

0.1 标记与约定

- 等价于: \equiv
- 定义为: $:=$
- 矢量: 粗体字母, 例如: \mathbf{a} . 同样的字母, 在没有额外说明的情况下, 非粗体表粗体所示矢量的模 (在本教材中有时会口语化地称作“大小”), 例如: v 是速度, v 则是速率.
- 在没有特别说明的情况下, 默认单位是**国际单位制** (法语: *Système International d'Unités*, 简称 SI).
- 关于时间的导数: 字母上加点, 例如: $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, $\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$.

0.2 阅读指南

- **加框的公式:** 一些公式会在一个框内, 就像如下所示:

$$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$

这些公式通常非常重要, 需要理解和记忆.

- **笔记:** 对于前文的一些补充说明, 跳过对于内容理解不会有影响, 但为了知识点的完整性, 推荐阅读. 笔记会有一类内容属于“剧透”, 可能在之后的章节中提及, 或者在更高阶的课程中涉及, 因此初读可能感觉不明所以也是正常现象, 这种时候不需要过于纠结理解, 只需有一点印象, 混个眼熟, 之后再次接触的时候便会“哦~”地理解.
- **带有“*”的内容:** 选读. 比较复杂或不太重要的内容, 可以选读或只记忆最终结果.

第一部分

力学

第1章 质点力学

内容提要

- 本章我们将先从描述质点运动开始, 介绍不同坐标系下对于质点运动的描述;
- 单是描述运动还不够, 为了理解质点的运动规律, 我们接着便要探讨质点运动背后的原理, 同时引出力的概念;
- 之后我们会比较浅显地了解一下坐标系变换;
- 再之, 我们会讨论质点其他的物理量 - 能量, 动量和动量矩, 并讨论守恒量这个概念;
- 本章是力学最基础的内容, 以质点为对象讨论了力学中大致涉及的一些内容, 学习往往是一个“循环上升”的过程, 类似的内容在之后的章节还会继续出现, 但是讨论对象会变成更为复杂的质点组或是刚体, 因此在这一章先用简单的质点将概念弄清楚, 再面对更复杂的情况, 理解上就会相对简单一些.

1.1 运动的描述

1.1.1 参考系和坐标系

为了描述和研究物体的运动, 我们首先需要确定物体在空间的位置. 然而物体的位置只能被相对的描述, 因此我们往往需要另一个物体作为参考. 这种作为参考的物体叫做**参考系** (frame of reference). 在确认了参考系之后, 我们可以在此之上选择适当的**坐标系** (coordinate system), 用于描述物体在空间中的相对位置. 根据系统的对称性, 为了计算便捷, 常用的坐标系有**直角坐标系** (Cartesian coordinate system), **柱坐标系** (cylindrical coordinate system) 和**球坐标系** (spherical coordinate system).

研究大多数实际问题时, 物体本身的尺寸相对其运动经过的尺度很小, 我们便可以将其视作一个一维的点而忽略其本身大小和形状, 这个物体的质量可以被视作集中在这个点上, 对于这种模型, 我们称之为**质点** (point mass).

注 参考系强调的是一种“观测”的行为. 现实生活中, 当我们处于火车上, 我们看其他乘客是静止的; 而当我们处于火车外的地面上, 我们看乘客这是运动的. 这里提到的“火车”和“地面”即为参考系. ■

1.1.2 运动方程

考虑一质点在二维的平面中运动, 以此二维平面为参考系, 在此平面上建立直角坐标系, 则这个质点在各个时刻的位置, 即质点的运动轨迹, 可以用以下方程组表示


$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

根据情况不同, 有些时候可能使用极坐标系 (polar coordinate) 会更自然; 类似的, 这个质点的位置可以表示为

$$\begin{cases} r = r(t), \\ \theta = \theta(t). \end{cases} \quad (1.2)$$

类似于式(1.1)和(1.2)的方程组, 描述了质点的运动规律, 我们把它们叫做**运动方程** (equations of motion).

注 像(1.1)和(1.2)这样的写法其实属于滥用标记 (abuse of notation), 是不太规范的, 但是理解上不会有太大问题, 因此请对此比较在意的读者宽容和忍耐一下 (please bear with it). ■

 **笔记** 一些剧透 (spoiler): 之后我们会看到, 运动方程不只是简单描述物体在空间中位置的, 关于时间的方程; 其概念可以被推广到广义坐标, 甚至更抽象的概念中. ■

一般我们要求一个物体不能从空间的某个位置突然改变到另一位置, 即其运动轨迹应该是连续的, 因此, 式(1.1)和(1.2)都应当是关于时间 t 的单参数连续方程. 质点移动的轨迹, 我们一般称之为轨道 (trajectory); 我们可以将方程组中的 t 消去, 得到各个变量之间的关系式, 即轨道方程式.

1.1.3 位移, 速度和加速度

对于一个质点, 我们建立直角坐标系, 然后可以用如 (x, y, z) 的写法来表示质点在某一时刻的位置. 同时我们知道, 像 (x, y, z) 这样的写法也可以表示“一个起点在坐标系原点, 终点在点 (x, y, z) 的矢量”, 这样便额外附加了一个方向的概念 (这为我们下面定速度提供了方便), 我们称之为该质点所处位置的**位置矢量** (position vector), 简称“位矢”. 例如, 在直角坐标系中, 如图1.1所示, 一质点相对于原点的位置可用位矢表述为

$$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (1.3)$$

这里 \hat{i} , \hat{j} 和 \hat{k} 分别是平行于 x , y 和 z 坐标轴的单位矢量, x , y 和 z 则分别为这个矢量在 x , y 和 z 坐标轴上投影的长度. 关于矢量需要的一些基本知识, 可以参见附录B.

注 一些其他的标记 (notation): 有的教科书可能也会用 \hat{x} , \hat{y} 和 \hat{z} 来表示平行于 x , y 和 z 坐标轴的单位矢量. 我们在学习过程中, 往往会在不同教科书或是不同文章里看到类似的公式, 但是标记略有出入, 我们应该学习去理解公式背后的涵义, 而不是拘泥于标记的统一. ■

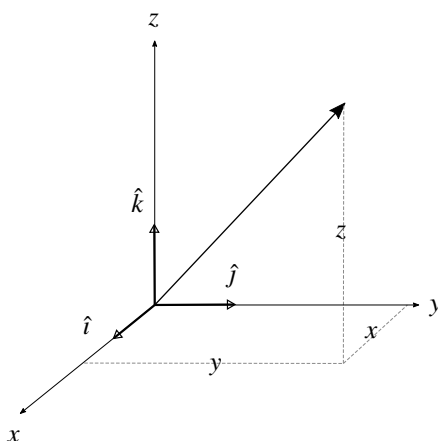


图 1.1: 笛卡尔坐标系的基矢量 \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} , 以及矢量在三个方向上的坐标 x, y, z 。

当质点的位置发生变化时, 如图1.2所示, 某质点从 A 点移动至了 B 点, 类似于直接连接 A 至 B 的矢量, 我们称之为从 A 点到 P 点的**位移** (displacement), 这里我们将它记作 $\Delta\mathbf{r}$. 若相对原点 O , A 点的位矢是 \mathbf{r} , B 点的位矢则为 $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$.

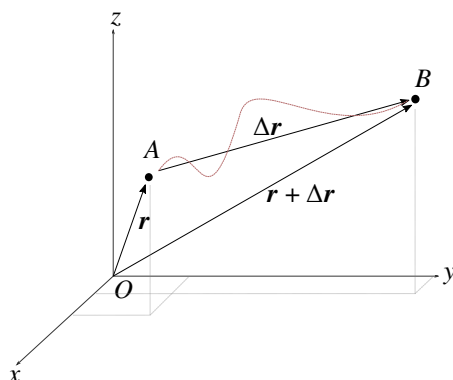


图 1.2: 连接 A 与 B 点的有向线段表示位移, 暗红色弯曲虚线表示从 A 移动到 B 的其中一条路径。

注 这里需要特别注意一下“位移”和“路程”(distance)的区别,前者是一个矢量,而后者是一个标量.例如在图1.2中,质点通过一条曲线路径从 A 抵达 B ,那么其移动距离则会大于位移的模 $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta r$. 一个更特殊的例子,若一个质点沿封闭曲线行进一周回到起点,其移动距离显然不为零,但是位移的模却是零.类似的,接下来马上就要出现的“速度”与“速率”这两个概念也需要进行区分. ■

接下来,我们来定义**速度**(velocity)和**加速度**(acceleration).

定义 1.1 (速度)

我们把质点在某一点处的瞬时速度定义为此处位矢的时间变化率,一般记作 \mathbf{v} ,即

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.4)$$

因为位矢是一个矢量,因而对其关于时间求导而得的结果依旧是一个矢量.如果只考虑这个结果的大小,不考虑方向,这个物理量则叫做**速率**(speed).

在**国际单位制**(法语: *Système International d'Unités*, 简称 SI) 中,位矢 \mathbf{r} 的单位为 m (米),时间 t 的单位为 s (秒),因此速度 \mathbf{v} 的单位为 m/s (米每秒). ($[\text{m}]/[\text{s}] = [\text{m/s}]$)

定义 1.2 (加速度)

对速度关于时间再次求导,得到的物理量称作瞬时加速度.速度和加速度的关系,与位移和速度的关系非常类似.

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.5)$$

加速度 \mathbf{a} 的单位为 m/s^2 (米每秒平方). ($[\text{m/s}]/[\text{s}] = [\text{m/s}^2]$)

当加速度是常矢量时,以下几个关系式会很实用,推导过程比较简单,留给读者自行完成.

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2, \quad (1.7)$$

$$|\mathbf{v}_f|^2 = |\mathbf{v}_i|^2 + 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i), \quad (1.8)$$

$$\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i = \left(\frac{\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_f}{2} \right) t. \quad (1.9)$$

这里下标 i 表起始 (initial), 下标 f 表最终 (final), 之后也会沿用这样的标识.

