加法 (addition)

$1+1=2$, 好了, 这一节结束 (玩笑). 加法的运算, 九九加法表, 这里就不赘述.

我们首先考虑**整数** (integer), 记作 $\mathbb{Z}$, 当我们考虑一类数字或者一类符合某种性质的对象时, 我们称这一类对象组成的东西叫做**集合** (set), 集合中的东西便叫做**元素** (element).

- 不难发现, 从整数里取出两个元素, 例如 1 和 2 , 将他们相加, 得到的结果 $1+2=3$ 依旧是整数. 这样的性质叫做**封闭性**或者**闭包性** (closed, closure).
- 再考虑三个元素在加法下的运算. 三个元素的运算可以看作, 两个元素的运算结果与第三个元素再次运算, 还是不难发现, 任意从整数取出三个元素, 例如 1 , 2 和 3 , 有 $(1+2)+3=6=1+(2+3)$, 即前两个元素先进行运算和后两个元素先进行运算的结论时一致的. 这样的性质叫做**结合律** (assosiative).
- 整数里存在一个特殊的元素, 使得加法这个运算不对其他任何元素"产生效果", 这个特殊的元素是 0 , $0+n=n+0=n$, 这里 n 是任意整数, 我们可以这么标记: $n \in \mathbb{Z}$, 中间这个符号表示属于 (belong to). 这个特殊的元素叫做**单位元**或**幺元** (identity element) [1] .
- 整数的加法中, 对于任何一个元素, 都能找到另一个元素, 使得它们运算结果为单位元- 0 , 比如 $1+(-1)=(-1)+1=0$, 我们便叫 (-1) 是 1 的**逆元** (inverse element).

一个集合, 再附加一个二元运算(像加法这样输入两个元素输出一个元素的运算), 并且拥有上述性质和元素的, 我们便把它叫做**群** (group), 整数和加法, 便是这样构成了一个群 $(\mathbb{Z},+)$.

好的,我们在学习加法的过程中顺便体验了以下群论. 要注意的是, 上文并没有强调**交换性** (commutative), 因为往后看我们会发现, 很多运算其实并不满足交换律, 满足交换律的群我们可以称它为**交换群**或**阿贝尔群** (Abelian group).

> 有人问一个小朋友, "3+4 等于几啊?" 小朋友说: "不知道, 但我知道 3+4 等于 4+3." 那人接着问: "为什么呀?" 答曰:"因为整数与整数加法构成了阿贝尔群."
> 这个笑话讽刺了某次法国一场幼儿园从抽象数学教起的实验, 不过最后实验的结果是以失败告终.

减法 (subtraction)

思路要打开, 减法可以看作是加法的逆运算; 又或者, 减去一个数, 可看作加上这个数字的逆元.

减法的一些性质:

- **反交换律** (anti-commutativity), 例如 $4-3=-(3-4)$, 交换两个元素的顺序会导致结果变为之前结果的逆.
- **非结合律** (non-associativity), 例如 $(6-3)-2 \neq 6-(3-2)$.

因为整数减法不满足结合律, 所以整数和减法不构成群, 只构成**拟群** (quasi-group), 字面上可以理解成, 像群, 但是不是群, 这里不做展开.

乘法 (multiplication)

还是九九乘法表, 结束了 (玩笑). 乘法可以视作是多个同样加法的标记, 例如: $2\times 3=2+2+2=3+3=3\times 2$.

来看看乘法的一些性质:

- 易见**封闭性**或者**闭包性**是满足的.
- 也不难看出乘法具有**结合律**.
- 乘法的**幺元**是 1 .
- 再**逆元**上似乎出了问题, 到目前为止, 我们讨论的都还是整数 $\mathbb{Z}$, 这个范围内, 似乎找不到逆元, 但是没有关系, 我们把范围扩大到非零**有理数** (rational number) [2] , 记作 $\{\mathbb{Q}/\{0\}\}$, 这样每一个元素 $n \in \{\mathbb{Q}/\{0\}\}$ 都有逆元 $\frac{1}{n}$. 将 0 剔除是因为它没有逆元, 我们应该知道 0 不能作为分母.

以上性质已经决定了非零有理数和乘法构成群, $(\mathbb{Q}/\{0\} \times)$. 乘法另外还有特性:

- 乘法与加法的混合运算, 会有**分配律** distributive property, 例如 $2\times(3+4)=2\times 3+2\times 4$.
- 任何数乘上 0 得到 0 , 0 可以称作乘法的**零元** (zero element), 零元没有逆.

除法 (division)

乘法和除法的关系类似加法和减法的关系. 除以零在大多数场景下是不被定义的.

---

1. 单位和幺都有一的含义, 因为在乘法中单位元是1, 这可能是名字来源. ↩
2. 有理数其实是谬译, rational在这里其实意为可约的, 而不是有理的. ↩