实验四　z 变换及离散时间 LTI 系统的 z 域分析

一、　实验目的

1. 熟悉离散信号的正、反 z 变换，掌握利用 MATLAB 求离散时间信号的 z 变换和 z 反变换；
2. 掌握运用 MATLAB 分析离散时间系统的系统函数的零极点；
3. 学会运用 MATLAB 分析系统函数的零极点分布与其时域特性的关系；
4. 掌握运用 MATLAB 进行离散时间系统的频率特性分析。

二、　实验原理与方法

1.　正反 z 变换

原理：序列 $x(n)$ 的 z 变换定义为：

$$X(z) = \mathrm{Z}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{4-1}$$

其中，符号 Z 表示取 z 变换，z 是复变量。相应地，单边 z 变换定义为：

$$X(z) = \mathrm{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{4-2}$$

方法：MATLAB 符号数学工具箱提供了计算离散时间信号单边 z 变换的函数 ztrans 和 z 反变换函数 iztrans，其语句格式分别为：

Z=ztrans(x)

x=iztrans(z)

上式中的 x 和 Z 分别为时域表达式和 z 域表达式的符号表示，可通过 sym 函数来定义。

如果信号的 z 域表示式 $X(z)$ 是有理函数，进行 z 反变换的另一个方法是对 $X(z)$ 进行部分分式展开，然后求各简单分式的 z 反变换。设 $X(z)$ 的有理分式表示为：

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{4-3}$$

MATLAB 信号处理工具箱提供了一个对 $X(z)$ 进行部分分式展开的函数 residuez，

其语句格式为

[R,P,K]=residuez(B,A)

其中，B，A 分别表示 X(z)的分子与分母多项式的系数向量；R 为部分分式的系数向量；P 为极点向量；K 为多项式的系数。若 X(z)为有理真分式，则 K 为零。

2. 系统函数的零极点分析

原理：离散时间系统的系统函数定义为系统零状态响应的 z 变换与激励的 z 变换之比，即

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \tag{4-4}$$

如果系统函数 $H(z)$ 的有理函数表示式为

$$H(z)=\frac{b_1 z^m + b_2 z^{m-1} + \cdots + b_m z + b_{m+1}}{a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \cdots + a_n z + a_{n+1}} \tag{4-5}$$

方法：在 MATLAB 中系统函数的零极点就可通过函数 roots 得到，也可借助函数 tf2zp 得到，tf2zp 的语句格式为

[Z,P,K]=tf2zp(B,A)

其中，B 与 A 分别表示 $H(z)$ 的分子与分母多项式的系数向量。它的作用是将 $H(z)$ 的有理分式表示式转换为零极点增益形式，即

$$H(z)=k\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)} \tag{4-6}$$

若要获得系统函数 $H(z)$ 的零极点分布图，可直接应用 zplane 函数，其语句格式为

zplane(B,A)

其中，B 与 A 分别表示 $H(z)$ 的分子和分母多项式的系数向量。它的作用是在 Z 平面上画出单位圆、零点与极点。

3. 系统函数的零极点分布与其时域特性的关系

原理：在离散系统中，z 变换建立了时域函数 $h(n)$ 与 z 域函数 $H(z)$ 之间的对应关系。因此，z 变换的函数 $H(z)$ 从形式可以反映 $h(n)$ 的部分内在性质。

方法：通过讨论 $H(z)$ 的一阶极点情况，来说明系统函数的零极点分布与系

统时域特性的关系。

4. 离散时间 LTI 系统的频率特性分析

原理：对于因果稳定的离散时间系统，如果激励序列为正弦序列 $x(n)=A\sin(n\omega)u(n)$，则系统的稳态响应为 $y_{ss}(n)=A|H(e^{j\omega})|\sin[n\omega+\varphi(\omega)]u(n)$。其中，$H(e^{j\omega})$ 通常是复数。离散时间系统的频率响应定义为

$$H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)} \tag{4-7}$$

其中，$|H(e^{j\omega})|$ 称为离散时间系统的幅频特性；$\varphi(\omega)$ 称为离散时间系统的相频特性；$H(e^{j\omega})$ 是以 ω_s（$\omega_s=\dfrac{2\pi}{T}$，若零 $T=1$，$\omega_s=2\pi$）为周期的周期函数。因此，只要分析 $H(e^{j\omega})$ 在 $|\omega|\le\pi$ 范围内的情况，便可分析出系统的整个频率特性。