1.1.4 速度和加速度的分量形式

1.1.4.1 直角坐标系

根据直角坐标系中位矢的表示(1.3)以及速度的定义(1.4),速度的分量形式可以写作

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \\ &:= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

因而速率为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

类似的, 加速度是速度关于时间的求导, 或者也可看做是位矢关于时间的二次导, 其分量形式则是

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \\ &= \dot{v}_x\hat{i} + \dot{v}_y\hat{j} + \dot{v}_z\hat{k} \\ &:= a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}.\end{aligned}\quad (1.12)$$

加速度的大小 (矢量模) 则为

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \\ &= \sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2} \\ &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.\end{aligned}\quad (1.13)$$

1.1.4.2 极坐标系

在平面的情况, 我们可以建立**极坐标系** (polar coordinate system), 此时任意一点处的位矢可以用 $\mathbf{r} = (r, \theta)$ 来表示, 其中 r 代表与原点的距离, θ 代表 \mathbf{r} 与 x -轴正方向的顺时针方向的夹角。对于任意一点, 我们将原点出发与其连线方向定义为一个单位矢量的方向, 记作 \hat{r} ; 垂直于这条连线, 向着极角 θ 增加的方向记作另一个单位矢量的方向, 记作 $\hat{\theta}$ 。以上论述可能理解上有一定难度, 结合图1.3可能会更方便理解。 \hat{r} 与 $\hat{\theta}$ 的方向分别叫做**径向** (radial direction) 和**周向** (或角向 angular/transverse direction)。

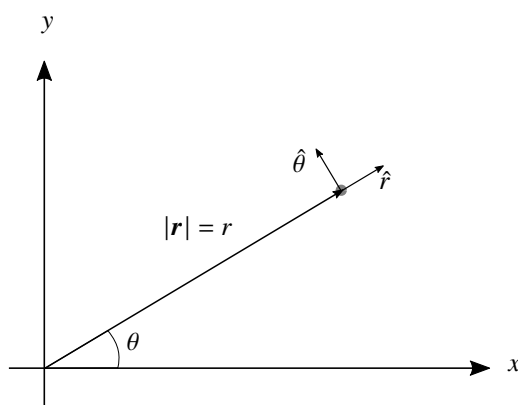


图 1.3: 极坐标系的坐标与基矢量。

显然对任意位矢 \mathbf{r} , 我们将其分解到平行于它的 \hat{r} 方向, 和垂直于它的 $\hat{\theta}$ 方向, 有

$$\mathbf{r} = r\hat{r} + 0\hat{\theta}, \quad (1.14)$$

其中 $r = |\mathbf{r}|$ 。

注 在直角坐标系中, 任意位矢是可以由其坐标和基矢量组合表示的, 如坐标为 (x, y) 的矢量 \mathbf{r} 可以表示为 $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ 。而在极坐标中并不是一样的表示方式, 即坐标为 (r, θ) 的矢量 $\mathbf{r} \neq r\hat{r} + \theta\hat{\theta}$ 。 ■

根据速度的定义(1.4), 则有

$$\begin{aligned}v &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(r\hat{r}) \\ &= \left(\frac{d}{dt}r\right)\hat{r} + r\left(\frac{d}{dt}\hat{r}\right).\end{aligned}\quad (1.15)$$

易见第一项中, $\frac{d}{dt}r$ 是矢量长度变化的时间变化率; 第二项的存在则是因为在平面极坐标中, 单位矢量的方向并不是不变的, 那么 $\frac{d}{dt}\hat{r}$ 具体是什么呢? 我们不妨从图1.4上来分析。

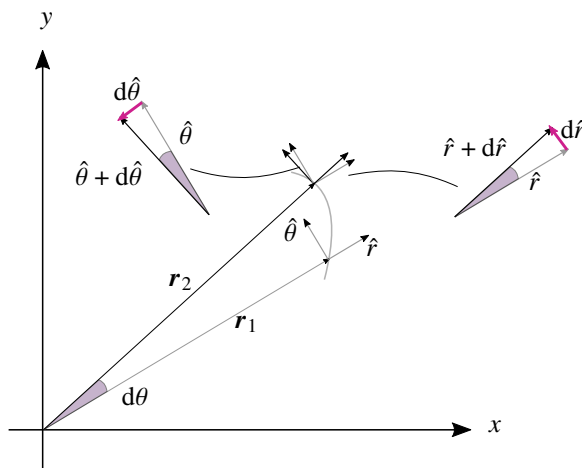


图 1.4: 极坐标系中的基矢量是会改变的。

如图1.4所示, 考虑一任意位矢 \mathbf{r}_1 经过了一个无穷小量 $d\mathbf{r}$ 变为 \mathbf{r}_2 , 其极角 θ 的变化记作 $d\theta$. 因为 \hat{r} 的指向是始终跟随 \mathbf{r} 的指向的, 即 \hat{r} 的指向与 \mathbf{r}_1 的指向一致, $\hat{r} + d\hat{r}$ 的指向与 \mathbf{r}_2 的指向一致, 则有 \hat{r} 与 $\hat{r} + d\hat{r}$ 的夹角也为 $d\theta$. 单位矢量长度一定, 那么这个过程可以看作是 \hat{r} 画了一个圆弧, 弧长为 $d\hat{r}$, 根据弧长与半径和圆心角的关系, 我们有 $d\hat{r} = (d\theta)\hat{\theta}$ (当然 $d\hat{r}$ 也可视作一段弦长, 但在矢量变化前后的夹角是无穷小量 $d\theta$ 的情况下, 两者可以不严谨地视作一致). 类似的我们也可以得到 $d\hat{\theta}$ 的表达式, 思路与求 $d\hat{r}$ 的过程基本一致, 这里不做过多展开; 要特别注意的是 $d\hat{\theta}$ 的指向, 虽然其指向与 $\hat{\theta}$ 垂直, 但指向圆心而不是背向圆心, 所以其方向为 $(-\hat{r})$. 综上, 我们有

$$\begin{cases} d\hat{r} = (d\theta)\hat{\theta}, \\ d\hat{\theta} = -(d\theta)\hat{r}. \end{cases} \quad (1.16)$$

结合式(1.15)和(1.16)则有

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left(\frac{d}{dt} r \right) \hat{r} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \\ &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \\ &:= v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

直觉上也很好理解上式, 如第二行所示, 第一项与第二项分别对应矢量长度和方向的时间变化率; 其中第二项, 如果只有 $\dot{\theta}$, 则量纲少了一个距离, 与速度的量纲对不上, 因而乘上与原点距离 r , 这样一来也很符合直觉, 因为同样时间经过同样的角度, 距离原点越远则运动越快; 最后一行里, 我们则定义了**径向速度** v_r 与**周向速度** v_θ .

接下来依旧是加速度. 根据加速的定义(1.5)以及刚刚得到的速度在极坐标下的表达式(1.17)可得

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \hat{r}) + \frac{d}{dt} (r \dot{\theta} \hat{\theta}). \quad (1.18)$$

先来看前一项, 即径向速度的变化率

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{r} \hat{r}) &= \frac{d\dot{r}}{dt} \hat{r} + \dot{r} \frac{d\hat{r}}{dt} \\ &= \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta}. \end{aligned}$$

其中第一项是由于径向速度大小的改变导致的, 而第二项则是径向速度的方向变化引起的. 再来看后一项, 即周向速度的变化率

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (r \dot{\theta} \hat{\theta}) &= \frac{dr}{dt} \dot{\theta} \hat{\theta} + r \frac{d\dot{\theta}}{dt} \hat{\theta} + r \dot{\theta} \frac{d\hat{\theta}}{dt} \\ &= \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + r \ddot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\theta}^2 (-\hat{r}). \end{aligned}$$

其中前两项是由周向速度的大小变化导致的, 最后一项则是因为周向速度方向的变化. 将以上结论整合可得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{\text{径向}} \hat{r} + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{\text{周向}} \hat{\theta} \\
 &= \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{\text{径向}} \hat{r} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})}_{\text{周向}} \hat{\theta} \\
 &:= a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta}.
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

最后一项里, 我们定义了**径向加速度** a_r 与 **周向加速度** a_θ .

在处理三维空间中的问题时, 我们需要引入第三个变量来描述位置; 例如, 在柱坐标系中, 我们引入一条垂直于平面极坐标系的 z -轴, 则速度与加速度的表述中会增加含 \dot{z} 与 \ddot{z} 的项等; 球坐标系中, 在平面极坐标 (r, ϕ) 的基础上, 我们再引入与正 z -轴之间的夹角-天顶角 θ .

1.1.5 切向加速度与法相加速度

在研究曲线运动时, 比较方便的, 我们可以分析**切向** (tangential direction) 和**法向** (normal direction). 然我们考虑加速度, 因为每一点每一刻, 速度是一直切于运动轨道的, 因此切向加速度描述了速度大小 (速率) 的变化; 法向加速度则垂直于速度, 因此它不改变速度大小, 只改变速度方向. 关于法相加速度, 不严谨地, 考虑在足够短的时间间隔内, 速度大小的变化可以忽略不计, 我们可以将其近似作圆周运动.

严格来讲, 如图1.5所示, 考虑一质点移动经过一段无穷小量 $d\mathbf{l}$, 将 $d\mathbf{l}$ 视作一段弧长, 其对应的圆心角记作 $d\theta$, 类似极坐标的情况(1.16), 因为切向垂直于法向, 我们依然有

$$\begin{cases} d\hat{t} = (d\theta)\hat{n}, \\ d\hat{n} = -(d\theta)\hat{t}. \end{cases} \tag{1.20}$$

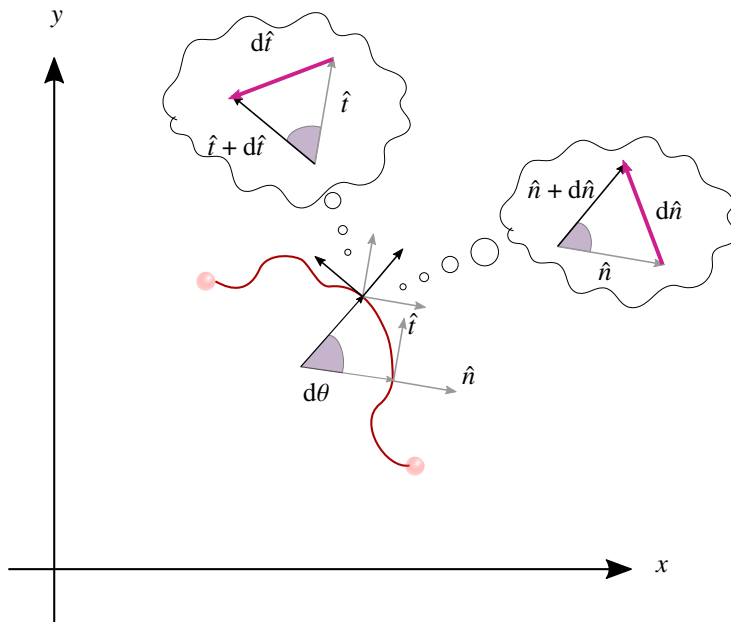


图 1.5: 切矢量和法矢量示意图.

速度是切于运动轨道的, 因此

$$\mathbf{v} = v\hat{t} + 0\hat{n} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} \hat{t} \tag{1.21}$$

其中 $v = |\mathbf{v}|$, 第二个等号则是利用了速度的定义(1.4). 对上式再次求导, 则有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dl}{dt} \hat{\mathbf{t}} \right) \\
 &= \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{\mathbf{t}} + \frac{dl}{dt} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} \\
 &= \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{\mathbf{t}} + \frac{dl}{dt} \left(\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) \\
 &= \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{\mathbf{t}} + \frac{dl}{dt} \left(\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dl} \frac{dl}{dt} \right) \\
 &= \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{\mathbf{t}} + \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dl} \\
 &= \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}}.
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

其中最后一个等号, 我们定义 $\rho := dl/d\theta$, 即轨迹在此处的曲率半径. 切向加速度和法向加速度分别可以写作:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt}, \\ \mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho}. \end{cases} \tag{1.23}$$

观察上式, 如前面所述, 切向分量反应了速度大小的变化, 而法向分量的表述可以与向心加速度类比. 当运动在三维的空间时, 切向的定义还是清晰的; 而之前的法向, 现在称作“主法向”(依旧可以类比成向心加速度的指向); 而同时垂直于这两个方向的指向, 广义上也可称作法向, 我们在里称它为“副法向”, 在副法向上, 加速度分量为零.

