型结构特点

- 1、由于这种结构所需的系数比直接型多，
因而所需乘法运算也比直接型多。
- 2、由于这种结构的每一节控制一对零点，
因而常在需要控制传输零点时用。



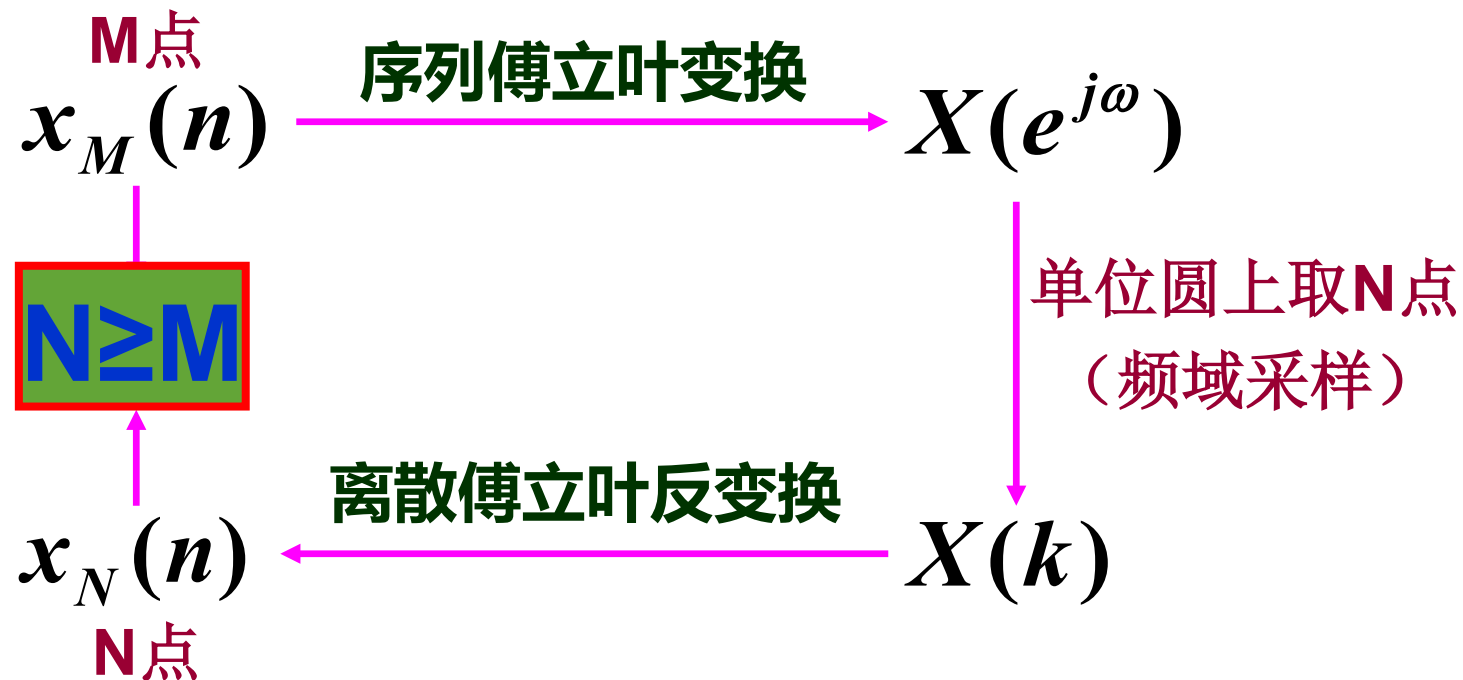
四、FIR数字滤波器结构



◆ 频率抽样型结构

➤ 频率抽样型结构的导入

回忆：频率采样定理





四、FIR数字滤波器结构



➤ 频率抽样型滤波器结构

用 $H(k)$ 表示 $H(z)$ 的方法，利用内插公式：

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

它是由两部分级联而成：

$$H(z) = H_1(z) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)$$

梳状滤波器

由N个谐振器组成的谐振柜



四、FIR数字滤波器结构

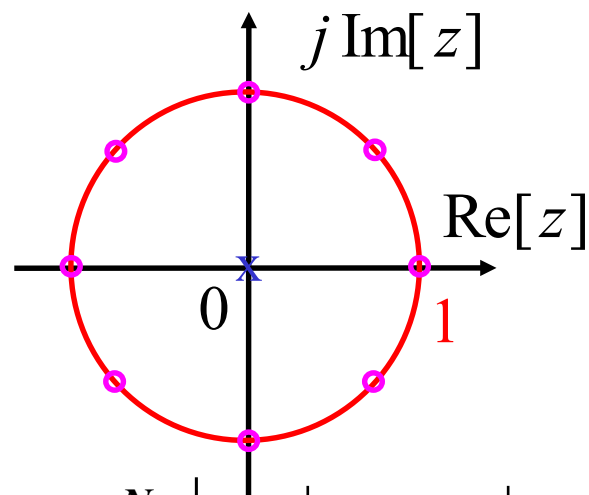


广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

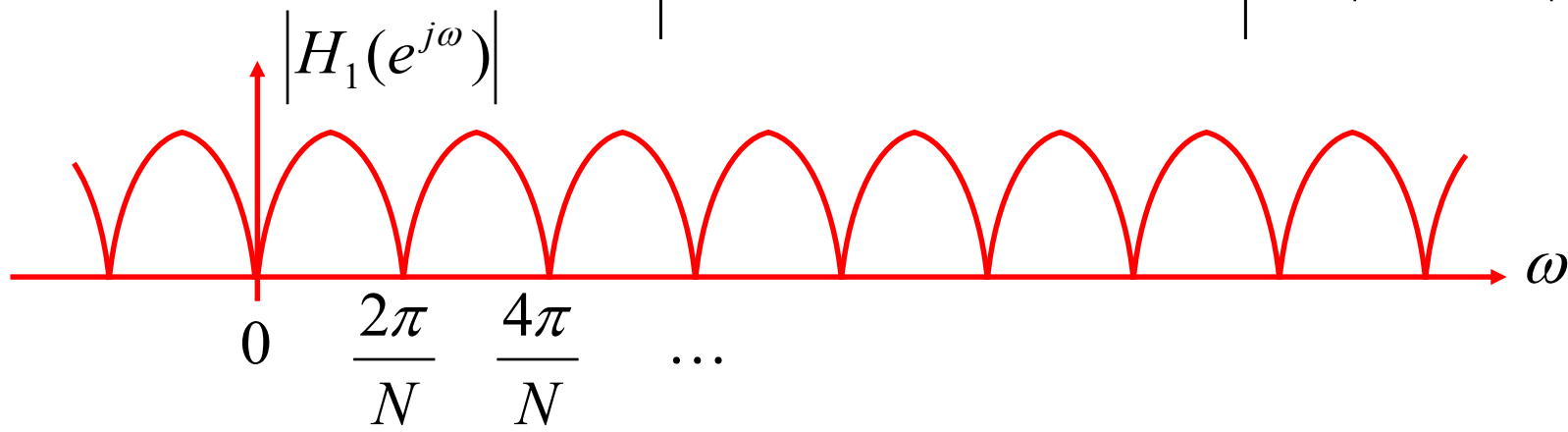
➤ 梳状滤波器

$$H_1(z) = 1 - z^{-N} = \frac{z^N - 1}{z^N}$$

可见，极点集中在 $z = 0$ 处(N 阶)，
零点在单位圆上均匀分布(N 个)。



$$|H_1(e^{j\omega})| = |1 - e^{-j\omega N}| = \left| e^{-j\frac{\omega N}{2}} (e^{j\frac{\omega N}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}}) \right| = 2 \left| \sin \frac{\omega N}{2} \right|$$





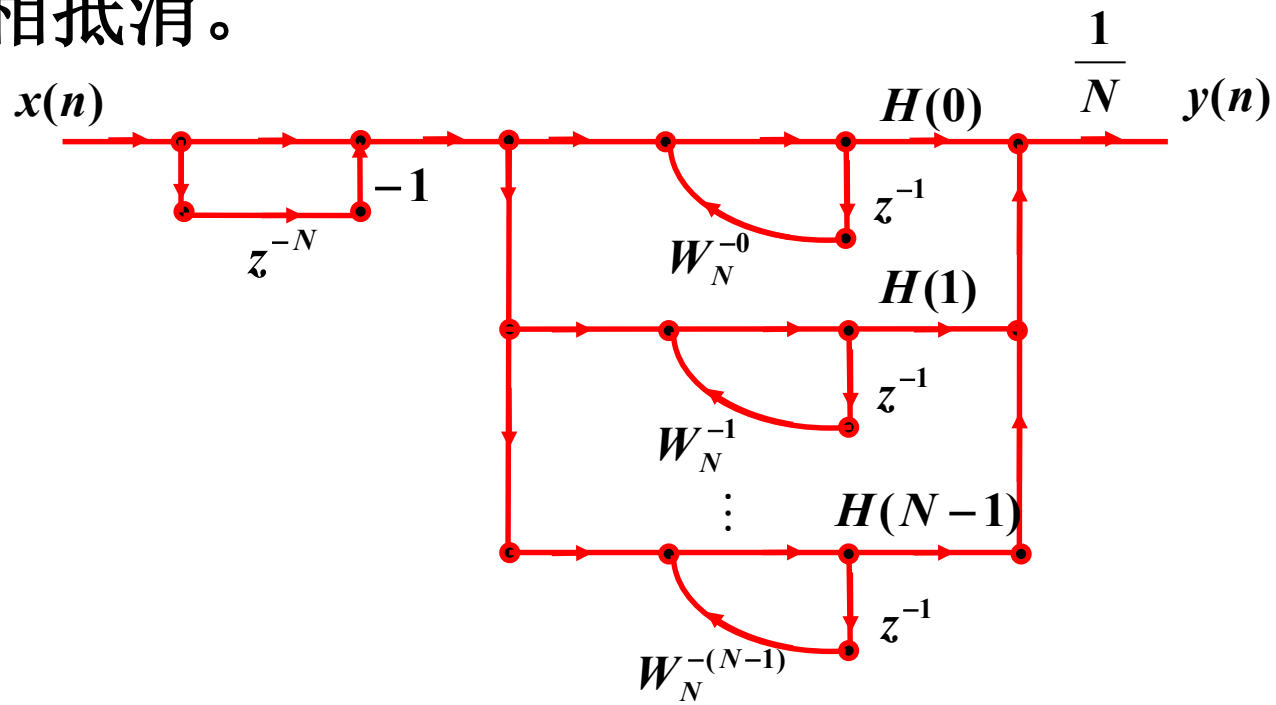
四、FIR数字滤波器结构



➤ **谐振柜：** 是由**N**个谐振器并联而成的。

$$H_2(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)$$

$H_1(z)$ 中的每一个零点与 $H_2(z)$ 中的某一个 $H_k(z)$ 的极点相抵消。





四、FIR数字滤波器结构



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

➤ 特点

- 1、可直接根据系统的频率响应的采样值构造滤波器。
- 2、适用于窄带滤波器(仅有少数 $H(k)$ 不为0)。
- 3、由于系数的有限字长，易使系统变为不稳定。
- 4、谐振器柜中的每个一阶网络的系数均为复数。



