众筹标题

四则运算

> 万物伊始 天地初开

加法 (addition)

$1+1=2$, 好了, 这一节结束 (玩笑). 加法的运算, 九九加法表, 这里就不赘述.

我们首先考虑**整数** (integer), 记作 $\mathbb{Z}$, 当我们考虑一类数字或者一类符合某种性质的对象时, 我们称这一类对象组成的东西叫做**集合** (set), 集合中的东西便叫做**元素** (element).

- 不难发现, 从整数里取出两个元素, 例如 1 和 2 , 将他们相加, 得到的结果 $1+2=3$ 依旧是整数. 这样的性质叫做**封闭性**或者**闭包性** (closed, closure).
- 再考虑三个元素在加法下的运算. 三个元素的运算可以看作, 两个元素的运算结果与第三个元素再次运算, 还是不难发现, 任意从整数取出三个元素, 例如 1 , 2 和 3 , 有 $(1+2)+3=6=1+(2+3)$, 即前两个元素先进行运算和后两个元素先进行运算的结论时一致的. 这样的性质叫做**结合律** (assosiative).
- 整数里存在一个特殊的元素, 使得加法这个运算不对其他任何元素"产生效果", 这个特殊的元素是 0 , $0+n=n+0=n$, 这里 n 是任意整数, 我们可以这么标记: $n \in \mathbb{Z}$, 中间这个符号表示属于 (belong to). 这个特殊的元素叫做**单位元**或**幺元** (identity element) [1].
- 整数的加法中, 对于任何一个元素, 都能找到另一个元素, 使得它们运算结果为单位元- 0 , 比如 $1+(-1)=(-1)+1=0$, 我们便叫 (-1) 是 1 的**逆元** (inverse element).

一个集合, 再附加一个二元运算(像加法这样输入两个元素输出一个元素的运算), 并且拥有上述性质和元素的, 我们便把它叫做**群** (group), 整数和加法, 便是这样构成了一个群 $(\mathbb{Z},+)$.

好的,我们在学习加法的过程中顺便体验了以下群论. 要注意的是, 上文并没有强调**交换性** (commutative), 因为往后看我们会发现, 很多运算其实并不满足交换律, 满足交换律的群我们可以称它为**交换群**或**阿贝尔群** (Abelian group).

> 有人问一个小朋友, "3+4 等于几啊?" 小朋友说: "不知道, 但我知道 3+4 等于 4+3." 那人接着问: "为什么呀?" 答曰:"因为整数与整数加法构成了阿贝尔群."
> 这个笑话讽刺了某次法国一场幼儿园从抽象数学教起的实验, 不过最后实验的结果是以失败告终.

减法 (subtraction)

思路要打开, 减法可以看作是加法的逆运算; 又或者, 减去一个数, 可看作加上这个数字的逆元.

减法的一些性质:

- **反交换律** (anti-commutativity), 例如 $4-3=-(3-4)$, 交换两个元素的顺序会导致结果变为之前结果的逆.
- **非结合律** (non-associativity), 例如 $(6-3)-2 \neq 6-(3-2)$.

因为整数减法不满足结合律, 所以整数和减法不构成群, 只构成**拟群** (quasi-group), 字面上可以理解成, 像群, 但是不是群, 这里不做展开.

乘法 (multiplication)

还是九九乘法表, 结束了 (玩笑). 乘法可以视作是多个同样加法的标记, 例如: $2\times3=2+2+2=3+3=3\times2$.

来看看乘法的一些性质:

- 易见**封闭性**或者**闭包性**是满足的.
- 也不难看出乘法具有**结合律**.
- 乘法的**幺元**是 1 .
- 再**逆元**上似乎出了问题, 到目前为止, 我们讨论的都还是整数 $\mathbb{Z}$, 这个范围内, 似乎找不到逆元, 但是没有关系, 我们把范围扩大到非零**有理数** (rational number) [2] , 记作 $\{\mathbb{Q}/\{0\}\}$, 这样每一个元素 $n \in \{\mathbb{Q}/\{0\}\}$ 都有逆元 $\frac{1}{n}$. 将 0 剔除是因为它没有逆元, 我们应该知道 0 不能作为分母.

以上性质已经决定了非零有理数和乘法构成群, $(\mathbb{Q}/\{0\}\times)$. 乘法另外还有特性:

- 乘法与加法的混合运算, 会有**分配律** distributive property, 例如 $2\times(3+4)=2\times3+2\times4$.
- 任何数乘上 0 得到 0 , 0 可以称作乘法的**零元** (zero element), 零元没有逆.

除法 (division)

乘法和除法的关系类似加法和减法的关系. 除以零在大多数场景下是不被定义的.

幂运算和对数

> 轻清者上浮而为天 重浊者下凝而为地

幂运算 (exponentiation)

幂运算可以视作重复的乘法, 即 $a^n=\underbrace{a\times\ldots\times a}_{n}$, 这里 a 称为底数 (base) , n 称为指数 (exponent) [1] , a^n 读作 a 的 n 次幂，或 a 的 n 次方.

先考虑正整数次幂, 一些运算规律:

- $$\begin{aligned} a^m\times a^n &= \underbrace{a\times\ldots\times a}_{m}\times\underbrace{a\times\ldots\times a}_{n} \\ &= \underbrace{a\times\ldots\times a}_{n+m} \qquad = a^{n+m} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} a^m \div a^n &= \underbrace{a\times\ldots\times a}_{m} \div \underbrace{(a\times\ldots\times a)}_{n} \\ &= \underbrace{a\times\ldots\times a}_{n-m} \qquad = a^{n-m} \end{aligned}$$

再来考虑 0 次幂, 因为上述运算规律 $a^n \times a^0 = a^{n+0} = a^n$, 因此应该有 $a^0 = 1$; 要注意, 当底数为 0 时, 0^0 是不被定义的 [2].

- $a^0 = 1$对于非零的 a.

现在来看负整数为指数的幂, 参考第二条规律, 不难看出 a^{-n} 可以理解为除掉了 n 个 a, 因此有

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

因为在前面一节我们已经把我们研究的范围扩充到了所有有理数, 所以不妨来看看分数作为指数的情况. 考虑 $a^{\frac{1}{2}}$, 这里 a 是有理数, 令 $b := a^{\frac{1}{2}}$, 平方可得 $b^2 = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a$; 事实上我们知道, 要求 b 的话, 只需进行"开方"这个操作, 记作 $b = \sqrt{a}$, 因此有 $a^{\frac{1}{2}} = b = \sqrt{a}$; 然而, 这个操作其实是有一点"小问题"的.

> 这个"小问题"便是, 目前为止, 我们讨论的范围还限于有理数, 然而上述操作得到的 $\sqrt{a}$ 并不一定是有理数; 这个问题在历史上也困扰了人们很久.
>
> 起初人们认为数轴上所有的数都应该可以用整数之比 (也就是有理数) 来表示, 但有人发现, 例如边长为1的正方形, 其对角线的平方利用**勾股定律** (Pythagorean theorem - 毕达哥拉斯定律) 应该是 2, 找不出一个有理数使得其平方正好为 2.
>
> 然后为了解决问题, 提出问题的人就被解决掉了, 悲伤的故事.
>
> 现在, 平方正好为 2 的数字被记作了 $\sqrt{2}$, 它不是有理数的证明可以留作证明, 一点提示就是可以利用反证法, 首先假设它是一个有理数, 并可以表示为例如 $\frac{p}{q}$, 且 p 和 q 都是正整数, 然后证明这样的 $\frac{p}{q}$ 不可能存在.

解决这个"小问题"的方法, 是要再次扩展我们研究的范围; 这次我们将有理数, 即整数和分数, 以及数轴上"剩余"的那些不能表示成分数形式的无理数, 统称为**实数** (real number), 记作 $\mathbb{R}$. 这样一来我们便不必担忧开方的结果"掉到"范围外了, 上面的结论也不难推广为

- $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{b})^n$.

对数 (logarithm)

对数是幂运算的逆运算. 若 $y = a^x$, 定义对数运算为 $x = \log_a(y)$, a 叫做底数 (base) , y 叫做真数.

对数有以下运算规律:

- $\log_a(XY) = \log_a(X) + \log_a(Y)$. 证明如下:
  令 $x = \log_a(X),\ y = \log_a(Y)$, 根据对数定义则有 $a^x = X$, $a^y = Y$;
  $\log_a(XY) = \log_a(a^x \times a^y) = \log_a(a^{x+y}) = x + y = \log_a(X) + \log_a(Y)$.
- $\log_a\left(\frac{X}{Y}\right) = \log_a(X) - \log_a(Y)$. 证明和上一条类似.
- $\log_a(x^n) = n\log_a(x)$.
  由第一条规律可得 $\log_a(x^n) = \underbrace{\log_a(x)\times\ldots\times\log_a(x)}_{n} = n\log_a(x)$.
- $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.
  令 $\log_a(x) = t$, 则有 $x = a^t$, 对两边同时取以 b 为底数的对数, $\log_b(x) = \log_b(a^t) = t\log_b(a) = \log_a(x)\log_b(a)$, 整理便可得上述规律.