1.2 牛顿运动定律

在前面的章节里, 我们知道了怎么描述物体的运动, 但是“为什么”物体如此运动的问题没有被解决. 因此, 在这一节里, 在之前**运动学** (kinematics) 的基础上, 我们来研究**动力学** (dynamics).

牛顿运动定律是经典动力学的基础, 其本质是经验定律 (empirical laws), 是从观察实验中总结得出的. 牛顿运动定律描述了在宏观且低速情况下的物体的机械运动, 并且将物体间的相互作用-力 (force) 和物体保持其运动状态的特性-惯性 (inertia) 联系了起来.

牛顿运动三定律可以表述为:

定律/定理 1.1 (牛顿第一定律)

任何一个物体 (质点) 如果不受力, 或受到的**合力** (resultant force) 为零, 那么它将保持静止或匀速直线运动. 反之也是正确的. 公式上, 我们可以记作

$$\sum \mathbf{F} = 0 \leftrightarrow \mathbf{v} = \text{const}. \tag{1.24}$$

牛顿第一定律描述了物体不受力或受合力为零时, 物体保持运动状态不变的性质, 即惯性, 因此这一条定律又被称作的**惯性定律**.


定律/定理 1.2 (牛顿第二定律)

当物体 (质点) 受力时 (不考虑产生形变), 它将被加速. 加速度的大小与力的大小成正比, 与其质量的大小成反比, 加速度的方向与合力的方向一致. 公式上, 则有

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \tag{1.25}$$

这里 \mathbf{F} 表示力, 对其求和表示合力, m 是物体的惯性质量, \mathbf{a} 是加速度.

质量 m 的单位为 kg (千克), 力 F 的单位为 N (牛顿 <Newton>). ($[N] := [kg] \cdot [m/s^2] = [kg \cdot m/s^2]$)

 **笔记** 一些超纲: 除了惯性质量, 还有引力质量, 两者并不完全等价 (虽然在广义相对论中, 爱因斯坦通过等效性原理证明二者等效). 关于惯性质量和引力质量的讨论超过了这本教材的覆盖面, 在此不做过深的赘述, 之后我们就将两者笼统地称作“质量”.

定律/定理 1.3 (牛顿第三定律)

当物体 A 施加力 $F_{A \text{ to } B}$ 在物体 B 上, 物体 B 同时会施加一反作用力 $F_{B \text{ to } A}$ 在物体 A 上. 这两个力大小相等, 方向相反, 即

$$F_{A \text{ to } B} = -F_{B \text{ to } A}. \quad (1.26)$$

1.3 质点运动微分方程

1.3.1 构造运动微分方程

我们从牛顿第二定律(1.25)出发, 同时, 作用力一般可以表述为位矢 \mathbf{r} , 速度 \mathbf{v} 及时间 t 的函数, 因而我们有

$$m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t). \quad (1.27)$$

像上式中 $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ 这样的微分方程就是质点的运动微分方程, 也叫做动力学方程. 用分量形式表述, 比如在三维直角坐标系中, 上式便为:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t), \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t), \\ m\ddot{z} = F_z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t), \end{cases} \quad (1.28)$$

其中 F_x, F_y, F_z 分别是 \mathbf{F} 在 x, y, z -轴上的分量 (投影). 观察可以发现, 这是一个二阶常微分方程组, 它的解将有 6 个积分常数, 这些常数可以由**初始条件** (initial condition) $x(t=0), y(t=0), z(t=0)$ 和 $\dot{x}(t=0), \dot{y}(t=0), \dot{z}(t=0)$ 来确定.

当然, 有的时候用极坐标来描述运动更加便捷, 例如在平面直角坐标系中, 通过(1.19)中定义的横向与径向加速度, 我们有

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}; t), \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}; t), \end{cases} \quad (1.29)$$

1.3.2 解运动微分方程

这里我们分类型大致地介绍一下解微分方程的通常方法, 因为本作是物理教材, 所以一些数学推导就略去了, 感兴趣的读者可以参考 Lamar 大学 Paul Dawkins 教授的笔记: <https://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/DE.aspx>.

1.3.2.1 一阶微分方程

例如

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), t),$$

这样的微分方程, 因为其只含 $y(t)$ 的一阶导, 我们便称其为一阶 (first order) 微分方程, 其中 $f(y(t), t)$ 是关于 $y(t)$ 和 t 的方程, 有时为了方便起见 $y(t)$ 直接记作 y .

一般在物理中遇到大多数的问題确实可以表述为线性的 (linear) 微分方程, 即不存在 (i) 像 $y^2(t), y(t)\frac{dy}{dt}$ 这样待

求函数或是其导数的高次项, (ii) 类似 $\cos(y(t))$ 这样关于待求函数的非线性方程, 我们可以尝试将微分方程写作

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t),$$

的形式, 则有通解

$$y(t) = \frac{\int \mu(t)g(t) dt + C}{\mu(t)}, \quad (1.30)$$

其中 C 是积分常数, 可用初始条件判定, 而 $\mu(t)$ 叫做积分因子 (integrating factor),

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}. \quad (1.31)$$

1.3.2.2 二阶微分方程

如果微分方程出现了待求方程的二次导, 如

$$p(t)\frac{d^2 y}{dt^2} + q(t)\frac{dy}{dt} + r(t)y = g(t),$$

这样的微分方程便称作二阶 (second order) 微分方程. 将上式重写为

$$ay'' + by' + cy = g(t).$$

注 这里撇 (', prime) 表示导数, 例如 $y' \equiv \frac{dy}{dt}$, $y'' \equiv \frac{d^2 y}{dt^2}$, 这样写主要是方便起见, 但是导数是关于哪一个变量的信息也丢失了, 因此在多元函数的情况下需要避免使用这种标记. ■

先考虑齐次 (homogeneous) 的情况, 即 $g(t) = 0$. 上式的特征方程 (characteristic equation) 是

$$ar^2 + br + c = 0.$$

接下来有以下几种情况:

- 当特征方程由两个不同的实数解 r_1 和 r_2 ($b^2 - 4ac > 0$), 微分方程的两个解是

$$y_1(t) = e^{r_1 t}, \quad y_2(t) = e^{r_2 t}.$$

因为两个解都满足微分方程, 所以通解可以表示为这两个解的线性叠加, 即

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

其中 C_1 和 C_2 是积分常数, 需要用初始条件来计算.

- 当特征方程由两个相同的实数解 r ($b^2 - 4bc = 0$), 通解是

$$y(t) = C_1 e^{rt} + C_2 e^{rt}.$$

- 当特征方程由两个虚数解 $r \pm i\omega$ ($b^2 - 4bc < 0$), 通解是

$$y(t) = e^{rt} [C_1 \cos(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)].$$

再考虑非齐次的情况, 非齐次的情况, 为了使得微分方程等式右边为 $g(t)$, 通解在齐次解 (homogeneous solution) $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 的基础上还要加入新的项 - 特解 (particular solution)

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) - y_1 \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(t)} dt + y_2 \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(t)} dt.$$

其中 W 是朗斯基行列式 (Wronskian)

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_2(t_0)y_1'(t_0).$$

1.3.2.3 微分方程组

这里我们只讨论一阶微分方程组, 因为对于高阶的微分方程, 我们可以将其变化为微分方程组, 例如若有

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$$

令 $x(t) = y'(t)$, 上式便可改写作

$$\begin{cases} x(t) - y'(t) = 0, \\ x'(t) + x(t) + y(t) = 0. \end{cases}$$

解微分方程组时, 我们可以参照利用线性代数的知识解方程组的思路, 对于齐次的一阶微分方程组写, 我们将其改写为下面的形式

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $\mathbf{x}' = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t))$, A 是 n 行 n 列的矩阵, 第 i 行第 j 列的元素 A_{ij} 表示第 i 个等式中 x_j 的“系数”, 当然这个“系数”可以是含 t 的方程.

接下来便是本征值-本征矢量 (又作特征值-特征向量, eigenvalue-eigenvector) 问题了. 若情况比较理想, 微分方程组的各方程间线性无关, 本征值又都是实数且各不相同, 便有通解

$$\mathbf{x} = C_1 e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{\xi}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \boldsymbol{\xi}_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \boldsymbol{\xi}_n.$$

其中 λ_i 为第 i 个本征值, 而 $\boldsymbol{\xi}_i$ 是第 i 个本征矢量.

对于非齐次的情况, 我们可以先求出齐次解, 再用待定系数法 (undetermined coefficients) 来求特解, 这有点类似“猜” (educated guess) 解的形式. 比如非齐次的部分若是 n 次的多项式, 则特解应该是 $(n+1)$ 次的多项式; 非齐次的部分若是三角函数, 则特解也应该是三角函数; 非齐次的部分若有指数函数, 则特解也应该是指数函数.

以上三个小结综述的解法是通常解法, 即在没有“巧解”的情况下无差别地“暴力”求解, 但是大多数情况一般都会有一些讨巧的方法避免大量计算, 具体情况需要具体讨论, 这里就不作展开, 之后很多的例子中也都有很好的示范.

当然, 还有情况是, 微分方程 (组) 可能会非常复杂, 不存在巧妙方法, 利用通常方法也计算量过大, 这时便可以使用数值方法 (numerical method). 很多情况我们也确实不需要待求函数地准确的解析形式, 只需要其在特定取值下的函数值便可, 因此使用数值法也是完全合情合理的. 最简单的方法便是欧拉法 (Euler method), 核心思路便是将导数 $(d\mathbf{x}/dt)$ 近似作 $(\Delta\mathbf{x}/\Delta t)$, 然后取很小的 Δt 进行推演. 数值方法不是这门课的核心内容, 因此也不在这具体展开.

1.4 相对性原理

在研究物体运动时, 我们总是首先选定参考系. 在运动学中, 参考系的选择可以比较任意, 最坏的情况无非数学上会比较复杂; 而在动力学中, 在应用牛顿运动定律时, 参考系的选择就不那么自由. 牛顿运动定律能成立的参考系叫做**惯性参考系** (inertial reference frames).

严格一些的叙述: 惯性参考系是指可以**均匀** (homogeneous) 且**各向同性** (isotropy) 地描述空间, 并且可以均匀描述时间的参考系. 在惯性参考系内, 系统内部的物理规律与系统外的因素无关.