四、FIR数字滤波器结构



➤ 两个主要缺点

- 1、所有的相乘系数及 $H(k)$ 都是复数，应将它们先化成二阶的实数，这样乘起来较复杂，增加乘法次数，存储量。
- 2、所有谐振器的极点都是在单位园上,由 W_N^{-k} 决定考虑到系数量化的影响，当系数量化时，极点会移动，有些极点就不能被梳状滤波器的零点所抵消，而这可能导致系统不稳定。



四、FIR数字滤波器结构



➤ 四种线性相位FIR DF特性

第一类， $h(n)$ 偶、 N 奇，四种滤波器都可设计。

第二类， $h(n)$ 偶、 N 偶，可设计低、带通滤波器
不能设计高通和带阻。

第三类， $h(n)$ 奇、 N 奇，只能设计带通滤波器，
其它滤波器都不能设计。

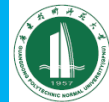
第四类， $h(n)$ 奇、 N 偶，可设计高通、带通滤波器，
不能设计低通和带阻。

7 IIR数字滤波器的设计

- 一. 数字滤波器的设计过程
- 二. 数字滤波器的技术要求
- 三. IIR数字滤波器的设计方法



一、数字滤波器的设计过程



数字滤波器的设计过程：

- 1、按设计任务，确定滤波器性能要求，制定技术指标；
- 2、用一个因果稳定的离散LSI系统的系统函数 $H(z)$ 逼近此性能指标；
- 3、利用有限精度算法实现此系统函数：如运算结构、字长的选择等；
- 4、实际技术实现：软件法、硬件法或DSP芯片法；



二、数字滤波器的技术要求



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

选频滤波器的频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\beta(j\omega)}$$

$|H(e^{j\omega})|$ 为幅频特性：表示信号通过该滤波器后各频率成分的衰减情况；

$\beta(j\omega)$ 为相频特性：反映各频率成分通过滤波器后在时间上的延时情况。



二、数字滤波器的技术要求



理想滤波器不可实现，只能以实际滤波器逼近

◆ 通带： $|\omega| \leq \omega_c$ $1 - \alpha_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1$

◆ 阻带： $\omega_{st} \leq |\omega| \leq \pi$ $|H(e^{j\omega})| \leq \alpha_2$

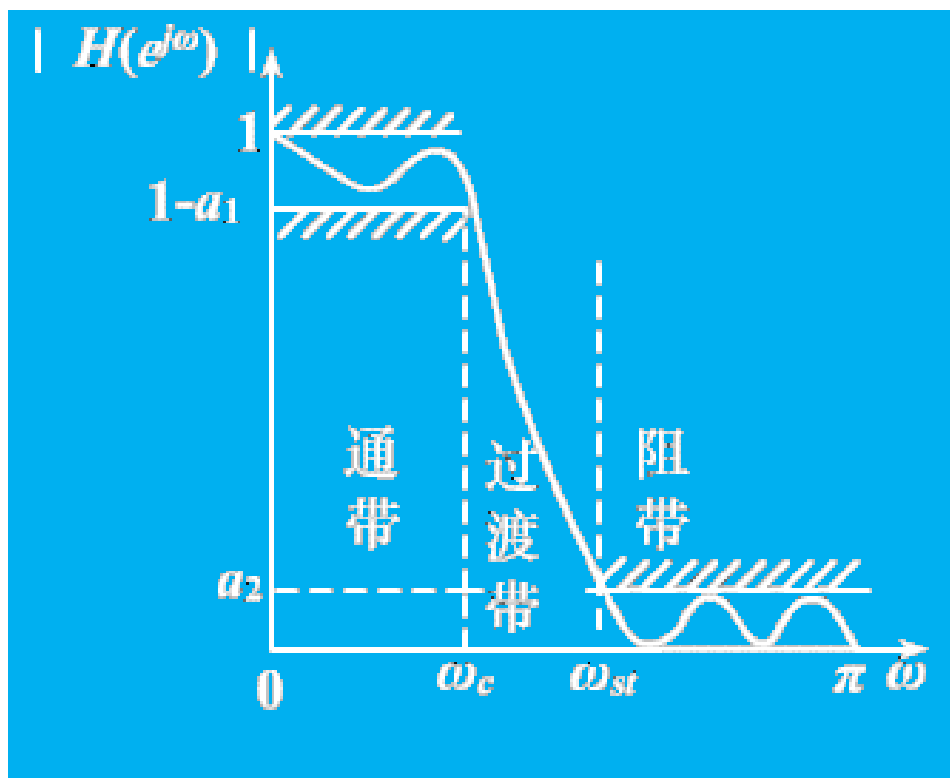
◆ 过渡带： $\omega_c \leq |\omega| \leq \omega_{st}$

ω_c ：通带截止频率

ω_{st} ：阻带截止频率

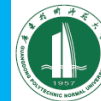
α_1 ：通带容限

α_2 ：阻带容限





二、数字滤波器的技术要求



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

通带最大衰减： δ_1

$$\delta_1 = 20\lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_c})|} = -20\lg |H(e^{j\omega_c})| = -20\lg(1 - \alpha_1)$$

阻带最小衰减： δ_2

$$\delta_2 = 20\lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_{st}})|} = -20\lg |H(e^{j\omega_{st}})| = -20\lg \alpha_2$$

其中： $|H(e^{j0})| = 1$

当 $|H(e^{j\omega_c})| = \sqrt{2}/2 = 0.707$ 时， $\delta_1 = 3\text{dB}$ 称 ω_c 为3dB通带截止频率



三、IIR数字滤波器的设计方法



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

用一因果稳定的离散LSI系统逼近给定的性能要求：

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

即为求滤波器的各系数：
 s 平面逼近：模拟滤波器
 z 平面逼近：数字滤波器

➤ 间接法：先设计模拟滤波器，再转换为数字滤波器。

➤ 计算机辅助设计法



三、IIR数字滤波器的设计方法



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

设计思想： s 平面 \rightarrow z 平面

模拟系统 $H_a(s) \rightarrow H(z)$ 数字系统

- $H(z)$ 的频率响应要能模仿 $H_a(s)$ 的频率响应，即 s 平面的虚轴映射到 z 平面的单位圆。
- 因果稳定的 $H_a(s)$ 映射到因果稳定的 $H(z)$ ，即 s 平面的左半平面 $\text{Re}[s] < 0$ ，映射到 z 平面的单位圆内 $|z| < 1$ 。



三、IIR数字滤波器的设计方法



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

模拟滤波器设计IIR数字滤波器的方法：

- 冲激响应不变法
- 双线性变换法



三、IIR数字滤波器的设计方法



➤ 冲激响应不变法

思路: $h_a(t) \longrightarrow h(n) = h_a(t)|_{t=nT} = h_a(nT)$

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i} \xrightarrow[\substack{\text{某种变换} \\ z = e^{sT}}]{\quad} H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$



冲激响应不变法



$$h_a(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i t} u(t) \longrightarrow h(n) = \sum_{i=1}^N A_i (e^{s_i T})^n u(n)$$