方法：MATLAB 提供了求离散时间系统频响特性的函数 freqz，调用 freqz 的格式主要有两种。一种形式为

[H,w]=freqz(B,A,N)

其中，B 与 A 分别表示 $H(z)$ 的分子和分母多项式的系数向量；N 为正整数，默认值为 512；返回值 w 包含 $[0,\pi]$ 范围内的 N 个频率等分点；返回值 H 则是离散时间系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 在 $0\sim\pi$ 范围内 N 个频率处的值。另一种形式为

[H,w]=freqz(B,A,N,’whole’)

与第一种方式不同之处在于角频率的范围由 $[0,\pi]$ 扩展到 $[0,2\pi]$。

三、 实验内容

1. 正反 z 变换

（1）. 利用 ztrans 函数求 $x(n)=a^n\cos(\pi n)u(n)$ 的 z 变换。

% z 正变换

代码：

```
x=sym('a^n*cos(pi*n)');
Z=ztrans(x);
simplify(Z)
```

结果：

ans =z/(a + z)

（2）．利用 iztrans 函数求 $X(z)=\dfrac{8z-19}{z^2-5z+6}$ 的 z 反变换。

% z 反变换

代码：

```
Z=sym('(8*z-19)/(z^2-5*z+6)');
x=iztrans(Z);
simplify(x)
```

结果：

ans=(3*2^n)/2 + (5*3^n)/3 - (19*kroneckerDelta(n, 0))/6，即：

$$x(n)=(5\times 3^{n-1}+3\times 2^{n-1})u(n)-\frac{19}{6}\delta(n)$$

（3）．利用 MATLAB 命令 residuez 对函数 $X(z)=\dfrac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}$ $a=\dfrac{1}{2}$

进行部分分式展开，并求出其 z 反变换。

% z 反变换（多项式展开法）

代码：

```
B=[0,0.75];
A=[-0.5,1.25, -0.5];
[R,P,K]=residuez(B,A);
```

结果：

R = [-1 1] ，P =[2 0.5] ，K = []，即 $x(n)=-2^n u(-n-1)+0.5^n u(n)$ 。

2. 系统函数的零极点分析

（1）． 已知某离散因果 LTI 系统的系统函数为 $X(z)=\dfrac{z+0.32}{z^2+z+0.16}$，试用 MATLAB 的 tf2zp 命令求该系统的零极点。

%用 tf2zp 命令求该系统的零极点。

代码：

B=[1,0.32];

A=[1,1,0.16];

[R,P,K]=tf2zp(B,A);

结果：

R =-0.3200, P =[-0.8000 -0.2000], K = 1，即系统的零点为-0.32，极点分别为-0.8 和-0.2。

（2）. 已知某离散因果 LTI 系统的系统函数为 $X(z)=\dfrac{z+0.32}{z^2+z+0.16z}$，试用 MATLAB 的 zplane 命令求出该系统的零极点并绘制分布图。

%用 zplane 命令求系统的零极点并绘制分布图。

代码：

B=[1,0.32];

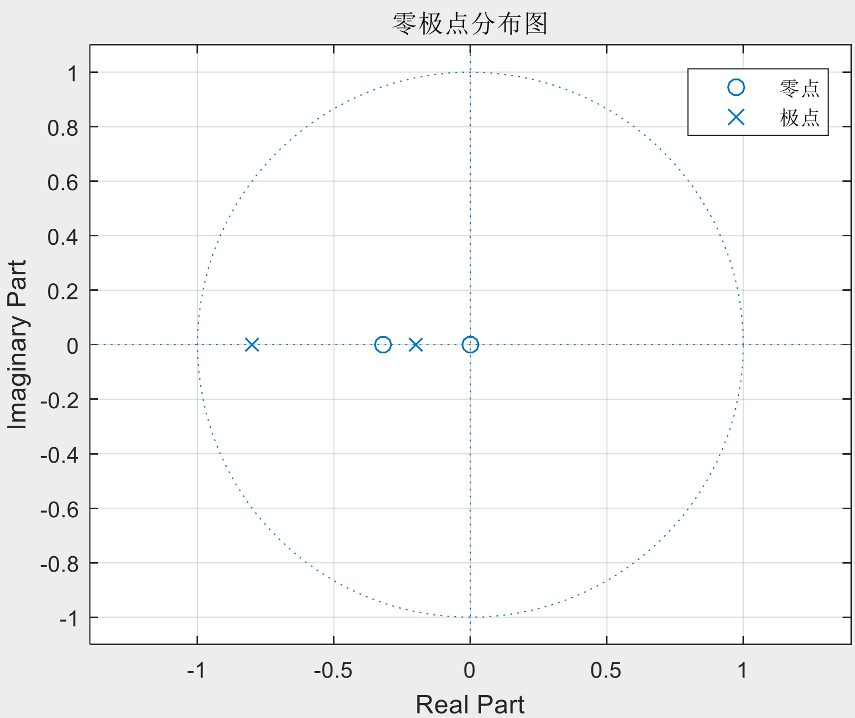
A=[1,1,0.16];