所有的惯性系之间都在进行匀速平移运动. 不同惯性系的测量结果可以通过**伽利略变换** (Galilean transformation) 互相转换 (当然, 这是低速非相对论性的情况; 对于要考虑相对论效应的情况下, 则是使用**洛伦兹变换**

<Lorentz transformation>). 下面是一个运动学中的例子:

例子 1.1 平移 考虑一静止参考系 S , 以及另一参考系 S' , 后者相对 S 在 x -轴方向上的速度为 u . S 系的坐标为 $\{x, y, z, t\}$, 而 S' 系的坐标为 $\{x', y', z', t'\}$. 在 $t = 0$ 时, 两坐标系重合, 且时间同步. 直觉上, 我们有

$$\begin{cases} x' = x - ut, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{cases} \quad (1.32)$$

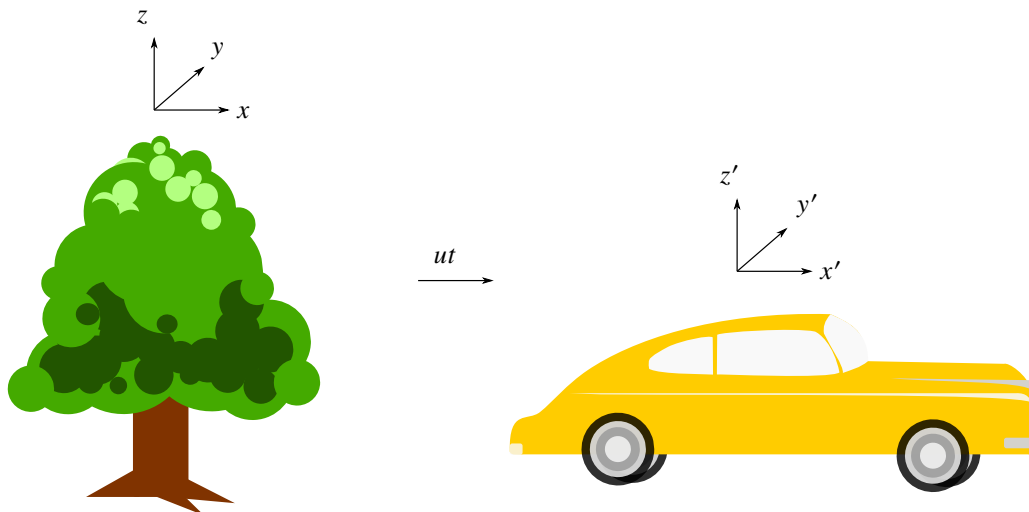


图 1.6: x 方向上的伽利略变换.

这个公式组就是伽利略变换中的沿 x -轴方向平移. 通过这套关系, 我们可以将一个参考系的测量结果与另一个系的联系起来. 例如, 两个系中, 某质点的速度在沿 x -轴方向的分量满足

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x - ut)}{dt} = v_x - u. \quad (1.33)$$

上面的情况中, 两个参考系的相对速度 u 是常量, 对 x -轴方向速度的分量关于时间求导则有

$$\begin{aligned} \dot{v}'_x &= \dot{v}_x - \dot{u} \\ \dot{v}'_x &= \dot{v}_x - 0 \\ a'_x &= a_x. \end{aligned}$$

然而, 当 S' 系相对 S 还有加速度, u 就不是常量了, 因为上式更通常的形式为

$$\begin{aligned} \dot{v}'_x &= \dot{v}_x - \dot{u} \\ a'_x &= a_x - a, \end{aligned} \quad (1.34)$$

其中 $a \equiv \dot{u}$, 也是两参考系的相对加速度. ■

上面的例子中的(1.33)和(1.34), 在其他分量也有相对速度或加速的情况下, 可以更通常地用矢量形式写作

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}, \quad (1.35)$$

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}. \quad (1.36)$$

当两参考系不存在相对加速度时, \mathbf{u} 为常矢量, \mathbf{a} 为零; 反之 \mathbf{u} 不为常矢量, 且 \mathbf{a} 不为零.

注 早先一些的教材将上述例子中这种情况称作“**平动参考系**”, 物体相对静止参考系 S 的运动称作“**绝对**”运动, 相对运动参考系 S' 的运动称作**相对运动**, 而 S' 系相对 S 系的相对运动, 就称作**牵连运动**. 物体相对 S 系的速度,

例如 \mathbf{v} , 称作“绝对”速度, 物体相对 S' 系的速度, 例如 \mathbf{v}' , 称作**相对速度**, S' 系相对 S 系的相对速度 \mathbf{u} 称作**牵连速度**.

类似的, 我们也可以定义**绝对加速度** \mathbf{a} , **相对加速度** \mathbf{a}' ; 对于非惯性参考系, 即一个系相对另一个系有加速度, 我们还可以定义**牵连加速度** \mathbf{a} . ■

不同惯性系的测量结果可以通过一些简单的变换互相转化, 也可以描述为, 物理定律在所有惯性系中形式一致. 一个日常的例子是, 如果不观察窗外, 在车厢内的我们无法感知, 或是通过实验分辨, 车厢处于静止的状态或是匀速直线运动. 这样不能通过任何力学试验来判断一个参考系是静止或是匀速直线运动, 可以更通常地表述为: 相对一个惯性参考系作匀速直线运动的参考系, 其内部所发生地一切力学过程, 都不受这个参考系本身匀速直线运动的影响. 这一原理称作**力学相对性原理**, 或是**伽利略相对性原理** (Galileo's principle of relativity).

例子 1.2 力学相对性原理 考虑牛顿第二定律:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}' &= m' \mathbf{a}' = m' \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} \\ &= m' \frac{d}{dt'} \frac{d \mathbf{r}'}{dt'} \\ &= m \frac{d}{dt} \frac{d(\mathbf{r} - \mathbf{u}t)}{dt} \\ &= m \frac{d(\mathbf{v} - \mathbf{u})}{dt} \\ &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= m\mathbf{a} = \mathbf{F}.\end{aligned}$$

可见牛顿第二定律不管在哪一个惯性系都是成立的. ■

1.5 非惯性参考系 (1)

在上一节中, 我们其实已经稍有接触非惯性参考系, 在运动系 S' 相对静止系 S 存在加速度时, 我们发现

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}.$$

将等式两边同乘 m , 得到

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - m\mathbf{a}$$

在上一节最后, 我们发现, 不管在哪个惯性参考系中, 牛顿第二定律始终是成立的, 即 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, 而且 S 系静止, 的确为惯性系, 因此上式可重新写作

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}.$$

观测上式可以发现, S' 系中牛顿运动定律不再成立了, 即 $\mathbf{F} \neq m\mathbf{a}'$, 多出了额外的 $(m\mathbf{a})$ 一项; 将上式移项

$$\mathbf{F} + (-m\mathbf{a}) = m\mathbf{a}'.$$

这样一来, 我们可以依旧将 S' 系中所有“实质”的力定义为 $\mathbf{F}' := m\mathbf{a}'$, 从而保留牛顿第二定律的形式, 这么做的结果 (注: 英文中对于一些操作产生的效果有一个很传神描述 - artifact, 然而笔者文学修养有限, 暂时没有信雅达的翻译, 姑且写作结果) 便是

$$\mathbf{F} + (-m\mathbf{a}) = \mathbf{F}',$$

即在 S' 系中, 似乎就有了一个“假想”的力 $(-m\mathbf{a})$, 我们称这样的力为**假想力** (fictitious force).

定义 1.3 (假想力)

在非惯性系中牛顿运动定律不成立, 所以不能直接用牛顿运动定律处理力学问题. 若仍然希望能用牛顿运动定律处理这些问题, 则必须引入一种作用于物体上的假象力来修正.

注 在更多教材中, 假象力被称作**惯性力** (inertial force). 但是这么一来, 经常会有诸如“惯性是物体保持原有运动状态的倾向而不是力”的争论出现, 因此这里我们还是使用“假想力”这个说辞. 在惯性系中, “惯性不是力”这么表述确实没有问题; 但是在非惯性系, 例如, 当物体加速时, 若以该物体本身建立一个参考系, 看起来仿佛就有一个方向相反于加速度的力作用在其之上, 就像惯性-物体保持原有运动状态的倾向-似乎提供了一个力, 因而将这个力称为惯性力. 又因为这个力是没有实体提供的, 即它的出现是基于参考系的选择, 实际上 (在惯性系中) 并不存在, 所以也称之为假想力.

下面是一个简单的例子

例子 1.3 假想力 考虑一小车以加速度 a 向行驶, 车厢内用质量不计的线悬挂一小球, 悬线与竖直方向夹角为 θ , 求 θ 的表达式.

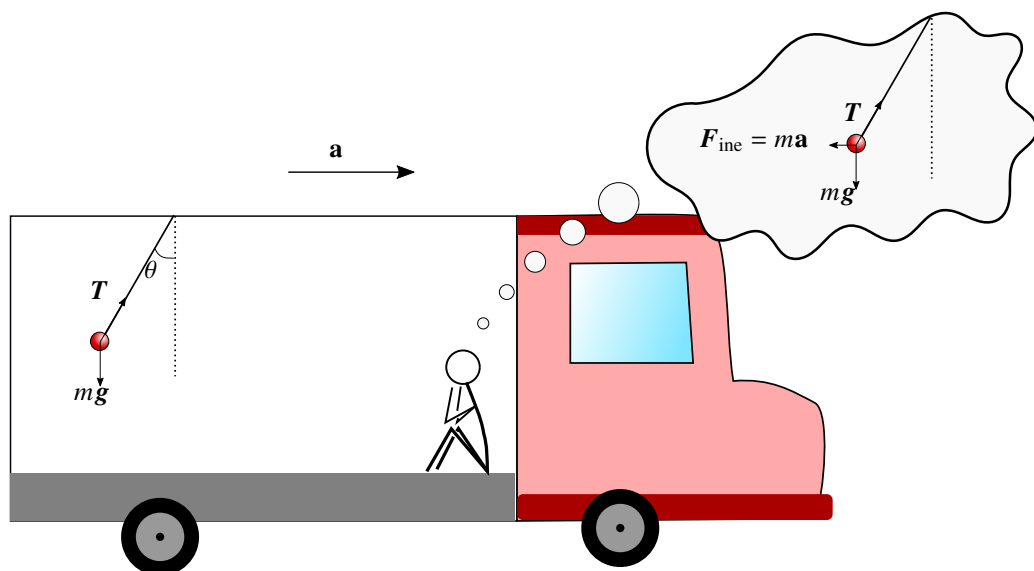


图 1.7: 非惯性参考系下的“惯性力”.

- 首先考虑比较简单的分析方法, 以地面建立参考系, 因为参考系是惯性系, 所以只需要考虑“实质”的力, 小球受到两个力: 线的拉力 T 与自身重力 mg . 利用牛顿第二定律, 在水平方向和竖直方向分别分析, 不难得出

$$\begin{cases} T \sin \theta = ma, \\ T \cos \theta = mg. \end{cases}$$

即拉力的竖直方向分力与重力平衡, 水平分量提供了加速度. 因而可得

$$\theta = \arctan \frac{a}{g}.$$

- 接下来考虑车厢内的视角. 以车厢为参考系, 除了拉力 T 与重力 mg , 因为车厢本身处于加速, 根据前面的讨论, 在这样的非惯性系内, 存在一个方向与加速度相反的假象力 ($-ma$). 相对于车厢, 小球处于静止, 所以这三个力应该三力平衡, 将三个力的矢量首尾相接绘制必定构成一闭合直角三角形, 夹角 θ 的对边与邻边分别为 ma 与 mg , 因此可得一样的结论

$$\theta = \arctan \frac{a}{g}.$$


1.6 功与能

现在, 我们知道质点在运动过程中任意时刻的速度, 位移或者加速度等, 但我们会好奇质点在这个过程中得到了或者失去了什么, 就像我们在运动过程中会感觉自己越来越累, 使用这之前定义的物理量无法描述这种“感觉”, 于是我们接下来就要定义**功**和**能**的概念.