以上四条为最基本最常用得运算规律, 还有一些运算规律可以从上面几条推到而来, 证明留作练习.

- $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$.
- $a^{\log_a(x)} = \log_a(a^x) = x$.
- $x^{\log_a(y)} = y^{\log_a(x)}$.
- $\log_a(x) = \frac{1}{\log_x(a)}$.
- $\log_a(b)\log_b(x) = \log_a(x)$.

函数

> 天地之间 人居其一 连接天地 类于万物 象以形分 形以名别

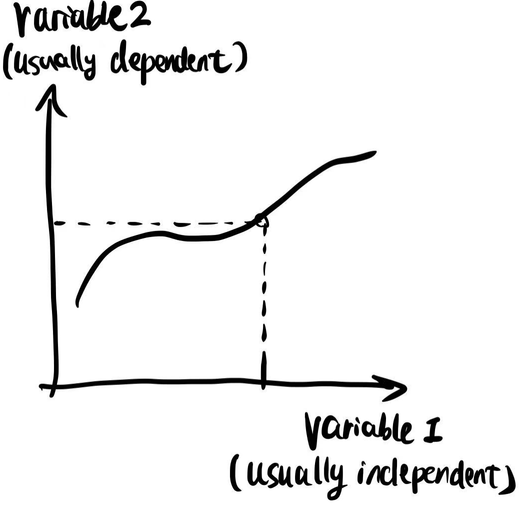
函数 (function)

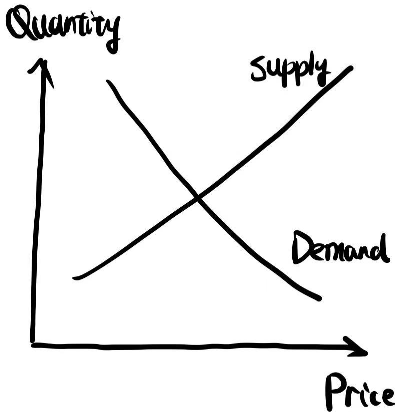
听到"function", 第一反应可能是"方程", 事实上函数才是 function, 方程或者等式应该叫做 equation. 不细想可能会觉得他们差别不大, 不过等式通常是来解未知的, 而函数通常是用来描述两个变量之间的关系.

非正式的, 初中阶段类似 $y = ax + b$ 形式的一次函数可能是大家接触到的比较早的一个函数的例子. 有时候也会有类似 $f(x) = ax + b$ 这种标记, 意为: 一个以 x 为变量的函数; 这种标记方便之处是可以很方便的标出当 x 等于某个值, 例如 42 时函数的取值, 即 $f(42) = 42a + b$. 另外 $y = ax + b$ 也可以写成 $y(x) = ax + b$, y 作为函数, 其变量为 x.

传统定义, 函数通常用来描述变化过程中两个变量的关系, 若有两个变量 x 和 y, 如果对于任意一个 x 都有一个唯一确定 (unique) 的 y 与其对应, 那么就说 x 是自变量 (independent variable), y 是因变量 (dependent variable). x 的取值范围称为函数的**定义域** (domain), 可能输出的 y 范围称为函数的**值域** (range).

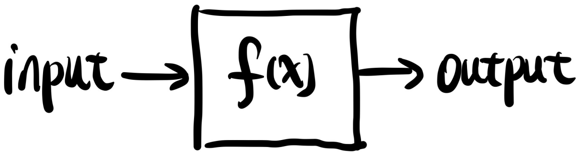
自然科学和社会科学通常会用类似下左图的形式来可视化函数, 横轴竖轴分别标记两个变量的取值范围, 通过函数图像, 便可以找到当一个变量取某个特定值时另一变量对应的值. 下右图给出了一个经济学中的例子





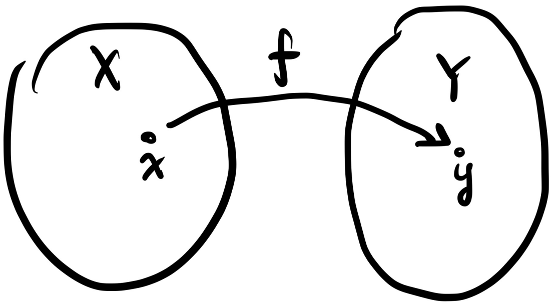
> 随着某商品的市场价格 (price) 增高, 生产者的生产意愿自然是增高的, 因为不考虑成本和其他因素变化的情况下 (Ceteris Paribus), 多生产的利润会更高, 因此供给曲线 (supply) 上扬, 反映出价格和供给量 (supply quantity) 的正相关; 另一方面, 消费者的消费意愿随着价格上涨自然是下降的, 于是需求曲线 (demand) 下压, 反映出价格和需求量 (demand quantity) 的负相关.
>
> 两条曲线分别对应着供给量和需求量关于价格的函数, 两函数的焦点反映了理想的自由市场下的最终成交价格和供需量 (因为在这个点达到了供需平衡 - equilibrium) , 焦点向下作竖直线与横轴的焦点便显示了最终成交价格, 焦点向左作水平线与竖轴的交点便显示了平衡点的供需量.

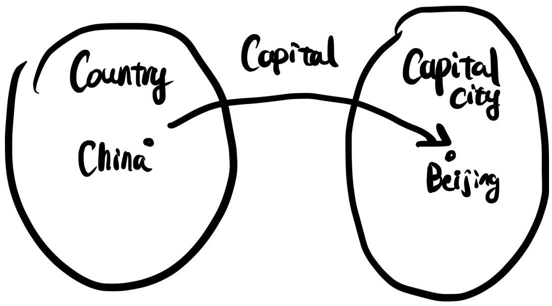
在工程和计算机科学等思维里, 函数更像下左图所示, 给定一个输入 (input), 函数如同一台机器, 在加工后给出一个输出 (output); 这台机器非常可靠, 同样的输入能够稳定输出同样结果. 下右图给了一个例子



> 假想有这样一个叫做"首都" (Captital) 的函数, 放入一个国家名便会稳定输出这个国家的首都, 数学上我们可以这么标记下右图的例子 $\text{Capital}(\text{China})\text{=Beijin}$.

函数的近现代定义和工科思维里的图景就很像, 考虑集合 X 和 Y, 且它们不是空的, 如果存在某种特定的对应关系 f, 使得对于 X 中任意一个元素 x, 在 Y 中都有唯一确定的元素 y 和 x 对应, 那么就称**映射** (mapping) [1] $f: A \to B$ 为从 X 到 Y 的一个函数, 记作 $y = f(x), x \in X$ 或者 $f(X) = \{y|f(x) = y, y \in Y\}$; 第一种记法强调元素的映射, 第二种记法强调整个集合的映射, X 在这里便是这个映射的定义域, $f(X)$ 是值域, Y 是这个映射的**陪域** (codomain, 也叫做上域, 到达域, 对应域), 大括号表示 X 被映射到的集合, 其元素 y 满足竖线后的条件, 即 y 是自 x 通过 f 这个映射得到, 并且 y 属于 Y. 这样定义的直观感受类似下左图, 之前"首都"函数便类似下右图





> Country这个集合里包含了很多国家, {中国, 美国, 日本, ...}; Capital city这个集合里包含了很多城市, {北京, 华盛顿, 东京, ...}; Capital这个函数便描述了Country中的元素和Capital city中的元素的对应关系.

函数(续)

> 無名, 天地之始; 有名, 萬物之母. 常無, 欲以觀其妙; 常有, 欲以觀其徼. - 苏辙 『老子解』

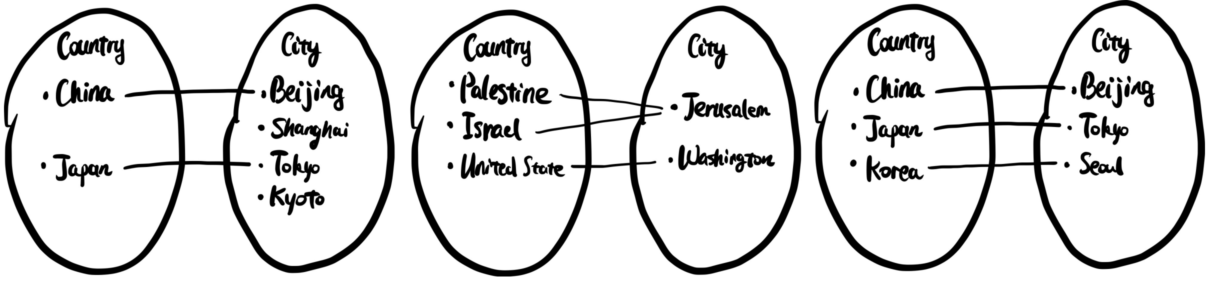
单射, 满射, 双射 (injection, surjection, bijection)

一个函数 $f: X \to Y$ 若满足, 如果 $a \neq b$ 则 $f(a) \neq f(b)$ 对于任何属于 X 的 a 和 b, 那么它便是**单射**的 (injection, one-to-one) [1].