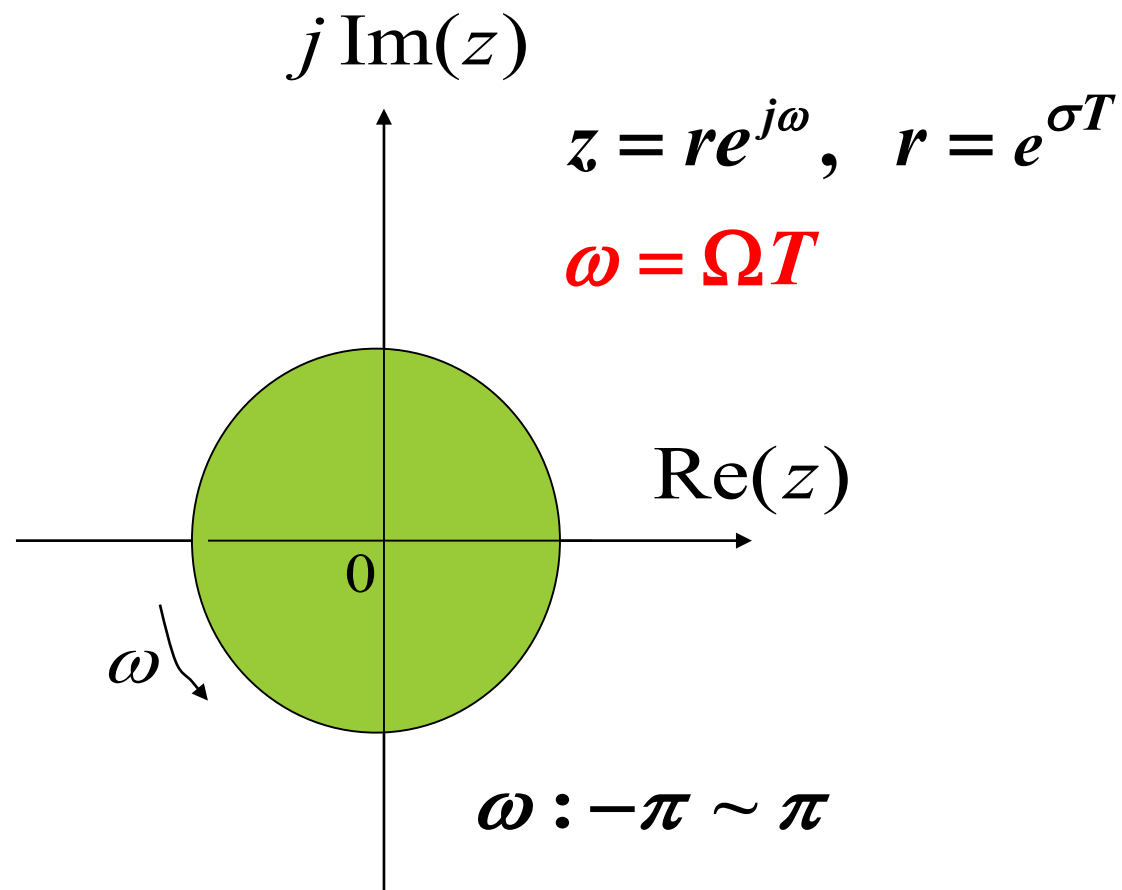
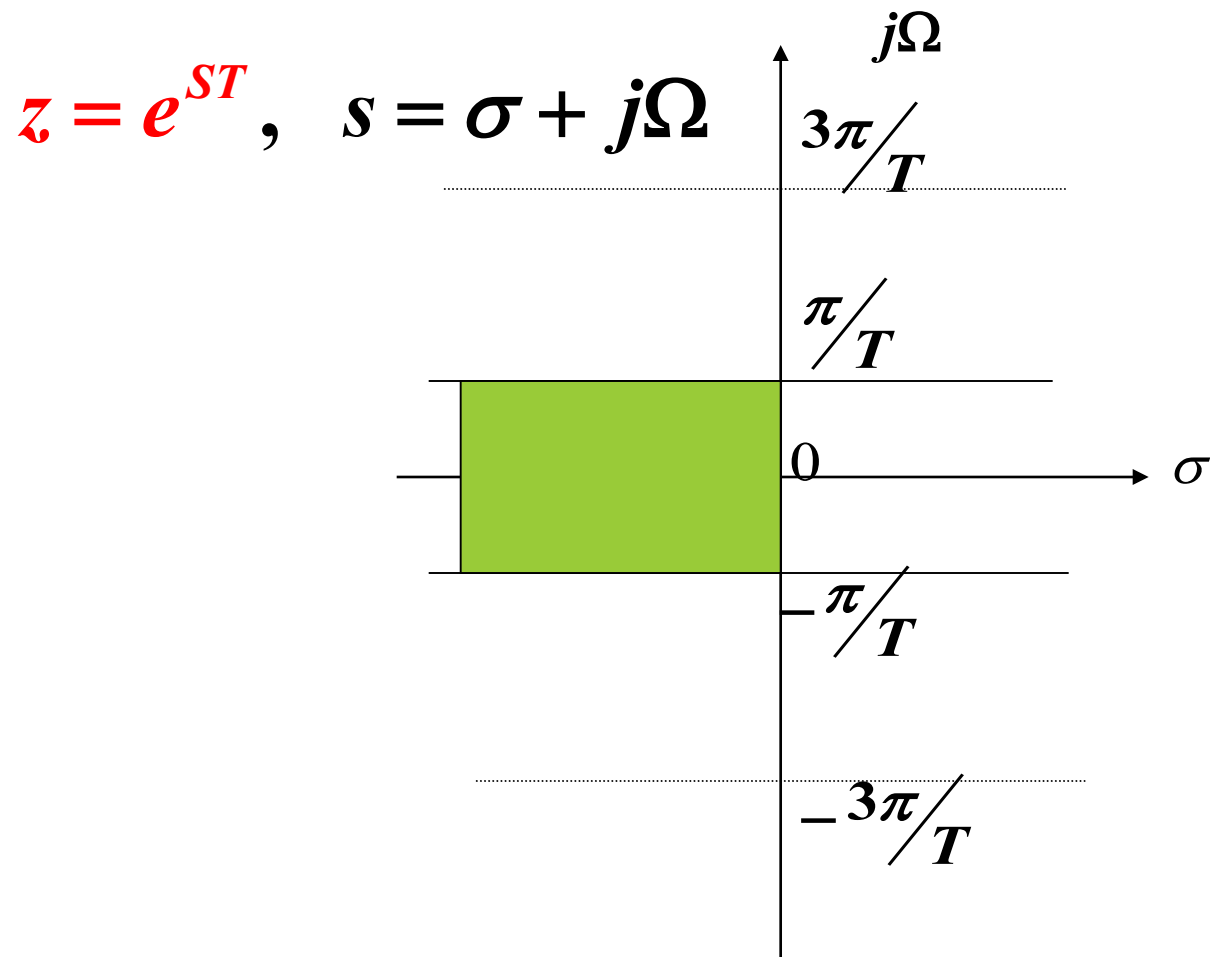


三、IIR数字滤波器的设计方法



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

➤ 冲激响应不变法的映射关系





三、IIR数字滤波器的设计方法



➤ 冲激响应不变法

◆ 优点:

- $h(n)$ 完全模仿模拟滤波器的单位抽样响应 $h_a(t)$
时域逼近良好
- 保持线性关系: $\omega = \Omega T$
线性相位模拟滤波器转变为线性相位数字滤波器

◆ 缺点:

- 频率响应混迭
只适用于限带的低通、带通滤波器



三、IIR数字滤波器的设计方法



例： 设模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

试用冲激响应不变法，设计IIR数字滤波器。

解： 据题意，得数字滤波器的系统函数：

$$H(z) = \frac{T}{1 - e^{-T} z^{-1}} - \frac{T}{1 - e^{-3T} z^{-1}}$$

设 $T = 1\text{s}$ ，则

$$= \frac{T(e^{-T} - e^{-3T})z^{-1}}{1 - (e^{-T} + e^{-3T})z^{-1} + e^{-4T}z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{0.318z^{-1}}{1 - 0.4177z^{-1} + 0.01831z^{-2}}$$

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$



$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$



三、IIR数字滤波器的设计方法



➤ 冲激响应不变法

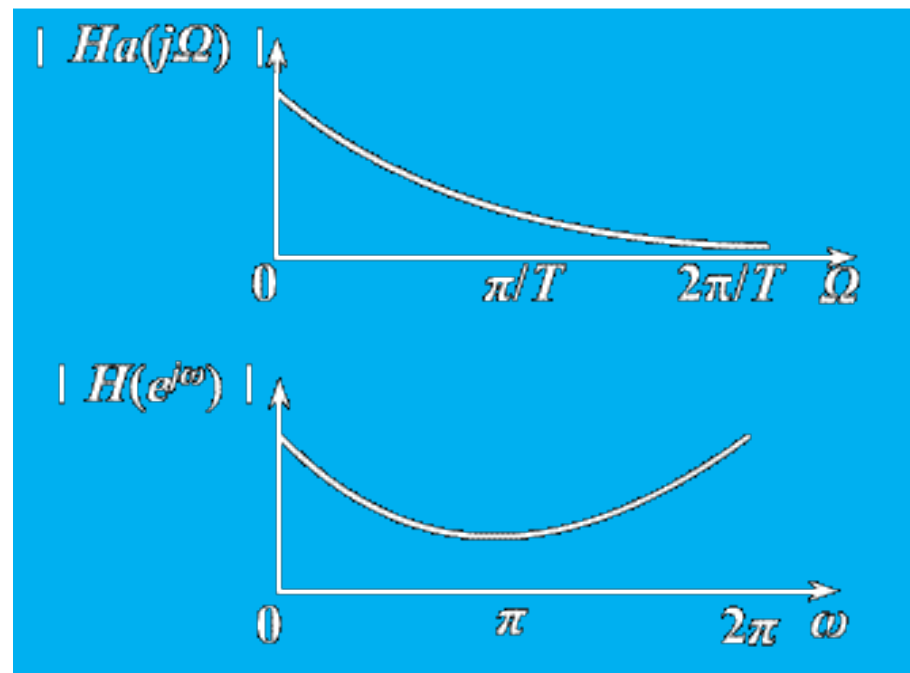
$$H(z) = \frac{0.318z^{-1}}{1 - 0.4177z^{-1} + 0.01831z^{-2}}$$

模拟滤波器的频率响应:

$$H_a(j\Omega) = \frac{2}{(3 - \Omega^2) + j4\Omega}$$

数字滤波器的频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0.318e^{-j\omega}}{1 - 0.4177e^{-j\omega} + 0.01831e^{-j2\omega}}$$