其中“能”代表我们原本有的部分, “功”代表我们从外界获取或者向外界释放的部分.

1.6.1 功和功率

一般而言, 一个作用在质点上的力, 使质点沿其方向产生位移, 那么这个力便对这个质点做了**功** (work). 抽象点来说, 功可以理解为力在空间上的累积.

 **笔记** 既然功可以理解为力在空间上的累积, 那么力在时间上的累积是什么呢? 这个问题我们会在下一节中解答.

定义 1.4

最简单的情况, 当力是恒定的, 且质点受力在力的方向上做直线运动, 那么功 W 便定义为力 (的大小) F 与位移 (的距离) Δr 的乘积, 即

$$W = F \Delta r. \quad (1.37)$$

若力和位移存在夹角, 则功被表述为力与位移矢量的标量积 (点积, 点乘/内积的结果), 即

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = |\mathbf{F}| |\Delta \mathbf{r}| \cos(\theta). \quad (1.38)$$

这里第二个等号利用了点乘的定义, 其中 θ 为两个矢量的夹角.

再复杂一些, 若路径是一条曲线, 质点受力从点 A 运动至点 B , 功可以表述为一个线积分 (line integral)

$$W = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \cos(\theta) |d\mathbf{r}|. \quad (1.39)$$

这里为了保证一般性, 力 \mathbf{F} 可以随位置变化; 另外要注意因为力的方向和路径的方向一直发生变化, 因此 \mathbf{F} 与 $d\mathbf{r}$ 的夹角 θ 也是一个随着位置 \mathbf{r} 变化的量.

功 W 的单位为 J (焦耳), 当 1 N 的力作用在物体上, 使物体沿力的方向移动 1 m 所做的功为 1 J. ($[J] := [N] \cdot [m] = [\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2]$)

式(1.39)也可写作分量形式

$$W = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (1.40)$$

当存在多个力时, 我们可以视情况, 根据方便程度, 先计算合理再做积分, 或将分力的功分别计算再求和; 这是利用了标量积的分配律.

$$\begin{aligned} W &= \int \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r} \\ &= \sum_i \int \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

注 上式将多个力写成了求和形式, 若是觉得不够直观, 可以自行将求和 $\sum_i \mathbf{F}_i$ 写作 $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$

来衡量做功的快慢, 我们可以用**功率** (Power)

定义 1.5

单位时间内作的功定义为功率 P , 即

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (1.42)$$

功率 P 的单位为 W (瓦特). ($[W]=[J]/[s]=[kg \cdot m^2/s^3]$)

一个特殊的情况, 当力 \mathbf{F} 恒定时, 不难看出

$$\begin{aligned} P &= \frac{dW}{dt} \\ &= \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

从上式可见, 当功率 P 一定时, 力 \mathbf{F} 与速度 \mathbf{v} 的大小成反比.

1.6.2 能

若一个物体可以作功, 它便具有一定**能量** (energy), 能量和功的量纲是一致的, 即衡量它们的单位一样. 一物体对外界做功, 则其能量减少; 反之, 外界对一物体做功, 则这个物体能量增加.

在这本教材中, 我们主要关注**机械能** (mechanical energy). 机械能可以分为两大类: 当物体处于运动状态时具有的能量 - **动能** (kinetic energy), 一般记作 T ; 当物体处于某个特定位置时所储存的能量 (例如处于高出, 处于令弹簧拉伸的位置) - **势能** (potential energy), 一般记作 V 或者 U .

1.6.3 势能与保守力

势能值得讨论的比较多, 单独作为一小节更细致地介绍一遍. 首先为了之后的描述方便, 我们需要稍稍绕一些弯路 (detour), 引入**保守力** (conservative force) 这个概念.

在1.3.1节中有提到, 一般来讲, 力可以表述为一个关于位置, 速度以及时间的函数; 这么一来, 对其进行积分求作功是非常困难的. 考虑比较简单的情况, 当力 \mathbf{F} 只是关于位矢 \mathbf{r} 即坐标的函数, 那么计算就会便捷许多. 考虑在三维直角坐标系内, 若如之前所说, 力只是关于坐标的**良态的** (well-behaved, 即有限的, 连续且可微的) 函数, 那么就存在 $(x, y, z) \rightarrow (F_x, F_y, F_z)$ 这样一个映射 (mapping), 即这个力实际是一个矢量场 (vector field), 物理上, 我们可以把这样的空间区域称作**力场** (force field). 一般来讲, 式(1.39)这样的线积分是需要明确路径的, 因为即使起始点一样, 路径不同会导致积分的结果不同; 但存在一些特殊情况使得积分结果只和起始点相关, 而与路径无关 (path independent).

矢量分析中, 若一矢量场的线积分是路径无关的, 则可构造一个标量场 (scalar field), 使得这个标量场的梯度为这个矢量场. 对于我们现在正在分析的力场, 即我们可以有一个**势** (potential) U 满足

$$-\mathbf{F} = \nabla U. \quad (1.43)$$

这里额外的负号是因为惯例 (convention), ∇U 表示 U 的梯度, 在三维直角坐标系中有

$$\nabla U = \frac{dU}{dx} \hat{i} + \frac{dU}{dy} \hat{j} + \frac{dU}{dz} \hat{k}.$$

这样一来, 根据**微积分基本定理** (fundamental theorem of calculus) 就有


$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A),$$

使得路径无关满足. 路径无关的一个等价描述是, 对于一闭合路径有

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

即若起始点为同一位置, 则做功为零.

矢量分析中, 可以表述为一个标量场的梯度的矢量场是**保守的** (conservative). 因此, 对于可以表述为一个势的梯度的力场, 其中的力我们称其为**保守力** (conservative force). 对于不满足 (i) 积分路径无关; (ii) 封闭路径积分为零; (iii) 可以表述为势的梯度; 任意一条件的力场, 其中的力我们则称之为**非保守力**, 或涡旋力.

 **笔记** 矢量分析的一些补充: 保守力场, 或者更通常地说, 保守向量场, 其实也是无旋的 (curl-less), 即对于一保守场 F

$$\nabla \times F = 0.$$

这是因为标量场的梯度没用旋度 (梯度无旋):

$$\nabla \times \nabla U = 0.$$

非保守力又可称作涡旋力, 笔者个人的推测和**亥姆霍兹定理** (Helmholtz's theorem) 有关; 根据亥姆霍兹定理, 任何一个向量场都可以表示为一个保守 (旋度为零) 向量场和一个螺线 (散度为零的) 向量场的和. ■

有了上面关于保守力和势的论述之后, 我们便可以更好的理解为什么势能叫做势能了, 因为势能的变化也是路径无关的. 我们来看几个例子:

例子 1.4 近地重力势能 考虑一质量为 m 的质点, 在地表附近, 其受到的力为 mg , 若其高度变化了 Δh , 则重力做功, 也等价于其重力势能的变化是,

$$\Delta U = mg\Delta h.$$

不难看出, 若起始点固定的情况下, 做功或重力势能的变化只和起始点的高度差 Δh 相关, 而和路径无关. ■

例子 1.5 更通常的重力势能 牛顿万有引力定律指出, 两个质点之间的吸引力和它们的质量乘积成正比, 和他们间的距离平方成反比:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}. \quad (1.44)$$

其中 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ 是万有引力常数, m_1 和 m_2 分别是两个质点的质量, r 是两个质点之间的距离. 以质点 1 所在的位置为原点建立坐标系, 当两质点距离由 r_i 变为 r_f 时, 引力做功或重力势能的变化则是

$$\begin{aligned} \Delta U &= - \int_{r_i}^{r_f} \frac{Gm_1m_2}{r^2} dr \\ &= \frac{Gm_1m_2}{r} \Big|_{r_i}^{r_f} \\ &= \frac{Gm_1m_2}{r_f} - \frac{Gm_1m_2}{r_i}. \end{aligned}$$

显然做功或重力势能的变化还是路径无关的. 将重力势能定义为

$$U = \frac{Gm_1m_2}{r}. \quad (1.45)$$

则根据定义, 当两质点距离无限时, 重力势能为零 (即根据前面设定, 质点 1 在原点, 质点 2 在无穷远处, $r \rightarrow \infty \Rightarrow U \rightarrow 0$). ■

例子 1.6 弹簧的弹性势能 考虑一理想弹簧, 即其应力和应变成线性关系, 符合**胡克定律** (Hooke's law):

$$F = -kx. \quad (1.46)$$

这里 F 是弹簧的应力, k 是弹簧的弹性系数, x 是弹簧的长度变化. 规定弹簧在平衡位置时弹性势能为零, 则其长

度变化为 x 时, 做功或势能的变化是

$$\begin{aligned}\Delta U &= \int_0^x -kx' dx' \\ &= \left. \frac{1}{2} kx'^2 \right|_0^x \\ &= \frac{1}{2} kx^2.\end{aligned}$$

和之前一样, 上式也是路径无关的. ■

注 最后一个例子中, 值得注意的是突然出现了 x' . 很多初学者对于积分时, 积分对象突然变成带撇感到不理解 (或有时对时间积分, t 会替换成 τ). 为了理解这一标记, 首先要知道 **占位符/虚变量** (placeholder/dummy variable) 这个概念.

简单的例子, 比如 $\sum_{n=0}^n n$, 我们当然可以很自然地理解为 $0+1+2+\dots+n$, 但是这样一来, 式子中出现了两种 n , 一个 n 只是占位符, 之后会被具体数字替代, 而另一个 n 则是具体替代的最后一个数字, 虽然理解上不存在太大问题, 但是这样书写非常不严谨, 因而 $\sum_{n=0}^N n$ 这样的形式会更清晰.

类似的, 积分时, 有的时候积分对象和积分的上下限字母重复了, 加撇就是将二者区分, 避免混淆. ■

那么, 给定一力场, 如何更加一般地判断这个力是否为保守力, 或其做功是否路径无关呢? 根据前面论述, 我们只需要验证 $\nabla \times \mathbf{F}$ 是否为零即可, 因为保守力可以写作势的梯度, 它的旋度为零.

1.6.4 动能定理与机械能守恒定律

考虑一个质点, 初始状态为静止, 之后有且仅有一个恒定的力 \mathbf{F} 作用在其之上, 质点受力经过了一段距离 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$. 这个力做功为

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} \\ &= m\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{r} \\ &= m \frac{1}{2} |\mathbf{v}_f|^2.\end{aligned}$$

上式第一行到第二行利用了牛顿第二定律, 第二行到第三行利用了匀加速时加速度, 速度和位矢之间的关系(1.). 更一般的, 当力不恒定时, 我们可以从牛顿第二定律出发

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F},$$

两边同时点乘 $d\mathbf{r}/dt$,

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ m d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\end{aligned}$$

因为 $d(\mathbf{v}^2) = 2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$,

$$d\left(\frac{1}{2} m\mathbf{v}^2\right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.47)$$

上式可以这么理解: 力作用在质点上, 使质点加速获得速度; 力作用经过一段距离, 便是做了功, 1.6.2节中提到过, 对于物体做功, 物体便获得能量, 在这个情况下, 物体获得的能量显然是动能; 因此, 等式右边是做功的无穷小量, 左边即这部分功使得质点获得动能的无穷小量. 之前我们还没有正式地定义动能, 这样一来, 我们也还原出当质点速度为 \mathbf{v} 时动能的形式, 即 $T = m\mathbf{v}^2/2$. 式(6.)叫做质点的**动能定理** (kinetic energy theorem).