一个函数 $f: X \to Y$, 若它的值域 (range) 和陪域 (codomain) 一致, 即对于任意 $y \in Y$, 都存在至少一个 $x \in X$ 满足 $f(x) = y$ [2] , 那么它便是**满射**的 (surjection, onto).

一个同时单射又满射的函数是**双射**的 (bijection, one-to-one correspondance).

还是以Captial这个函数为例子, 下面给出了单射, 满射, 双射三种情况分别的图示



> 左: 单射但不满射;
> 中: 满射但不单射;
> 右: 双射.

奇偶性 (parity \doge)

若一个函数满足 $f(-x)=-f(x)$, 即改变输入值 (自变量) 的正负号, 输出值 (因变量) 的正负号也改变, 这个函数便是**奇函数** (odd function). 图像上它是关于原点对称的.

若一个函数满足 $f(-x)=f(x)$, 即改变输入值 (自变量) 的正负号, 不影响输出值 (因变量) , 这个函数便是**偶函数** (even function). 图像上它是关于 y 轴对称的.

当然, 奇函数和偶函数事实上是很特殊的两类函数, 更多的函数既不是奇函数又不是偶函数.

一些运算规律:

- 奇函数 + 奇函数 = 偶函数
  证明: 假设存在两个奇函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 令 $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$, 即 $(f+g)(x)$ 这个函数是原本两函数之和. 根据奇函数的定义, $f(-x)=-f(x)$ 且 $g(-x)=-g(x)$, 将两式相加得 $f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)$, 即有 $(f+x)(-x)=-(f+g)(x)$, 可见 $(f+g)(x)$ 是偶函数.
- 偶函数 + 偶函数 = 偶函数
  本条及接下来的证明与上一条类似, 可以当作练习.
- 奇函数 ×/÷ 奇函数 = 偶函数
- 偶函数 ×/÷ 偶函数 = 偶函数
- 奇函数 ×/÷ 偶函数 = 奇函数
- 偶函数 ×/÷ 奇函数 = 奇函数

反函数 (inverse function)

浅浅地非专业地叙述一下反函数. 设函数 $y=f(x)$ $(x\in X)$ 的值域是 Y, 若存在一个函数 $g(y)$ 使得 $x=g(y)$ $(y\in C)$, $g(x)$ 便叫做 $f(x)$ 的**反函数** (inverse function), 可以记作 $x=f^{-1}(y)$, 它的定义域和值域分别是原函数的值域和定义域。

图像上, 反函数和原函数关于 $y=x$ 对称.

在求反函数时要特别注意反函数与原函数的定义域和值域. 例如 $y=f(x)=x^2$, 因为 $(\pm x)^2=y$, 反函数可能是 $x=f^{-1}(y)=\sqrt{y}$ 也可能是 $x=f^{-1}(y)=-\sqrt{y}$, 但是不能是 $x=f^{-1}(y)=\pm\sqrt{y}$, 因为这样便不符合函数定义了, 一个输入值不可以有多个输出值, 或则说一个自变量不能对应多个因变量 (但是多个因变量对应一个自变量是允许的, 可以参考满射但不单射的图例). 这里反函数取正或负取决于原函数的定义域, 若 $y=f(x)=x^2, x\geq 0$, 则 $x=f^{-1}(y)=\sqrt{y}$; 若 $y=f(x)=x^2, x\leq 0$, 则 $x=f^{-1}(y)=-\sqrt{y}$.

隐函数 (implicit function)

有的时候可能需要用函数来表达一个比较复杂的图像, 举一个简单一点的例子, 一个圆心位于原点的单位圆, 圆上任意一点到圆心距离都是 1, 于是有 $x^2+y^2=1$, 用前面学习的函数的形式表达这个关系, 有

$$y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}\\-\sqrt{1-x^2}\end{cases}.$$

这样似乎还没有起先的 $x^2+y^2=1$ 这个形式美观, 因此不妨还是用 $x^2+y^2-1=0$ 来表述单位圆上的 x 与 y 的关系. 类似这样, 利用一个【同时关于 x 与 y 的表达式 $F(x,y)=0$】来确定【 y 关于 x 的函数】的表达式, 我们称之为**隐函数** (implicit function); 为表区分, 前面介绍的类似 $y=f(x)$ 的函数, 称为**显函数** (explicit function).

线性 (linearity)

这是一个很好的特性, 并不局限于函数, 仅对于函数来说的话, 若一个函数是线性的, 便有

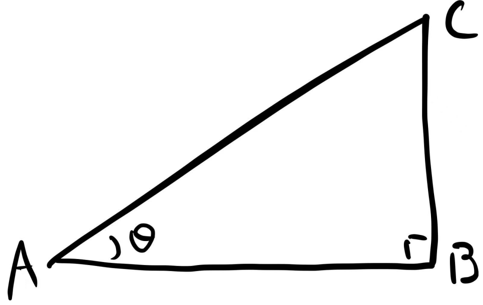
$$f(a+b)=f(a)+f(b),\ f(ax)=af(x).$$

三角函数

> 道可道, 非常道; 名可名, 非常名.

三角函数 (Trigonometry)

三角函数最基本的使用应该是表示直角三角形的变长比. 如下图所示, 三角形 ABC 为直角三角形, 将 $\angle BAC$ 记作 θ, 对于两条直角边 AB 和 BC, 边 AB 在 θ 边上, 称它为**邻边** (adjacent), 边 BC 在 θ 对面, 称它为**对边** (opposite), 剩余的边 AC 被称为**斜边** (hypotenuse)。



易见, 各变长比仅和 θ 相关[1], 三角函数便是用来表示各个比例的, 常用的三角函数有

$$\cos\theta = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}} = \frac{AB}{AC},$$
$$\sin\theta = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \frac{BC}{AC},$$
$$\tan\theta = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}} = \frac{BC}{AB}.$$

不难看出$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

另外还有

$$\sec\theta \equiv \frac{1}{\sin\theta},$$
$$\csc\theta \equiv \frac{1}{\cos\theta},$$
$$\cot\theta \equiv \frac{1}{\tan\theta}.$$

csc 很多时候也记作 cosec.

一个非常实用的关系, 直角三角形中有**勾股定理** (Pythagorean theorem): 斜边边长平方等于两直角边边长的平方之和, 即 $AC^2 = AB^2 + BC^2$; 两边同时除以 AC^2 便有

- $\boxed{1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta}$.[2]

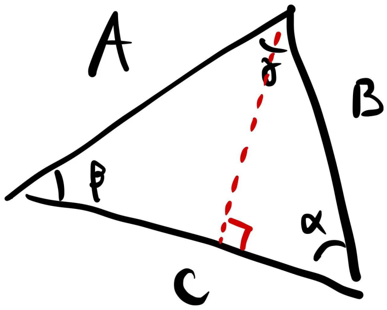
反三角函数

三角函数, 输入一个角度, 返回一个边长比; 反三角函数便是三角函数得逆运算, 或者说反函数 (参见【004】), 即输入一个边长比, 返回一个角度.

正弦定律 Law of sine

将三角形三个角分别记作 α, β, 和 γ, 将它们的对边分别记作 A, B, 和 C. 先是结论:

- $\boxed{\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}}$.



推导如下:

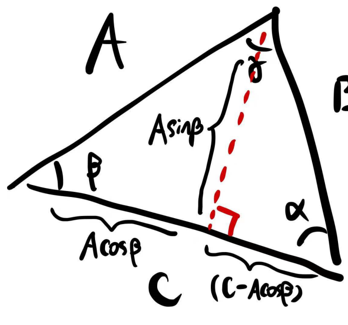
如上图所示, 以 C 为底做高, 将原本的三角形分为左右两个直角三角形, 这条高利用左边的直角三角形可以表示为 $A\sin\beta$, 利用右边的直角三角形则是 $B\sin\alpha$, 于是有 $A\sin\beta = B\sin\alpha$, 整理可得 $\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta}$; 再做另一条高重复前面的操作, 便可得到完整的结论.

余弦定律 Law of cosine

还是先上结论:

- $\boxed{B^2 = A^2 + C^2 - 2AC\cos\beta}$,

即, 【一条边的边长平方】等于【另两条边的边长平方之】和加上【两倍的 (另两条边边长的乘积) 乘以 (另两条边的夹角的余弦)】.