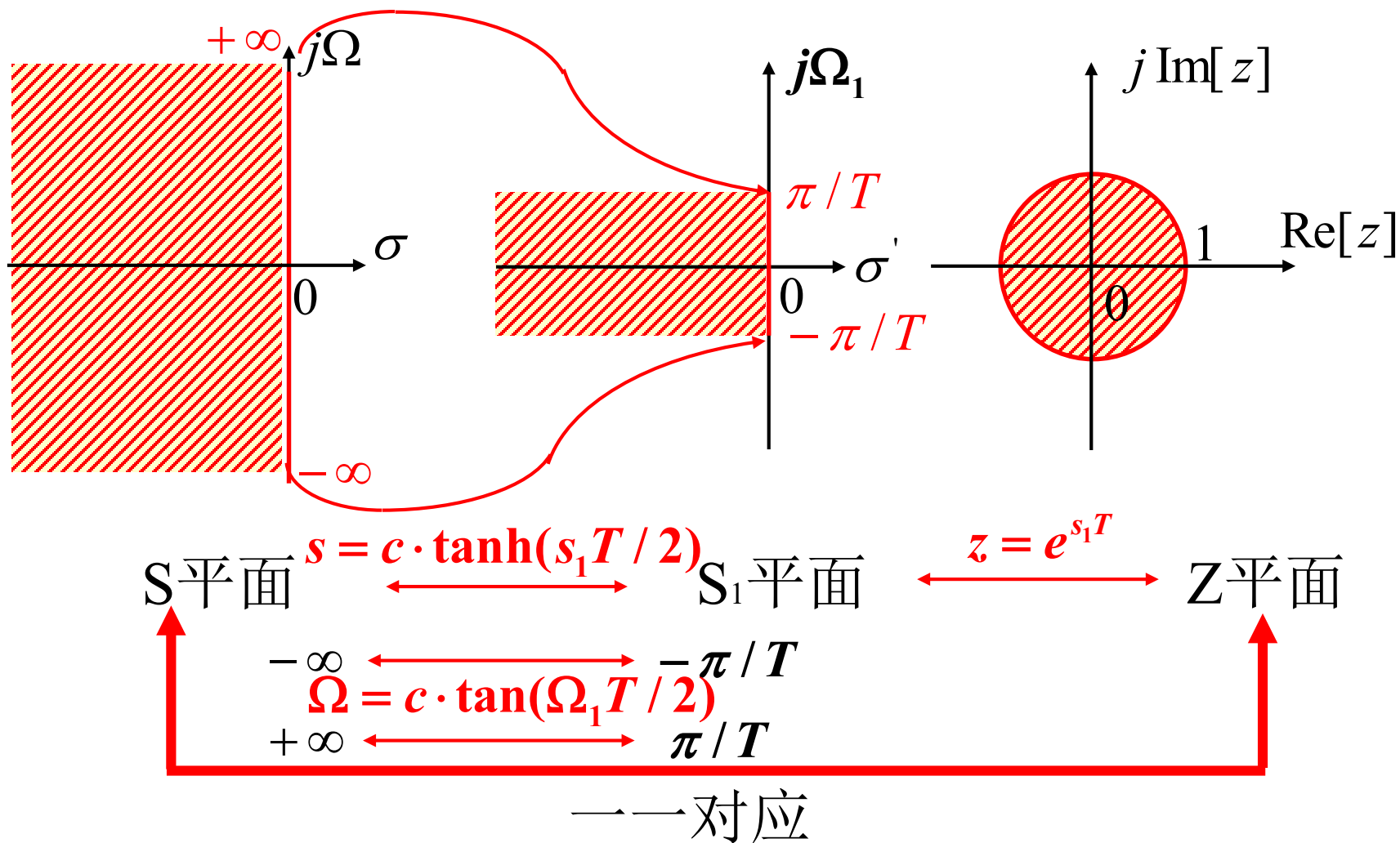
冲击响应不变法的频率响应幅度



三、IIR数字滤波器的设计方法



◆ 双线性变换法





三、IIR数字滤波器的设计方法



映射关系: $s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad z = \frac{1 + (T/2)s}{1 - (T/2)s}$

优点: S平面与Z平面是单值的一一对应关系
不会产生混叠现象;

缺点: Ω 与 ω 成非线性关系

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right)$$



三、IIR数字滤波器的设计方法



- ◆ **例：**设计 Butterworth 数字低通滤波器，要求在频率低于 0.2π rad 的通带内幅度特性下降小于 $1dB$ 。在频率 0.3π 到 π 之间的阻带内，衰减大于 $15dB$ 。分别用冲激响应不变法和双线性变换法。

◆ 1、用冲激响应不变法设计

1) 由数字滤波器的技术指标：

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad} \quad \delta_1 = 1dB$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{ rad} \quad \delta_2 = 15dB$$

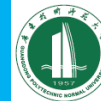
2) 得模拟滤波器的技术指标：选 $T = 1 \text{ s}$

$$\Omega_p = \omega_p / T = 0.2\pi \text{ rad / s} \quad \delta_1 = 1dB$$

$$\Omega_s = \omega_s / T = 0.3\pi \text{ rad / s} \quad \delta_2 = 15dB$$



三、IIR数字滤波器的设计方法



3) 设计Butterworth模拟低通滤波器

a) 确定参数

$$\lambda_{sp} = \Omega_s / \Omega_p = 1.5$$

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_1} - 1}{10^{0.1\delta_2} - 1}} = 0.092$$

$$N = -\lg k_{sp} / \lg \lambda_{sp} = 5.884 \quad \text{取} N = 6$$

$$\Omega_c = \Omega_p \left(10^{0.1\delta_1} - 1 \right)^{-\frac{1}{2N}} = 0.7032 \quad rad/s$$

用通带技术指标，使阻带特性较好，改善混迭失真



三、IIR数字滤波器的设计方法



b) 求出极点（左半平面）

$$s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

c) 构造系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^6}{\prod_{k=1}^6 (s - s_k)}$$

或者

b') 由 $N=6$ ，直接查表得

$$H_{an}(s) = \frac{1}{1 + 3.8637s + 7.4641s^2 + 9.1416s^3 + 7.4641s^4 + 3.8637s^5 + s^6}$$

c') 去归一化

$$H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) = \frac{0.1209}{s^6 + 2.716s^5 + 3.691s^4 + 3.179s^3 + 1.825s^2 + 0.121s + 0.1209}$$



三、IIR数字滤波器的设计方法



4) 将 $H_a(s)$ 展成部分分式形式:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

变换成Butterworth数字滤波器:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

$$= \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 0.1297z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1454z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}}$$

$$+ \frac{1.8558 - 0.6304z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}}$$



◆2、用双线性变换法设计

1) 由数字滤波器的技术指标:

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad} \quad \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{ rad} \quad \delta_2 = 15\text{dB}$$

2) 考虑预畸变, 得模拟滤波器的技术指标:

$$\text{选 } T = 1\text{s}$$

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_p}{2} = 0.65 \text{ rad/s} \quad \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_s}{2} = 1.019 \text{ rad/s} \quad \delta_2 = 15\text{dB}$$



三、IIR数字滤波器的设计方法



3) 设计Butterworth模拟低通滤波器

a) 确定参数

$$\lambda_{sp} = \Omega_s / \Omega_p = 1.568$$

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_1} - 1}{10^{0.1\delta_2} - 1}} = 0.092$$

$$N = -\lg k_{sp} / \lg \lambda_{sp} = 5.306 \quad \text{取} N = 6$$

$$\Omega_c = \Omega_s \left(10^{0.1\delta_2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2N}} = 0.7662 \quad rad/s$$

用阻带技术指标，使通带特性较好，因无混迭问题



三、IIR数字滤波器的设计方法



b) 求出极点（左半平面）

$$s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

c) 构造系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^6}{\prod_{k=1}^6 (s - s_k)}$$



三、IIR数字滤波器的设计方法



或者 b') 由 $N=6$, 直接查表得

$$H_{an}(s) = \frac{1}{1 + 3.8637s + 7.4641s^2 + 9.1416s^3 + 7.4641s^4 + 3.8637s^5 + s^6}$$

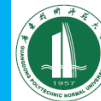
c') 去归一化

$$H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)$$

$$= \frac{0.2024}{(s^2 + 0.396s + 0.5871)(s^2 + 1.083s + 0.5871)(s^2 + 1.480s + 0.5871)}$$



三、IIR数字滤波器的设计方法



4) 将 $H_a(s)$ 变换成Butterworth数字滤波器:

$$H(z) = H_a(s) \bigg|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$= \frac{1}{(1 - 1.268z^{-1} + 0.7051z^{-2})} \cdot \frac{1}{(1 - 1.010z^{-1} + 0.358z^{-2})}$$

$$\cdot \frac{1}{(1 - 0.9044z^{-1} + 0.2155z^{-2})}$$

8

FIR数字滤波器的设计

- 一. FIR滤波器的线性相位特性
- 二. FIR滤波器的设计方法
- 三. FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤
- 四. FIR与IIR数字滤波器的比较