对式(6.)进行积分

$$\frac{1}{2} m\mathbf{v}_f^2 - \frac{1}{2} m\mathbf{v}_i^2 = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

若 \mathbf{F} 是保守力, 则存在势能 V 使得 $\mathbf{F} = -\nabla V$, 那么上式对于保守力则有



$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = V(\mathbf{r}_i) - V(\mathbf{r}_f).$$

移项可得

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + V(\mathbf{r}_f) = \frac{1}{2}mv_i^2 + V(\mathbf{r}_i), \quad (1.48)$$

即在保守力的作用下, 质点的动能与势能之和, 也就是机械能守恒.

一个违反机械能守恒的例子, 摩擦力的方向总是和质点运动方向相反, 所以始终作负功, 将能量从质点耗散到周围环境中, 类似于这样的力称作**耗散力** (dissipative force). 尽管机械能被损耗了, 但是耗散的能量是以热的形式散溢, 热也是能量的一种形式, 因此总的能量还是守恒的.

 **笔记** 一点剧透: 完整的能量守恒定律其实源于**时间平移对称** (temporal translation symmetry, TTS), 这将在第二部分理论力学的**诺特定理** (Noether's theorem) 中讨论. 

1.7 动量

历史上动量被提出是为了研究碰撞过程中的守恒量. 一开始人们发现, 碰撞过程中, 系统的各质点 ($m\mathbf{v}$) 或是 ($m\mathbf{v}^2$) 之和都似乎守恒; 然后更细致的观测发现, 只有一些情况下 ($m\mathbf{v}^2$) 是守恒的 (弹性碰撞), 而更通常的, ($m\mathbf{v}$) 才是碰撞中的守恒量; 因此就有了动量这一概念. 动量的定义如下:

定义 1.6

若一质点的质量是 m , 以 \mathbf{v} 的速度运动, 那么它所具有的**动量** (momentum) \mathbf{p} 定义为

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (1.49)$$

动量是一个矢量, 因为质量是一个标量, 动量的方向与速度的方向一致.


动量的单位为 $\text{kg}\cdot\text{m/s}$ (千克米每秒). ($[\text{kg}][\text{m/s}] = [\text{kg}\cdot\text{m/s}]$) 

1.7.1 动量定理与动量守恒

对动量进行关于时间的求导

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (1.50)$$


这是牛顿第二定律的等价描述, 叫做动量定理; 事实上, 牛顿最早也是用上式来表述牛顿第二定律的.

 **笔记** 一点剧透: 式(1.50)其实只在经典的低速的情况下成立, 在狭义相对论中, 考虑相对论效应, 质量会随速度增加而变大,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.51)$$

上式中, c 是真空中的光速, m_0 是物体相对参考系静止时的质量, 而当与参考系相对速率为 v 时, 测得该物体的质量为 m , 叫做**相对论性质量** (relativistic mass). 这样一来质量 m 不再是一常数, 而可以视作一个关于速率 v 的方程, 对动量求导则不会像经典情景下那么简单.

观察相对性质量的表达式, 我们可以发现, 当速率远小于真空光速时, 即 $v \ll c \rightarrow (v/c) \ll 1$, 则质量几乎是等于静止质量的. 在研究狭义相对论时, 我们经常会这么操作, 来观察当速度足够低时, 公式能否还原为经典的形式.

(注: 当 (v/c) 项不能简单地视作趋向零时, 我们也可以试其为变量进行**泰勒展开** (Taylor expansion), 例如: $(1 - (v/c)^2)^{1/2} = 1 + (v/c)^2/2 + 3(v/c)^4/8 + \dots$; 另注: 或许有机会我们也会接触一些量子力学, 我们也要求满足量子力学的公式在趋于经典情况时还原为经典的模式). 

式(1.50)也可写作



$$d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt,$$

再对其积分可得,

$$\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt. \quad (1.52)$$

上式可以理解为, 动量前后的变化, 等于力对时间的积分. 力对于时间的积分定义为**冲量** (impulse), 记作 I , 和动量的量纲一致. 冲量与动量变化的关系, 和功与能量变化的关系非常相似. 那么这样一来, 我们就可以回收之前抛出的一个问题, 功可以理解为力在空间上的累计, 而力在时间上的累计是冲量.

当式(1.52)中的力 \mathbf{F} 始终为零时, 则有前后的动量相等, 即 $\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = 0$. 这样一来, 我们可以总结, 当自由质点不受外力作用时, 它的动量保持不变, 这便是**动量守恒定律** (conservation of momentum).

 **笔记** 一点剧透: 正如能量守恒源于时间平移对称, 动量守恒本质上源于**空间平移对称** (spatial translation symmetry), 或者说是空间的均匀性. 

1.8 动量矩



这一节我们将通过两种途径来了解**动量矩** (moment of momentum). 第一种途径, 我们从动量出发, 通过“矩”这个概念来引出动量矩, 中间会第一次正式用到矢量积 (叉乘), 详细可以参见附录B; 第二种途径我们从圆周运动中的运动学和动力学出发, 引入角速度等概念, 这种途径下, 可以更好的看出即将新引出的一些物理量与之前接触到的物理量的一些“平行关系”.

1.8.1 由动量出发

1.8.1.1 力矩和动量矩

力矩 (moment of force) 这个概念相信大家都不陌生, 在初高中研究杠杆问题的时候就有接触. 在这里, 我们更加正式的重申一下这个概念.

矩 (moment) 通常通过一个固定参考点 (或一轴线) 和另一点上的一个物理量来定义. 一般来讲, 参考点和我们所关注的物理量所在点距离 (或物理量所在的点至轴线的垂直距离) 不为零, 则可用一位矢 \mathbf{r} 来表述他们的相对位置, 那么这个物理量的矩便通常用这个位矢和它本身的某种乘积定义.

 **笔记** 一些题外话: 数学和统计上的矩, 比如期望值 (expectation), 方差 (variance), 和偏度 (skewness), 其实是源于物理上矩的概念. 

定义 1.7 (力矩)

根据上文关于矩的描述, 自然的, 若有一力 \mathbf{F} , 其作用的点相对一参考的点 (或至轴线的垂直距离) 位矢为 \mathbf{r} , 则二者的矢量积定义为力矩

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1.53)$$

根据矢量积的性质, 该力矩的模是

$$M = rF \sin \theta. \quad (1.54)$$

上式中 θ 是 \mathbf{r} 与 \mathbf{F} 的夹角. 力矩 \mathbf{M} 的方向则可通过 \mathbf{r} 和 \mathbf{F} 的方向加之右手定则判断, 具体可以参见附录B.

动量矩 M 的单位为 $\text{N}\cdot\text{m}$ (牛米). ($[\text{m}][\text{N}] = [\text{N}\cdot\text{m}] = [\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2]$)

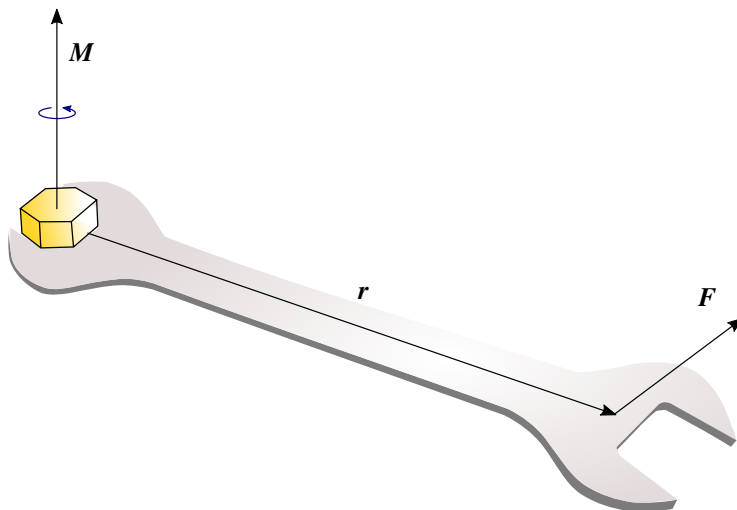


图 1.8: 力矩.

在直角坐标系里, 力矩的分量形式有:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \underbrace{(yF_z - zF_y)}_{J_x} \hat{i} + \underbrace{(zF_x - xF_z)}_{J_y} \hat{j} + \underbrace{(xF_y - yF_x)}_{J_z} \hat{k} \\ &:= J_x + J_y + J_z. \end{aligned}$$

既然力关于某一参考点或某一轴线具有力矩, 动量关于某一参考点或某一轴线也具有**动量矩** (moment of momentum).

定义 1.8 (动量矩)

类似力矩, 对于一动量 p , 若其所在的点相对参考点的位矢 (或相对轴线垂直距离的位矢) 为 r , 动量矩 J 定义如下

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (1.55)$$

动量矩更通常叫做**角动量** (angular momentum), 在本教材中, 不对二者做区分.

角动量 J 的单位为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ (千克米平方每秒). ($[\text{m}][\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}] = [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$)

笔记 一些超纲: **赝矢量** (pseudo-vector). 虽然力矩和动量矩看似与一般矢量无异, 但是在一些情况下, 这样的矢量和“一般的”矢量变换的方式不同.

考虑两个“一般的”矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} , 以及它们矢量积的结果 $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. 物理上, 有时我们会考虑一种变换叫做**反演变换** (inversion), 空间反演通俗来讲可以理解成镜像, 在三维直角坐标系中, 即 $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. 不难看出, 在空间反演变换下, “一般的”矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 变化如下

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \mapsto \mathbf{a}' = (-a_x) \hat{i} + (-a_y) \hat{j} + (-a_z) \hat{k} = -\mathbf{a} \\ \mathbf{b} &= b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k} \mapsto \mathbf{b}' = (-b_x) \hat{i} + (-b_y) \hat{j} + (-b_z) \hat{k} = -\mathbf{b}. \end{aligned}$$

而矢量积的结果则在空间反演变换下表现得不同

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \mapsto -\mathbf{a} \times -\mathbf{b} = \mathbf{c}.$$

因此, 为了区分, 像“一般的”矢量一样在空间反演下变为自身的逆的矢量就称作**矢量**或**极矢量** (polar vector), 而类似矢量积 (或是 < 极 > 矢量的旋度) 这样在空间反演不变的矢量就称作**赝矢量**或**轴矢量** (axial vector).

当然, 目前还不需要这么细分这两类向量, 只要有类似力矩或动量矩是一类特殊的向量的印象即可. ■

我们之前发现力可以使动量发生变化, 那么力矩和动量矩是不是又类似的关系呢, 我们将在下一小节中展开.