推导如下:

如下图所示, 依旧利用底边 C 上的高将其分为左右两个直角三角形; 左边的直角三角形, 利用斜边 A 和角 β, 两直角边分别可以表示为 $A\cos\beta$ 和 $A\sin\beta$, 于是右边的直角三角形边长便可表述为 $A\sin\beta$ 和 $(C-A\cos\beta)$; 对右边的直角三角形使用勾股定理

$$\begin{aligned}B^2 &= A^2\sin^2\beta+(C-A\cos\beta)^2\\ &= A^2\sin^2\beta+C^2+A^2\cos^2\beta-2AC\cos\beta\\ &= A^2+C^2-2AC\cos\beta.\end{aligned}$$

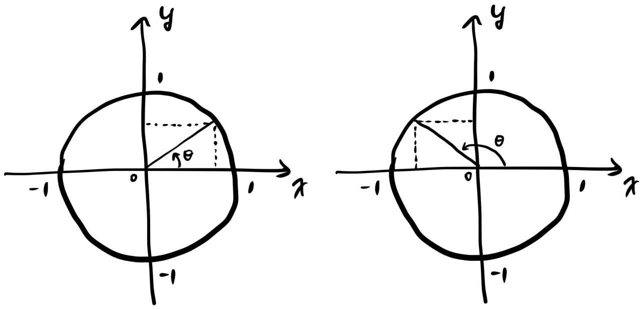
其中等式的后两行用到了之前得出的 $1=\cos^2\theta+\sin^2\theta$.

任意角度的三角函数

不难发现, 前面讨论的情况似乎都是锐角的情况 (主要是因为插图...), 钝角的三角函数似乎没那么直观了, 因为做不成一个含有钝角的直角三角形, 没法简单地用边长比来表示 sin 和 cos 等. 于是, 我们需要想办法将前面的情形推广.

如下左图所示, 建立直角坐标系, 做一圆心位于原点的单位圆, 即半径为 1 的圆, 考虑在第一象限的圆上的一点, 将其与原点做连线, 将从 x-轴正方向与这条连线**顺时针**方向形成的夹角记作 θ, 不难看出这个点的坐标 (x,y) 满足

$$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta.\end{cases}$$



于是不妨将其他象限的情况也按此定义, 于是如上右图所示的钝角甚至更大角度的三角函数便可以被定义了.

弧度制 (Radian)

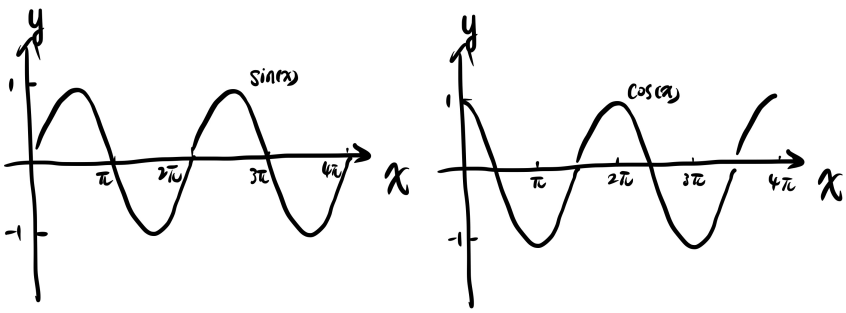
为什么一个周角是 360° 呢, 听说过一个不可考的说法: 360 是一个有很多因数的数字 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12...), 等分起来的时候数字会比较友好, 所以 360° 其实是非常随意地规定的. 那么有没有更好的用来描述角度方法呢? 答案是弧度.

一个半径为 r 的圆的周长是 $2\pi r$, 一个圆心角为 n° 的扇形的弧长是 $2\pi r\frac{n}{360}$. 可见圆心角越大弧越长, 且圆心角和弧长成正比. 既然如此, 不如重新将角度定义为圆心角与弧长的比值以方便计算, 于是便有了, 在新的这套单位系统中, 若圆心角大小为 θ, 其对应弧长应为 $r\theta$; 当圆心角是一个周角时, 对应弧长便成了圆的周长 $r(2\pi)$. 所以角度和这个新的单位的换算有 $360^\circ\equiv 2\pi$ rad, 因为这个单位把圆心角和对应的弧长联系起来了, 因此称之为**弧度** (radian).

扇形面积在这套单位制, 即弧度制下, 便也成了 $\frac{1}{2}r^2\theta$.

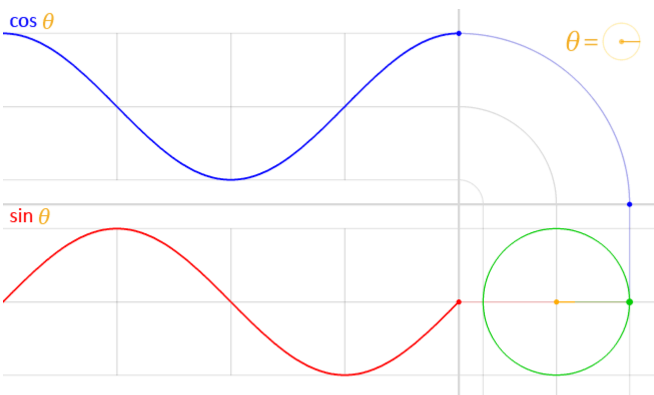
三角函数的图像

现在这个时代, 大家都或多或少能接触到科学计算器, 再不济在bing.com上搜索"solver"用微软的 Microsoft Solver 也可以计算某个特定角度的三角函数值, 自然也可以绘制函数图像. 下图分别展示了 $\sin(x)$ 和 $\cos(x)$ 的图像,



一些值得关注的点是它们都是**周期函数** (periodic function), 随着自变量-角度的变化, 因变量-函数值的变化是周期性的, 它们的周期都是 2π, 这一点从上文的单位圆里便可看出些许原因, 当角度变化超过一个周角时, 和角度刚从 0 开始的情况是一样的.

一个个人很喜欢的可视化如下:



右下显示的是角度 θ 不断增加, 左下的图可以看作右下的点的 y 坐标也就是 $\sin\theta$ 的值的变化, 左上则是 x 坐标也就是 $\cos\theta$ 的值的变化.

虚数和复数

> 一点点绕行 (detour).

虚数和复数

考虑一个一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$, 它的解有

$$\begin{aligned}
0&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
0&=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\\
0&=x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\\
0&=\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\\
\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2&=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}\\
&\cdots\\
x&=\boxed{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.
\end{aligned}$$

上式最后的结论便是求根公式, 不难看出整个推导过程实际上就是配方, 其中根号前面的"加减"是因为对等式两边同时开方时, 正负两种情况都是正确的.

我们在此之前接触到的数字都还限于实数范围内, 因此会要求 $\left(b^2-4ac\right)$ 是正的, 以保证开方之后的结果是"有意义的", 然而"从来如此, 便对么?"

之前也出现了, 不能被表示成分数形式的数字, 我们的研究范围从有理数扩充到了实数; 现在, 若 $\left(b^2-4ac\right)$ 是负的, 按照当前的理解, 它不能被开方, 那是不是又到了这样一个神圣的时刻, 我们需要拓展我们研究的数字的范围?

既然如此, 不如规定 $\sqrt{-1}\equiv i$, 作为新的一类数字的单位, 因为之前的数字叫"实数", 那么这一类新的数字就不妨叫做"**虚数**" (imaginary number) 吧. 一个既包含实数部分, 又包含虚数的部分的数字, 我们就叫它"**复数**" (complex number), 记作 $\mathbb{C}$.

运算规律

考虑若干个复数, $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $z_3=e+fi$...