zplane(B,A);grid on;

legend('零点','极点')

title('零极点分布图')

结果：



3. 系统函数的零极点分布与其时域特性的关系

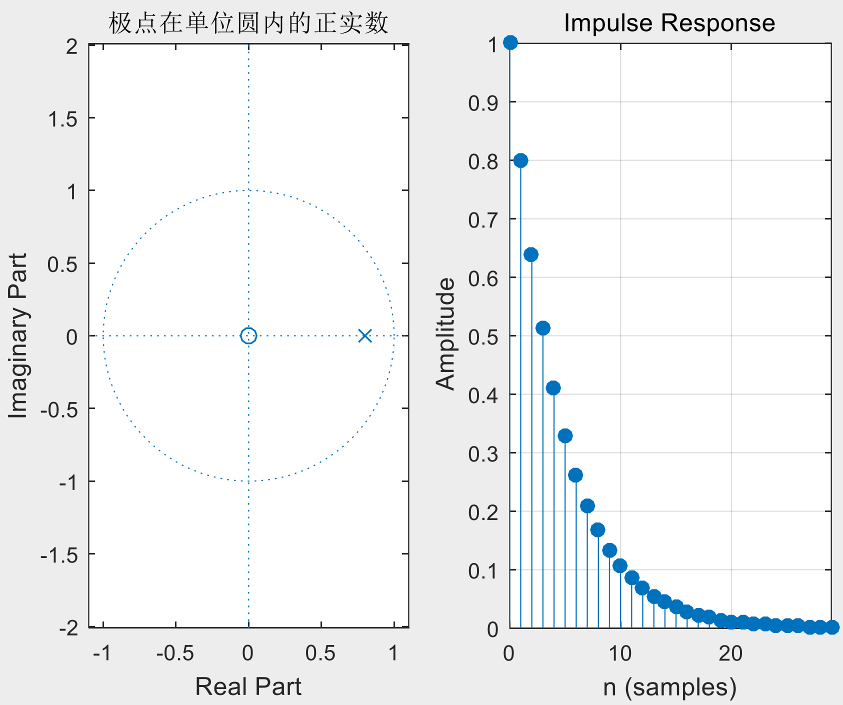
（1）. 试用 MATLAB 命令画出系统函数 $H_1(z)=\dfrac{z}{z-0.8}$ 的零极点分布图、以及对应的时域单位取样响应的波形。

%画出系统函数的零极点分布图以及对应的时域单位取样响应的波形。

代码：

```
b1=[1,0];
a1=[1,-0.8];
subplot(1,2,1)
zplane(b1,a1)
title('极点在单位圆内的正实数')
subplot(1,2,2)
impz(b1,a1,30);grid on;
```