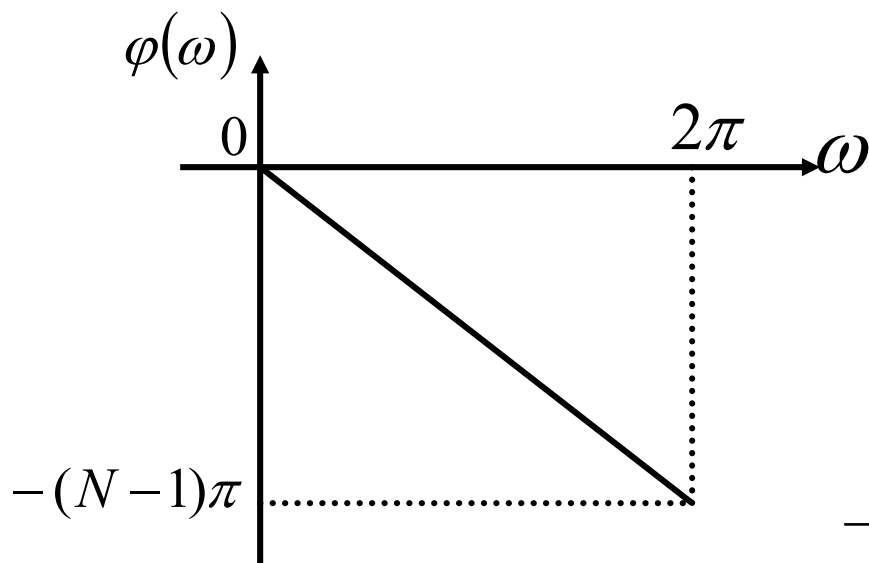


一、FIR滤波器的线性相位特性

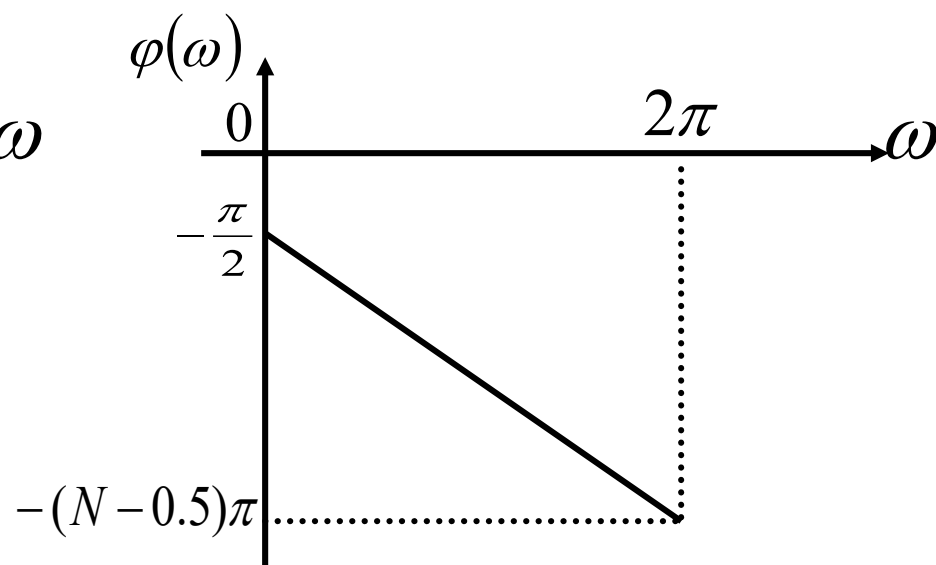


1、线性相位：系统的相频特性是频率的线性函数

群时延：
$$\tau_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \alpha$$



$h(n)$ 偶对称



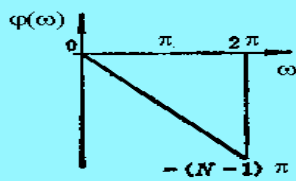
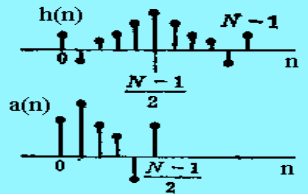
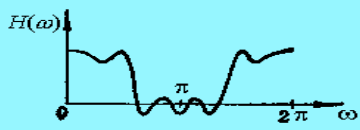
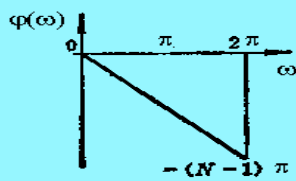
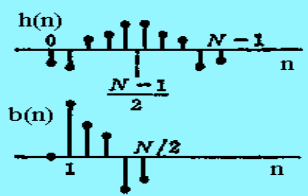

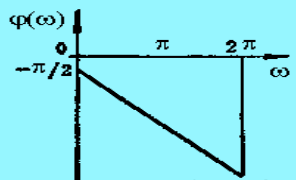
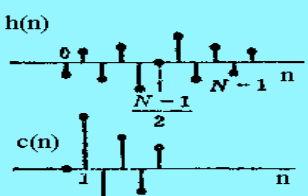
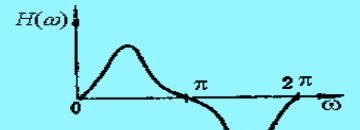
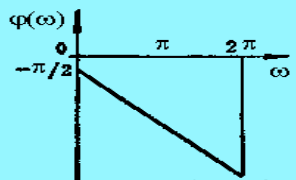
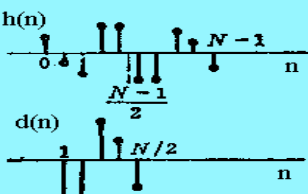
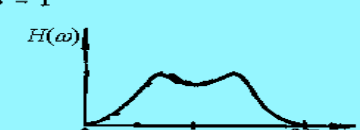
$h(n)$ 奇对称



一、FIR滤波器的线性相位特性



右表给出了上述4种类型的线性相位滤波器的相位响应、时域幅度响应和频域幅度响应的示意图。

1	$h(n) = h(N-1-n)$ $\varphi(\omega) = -\omega \left(\frac{N-1}{2} \right)$ 	<p>N为奇数</p> 	$H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos n\omega$ 
2		<p>N为偶数</p> 	$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$ 
3	$h(n) = -h(N-1-n)$ $\varphi(\omega) = -\omega \left(\frac{N-1}{2} \right) - \frac{\pi}{2}$ 	<p>N为奇数</p> 	$H(\omega) = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} C(n) \sin n\omega$ 
4		<p>N为偶数</p> 	$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$ 



一、FIR滤波器的线性相位特性



➤ 四种线性相位FIR DF特性

第一类， $h(n)$ 偶、 N 奇， 四种滤波器都可设计。

第二类， $h(n)$ 偶、 N 偶， 可设计低、带通滤波器
不能设计高通和带阻。

第三类， $h(n)$ 奇、 N 奇， 只能设计带通滤波器，
其它滤波器都不能设计。

第四类， $h(n)$ 奇、 N 偶， 可设计高通、带通滤波器，
不能设计低通和带阻。



二、FIR数字滤波器的设计方法

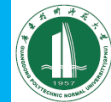


广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

FIR数字滤波器的设计方法

- 窗函数设计法
- 频率取样设计法
- 计算机辅助设计（优化设计）

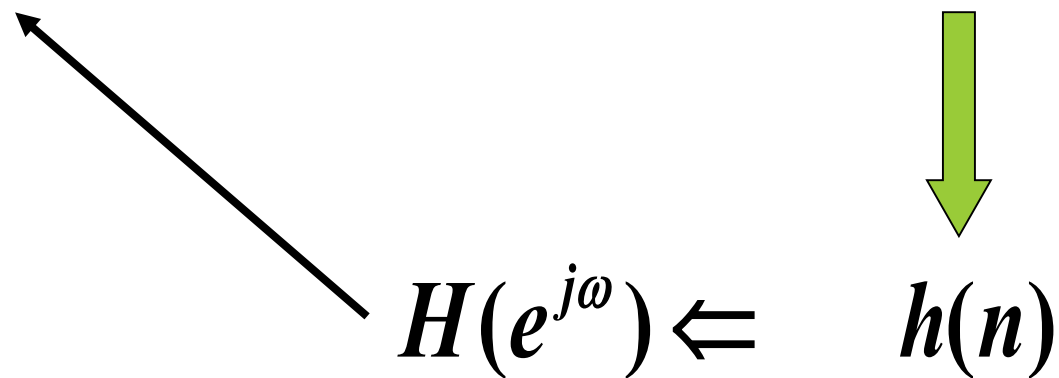
三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

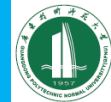
窗口法设计原理:

$$H_d(e^{j\omega}) \Rightarrow h_d(n) \Rightarrow h_d(n)w(n)$$


$$H(e^{j\omega}) \Leftarrow h(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \quad \text{卷积关系}$$

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

◆ 窗函数设计的基本方法

1. 设计思想：从时域出发，设计 $h(n)$ 使之逼近理想单位脉冲响应序列 $h_d(n)$

设理想滤波器的单位脉冲响应为 $h_d(n)$ ，则有

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-jn\omega}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

理想DF的频响是逐段恒定的，且在频带边界处有不连续点。因而所求得的 $h_d(n)$ 一般是无限长的，且是非因果的。

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



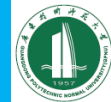
广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

要想得到一个因果的有限长的滤波器 $h(n)$,
最直接的方法是截断 $h_d(n)$, 或者说用一个
窗口函数 $w(n)$ 对 $h_d(n)$ 进行加窗处理, 即

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

所以选择窗口函数的形状和长度是窗口函数
法的关键。

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

下面以理想低通滤波器为例说明其设计过程

设理想低通滤波器的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 为,

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega a} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

ω_c 为滤波器的截止频率; a 为延时常数

相应的单位脉冲响应为

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega a} e^{j\omega n} d\omega = \begin{cases} \frac{\sin[\omega_c(n-a)]}{\pi(n-a)} & n \neq a \\ \frac{\omega_c}{\pi} & n = a \end{cases}$$

是一个以 a 为对称中心的偶对称的无限长的非因果序列。

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

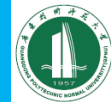
要得到有限长的 $h(n)$,最简单的方法是用一长为 N 的矩形窗 $w(n)=R_N(n)$ 截断 $h_d(n)$ 。