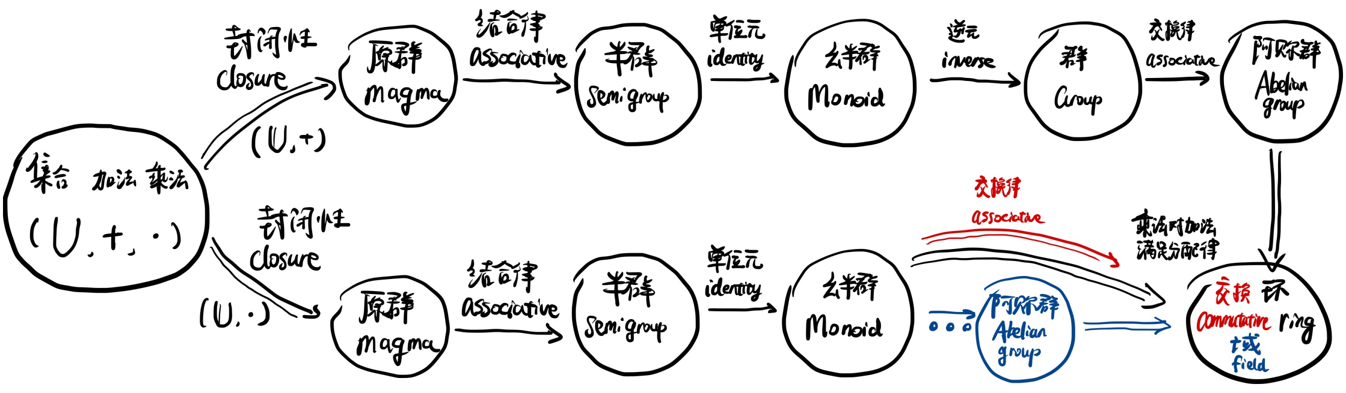
- **加法**: $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$. 实数部分和虚数部分可以分开计算, 应该不难看出复数和加法是构成**阿贝尔群**的 (即它具有封闭性和结合律, 有单位元和逆元, 并且有交换律, 详细参见001).
- **乘法**: $z_1\times z_2=(a+bi)\times(c+di)$
  $=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i.$
  不难看出, 复数和乘法也构成阿贝尔群.
- 乘法对于加法满足**分配律**, 即, $\left(z_1+z_2\right)\times z_3=z_1\times z_3+z_2\times z_3$, 证明留作练习[1].

以上三条已经足够使得复数与加法和乘法构成一个**环** (ring), 事实上, 环只需要乘法是半群 (semi-group, 满足结合律和有单位元) 即可.

- **减法**: 因为加法存在逆元, 所以减去一个数, 可以视作加上这个数的加法逆元, 即: $z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)$
  $\Rightarrow z_1+(-z_1)=(a+bi)+(-(c+di))=(a-c)+(b-d)i$
- **除法**: 不难发现每个非零的元素都有乘法逆元, 因此除以一个数可以视作乘上这个数的乘法逆元, 即: 因为 $z_2\times\frac{1}{z_2}=\frac{c+di}{c+di}=1$, 于是 $z_1\div z_2=z_1\times\frac{1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}$.

> 一点小插曲, $\frac{a+bi}{c+di}$ 应该怎么化简呢, 怎么写成简单的实数部分加上虚数部分的形式呢?
> 回顾一下无理数的"分母有理化", 例如有 $\frac{a+\sqrt{b}}{c+\sqrt{d}}$, 我们会将分子分母同时乘以 $(c-\sqrt{d})$ 将分母变为有理数, 便有 $\frac{(a+\sqrt{b})(c-\sqrt{d})}{c^2-d}$.
> 类似的, 当我们尝试化简 $\frac{a+bi}{c+di}$时, 我们也不妨对分子分母同时乘以 $(c-di)$, 于是有 $\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$, 分母便变为了实数, 再稍加化简便可转化为一个实数加上一个虚数的形式.
> 我们称 $(c-di)$ 是 $(c+di)$ 的复共轭 (complex conjugate)[2].

像上述这样可以进行加减乘和除零外除法, 并满具足一些特定的阿贝尔群的特点和分配律的代数结构, 换言之一个满足交换律的环 (交换环 commutative ring) 附加上除零外元素的除法运算, 构成一个**域** (field), 可以记作 $\mathbb{F}$, 常见的例子有有理数域, 实数域, 复数域.



环, 交换环, 域的关系 [SparkAndShine - 知乎 (zhihu.com)](http://sparkandshine.net/) http://sparkandshine.net/

二项式展开

> 绕行的绕行 (detour of the detour).

二项式展开 (binomial expension)

二项式展开指的是将类似 $(x+y)^n$ 的表达式展开的过程. 结论上有

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r}.$$

这里 $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 也记作 ${}_nC_r$, 这个"C"是**组合** (combination) 的意思, 其中又有 $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$.

> 上面第一次出现了求和符号 $\sum$, 在此用一些例子说明,
>
> $\sum_{i=1}^{10} i = 1+2+3+\ldots+9+10$;
>
> $\sum_{x=1}^{10} x^2 = x^2\big|_{x=1} + x^2\big|_{x=2} + \ldots + x^2\big|_{x=10} = 1^2+2^2+\ldots+10^2$.
>
> 即, 求和符号后的表达式, 依次代入求和符号下方的值, 符号下方的值加一..., 直至代入求和符号上方的值, 最后将这些项求和.

二项式展开的证明思路如下:

从组合的思路出发

- 将 $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}_{n}$ 展开, 并将同类项合并, 易见可能出现的项的形式仅为 $x^n = x^n y^0$, $x^{n-1}y = x^{n-1}y^1$, $x^{n-2}y^2$, ... x^2y^{n-2}, $xy^{n-1} = x^1y^{n-1}$, $y^n = x^0y^n$.
- 合并后这些项的系数是合并前它们分别出现的次数,
  - x^n 相当于展开时每一个 $(x+y)$ 都选取 x 的情况, 只有一种这样的情况, 即合并前 x^n 只可能出现 1 次, 那么合并后它的系数便是 1.
  - $(x^{n-1}y^1)$ 相当于展开时每一个 $(x+y)$ 选取了 $(n-1)$ 个 x 和 1 个 y, 利用组合学的知识有 $n = \frac{n!}{1!(n-1)!}$ 种这样的情况, 即合并前 $(x^{n-1}y^1)$ 出现 n 次, 那么合并后它的系数便是 n.

  > 这个 n 可以这么看待, 选取的这个 y 可以出自这 n 项 $(x+y)$ 中的任意一个, 于是便有 n 种可能.

  - $(x^{n-2}y^2)$ 相当于展开时每一个 $(x+y)$ 选取了 $(n-2)$ 个 x 和 2 个 y, 利用组合学的知识有 $\frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n!}{1!(n-1)!}$ 种这样的情况, 即合并前 $(x^{n-1}y^1)$ 出现 n 次, 那么合并后它的系数便是 n.

  > 这个 $\frac{n(n-1)}{2!}$ 可以这么看待, 选取的这两个 y 可以出自这 n 项 $(x+y)$ 中的任意两个, 第一个 y 有 n 种选法, 第二个因为第一个"占用"了一个 $(x+y)$, 因此它只有 $(n-1)$ 种选法, 综上便有了 $n(n-1)$; 然后两个 y 的顺序是无所谓的, 两个 y 本身先后的排序会额外引入一个倍数 2, 于是除掉.

  - ...
  - $(x^{n-r}y^r)$ 相当于展开时每一个 $(x+y)$ 选取了 $(n-r)$ 个 x 和 r 个 y, 利用组合学的知识有 $\frac{n(n-1)\ldots(n-r)}{(n-r)!} = \frac{n!/r!}{(n-r)!} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \binom{n}{r}$ 种这样的情况, 即合并前 $(x^{n-1}y^1)$ 出现 $\binom{n}{r}$ 次, 那么合并后它的系数便是 $\binom{n}{r}$.

  > 这个 $\frac{n(n-1)\ldots(n-r)}{(n-r)!}$ 可以这么看待, 选取的这 r 个 y 可以出自这 n 项 $(x+y)$ 中的任意 r 个, 第一个 y 有 n 种选法, 第二个因为第一个"占用"了一个 $(x+y)$, 因此它只有 $(n-1)$ 种选法, 第三个于是只有 $(n-2)$ 种... 综上便有了 $n(n-1)\ldots(n-r)$;
  > 然后 r 个 y 的顺序是无所谓的, r 个 y 本身先后的排序, 第一个 y 顺序可能是 1 至 r, 有 r 种选择, 第二个只有 $(r-1)$... 于是会额外引入一个倍数 $r(r-1)\ldots1 = r!$, 于是除掉.

- 可见某一项 $(x^{n-r}y^r)$, 系数应为 $\binom{n}{r}$, $r=0$ 至 $r=n$ 的项都是允许的, 于是利用求和符号表示, 便有了最开始的结论.

这样的思路也可以推出杨辉三角 (Pascal's Triangle):

```
    1
   1 1
  1 2 1
 1 3 3 1
1 4 6 4 1
```

三角的左右两边由 1 填满, 中间的某个数字是左上和右上两个数字之和. 不难发现, 从第二行开始, 每一行的数字是都是二项式展开的系数.

上述的推导, 和类似【抛 n 次公平的硬币, 得到 r 次正面和 $(n-r)$ 次反面】的场景有着非常深的联系, 这里暂时不做展开.

数学归纳法

这个方法一般只能用于证明, 不能用于推导.

> 数学归纳法 (proof by induction) 思路如下
>
> 1. **归纳奠基** (base case), 证明第一个情况是对的;
> 2. 归纳递推, 假设第 n 个情况正确, 以此推出第 $(n+1)$ 个情况正确, 便有所有情况都成立.
>
> 已知若情况n成立便有情况(n+1)也成立; 因为有情况1成立, 于是代入n=1, 便有情况2也成立; 现在知道情况2也成立了, 继续代入n=2, 便有情况3也成立...