结果：



4. 离散时间 LTI 系统的频率特性分析

（1）. 利用 MATLAB 命令绘制系统 $H(z)=\dfrac{z^2-0.96z+0.9028}{z^2-1.56z+0.8109}$ 的频率

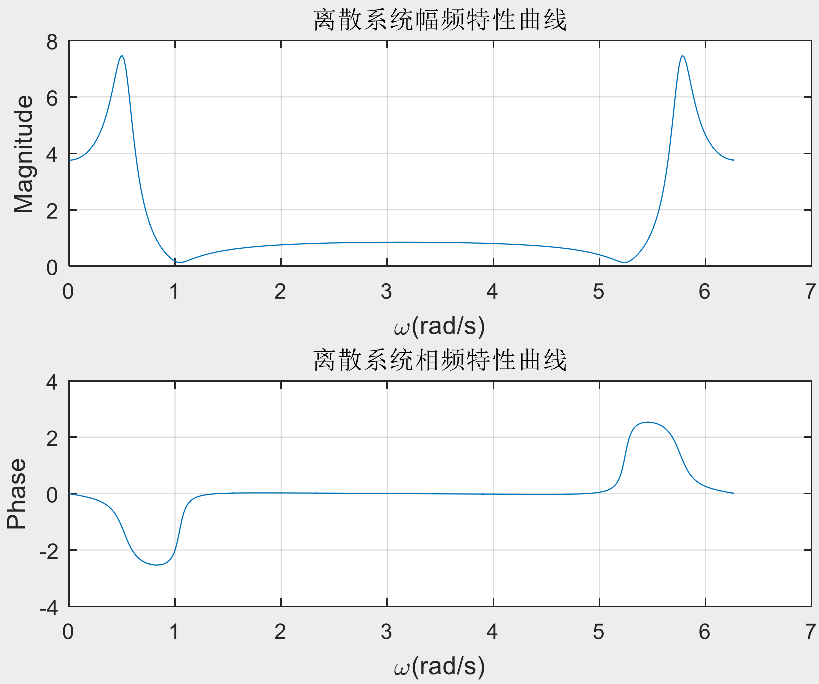
响应曲线。

%绘制系统的频率响应曲线。

代码：

```
B=[1 -0.96 0.9028];
A=[1 -1.56 0.8109];
[H,w]=freqz(B,A,400,'whole');
Hm=abs(H);
Hp=angle(H);
subplot(211)
plot(w,Hm),grid on
xlabel('\omega(rad/s)'),ylabel('Magnitude')
title('离散系统幅频特性曲线')
subplot(212)
plot(w,Hp),grid on
xlabel('\omega(rad/s)'),ylabel('Phase')
title('离散系统相频特性曲线')
```

结果：



四、 学生作业

1. 利用 MATLAB 命令 ztrans 求 $x(n) = 4^n \sin(\pi n)u(n)$ 的 z 变换；

程序代码:

```
x = sym(4^n*sin(pi*n)*heaviside(n));
Z = ztrans(x);
simplify(Z)
```

程序运行截图：

```
>> Code1

ans =

0
```

2. 利用 MATLAB 命令 iztrans 求 $X(z) = \dfrac{2z-1}{z^2-3z+2}$ 的 z 反变换；

程序代码:

```
syms z;
H = (2*z-1)/(z^2-3*z+2);
h = iztrans(H);
simplified_h = simplify(h);
disp(simplified_h);
```

程序运行截图：

```
>> Code2
(3*2^n)/2 - kroneckerDelta(n, 0)/2 - 1
```

3. 利用 MATLAB 命令 residuez 对函数 $X(z) = \dfrac{2z-1}{z^2-3z+2}$ 进行部分分式展开，

并求出其 z 反变换；

程序代码:

```
num = [2 -1];   % ·分子系数向量
den = [1 -3 2]; % ·分母系数向量
[r, p, k] = residuez(num, den);
A = r(1);
B = r(2);
syms z n
```

```
Xz = A/(z-1) + B/(z-2);
xn = iztrans(Xz, z, n);
simplify(xn)
```

程序运行截图:

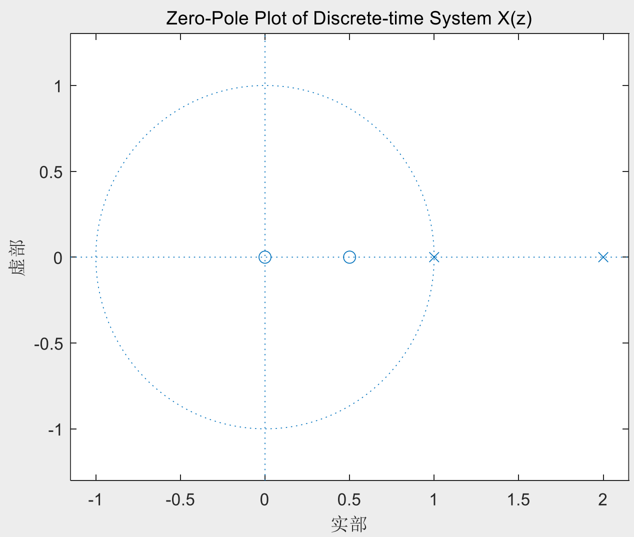
```
>> Code3

ans =

3 - (5*kroneckerDelta(n, 0))/2 - 2^n/2
```