按照线性相位滤波器的要求, $h(n)$ 必须是偶对称的, 如上图所示。对称中心必须等于滤波器的延时常数, 即
故有

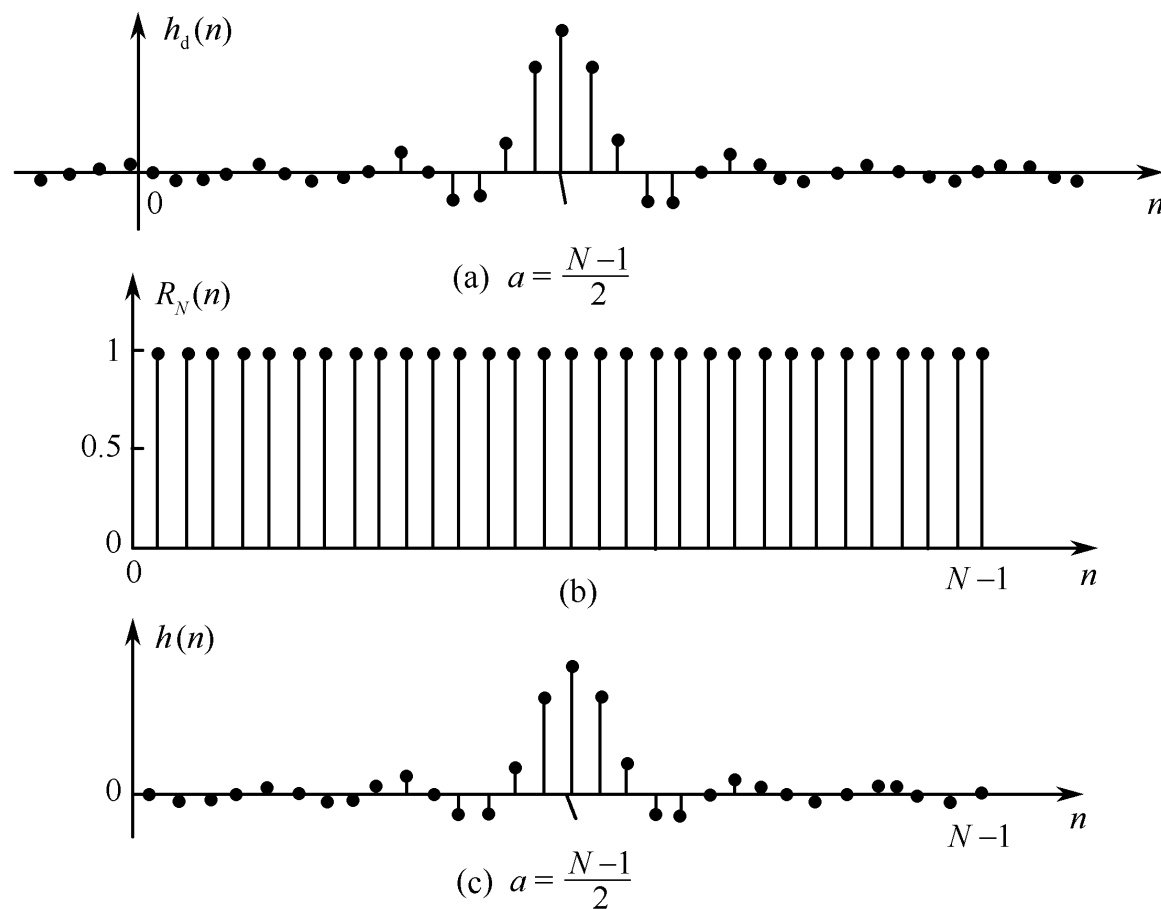
$$a = (N - 1) / 2$$

$$\begin{cases} h(n) = h_d(n)R_N(n) \\ a = (N - 1) / 2 \end{cases}$$

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤

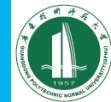


广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University



理想低通滤波器的单位脉冲响应及矩形窗截取

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

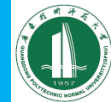
◆ 吉布斯（Gibbs）效应

因频率响应是单位脉冲响应的傅立叶变换，故可求得矩形窗截取后滤波器的频率响应为：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_d(n)e^{-jn\omega}$$

上式为有限项，N越大，所设计DF与理想DF差别越小，误差就越小。但对于矩形窗截取还存在所谓吉布斯（Gibbs）效应，使得滤波器的特性很差，不能满足实际的需要。

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



下面从频域卷积的角度来分析由矩形窗所求得的滤波器的频率响应。

由式
$$h(n) = h_d(n)\omega(n)$$

按复卷积定理有

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

设矩形窗的频率响应为 $W_R(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} R_N(n) e^{-jn\omega} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} = W_R(\omega) e^{-j\alpha\omega} \end{aligned}$$

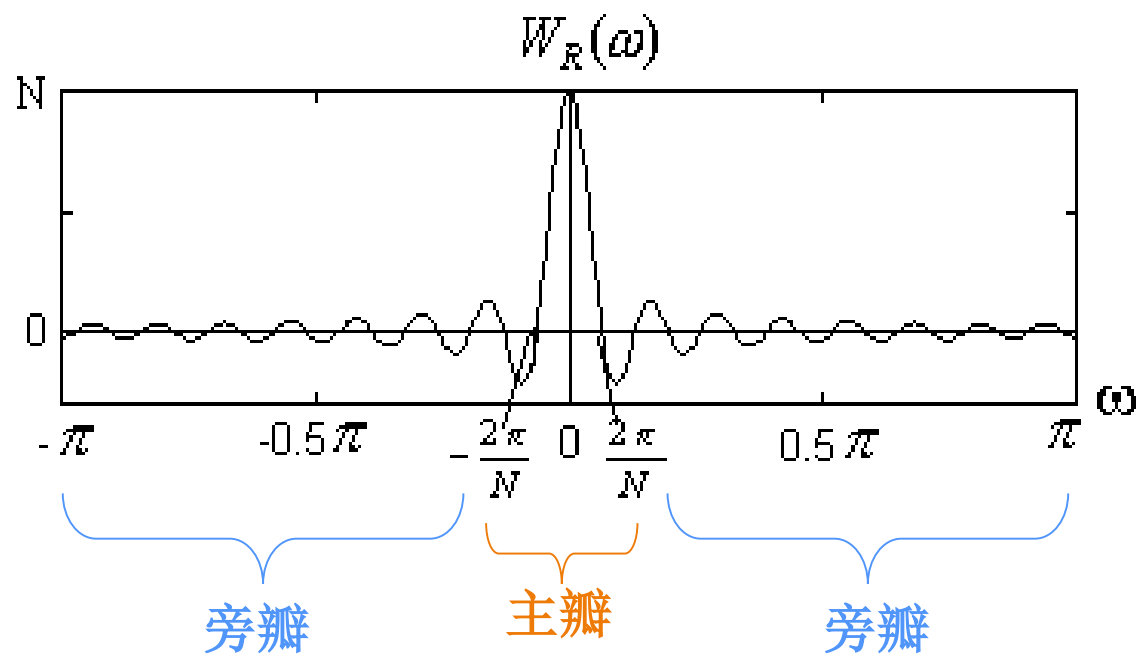
三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

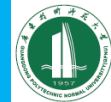
$$\text{上式中 } W_R(\omega) = \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

为矩形窗的幅度响应，如下图所示



矩形窗的幅度响应

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



将理想低通滤波器的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 表示为

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{-j\alpha\omega}$$

则

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

得

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)e^{-j\theta\alpha} W_R(\omega - \theta)e^{-j(\omega - \theta)\alpha} d\theta \\ &= e^{-j\omega\alpha} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W_R(\omega - \theta)d\theta \right] \end{aligned}$$

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

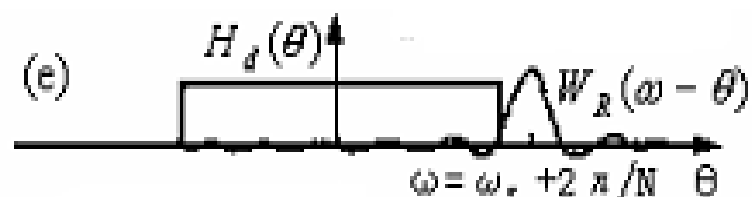
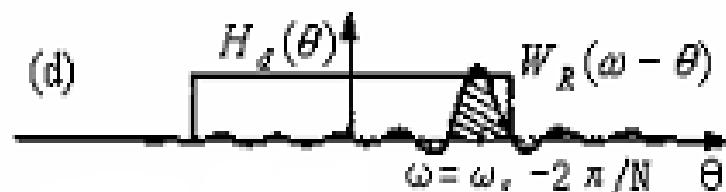
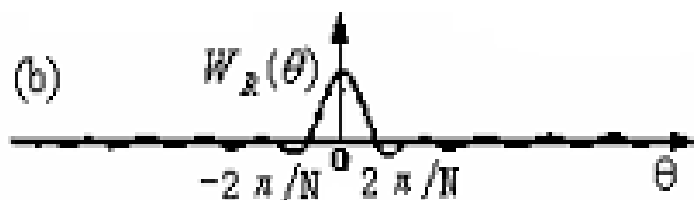
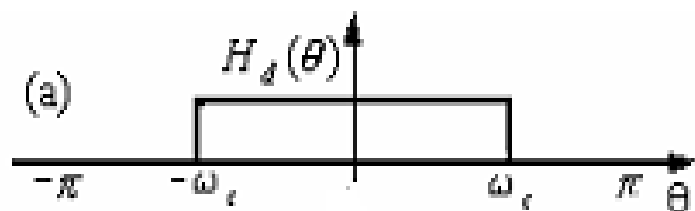
若用 $H(\omega)$ 代表所设计的低通滤波器 $H(e^{j\omega})$ 的幅度响应，则有

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta \quad (6-2-10)$$

上式说明设计的滤波器的幅度响应是矩形窗函数的幅度响应与理想低通滤波器的幅度响应的卷积。

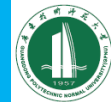
其过程如下图所示。

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



矩形窗的卷积过程

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

加矩形窗处理后，对理想频率响应产生了两点影响：

- 1) 使理想频率特性不连续点 $\omega=\omega_c$ 处，形成了一个过渡带，过渡带的宽度等于矩形窗的频率响应 $W_R(\omega)$ 的主瓣宽度 $\Delta\omega=4\pi/N$ ；
- 2) 在截止频率 ω_c 的两边 $\omega=\omega_c \pm 2\pi/N$ 处(即过渡带的两边)， $H(\omega)$ 出现最大的肩峰值，肩峰的两侧形成起伏振荡，其振荡幅度取决于旁瓣的相对幅度，而振荡的快慢，则取决于 $W_R(\omega)$ 波动的快慢。