思路已经给到, 具体证明留作练习. 一点提示是 $\binom{r}{n+1} = \binom{r}{n} + \binom{r-1}{n}$.

应用

除了常规的 n 是整数的一些应用, 在保证展开的形式是**收敛** (coverge) 的情况下 (即求和的形式不会趋向于正/负无穷), 二项式展开的负整数, 甚至分数形式也是成立的.

例如狭义相对论 (special relativity) 中, 随着物体运动速度变化, 物体的相对论性质量 (relativitic mass) [1] 会变大, 它和静止质量 m_0 符合关系式

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

上式中 v 时速度, c 是光速. 根据幂运算的规律 (复习【002】), 上式可以改写成

$m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

在估算例如速度在 $0.01c$ 或更小时, 相对论性质量与静止质量之差, 直接计算 $(m - m_0)$ 通常看不出 m 与 m_0 的区别 [2]; 事实上, 我们可以利用二项式展开, 因为

$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots,$

代入 $x = (v^2/c^2)$ 与 $n = \frac{1}{2}$ 便有

$m = m_0 \left(1 + (-1/2)\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2!}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right) = m\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots\right).$

这个形式下, 相对论性质量与静止质量之差就很明显

$m\left(\frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots\right),$

利用前几项便可以得到很好的近似.

自然常数

> 迂回辗转似要终了, 先前之缭绕令得前路似有柳暗花明之势...

自然常数 (natural constant)

通常自然常数会以下面两个例子引出:

复利

考虑一个奇怪的银行, 年利率是 100%, 也就是说, 存入 1 个货币, 到了年底便有

$1 \times (1 + 100\%) = 2.$

更奇怪的一点, 这家银行的单位时间利率不会因为存款周期改变, 也就是说, 存 0.5 年的利率是 $0.5 \times 100\% = 50\%$, 那么存半年连本带利取出, 再重新存入, 到了年底会怎么样?

$1 \times \left(1 + \frac{100\%}{2}\right)^2 = 2.25.$

年底的存款变多了! 那么如果存入更短的周期, 连本带息取出, 然后再存入, 重复这个操作到年末, 会怎么样呢? 考虑存取三次:

$1 \times \left(1 + \frac{100\%}{3}\right)^3 \approx 2.37.$

可以发现年底存款变得更多了. 那如果这样存取的操作足够频繁, 到年底有可能赚取无限多的货币吗? 很可惜, 答案是否定的. 先上结论

$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828.$

虽然还没正式的介绍过"**极限**" (limit), "**收敛**" (converge) 这些感念, 但是上式表的的意思是: 左边的 $\lim$ 是取极限 - limit - 的意思, 取当 n 趋向于无穷 (infinity) ∞; 右边则是被取极限的形式, 在上式中, 右边的 n 便需要趋向于无穷.

计算上的话, 我们可以代入尽可能大的 n, 大多数科学计算器是可以胜任这个估算的; 或者我们可以使用二项式展开 (参见【007】), 省略一些步骤, 不难得到

$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$

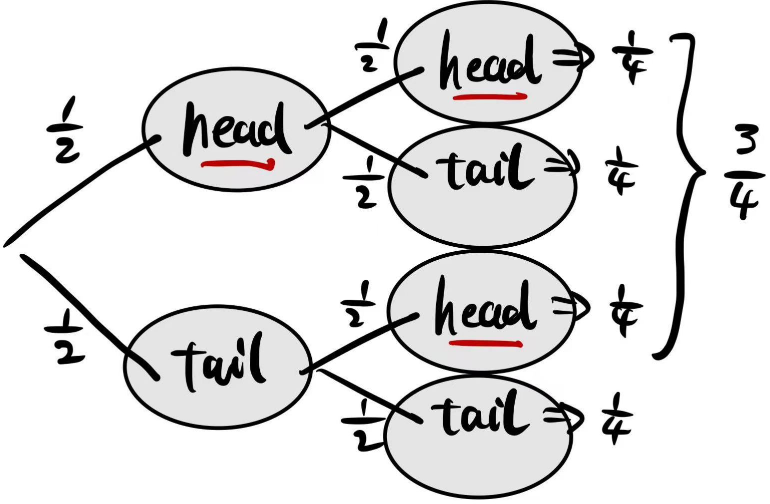
可以看到求和的形式, 加的项是逐渐变小的, 这个"变小"是足够快得, 使得整个求和是收敛的 (即有限的), 当然这个求和收敛的严格证明还算留到之后再细说.

既然复利的极限趋向于一个具体的数, 于是我们便规定这个数字叫自然常数:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \equiv \mathrm{e} = 2.71828...}$$

抽卡

这也是一个经典的例子, 例如抽卡出货的概率是 $\frac{1}{x}$, 那么不出货的概率便是 $100\% - \frac{1}{x}$; 日常我们会觉得, 比如抛硬币正面概率是 $\frac{1}{2}$, 那么抛 2 次大概率上应该能出一个正面, 而事实上, 抛两次还是有挺大概率不出正面的,



从上图可见, 有 $\frac{1}{4}$ 的概率抛出两次反面; 即, 反面的概率是 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, 两次抛硬币互为独立事件, 因此两次都是反面的概率直接是这两个独立事件概率的乘积

$\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}=0.25.$

掷骰子也是一样, 我们总会觉得, 掷 6 次总"应该"出一个六点吧, 而事实上, 不出六点的概率是 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$, 于是掷 6 还是有可能不出六点的, 概率是

$\left(1-\frac{1}{6}\right)^{6}\approx 0.33.$

回到抽卡的例子, 如果出货的概率非常非常小: 卡池里有茫茫多的 n 卡, r 卡, ... , 只有那么一张 ssr, 要从几乎无限多的卡里抽出一张 ssr 来 (抽完要放回) , 但是相应的, 卡池越大抽卡次数也越多, 于是, 经历了无限次的抽卡后, 依旧有不出货的概率

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=0.367879\ldots$

同样可以利用二项式展开来估算

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{n}}{n!}.$

这个值事实上是 $\frac{1}{\mathrm{e}}$. 证明如下:

$$
\begin{aligned}
\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \\
(\text{Let } m=-n\ ) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} \\
&\equiv \mathrm{e},
\end{aligned}
$$

可见 $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

衰变

这是笔者个人的一些经历, 本人高中阶段接触的物理教材是比较简单的那种, 于是衰变, 半衰期之类的讲得浅显, 大致有以下结论:

- 单独一个原子衰变是一个完全随机的过程, 即我们不可知它具体的衰变时间; 然而一堆同一种放射性原子, 经过一段时间, 未衰变的原子数量是之前的一半, 这一段时间便叫做**半衰期** (half-life), 记作 $t_{1/2}$;
- 没经过一个半衰期, 未衰变的原子数量是在这个半衰期前的数量的半; 即, 假设某种元素的某个放射性同位素半衰期为一分钟, 一开始有 1000 个这样的原子, 经过一分钟后, 大约还有 500 个没有衰变, 再经过一分钟后, 还有大约 250 个没有衰变...

于是, 用一个关于时间的函数来表示还未衰变的原子的数量便是

$N(t)=N_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_{1/2}}.$

但是用 $\frac{1}{2}$ 作为底数看起来就很随意, 为什么不能是其他的比例呢? 应该也是可以的, 既然可以用变成原来 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... 的"三分之一衰期", "四分之一衰期", ... 来表述某个时间还剩下多少未衰变的, 有没有更"自然"而不那么任意的底数呢? 于是便有**衰变常数** (decay constant)

$\lambda:=\frac{\ln(2)}{T},$

使得还未衰变的原子的数量可以表述为

$N(t)=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}.$

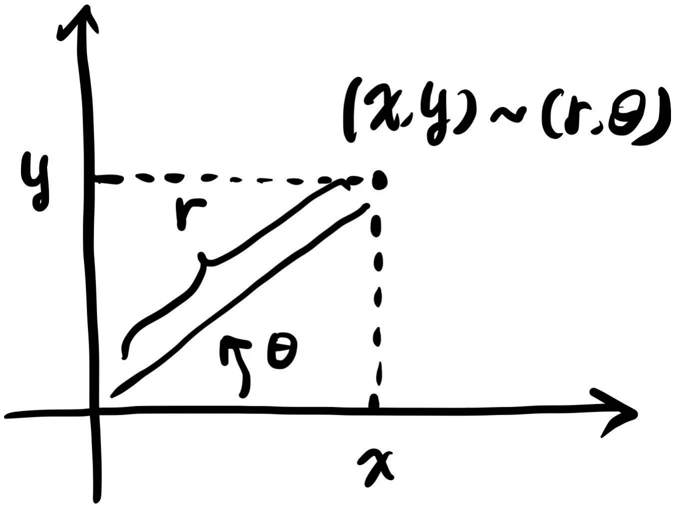
这其实是一个换底数的操作 (参见【002】), 不具体推导. 自然常数来了, 于是上面这个式子便"自然"起来了 (其实还没有). 当时初见这个公式时, 稍稍满意了一些, 但也不知道自然常数作为底数的深意; 直到很后来, 才知道当一个东西的变化率和它本身的大小成正比时 (比如这个衰变这个例子, 单位时间衰变的原子数量和当前未衰变的原子的数量是成正比的), 自然函数总会"自然地"出现.