4. 已知某离散因果 LTI 系统的系统函数为 $X(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-3z+2}$，求出该系统的零极点并绘制分布图;

程序代码:

```
%  系统函数的分子和分母系数
b = [2, -1];
a = [1, -3, 2];
% 求解系统的零点和极点
z = roots(b);
p = roots(a);
% 绘制零极点分布图
zplane(b, a);
title('Zero-Pole Plot of Discrete-time System X(z)');
```

程序运行截图:

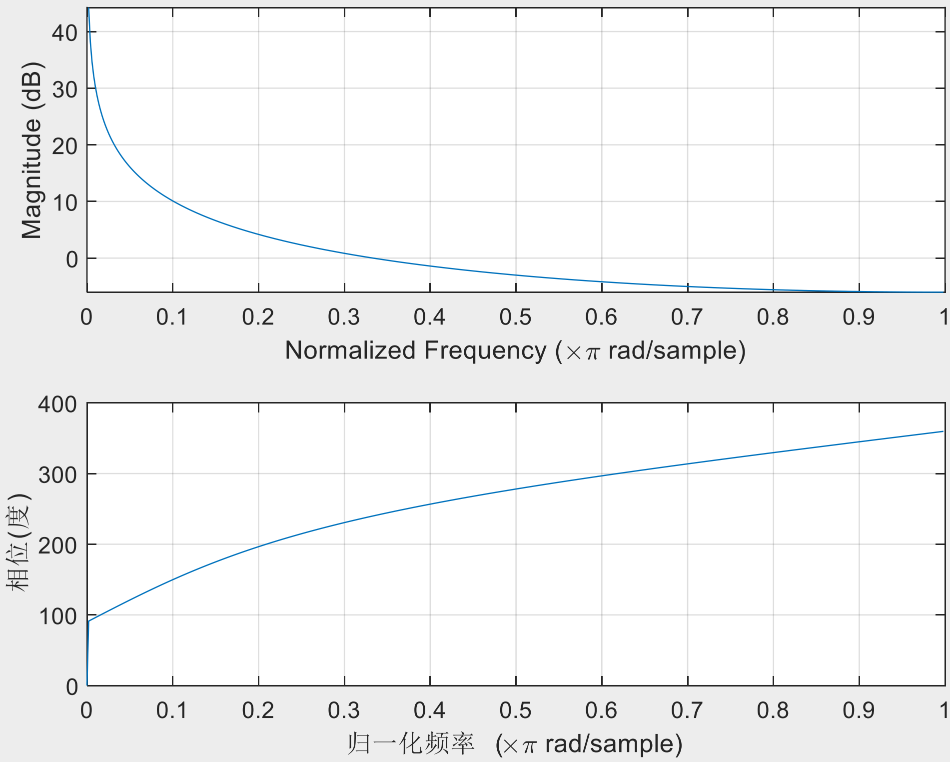


5. 利用 MATLAB 命令绘制系统 $X(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-3z+2}$ 的频率响应曲线;

程序代码:

```
num = [2, -1];   % ·分子系数
den = [1, -3, 2]; % 分母系数

freqz(num, den);
xlabel('Normalized Frequency (\times\pi rad/sample)');
ylabel('Magnitude (dB)');
```

程序运行截图:



6. 试用 MATLAB 命令画出现系统函数 $H_1(z)=\dfrac{z}{z-0.5}$，$H_2(z)=\dfrac{z}{z-1}$ 和 $H_3(z)=\dfrac{z}{z-1.5}$ 的零极点分布图、以及对应的时域单位取样响应 的波形，并分析系统函数的极点分布（单位圆内、单位圆上和单位圆外）对时域波形的影响。

