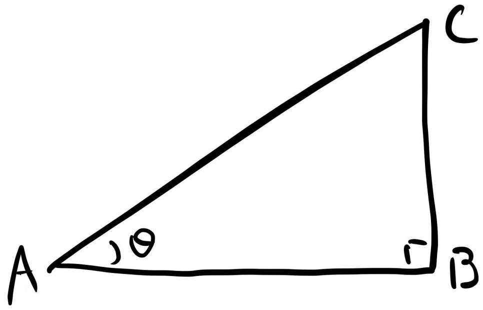
三角函数 (Trigonometry)

三角函数最基本的使用应该是表示直角三角形的变长比. 如下图所示, 三角形 ABC 为直角三角形, 将 $\angle BAC$ 记作 θ, 对于两条直角边 AB 和 BC, 边 AB 在 θ 边上, 称它为**邻边** (adjacent), 边 BC 在 θ 对面, 称它为**对边** (opposite), 剩余的边 AC 被称为**斜边** (hypotenuse)。



易见, 各变长比仅和 θ 相关[1], 三角函数便是用来表示各个比例的, 常用的三角函数有

$$\cos\theta = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}} = \frac{AB}{AC},$$
$$\sin\theta = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \frac{BC}{AC},$$
$$\tan\theta = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}} = \frac{BC}{AB}.$$

不难看出$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

另外还有

$$\sec\theta \equiv \frac{1}{\sin\theta},$$
$$\csc\theta \equiv \frac{1}{\cos\theta},$$
$$\cot\theta \equiv \frac{1}{\tan\theta}.$$

csc 很多时候也记作 cosec.

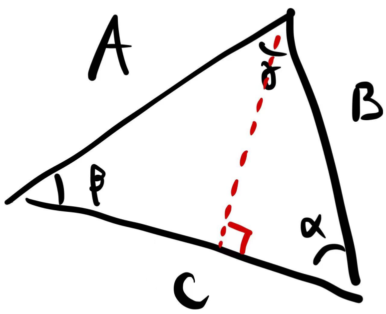
一个非常实用的关系, 直角三角形中有**勾股定理** (Pythagorean theorem): 斜边边长平方等于两直角边边长的平方之和, 即 $AC^2 = AB^2 + BC^2$; 两边同时除以 AC^2 便有

- $\boxed{1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta}$. [2]

正弦定律 Law of sine

将三角形三个角分别记作 α, β, 和 γ, 将它们的对边分别记作 A, B, 和 C. 先是结论:

- $\boxed{\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}}$.



推导如下:

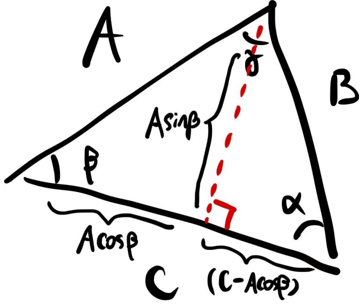
如上图所示, 以 C 为底做高, 将原本的三角形分为左右两个直角三角形, 这条高利用左边的直角三角形可以表示为 $A\sin\beta$, 利用右边的直角三角形则是 $B\sin\alpha$, 于是有 $A\sin\beta = B\sin\alpha$, 整理可得 $\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta}$; 再做另一条高重复前面的操作, 便可得到完整的结论.

余弦定律 Law of cosine

还是先上结论:

- $\boxed{B^2 = A^2 + C^2 - 2AC\cos\beta}$,

即, 【一条边的边长平方】等于【另两条边的边长平方之】和加上【两倍的 (另两条边边长的乘积) 乘以 (另两条边的夹角的余弦)】.



推导如下:

如下图所示, 依旧利用底边 C 上的高将其分为左右两个直角三角形; 左边的直角三角形, 利用斜边 A 和角 β, 两直角边分别可以表示为 $A\cos\beta$ 和 $A\sin\beta$, 于是右边的直角三角形边长便可表述为 $A\sin\beta$ 和 $(C - A\cos\beta)$; 对右边的直角三角形使用勾股定理

$$\begin{aligned} B^2 &= A^2\sin^2\beta + (C - A\cos\beta)^2 \\ &= A^2\sin^2\beta + C^2 + A^2\cos^2\beta - 2AC\cos\beta \\ &= A^2 + C^2 - 2AC\cos\beta. \end{aligned}$$

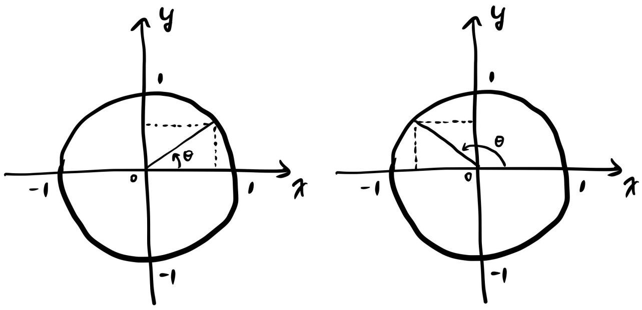
其中等式的后两行用到了之前得出的 $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$.