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

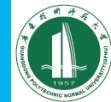
若增加截取长度 N ，则在主瓣附近的窗的频率响应为

$$W_R(\omega) = \frac{\sin(N\omega / 2)}{\sin(\omega / 2)} \approx \frac{\sin(N\omega / 2)}{\omega / 2} = N \frac{\sin x}{x}$$

该函数的性质：随着 x 加大（即 N 加大），函数曲线波动的频率加快，主瓣幅度加高，旁瓣幅度也同样加高，主瓣与旁瓣的相对比例保持不变。

这个相对比例是由 $\sin x/x$ 决定的，也就是说是由矩形窗函数的形状决定的。

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

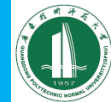
因而，当长度 N 增加时，只会减小过渡带宽($4\pi/N$)，而不会改变肩峰的相对值。

在矩形窗情况下，最大相对肩峰值为8.95%， N 增加时， $4\pi/N$ 减小，起伏振荡变密，但最大肩峰则总是8.95%，这就是吉布斯(Gibbs)效应。

由于窗谱肩峰的存在，影响到 $H(\omega)$ 通带的平坦和阻带的衰减，使阻带最小衰减只有21dB左右，因此在实际中，矩形窗很少采用。

为了消除吉布斯效应，取得较好频率特性，一般采用其他类型的窗函数 $w(n)$ ，对 $h_d(n)$ 进行加窗处理。

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



◆ 常用的窗函数

1. 三角形窗 (Bartlett Window)

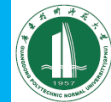
$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} < n \leq N-1 \end{cases}$$

其频率响应为

$$W(e^{j\omega}) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(N\omega/4)}{\sin(\omega/4)} \right]$$

主瓣宽度为 $(8\pi/N)$ 。

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



2. 汉宁(Hanning)窗

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \right] R_N(n)$$

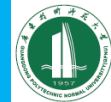
其频率响应 $W(e^{j\omega})$ 和幅度响应 $W(\omega)$ 分别为

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= \left\{ 0.5W_R(\omega) + 0.25 \left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] \right\} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \\ &= W(\omega) e^{-j\omega a} \end{aligned}$$

$$W(\omega) = 0.5W_R(\omega) + 0.25 \left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right]$$

$W(\omega)$ 是三项矩形窗的幅度响应 $W_R(\omega)$ 的移位加权和, 使旁瓣相互抵消, 能量更集中在主瓣, 但主瓣宽度比矩形窗的主瓣加宽了一倍, 为 $(8\pi/N)$ 。

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

3. 汉明 (Hamming) 窗

$$w(n) = [0.54 - 0.46 \cos(\frac{2n\pi}{N-1})]R_N(n)$$

其幅度响应为

$$W(\omega) = 0.54W_R(\omega) + 0.23[W_R(\omega - \frac{2\pi}{N-1}) + W_R(\omega + \frac{2\pi}{N-1})]$$

同汉宁窗的主瓣宽度 $8\pi/N$ 相同，但旁瓣幅度更小，旁瓣峰值小于主瓣峰值的**1%**。

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

4. 布莱克曼(Blankman)窗

其窗函数中包含有余弦的二次谐波分量

$$w(n) = [0.42 - 0.5 \cos(\frac{2n\pi}{N-1}) + 0.08 \cos(\frac{4n\pi}{N-1})]R_N(n)$$

其幅度响应为

$$\begin{aligned} W(\omega) = & 0.42W_R(\omega) + 0.25[W_R(\omega - \frac{2\pi}{N-1}) + W_R(\omega + \frac{2\pi}{N-1})] \\ & + 0.04[W_R(\omega - \frac{4\pi}{N-1}) + W_R(\omega + \frac{4\pi}{N-1})] \end{aligned}$$

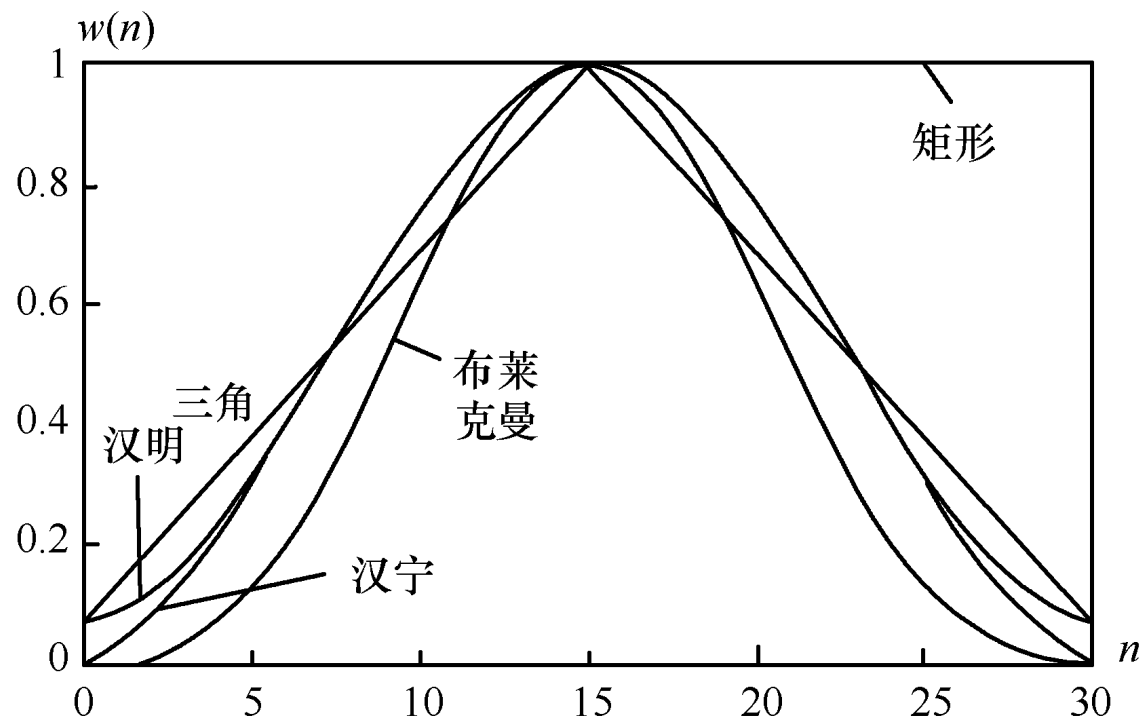
通过加入余弦的二次谐波分量，可进一步降低旁瓣，但其主瓣宽度变为 $12\pi/N$ 。

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

下图是 $N=31$ 时矩形窗、三角窗、汉宁窗、汉明窗及布莱克曼这5种窗口函数的包络曲线。



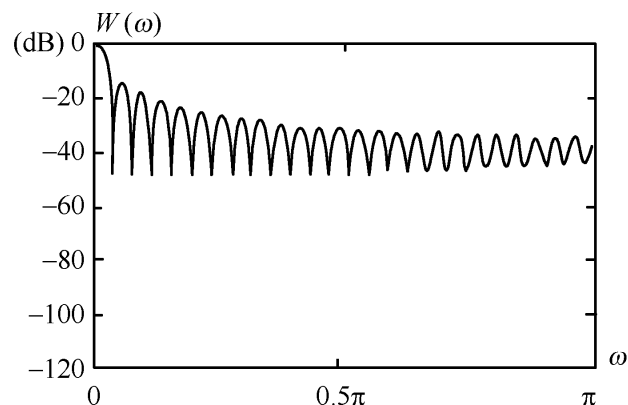
5种窗函数的包络曲线

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤

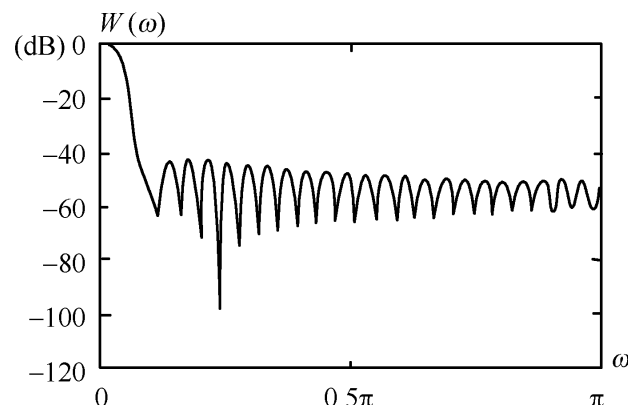


广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

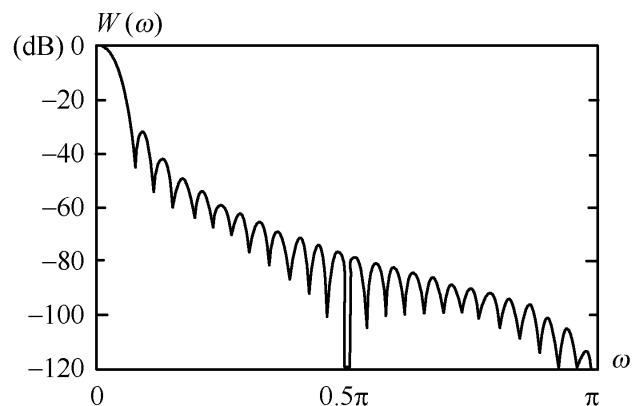
下图是 $N=51$ 时矩形窗、汉宁窗、汉明窗及布莱克曼4种窗口函数的幅度响应。