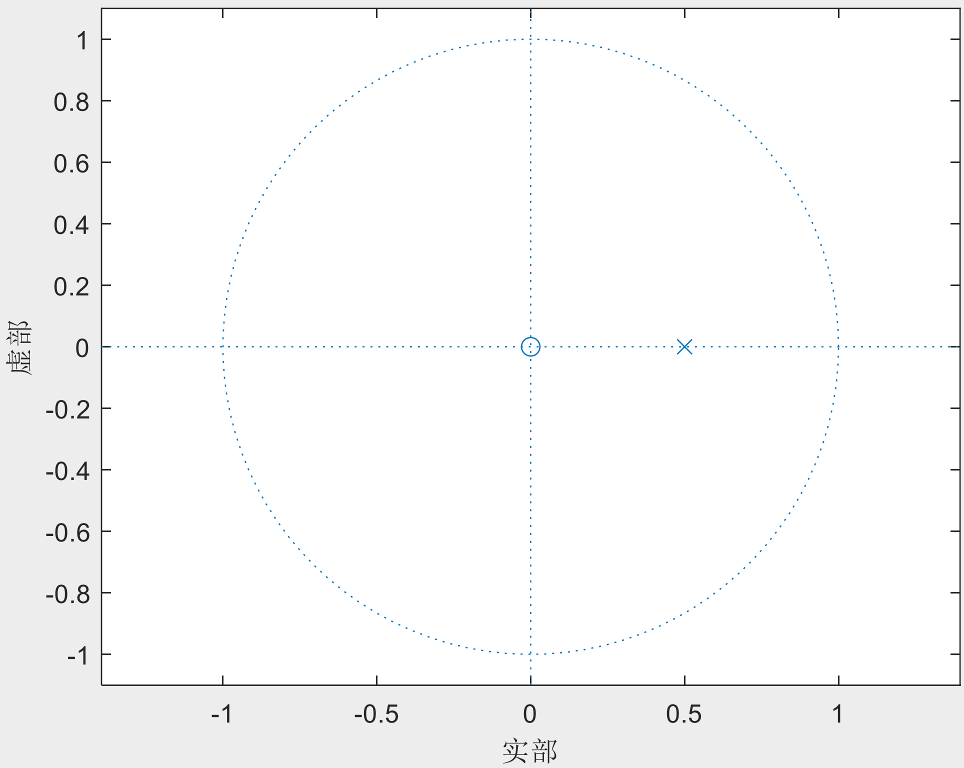
程序代码:

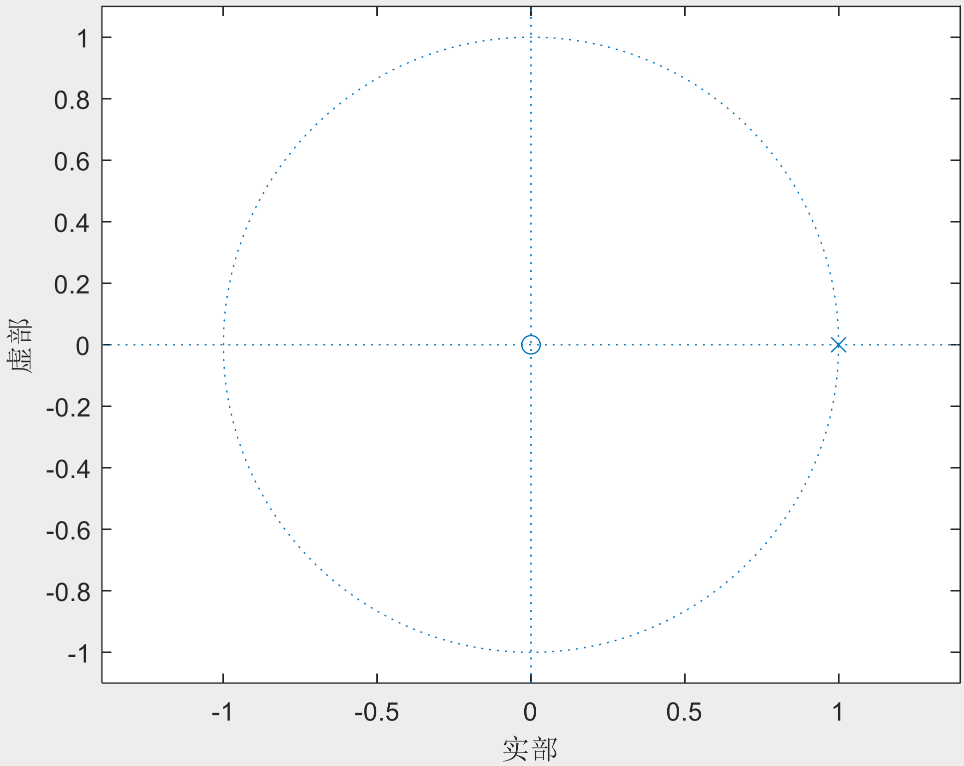
```
% 系统函数 H1(z)的零极点分布图
figure;
zplane([1 0], [1 -0.5]);

% 系统函数 H2(z)的零极点分布图
figure;
zplane([1 0], [1 -1]);

% 系统函数 H3(z)的零极点分布图
figure;
zplane([1 0], [1 -1.5]);

% 时域单位响应的波形
n = 0:50;
h1 = 0.5.^n;
h2 = ones(size(n));
h3 = 1.5.^n;

% 绘制时域单位响应的波形
figure;
subplot(3,1,1);
stem(n, h1);
```