任意角度的三角函数

不难发现, 前面讨论的情况似乎都是锐角的情况 (主要是因为插图...), 钝角的三角函数似乎没那么直观了, 因为做不成一个含有钝角的直角三角形, 没法简单地用边长比来表示 sin 和 cos 等. 于是, 我们需要想办法将前面的情形推广.

如下左图所示, 建立直角坐标系, 做一圆心位于原点的单位圆, 即半径为 1 的圆, 考虑在第一象限的圆上的一点, 将其与原点做连线, 将从 x-轴正方向与这条连线**顺时针**方向形成的夹角记作 θ, 不难看出这个点的坐标 (x, y) 满足

$$\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta. \end{cases}$$



于是不妨将其他象限的情况也按此定义, 于是如上右图所示的钝角甚至更大角度的三角函数便可以被定义了.

弧度制 (Radian)

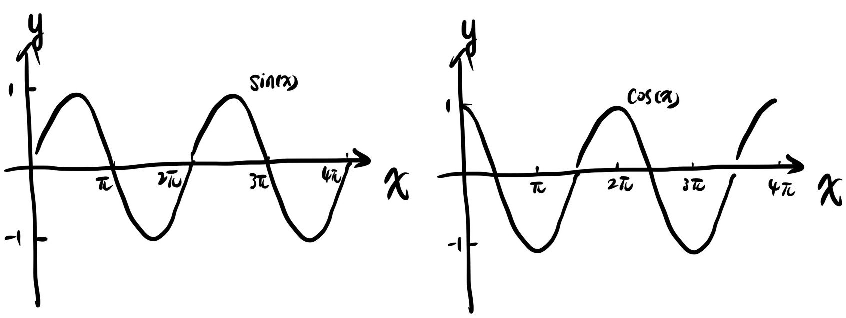
为什么一个周角是 360° 呢, 听说过一个不可考的说法: 360 是一个有很多因数的数字 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12...), 等分起来的时候数字会比较友好, 所以 360° 其实是非常随意地规定的. 那么有没有更好的用来描述角度方法呢? 答案是弧度.

一个半径为 r 的圆的周长是 $2\pi r$, 一个圆心角为 n° 的扇形的弧长是 $2\pi r\frac{n}{360}$. 可见圆心角越大弧越长, 且圆心角和弧长成正比. 既然如此, 不如重新将角度定义为圆心角与弧长的比值以方便计算, 于是便有了, 在新的这套单位系统中, 若圆心角大小为 θ, 其对应弧长应为 $r\theta$; 当圆心角是一个周角时, 对应弧长便成了圆的周长 $r(2\pi)$. 所以角度和这个新的单位的换算有 $360^\circ \equiv 2\pi\ \mathrm{rad}$, 因为这个单位把圆心角和对应的弧长联系起来了, 因此称之为**弧度** (radian).

扇形面积在这套单位制, 即弧度制下, 便也成了 $\frac{1}{2}r^2\theta$.

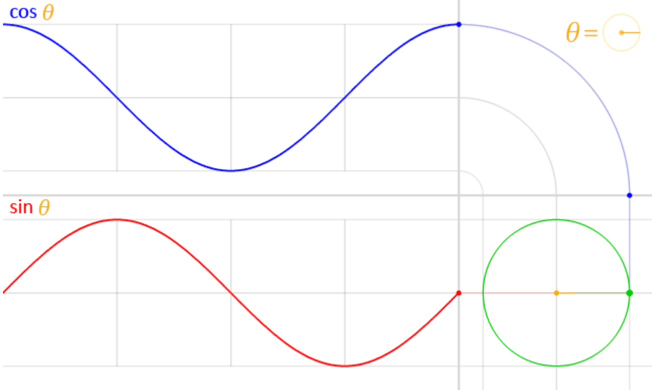
三角函数的图像

现在这个时代, 大家都或多或少能接触到科学计算器, 再不济在bing.com上搜索"solver"用微软的 Microsoft Solver 也可以计算某个特定角度的三角函数值, 自然也可以绘制函数图像. 下图分别展示了 $\sin(x)$ 和 $\cos(x)$ 的图像,



一些值得关注的点是它们都是**周期函数** (periodic function), 随着自变量-角度的变化, 因变量-函数值的变化是周期性的, 它们的周期都是 2π, 这一点从上文的单位圆里便可看出些许原因, 当角度变化超过一个周角时, 和角度刚从 0 开始的情况是一样的.

一个个人很喜欢的可视化如下:



右下显示的是角度 θ 不断增加, 左下的图可以看作右下的点的 y 坐标也就是 $\sin\theta$ 的值的变化, 左上则是 x 坐标也就是 $\cos\theta$ 的值的变化.

---

1. 当然也可以说和除了直角外的另一个角 $(90^\circ - \theta)$ 相关; 边长比可以通过一个除直角外的角确定是因为, 除直角外另一角相等的直角三角形都相似, 它们的边长比是一致的。 ↩
2. 三角函数的平方: $\cos(x)^2$ 通常理解为 $\cos((x)^2)$; $\cos^2 x$ 约定俗成表示 $(\cos(x))^2$. ↩