1.8.1.2 动量矩定理与动量矩守恒

对动量矩关于时间求导


$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{J} &= \frac{d}{dt} [m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})] \\ &= m(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{M}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

得到的结果是力矩, 这个结果和式(1.50)非常相似, 证实了之前的猜想, 力对于动量的关系和力矩对于动量矩的关系是几乎一致的, 可以视作是牛顿第二定律的推广. 这个关系叫做**动量矩定律**, 也叫**角动量定理** (angular momentum theorem). 对上式进行积分可得,

$$\mathbf{J}_f - \mathbf{J}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{M} dt. \quad (1.57)$$

上式可以理解为, 动量矩的变化等于力矩关于时间的积分. 等式右边可以称作**冲量矩** (moment of impulse) 或 **角冲量** (angular impulse).

当 \mathbf{M} 始终为零, 式(1.57)右边为零, 即 $\mathbf{J}_f - \mathbf{J}_i = 0$. 所以当质点不受力, 因而关于任意点或任意轴线不存在力矩时, 质点的动量矩不变, 这便是**动量矩守恒定律**, 或**角动量守恒定律** (conservation of angular momentum).

 **笔记** 一点剧透: 动量矩守恒也是源于一种对称性-空间的旋转对称, 或者说是空间的各向同性. ■

1.8.2 由角速度出发 *

考虑一质点在固定的圆上做圆周运动, 因为质点和圆心的距离始终为半径, 质点的位移仅用角度的变化便可描述. 类似位移的概念, 这里我们定义**角位移** (angular displacement), 简称角移.

定义 1.9

角移可以描述一质点绕某一轴所转过的角度, 二维情况下建立极坐标系, 若质点从点 A 转到点 B , 若两点的角坐标分别为 θ_A 和 θ_B , 则质点经过的角位移 $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A$.

角移的单位是 rad (radian, 弧度, 可以视作**无量纲** <unitless>).

类似与位移之于速度和加速度, 有了角移便可定义**角速度** (angular velocity), 继而是**角加速度** (angular acceleration).

定义 1.10

角移的时间变化率是角速度, 有时也叫**角频率** (angular frequency), 记作 ω .

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}, \quad (1.58)$$

角速度 ω 的单位为 rad/s (弧度每秒), 因为弧度可以视作无量纲, 所以角速度单位也可视作 Hz (赫兹 <Hertz>). ($[\text{rad}]/[\text{s}] = [\text{rad/s}] \sim [\text{s}^{-1}] = [\text{Hz}]$)

注 在这一小节里, 为了简单起见, 我们只关注这些物理量的大小, 例如角速度, 尽管是矢量, 但是一般来讲角移不视作矢量, 因此从角移出发只能定义角速度的大小而不是完整的矢量. 当然, 角速度矢量还是可以通过

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{r^2}. \quad (1.59)$$

来定义, 这里 \mathbf{r} 是质点关于旋转轴的位矢, \mathbf{v} 是质点的速度. ω 大小利用矢量积的性质是

$$\omega = \frac{rv \sin \theta}{r^2} = \frac{v \sin \theta}{r}, \quad (1.60)$$

这里 θ 是 \mathbf{r} 与 \mathbf{v} 的夹角; ω 方向则可通过右手定则来判断. ■

定义 1.11

角加速度是角速度的时间变化率, 也是角移关于时间的二次导, 一般记作 α .

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad (1.61)$$

角加速度 α 的单位为 rad/s^2 (弧度每秒平方). ($[\text{rad/s}]/[\text{s}] = [\text{rad/s}^2] \sim [\text{s}^{-2}]$) ♣

和直线运动类似的, 当角加速度恒定时, 以下几个关系式会很实用.

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2, \quad (1.62)$$

$$\theta_f - \theta_i = \frac{1}{2} (\omega_i + \omega_f) t, \quad (1.63)$$

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t, \quad (1.64)$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i). \quad (1.65)$$

若要将以上几个新的物理量和直线运动中的位移, 速度, 和加速度联系起来也非常容易. 就如弧度和弧长的关系, 角移 $\Delta\theta$ 和位移 Δr 的关系自然是

$$\Delta r = \Delta\theta r, \quad (1.66)$$

其中 r 是质点与旋转轴的垂直距离. 类似的

$$v = \omega r, \quad (1.67)$$

$$a = \alpha r. \quad (1.68)$$

现在我们有了解决转动问题的运动学工具, 接下来进入动力学. 考虑转动的问题时, 我们现在已经有了类似于“位移”, “速度”, 和“加速度”的概念, 即角移, 角速度, 和角加速度. 我们还需要一个类似于“质量”的概念. 质量是衡量惯性的量, 是物体保持原有运动状态的特性, 对于转动的情况, 我们便定义**转动惯量** (rotational inertia) 如下:

定义 1.12

对于一绕轴旋转的质点, 若其质量为 m , 和旋转轴的垂直距离为 r , 则其转动惯量为

$$I = mr^2. \quad (1.69)$$

转动惯量 I 的单位为 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ (千克米平方). ($[\text{kg}]\cdot[\text{m}^2] = [\text{kg}\cdot\text{m}^2]$) ♣

这样一来, 非常自然地, 动能就是 $\frac{1}{2}$ 的“质量”乘以“速度”平方的形式了,

$$\boxed{T} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{2}I\omega^2}, \quad (1.70)$$

然后是一个类似于“力”的概念, 类推自牛顿第二定律, “力”等于“质量”乘以“加速度”,

$$F = ma$$

$$Fr = (mr^2) \frac{a}{r}$$

$$\tau = I\alpha, \quad (1.71)$$

第二行至第三行, 我们定义了**扭矩** (torque)

$$\tau := rF. \quad (1.72)$$

注 事实上, 扭矩和力矩可以看作是同一个概念, 扭矩矢量形式的定义也与力矩的一致, 之所以有不一样的称谓, 主要是因为力矩主要强调处于静力学的情况, 例如杠杆平衡, 而扭矩强调动力学, 如式(1.71)所展现的, 扭矩作用的效果便是使一质点关于某一旋转轴加速旋转. ■

再来是类似“动量”的概念, 仿照着 $p = mv$, 即动量等于质量乘以速度, 我们推测角动量 L 应该等于转动惯量 I 乘以角速度 ω ,

$$L = I\omega. \quad (1.73)$$

事实上, 上式也确实应该如此, 从上式出发, 至少在大小上可以还原式(1.55)-动量矩的定义.

仿照着动量定理 $F = \frac{dp}{dt}$, 则有

$$\tau = \frac{dL}{dt}. \quad (1.74)$$

上式在前一小节已经证明, 即动量矩定理, 这里不再重复.

1.9 有心力

这一节我们来介绍一类特殊的保守力 - 有心力. 首先定义有心力.

定义 1.13

一般来讲, 当一质点所受的力的作用线始终通过某一个定点, 我们便说这个质点所受的力是**有心力** (central force), 这个定点则被称作**力心**.

有心力有以下性质:

- 在有心力作用下, 质点关于力心的动量矩守恒.

证明 因为有心力 \mathbf{F} 与质点和力心连线的位矢 \mathbf{r} 共线, 根据矢量积的特性,

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0,$$

则有动量矩 \mathbf{J} 守恒. □

- 在有心力的作用下, 质点的运动始终处于同一平面.

证明 根据前面的论述, 动量矩 \mathbf{J} 是一个常矢量, 那么其指向不变, 根据矢量积的特性, 位矢 \mathbf{r} 是始终垂直于 \mathbf{J} , 则有质点始终处于一个垂直于动量矩 \mathbf{J} 的平面内运动. □

- 大小只与 r 相关的有心力是保守力.

证明 若有心力的大小只与 r 相关 (通常也确实如此), 即 $\mathbf{F} = F(r)$, 加之有心力始终与 \mathbf{r} 共线, 若质点从 \mathbf{r}_i 运动至 \mathbf{r}_f , 根据功的定义则有

$$W = \int_{r_i}^{r_f} F(r) dr,$$

这样一来, 这个情况实际上是个一维的问题, 即质点能量变化仅和 r 一个标量相关. 上面这个积分显然是路径不相关的, 自然便有有心力一般为保守力. □

有心力 \mathbf{F} 通常之和 r 相关, 其方向又和 \mathbf{r} 共线, 加之质点运动被限制在一个二维平面, 因此建立平面极坐标系非常自然; 考虑一有心力 $\mathbf{F}(r)$, 根据极坐标系表达下的加速度(1.19), 不难看出有心力的径向和周向分量可以表述为

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r = F(r), \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta = 0. \end{cases} \quad (1.75)$$

上方程组的第二式还是根据式(1.19)写作

$$m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0.$$

显然有

$$r^2 \dot{\theta} = h,$$

这里 h 是一个常数, 将上式两边同乘质点质量 m 可以得到

$$mr^2 \dot{\theta} = mh.$$

来看一下上式的物理意义: 等式左边 $mr\dot{\theta}$ 是动量周向分量, 又因为径向分量的方向与 \mathbf{r} 垂直, 因此径向分量关于原点的动量矩为零, 所以等式左边便是质点关于原点的动量矩; 等式右边 m 是质量, 不考虑质量发生变化的情况, h 又是一常数, 因此等式右边守恒; 这样一来, 我们再次验证了, 在有心力的情况下, 动量矩守恒.

数学上来看, 现在这个问题其实是两个耦合在一起的常微分方程, 只需两个线性无关的含 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 及它们导数的关系式, 加之合适的初始条件便可求解. 因此很多时候, 为了方便起见, 我们通常将式(1.75)的第二个等式换做更简洁的形式,

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r), \\ r^2 \dot{\theta} = h. \end{cases} \quad (1.76)$$

同样的, 式(1.82)的第一个等式还可以被替换, 根据机械能守恒, 我们有

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E.$$

这里 E 是质点的总能量, 是一个常数, $V(r) = -\nabla \mathbf{F}$ 是因有心力而存在的势能.

1.9.1 比耐公式

上面的情况中, 我们可以从微分方程组加以适当的初始条件出发, 解出 $r(t)$ 与 $\theta(t)$. 但是有时解出这样的显 (explicit) 函数是很麻烦或是没有必要的, 我们只能或者只需要将 r 和 θ 表示为 t 的隐 (implicit) 函数. 以此为目的, 我们可以尝试将式(1.82)中的 t 消去, 再积分得到 r 与 θ 的关系式.