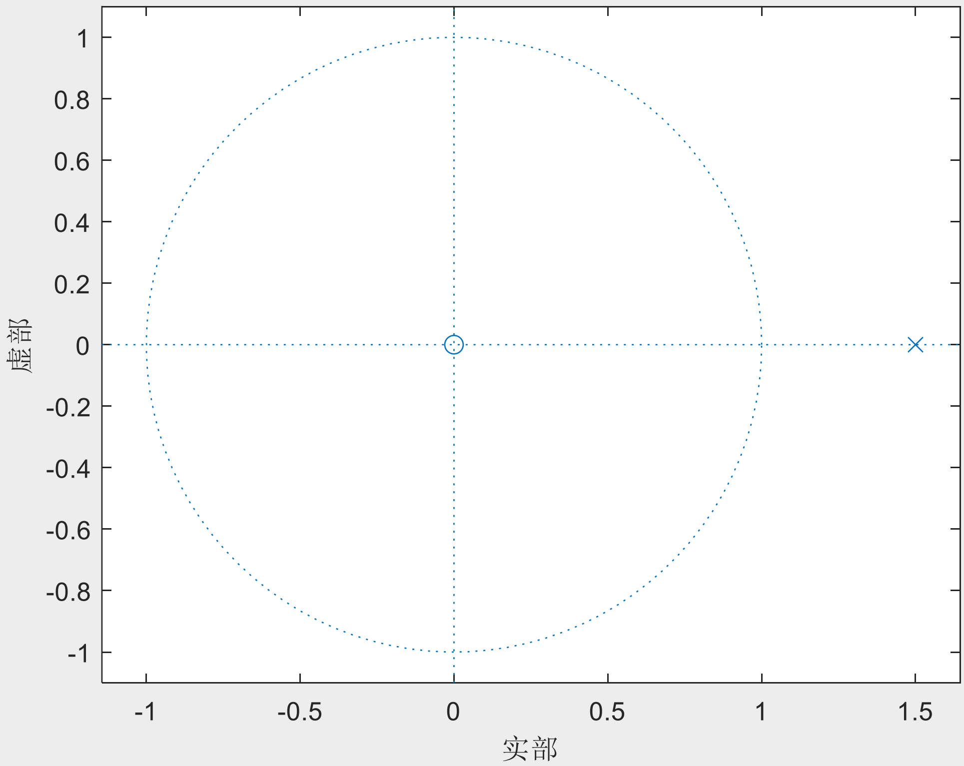
```
title('H1(z)时域单位响应');
subplot(3,1,2);
stem(n, h2);
title('H2(z)时域单位响应');
subplot(3,1,3);
stem(n, h3);
title('H3(z)时域单位响应');

% 时域取样响应的波形
t = 0:0.01:1;
x = sin(2*pi*5*t);

y1 = filter(0.5, [1 -0.5], x);
y2 = filter(1, [1 -1], x);
y3 = filter(1.5, [1 -1.5], x);

% 绘制时域取样响应的波形
figure;
subplot(3,1,1);
plot(t, y1);
title('H1(z)取样响应');
subplot(3,1,2);
```