复数的指数形式

> 虚中有实者, 或山穷水尽处, 一折而豁然开朗. - 沈复 『浮生六记』
> Lesson 5: 最短的捷径就是绕远路, 绕远路才是我的最短捷径. [1]

极坐标 (polar coordinate)

其实在【005】中已经借用了一点极坐标的概念, 这里再正式地介绍一遍. 在平面直角坐标系里, 一个点所在的位置具有两个自由度 (degree of freedom), 因此一般不多不少需要两个独立变量来锚定这个点, 通常我们会有一个点的 x-轴坐标和 y-轴坐标来表示这个点的位置 (x, y). 当然, 我们也可以在建立坐标系后, 利用和原点的距离 r, 和一个方向, 例如【x-轴正方向】至【这个点和原点的连线】顺时针方向形成的夹角 θ, 来表示一个点的位置 (r, θ).



不难看出, 存在以下的转换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}; \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases}.$$

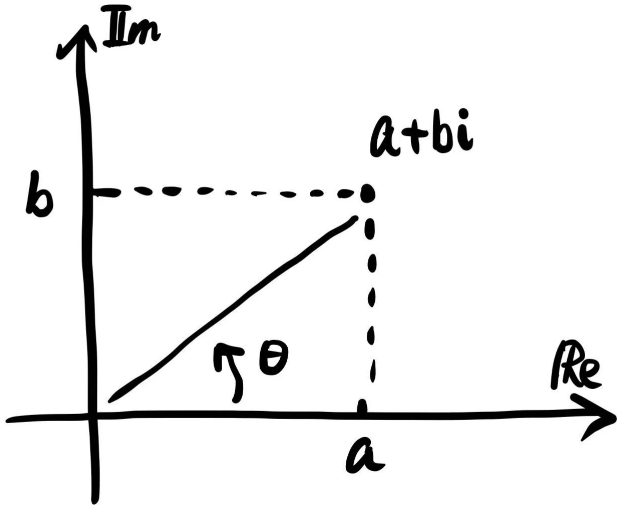
上式中 arctan 是 tan 的逆运算, 即 $\tan\theta = y/x \Rightarrow \theta = \arctan(y/x)$, 有时 arctan 也记作 $\tan^{-1}$.

复平面 (complex plane)

考虑实数的时候, 有时我们会想象有一条数轴, 在【001】和【002】中, 我们将这条数轴添上了最初离散分布的整数, 然后又补上了似乎没有空隙的有理数, 最后才用全体实数彻底"填满"了. 在【006】中, 我们研究的对象再次扩展到了复数, 于是一条实轴似乎"放不下"这些复数的存在了, 我们便添加一条额外的, 与之前实数轴垂直的虚数轴, 如此一来便构成了一个复平面.

那么考虑一个复数 $(a+bi)$, 它的实部大小便是 a, 虚部大小便是 b, 仿照着实二维平面直角坐标系, 我们便可以在复平面上标出 $(a+bi)$ 对应的一个点. 既然如此, 我们可以继续仿照着极坐标, 表示出至原点的距离, 以及 x-轴正方向到这个点和原点的连线顺时针方向形成的夹角, 这两个量在复平面中分别被称作**模** (modulus, 合理怀疑有音译成分) 和**辐角** (argument), 记作

$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}, \ \arg(a+bi) = \arctan(b/a)$.



> 像, 太像了.[2]

若是把模和辐角分别记作 r 和 θ, 则这个复数 $(a+bi)$ 便可以表示为

$(a+bi) = r\cos\theta + ir\sin\theta$.

复数的指数形式

有那么一点跳脱, 怎么突然扯到指数了呢? 在【002】中, 其实我们只讨论过指数为有理数的情况, 当然指数是任意实数的情况, 例如 $\sqrt{2}$, 我们也可以利用 $\sqrt{2} = 1.414213...$ 去估算, 或者丢给一个科学计算器; 但是当指数是虚数或者复数时, 似乎情况就不大一样了...考虑自然常数为底数, 我们从自然常数的定义出发, 【008】中我们有

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \equiv \mathrm{e}$.

不难推出, 对于任意实数 x, 有

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

把上面结论推广到虚数,

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = \mathrm{e}^i$.

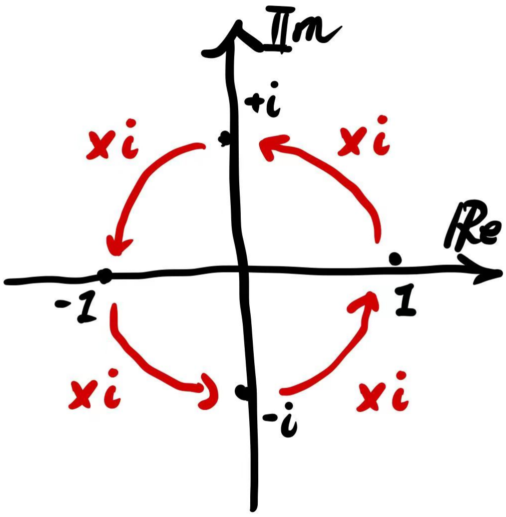
如果上式让您感到不适 (uncomfortable), 您大可用二项式展开 (参见【007】) 来确认一下上述结果的正当性 (validity). 怎么理解这个 e^i 呢, 不妨来看看它的模和辐角.

在此之前, 我们还需要一些小引理 (lemma [3], 区别于 llama - 大羊驼, 好冷), 这里没有严谨证明, 仅提供一个思路:

引理1: $\boxed{|(a+bi)^n| = |a+bi|^n}$.

> 当 $n=2$ 时, $(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. 于是
>
> $$\begin{aligned} |(a+bi)^2| &= \sqrt{(a^2-b^2)^2 + (2ab)^2} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)^2} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)}^2 \\ &= |a+bi|^2. \end{aligned}$$
>
> 用数学归纳法 (关于数学归纳法, 可以参见【007】中的一个实例) 便不难得出结论.

引理2: $\boxed{\arg((a+bi)^n) = n \cdot \arg(a+bi)}$.

> 这里需要引入一个新的视角, 我们把复数看作一个"作用", 将一个复数作用在某一个数 z 上, 在复平面上事实上是将 z 对应的点关于原点旋转了. 考虑 $i \times 1$, 即将 i 作用到 1 上, 得到了 i, 相当于逆时针旋转了 $90°$; 继续作用 i, 得到了 -1, 相当于又逆时针旋转了 $90°$... 于是用 i 作用 n 次, 即作用了 i^n, 相当于将其作用对象, 关于原点, 旋转了 i 的辐角 $90°$ n 次, 便是旋转了 $n90°$. ($90°$ 用 $\pi/2$ 弧度表述其实会更好, 关于弧度可以参考【005】, 下文若无额外说明, 角度皆用弧度制).
>
> 
>
>
> 这个结论可以推广到其他任意复数, 便有了上述结论.

事实上, 利用辐角和模来表述一个复数, 上述两则引理可以总结成一条:

引理1+2: $\boxed{[r(\cos\theta + i\cos\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$.

那么来看 e^i, 它的模

$$\begin{aligned} |\mathrm{e}^i| &= \left|\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{i}{n}\right)\right|^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n/2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/2n} = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{1/2n} = 1. \end{aligned}$$

上式第二行到第三行利用了引理1, 最后一行先是利用了自然常数的定义, 然后当 $n\to\infty$ 便有 $1/2n \to 0$, 于是 $\mathrm{e}^0 = 1$. 再来看辐角

$$\begin{aligned} \arg(\mathrm{e}^i) &= \lim_{n\to\infty} n\arg\left(1+\frac{i}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\arctan\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n} = 1. \end{aligned}$$

上式先是利用了引理2, 然后当 $n\to\infty$ 时 $1/n \to 0$, 然后在这个极限下 (啊, 还是, 极限我们晚点再稍严格地讨论) 有 $\arctan\frac{1}{n} \to \frac{1}{n}$.