首先, 为了计算方便, 将 r 进行换元

$$u := \frac{1}{r}.$$



笔记 这个操作还是比较常见的, 在量子力学中, 比如在研究氢原子波函数的时候, 也会做类似得替换, 同时 u 这个字母的选取也是一种约定. ■

换元后, 式(1.82)的第二个等式变为

$$\dot{\theta} = hu^2.$$

$\dot{\theta}$ 可以直接代入式(1.82)的第一个等式, 然后我们来看第一个等式中的 \ddot{r} , 先计算 \dot{r}

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{d\theta}{dt} \\ &= \left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) \dot{\theta} \\ &= \left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) \dot{\theta} = -h \frac{du}{d\theta}.\end{aligned}$$

然后再次求导

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-h \frac{du}{d\theta} \right) \\ &= \frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \left(-h \frac{du}{d\theta} \right) \\ &= \frac{d}{d\theta} \left(-h \frac{du}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} \\ &= -h \frac{d^2 u}{d\theta^2} \dot{\theta} \\ &= -h \frac{d^2 u}{d\theta^2} (hu^2) = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}.\end{aligned}$$

这样, 将 \ddot{r} 和 $\dot{\theta}$ 同时代入式(1.82)的第一个等式便可得到

$$\begin{aligned}m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F(r) \\ m\left(-h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - rh^2 u^4\right) &= F(r) \\ m\left(-h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - h^2 u^3\right) &= F(r) \\ \boxed{h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{F(r)}{m}.} &\quad (1.77)\end{aligned}$$


这个公式叫做**比耐公式** (Binet equation), 利用这个公式, 可以在已知有心力 $F(r)$ 的情况下求轨道方程, 也可以反过来, 在知道轨道方程的情况下, 求 $F(r)$ 的具体形式.

例子 1.7 万有引力*

考虑某行星运动, 根据牛顿万有引力, 只考虑太阳和该行星间的作用力, 有

$$F = -\frac{Gm_{\odot}m}{r^2} = -\frac{k^2 m}{r^2} = -mk^2 u^2. \quad (1.78)$$

上式中, G 是万有引力常数, m_{\odot} 表示太阳的质量, m 是我们关注的行星的质量; 在第三个等号, 因为 G 和 m_{\odot} 都是常数, 我们不妨令 $k^2 := Gm_{\odot}$.

 **笔记** 一些题外话: 用 \odot 符号表示太阳源于占星学. 再比如, 地球用 \oplus 符号来表示, 这一套符号也常在天文学中被使用. ■

将万有引力公式代入比耐公式,

$$h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = k^2 u^2$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{k^2}{h^2}.$$

现在这个微分方程是非其次的, 为了简化计算, 我们令 $u = \xi + k^2/h^2$, 便有

$$\frac{d^2 \xi}{d\theta^2} + \xi = 0.$$

这个微分方程有通解

$$\xi = A \cos(\theta - \theta_0),$$

于是

$$u = \xi + \frac{k^2}{h^2} = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{k^2}{h^2},$$

$$r = \frac{1}{u} = \frac{h^2/k^2}{1 + A [\cos(\theta - \theta_0)] h^2/k^2}.$$

其中 A 和 θ_0 是积分常数. 因为极坐标在行星运动所在的平面建立是非常任意的, 因此我们可以将其旋转, 使得 $\theta_0 = 0$; 或者将这个过程视作, 因为动量矩守恒/系统具有旋转对称性, 我们可以进行 $\theta \mapsto \theta + \theta_0$ 这样一个变换.

$$r = \frac{h^2/k^2}{1 + (Ah^2/k^2) \cos \theta}. \quad (1.79)$$

将上式与极坐标下的, 焦点在原点上的圆锥曲线 (conic section) 进行比较,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}. \quad (1.80)$$

可以看出

$$p = \frac{h^2}{k^2}, \quad e = \frac{Ah^2}{k^2} = Ap. \quad (1.81)$$

这里 p 是正通径 (又作正焦弦, latus rectum) 的一半, 即过焦点且平行于准线 (directrix) 的弦的一半; e 是偏心率 (eccentricity); 当 $e = 0$ 时, 轨道为圆形; 当 $0 < e < 1$ 时, 轨道为椭圆; 当 $e = 1$ 时, 轨道为抛物线; 当 $e > 1$ 时, 轨道为双曲线的一支.

若非从比耐公式出发, 我们也可以从如下的微分方程组着手

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r) = E, \\ r^2 \dot{\theta} = h. \end{cases} \quad (1.82)$$

其中, 因为是万有引力, $V(r) = \frac{k^2 m}{r}$. 这样一来的结论如下, 留给读者自行验证

$$r = \frac{h^2/k^2}{1 + \sqrt{1 - 2h^2 E/k^4 m} [\cos(\theta - \theta_0)]}. \quad (1.83)$$

用这种方法虽然稍复杂, 但是物理意义会更丰富, 因为其包含了总能量 E . 再次与标准圆锥曲线方程比较可得

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E}{m} \left(\frac{h}{k^2} \right)^2}.$$

这样便有: $E < 0 \rightarrow e < 1$, 轨道为椭圆或圆; $E = 0 \rightarrow e = 1$, 轨道为抛物线; $E > 0 \rightarrow e > 1$, 轨道为双曲线. 这里总能量可以为负是因为在引力的情况下, 势能是负的, 只有在无穷远处势能定义为零.

顺带引出一下剩余速度 (residual velocity) 这个概念, 即只考虑二体的引力问题, 当我们关注的物体抵达距离另一物体无限距离时“残余”的速度; 当总能量 $E < 0$, 这样若是我们关注的物体抵达无穷远处, 势能为零, 动能应该为负, 显然这是不可能的, 因此 $E < 0$ 时, 它被困于闭合的椭圆或是圆形轨道里; 当总能量 $E = 0$, 在无穷远处, 势能为零, 动能也恰好为零, 这是一个临界情况 (critical condition), 即物体抵达无穷远处恰好为了克服引力损失所有动能; 当总能量 $E > 0$, 显然物体抵达无穷远处, 还有“残余”的动能, 便还具有一定速度, 这个速度便是剩余速度了.

例子 1.8 开普勒定律 *

开普勒在他前辈第谷·布拉赫大量观测资料的基础上, 得出行星运动的三条定律:

定律/定理 1.4 (开普勒第一定律)

行星绕太阳作椭圆运动, 太阳位于椭圆的一个焦点上.

证明 略; 详见上一例子. □

定律/定理 1.5 (开普勒第二定律)

行星和太阳之间的连线, 在相等时间内所扫过的面积相等.

证明 设行星与太阳连线扫过的面积为 A , 若单位时间扫过的面积一定, 则应有 $dA/dt = \text{const.}$

考虑行星运动时, 经过时间的无穷小量 dt , 行星前后位置关于太阳的夹角相对的变化了 $d\theta$, 因为前后位置无限接近, 扫过的面积 dA 可以近似为一个扇形 (或三角形) 的面积

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta.$$

或者

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}.$$

两边同乘行星的质量 m

$$\frac{dAm}{dt} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}J.$$

根据前面的论述, 行星运动的受到得是有心力, 那么行星关于太阳即力心所在的动量矩 J 守恒, 便有 dA/dt 守恒, 即单位时间扫过的面积一定.

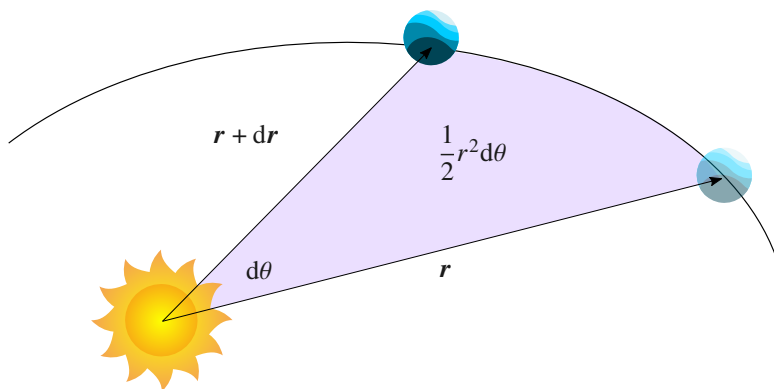


图 1.9: 开普勒第二定律.

定律/定理 1.6 (开普勒第三定律)

行星公转周期的平方和轨道半长轴的立方成正比.

证明 从标准圆锥曲线方程出发

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

换元 $u = 1/r$,

$$u = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \theta.$$

将上式代入比耐公式, 化简可得

$$F = -\frac{mh^2u^2}{p} = -\frac{h^2}{p} \frac{m}{r^2}.$$

在比耐公式的推导中, 我们有 $r^2\dot{\theta} = h$, 又在开普勒第二定律的证明中, 我们有 $2\dot{A} = r^2\dot{\theta}$, 因此

$$2\dot{A} = h.$$

将上式积分

$$2A = h(t - t_0).$$

当行星运行一个周期 T , 它和太阳连线所扫过的面积便是椭圆的面积 $A = \pi ab$, 这里 a 和 b 分别是半长轴 (semi-major axis) 和半短轴 (semi-minor axis), 这样一来

$$2\pi ab = hT.$$

稍加变形可得

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 b^2}{h^2 a}.$$

根据椭圆的性质, $b^2/a = p$,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 p}{h^2}.$$

在上一个例子里, 我们发现 $p = h^2/k^2$, 因此

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 k^2.$$

根据之前的定义 $k^2 := Gm_\odot$, 对于一特定恒星-行星系统, 等式右边为常数, 因此有行星公转周期的平方和轨道半长轴的立方成正比. □

1.10 小结

1. 运动的描述

- 位矢

$$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$

- 速度

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}.$$

- 加速度

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

- 匀加速时各变量关系

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t,$$

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2,$$

$$|\mathbf{v}_f|^2 = |\mathbf{v}_i|^2 + 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i),$$

$$\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i = \left(\frac{\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_f}{2} \right) t.$$

- 极坐标系

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r\hat{r} + 0\hat{\theta}, \\ \mathbf{v} &= \left(\frac{d}{dt}r\right)\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} := v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}, \\ \mathbf{a} &= \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}\hat{r} + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}\hat{\theta} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}\hat{r} + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})}\hat{\theta} := a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}.\end{aligned}$$

- 切向与法相加速度

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} := \mathbf{a}_t\hat{t} + \mathbf{a}_n\hat{n}.$$

2. 牛顿运动定律

- 牛顿第一定律

$$\sum \mathbf{F} = 0 \leftrightarrow v = \text{const.}$$

- 牛顿第二定律

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

- 牛顿第三定律

$$\mathbf{F}_{A \text{ to } B} = -\mathbf{F}_{B \text{ to } A}.$$

3. 质点运动微分方程

- 略.

4. 相对性原理

- 伽利略变换下, 两坐标系速度与加速度的关系

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u},$$

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}.$$

5. 非惯性参考系

- 非惯性系下的假象力

$$\mathbf{F} + (-m\mathbf{a}) = \mathbf{F}',$$

6. 功与能

- 功

$$W = \int_A^B \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F}(r) \cdot \cos(\theta) |d\mathbf{r}|.$$

- 功率

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

- 势能与保守力

$$-\mathbf{F} = \nabla U.$$

- 保守力场判定

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0.$$

- 动能定理

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- 机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + V(r_f) = \frac{1}{2}mv_i^2 + V(r_i),$$

7. 动量

- 动量

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

- 动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}.$$

- 动量守恒

$$\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = 0.$$

8. 动量矩

- 力矩

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

- 动量矩

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

- 动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{J} = \mathbf{M}.$$

- 动量矩守恒

$$\mathbf{J}_f - \mathbf{J}_i = 0.$$

9. 有心力

- 略.