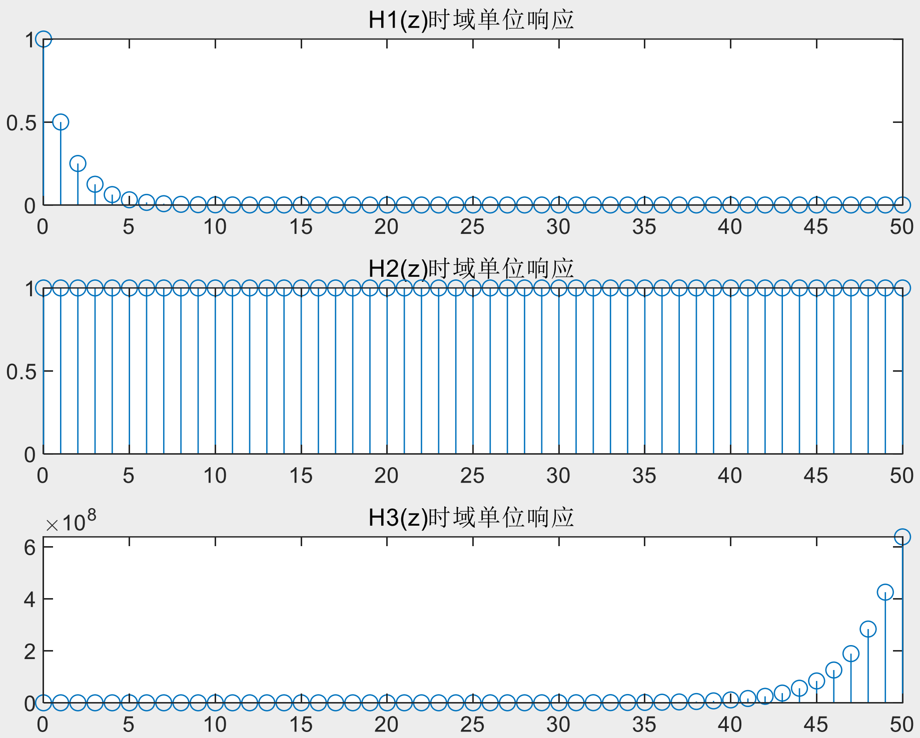
```
plot(t, y2);
title('H2(z)取样响应');
subplot(3,1,3);
plot(t, y3);
title('H3(z)取样响应');
```

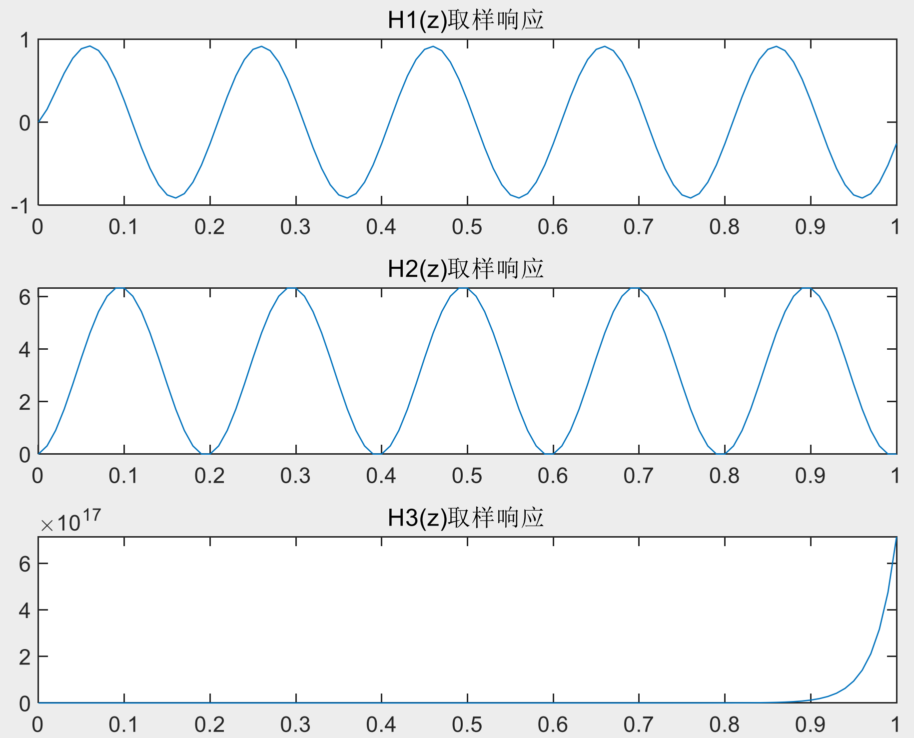
程序运行截图:




1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
虚部
-1
-0.5
0
0.5
1
实部


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
虚部
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
实部


H1(z)时域单位响应
H2(z)时域单位响应
H3(z)时域单位响应
×10^8


H1(z)取样响应
H2(z)取样响应
H3(z)取样响应
×10^17