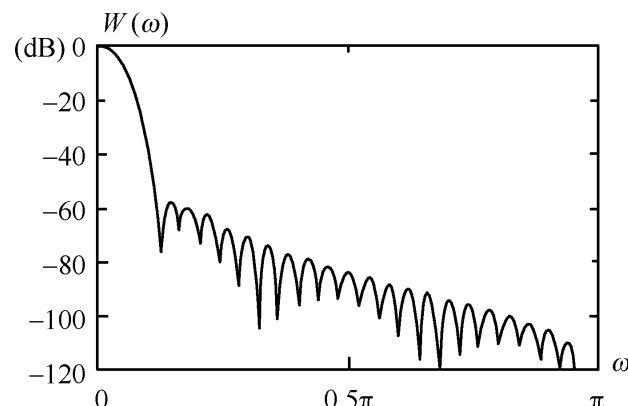
(a) 矩形窗



(b) 汉明窗



(c) 汉宁窗



(d) 布莱克曼窗

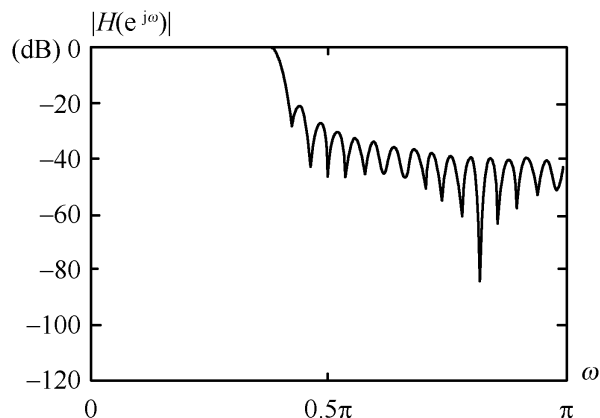
4种窗函数的幅度响应 $N = 51, A = 20 \lg |W(\omega) / W(0)| (dB)$

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤

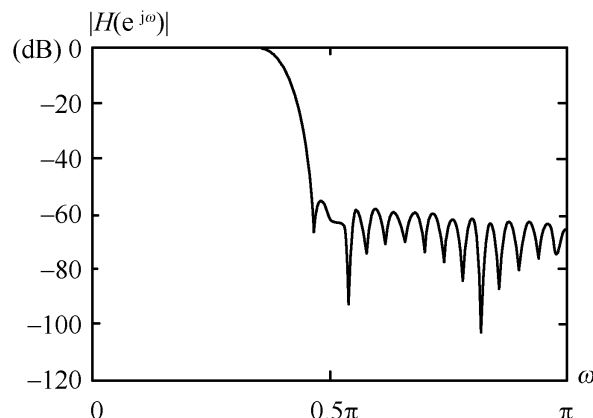


广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

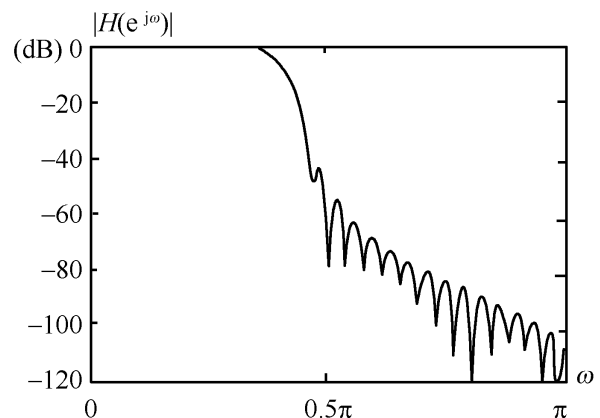
下图是用矩形窗、汉宁窗、汉明窗及布莱克曼设计的低通滤波器的幅度响应。



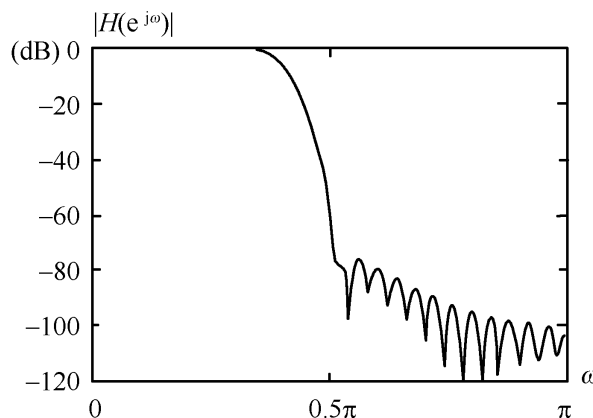
(a) 矩形窗



(b) 汉明窗



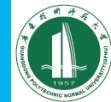
(c) 汉宁窗



(d) 布莱克曼窗

用窗口法设计的低通滤波器的单位脉冲响应与幅度响应 ($N=5$)

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

窗函数法设计滤波器时阶数选择

名称	近似过渡带宽	精确过渡带宽	最小阻带衰减
矩形	$4\pi/M$	$1.8\pi/M$	21dB
巴特利特	$8\pi/M$	$6.1\pi/M$	25dB
汉宁	$8\pi/M$	$6.2\pi/M$	44dB
哈明	$8\pi/M$	$6.6\pi/M$	51dB
布莱克曼	$12\pi/M$	$11\pi/M$	74dB
取kaiser窗时用MATLAB中的kaiserord函数来得到长度M			

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

窗口函数对理想特性的影响：

- ①改变了理想频响的边沿特性，形成过渡带，宽为 $4\pi/N$ ，
等于 $W_R(\omega)$ 的主瓣宽度。（决定于窗长）
- ②过渡带两旁产生肩峰和余振（带内、带外起伏），取决于 $W_R(\omega)$ 的旁瓣，旁瓣多，余振多；旁瓣相对值大，肩峰强，与 N 无关。（决定于窗口形状）
- ③ N 增加，过渡带宽减小，肩峰值不变。当 N 增加时，幅值变大，频率轴变密，而最大肩峰永远为 8.95%，这种现象称为吉布斯（Gibbs）效应。

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

肩峰值的大小决定了滤波器通带内的平稳程度和阻带内的衰减，所以对滤波器的性能有很大的影响。

窗函数的要求：

- ①窗谱主瓣宽度要窄，以获得较陡的过渡带；
- ②相对于主瓣幅度，旁瓣要尽可能小，使能量尽量集中在主瓣中，这样就可以减小肩峰和余振，以提高阻带衰减和通带平稳性。

但实际上这两点不能兼得，一般总是通过增加主瓣宽度来换取对旁瓣的抑制。

三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

例：

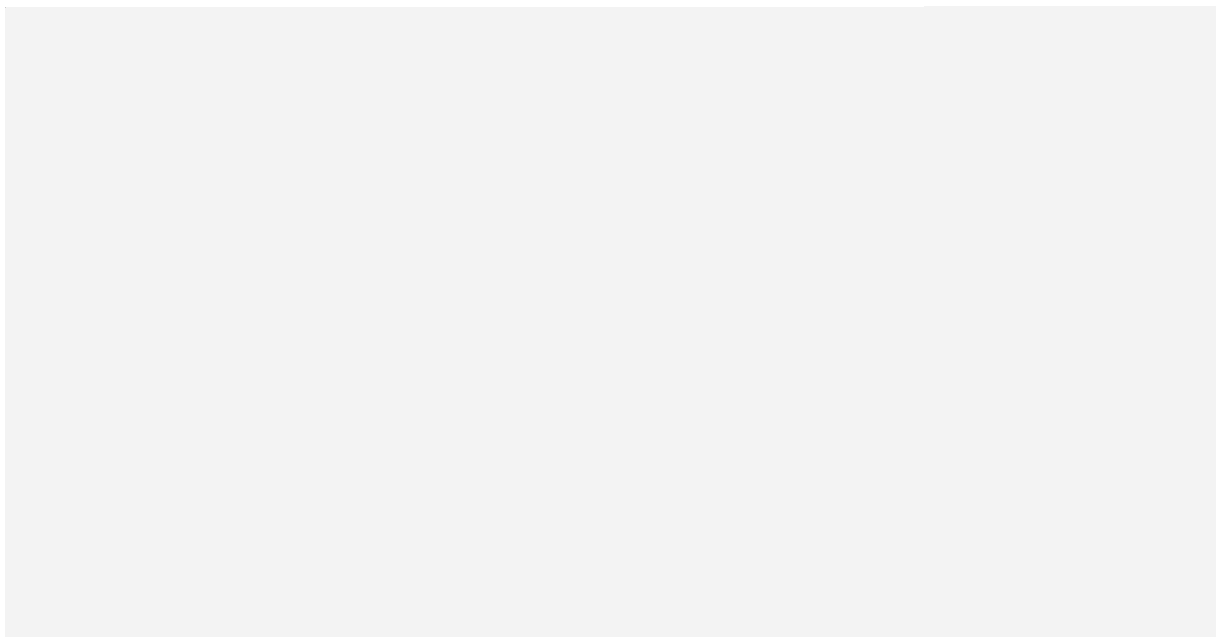


三、FIR 滤波器的窗函数设计法设计步骤



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

线性相位结构如下图所示





四、FIR与IIR数字滤波器的比较



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

	FIR	IIR
设计方法	一般无解析的设计公式，要借助计算机程序完成	利用AF的成果，可简单、有效地完成设计
设计结果	可得到幅频特性（可以多带）和线性相位（最大优点）	只能得到幅频特性，相频特性未知（一大缺点），如需要线性相位，须用全通网络校准，但增加滤波器阶数和复杂性
稳定性	极点全部在原点（永远稳定）无稳定性问题	有稳定性问题
阶数	高	低
结构	非递归	递归系统
运算误差	一般无反馈，运算误差小	有反馈，由于运算中的四舍五入会产生极限环
快速算法	可用FFT实现，减少运算量	无快速运算方法



广东技术师范大学
Guangdong Polytechnic Normal University

Thanks!