> 当然也可以用小角度近似 (small angle approximation) 来理解 (注意, 是理解不是证明) 这个过程. 小角度近似即, 使用弧度制时, 当 $\theta \ll 1$, 有 $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta$.

这样利用模和辐角, 我们有

$$\mathrm{e}^i = \cos 1 + i\sin 1.$$

所以 e^i 在复平面上对应一个距离原点 1, 与原点连线和 x-轴夹角是 1 的点, 或者说 e^i 是一个实部是 $\cos 1$, 虚部是 $\sin 1$ 的复数. 同理可得 $|\mathrm{e}^{ib}| = 1$, $\arg(\mathrm{e}^{ib}) = b$, 进而

$\mathrm{e}^{ib}=\cos b+i\sin b.$

早一些地结论 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n=\mathrm{e}^i$ 其实可以推广到任意复数 $(a+ib)$, 即 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a+ib}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{a+ib}=\mathrm{e}^a\mathrm{e}^{ib}$, 那么

$\boxed{\mathrm{e}^{a+ib}=\mathrm{e}^a(\cos b+i\sin b)}$ [4].

三角函数(续)

> (有名、无名) 此两者同出而异名, 同谓之玄, 玄之又玄, 众妙之门.

前面介绍三角函数 (【005】) 的时候, 跳过了一些比较重要的**恒等式** (identities), 比如: $\cos(a\pm b)=?$, $\sin(a\pm b)=?$

事实上这些恒等式可以从纯几何出发去推导, 或者也可以用所谓诱导公式 [1] (induction formula, 即三角函数的周期性), 再或者, 在【009】中我们发现三角函数和指数函数有着联系, 我们也可以利用这层关系.

{三角函数的指数形式 \label{title}}

先前我们有,

$\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,$

代入 $\theta:=-\theta$ [2], 便有 $\mathrm{e}^{-i\theta}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$, 利用三角函数的周期性可得,

$\mathrm{e}^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta,$

将前两式相加便可消去 $\sin\theta$ 项, 相减便可消去 $\cos\theta$ 项, 化简便可得

$$\boxed{\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2},\ \ \sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}}.$$

利用\ref{title}推导三角函数恒等式

以 $\cos(a+b)$ 为例:

$$\begin{aligned}&\cos(a+b)\\=&\frac{\mathrm{e}^{i(a+b)}+\mathrm{e}^{-i(a+b)}}{2}\\=&\frac{2\mathrm{e}^{i(a+b)}+2\mathrm{e}^{-i(a+b)}}{4}\\=&\frac{\mathrm{e}^{i(a+b)}+\mathrm{e}^{i(a-b)}+\mathrm{e}^{i(-a+b)}+\mathrm{e}^{-i(a-b)}}{4}+\frac{\mathrm{e}^{i(a+b)}-\mathrm{e}^{i(a-b)}-\mathrm{e}^{i(-a+b)}+\mathrm{e}^{-i(a-b)}}{4}\\=&\frac{\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{-ia}}{2}\frac{\mathrm{e}^{ib}+\mathrm{e}^{-ib}}{2}-\frac{\mathrm{e}^{ia}-\mathrm{e}^{-ia}}{2i}\frac{\mathrm{e}^{ib}-\mathrm{e}^{-ib}}{2i}\\=&\cos a\cos b-\sin a\sin b.\end{aligned}$$

类似的, 可以得到

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b,\\&\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b.\end{aligned}}$$

另外还有常用的二倍角公式, 可令上式中的 $a=b$ 得到,

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin 2a=2\sin a\cos a,\\&\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a,\end{aligned}}$$

第二个等式利用了 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$. 再还有有时会有半角, 可以用 $\cos$ 的二倍角公式推导, 例如, 求 $\cos$ 的半角公式可以令 $\cos$ 的二倍角公式中的 $a:=a/2$,

$\cos a=2\cos^2(a/2)-1,$

整理可得

$$\boxed{\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}.$$

类似的

$$\boxed{\sin\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}}.$$

$\tan$ 相关的公式则可以利用 $\tan=\sin/\cos$ 求得.

极限, 连续性

> 「Made in Heaven!」要开始加速了 [1]

跳过一些内容: 集合 (set), 点集拓扑 (point set topology), 数列与级数 (sequence and series); 如果您希望习得更加严谨的数学语言, 那么可以移步 Walter Rudin - *Principles of Mathematical Analysis* (俗称 baby Rudin [2]).

极限 (limit)

定义: 当 x 趋向于 p 时, $x \to p$, $f(x)$ 趋向于 q, $f(x) \to q$, 记作 $\lim_{x\to p} f(x) = q$.

用 $\epsilon - \delta$ 语言 (出现了!) 来说, $\lim_{x\to p} f(x) = q$ 便是: 对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得【若 $0 < |x-p| < \delta$, 便有 $|f(x) - q| < \epsilon$ 】.

为什么要用 $\epsilon - \delta$ 语言? 原本的"趋向于"其实很不严格, 什么叫趋向于呢, 于是 $\epsilon - \delta$ 语言如是说道:

- 我先任意选定一个 ϵ,
- 然后我要试着找到一个 δ,
- 使得 x 与 p 足够接近时 - 有多接近呢? 它们差的绝对值 (或者说"距离", 不过这边还没定义距离, 233) 小于 δ - 便有 $f(x)$ 与 q 足够接近 - 多近呢? 他们差的绝对值小于 ϵ.
- 若对于任意 ϵ, 总能找到一个这样的 δ, 那么便可以放心地说, 确有$\lim_{x\to p} f(x) = q$.

> **例子**: 一个平凡的情况 (a trivial case), $f(x) = ax$, 证明 $\lim_{x\to 1} f(x) = a$.
>
> **思路** (草稿纸上或者脑子里的部分): 对于任意 $\epsilon > 0$ 我们需要找到 $\delta > 0$, 满足当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, $|f(x) - a| < \epsilon$ 成立.
>
> - $|f(x) - a| = |ax - a| = a|x-1|$
> - 令上式小于 ϵ, 发现有 $|x-1| < \epsilon/a$
> - 令 $\delta = \epsilon/a$, 即可出锅食用 (bushi).
>
> **证明** (写下来的正式的书面的部分): 对任意 $\epsilon > 0$, 令 $\delta = \epsilon/a$, 则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 有
>
> - $|f(x) - a| = |ax - a| = a|x-1| < a\delta < \epsilon$.
> - 于是根据极限的定义, $\lim_{x\to 1} f(x) = a$
>
> Q.E.D [3]
>
> **吐槽**: 鄙人学分析的时候学得就很不到位, 写证明的时候常常向同学"借鉴", 时常觉得, 证明本身并不难写, 难得是想到并"构造"出一些证明需要的东西, 就如在上面的例子中构造一个 $\delta = \epsilon/a$; 殊不知"借鉴"的那些作业其实只有上面例子中【证明】的部分, 而【思路】部分被写在草稿纸上丢掉了. 这种狡猾如雪地上的狐狸一般用尾巴扫去自己的踪迹的行为...
> 于是有这样的说法:
>
> 一位菲尔兹得主告诉我, 顶级的数学家们会秘密地像物理学家一样思考, 等他们得到证明的一个大框架之后, 他们再用 epsilon 和 delta 的语言把证明过程包装起来.

若 $f(x)$ 在 $x \to p$ 处存在极限, 这个极限是**唯一**的 (unique). 考虑 $\lim_{x\to p} f(x) = a$, $\lim_{x\to p} g(x) = b$, 极限还存在以下规律 (啊, 美好的线性) :

- $\lim_{x\to p}(f \pm g)(x) = a \pm b$;
- $\lim_{x\to p}(fg)(x) = ab$;
- $\lim_{x\to p} \frac{f}{g}(x) = \frac{a}{b}$, 若 $b \neq 0$.

连续性 (continuity)

定义:

---

1. 单位和幺都有一的含义, 因为在乘法中单位元是1, 这可能是名字来源. ↩ ↩ ↩ ↩ ↩ ↩ ↩ ↩ ↩ ↩
2. 有理数其实是谬译, rational在这里其实意为可约的, 而不是有理的. ↩ ↩ ↩ ↩ ↩ ↩ ↩ ↩ ↩
3. **公理/假定** (axiom/postulate): 默认为真无需证明的陈述. **定义** (definition): 准确无歧义的对一个术语的描述. **定理** (theorem): 证明为真的大结论. **引理** (lemma): 为了证明定理的小结论. **推论** (Corollary): 借助定理可简短地证明的结论. 一本严格的数学书经常会出现前面这些令人畏惧的词, 类似的还有**命题** (proposition), **推测/猜想** (conjecture), **断言** (claim)等等. ↩ ↩
4. a+ib 取 iπ 便可以得到著名的欧拉公式, 确实非常美丽, 虚实正负在此交汇, 圆周率和自然常数也藏于其中. ↩