绕行的绕行 (detour of the detour).

**二项式展开 (binomial expension)**

**二项式展开**指的是将类似 $(x+y)^n$ 的表达式展开的过程. 结论上有

$$\boxed{(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r}.$$

这里 $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ 也记作 ${}_nC_r$, 这个"C"是**组合** (combination) 的意思, 其中又有 $n!=n\times(n-1)\times\ldots\times 3\times 2\times 1$.

> 上面第一次出现了求和符号 $\sum$, 在此用一些例子说明,
>
> $\sum_{i=1}^{10} i=1+2+3+\ldots+9+10$;
>
> $\sum_{x=1}^{10} x^2=x^2\big|_{x=1}+x^2\big|_{x=2}+\ldots+x^2\big|_{x=10}=1^2+2^2+\ldots+10^2$.
>
> 即, 求和符号后的表达式, 依次代入求和符号下方的值, 符号下方的值加一..., 直至代入求和符号上方的值, 最后将这些项求和.

二项式展开的证明思路如下:

**从组合的思路出发**

- 将 $(x+y)^n=\underbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}_{n}$ 展开, 并将同类项合并, 易见可能出现的项的形式仅为 $x^n=x^ny^0$, $x^{n-1}y=x^{n-1}y^1$, $x^{n-2}y^2$, ... $x^2y^{n-2}$, $xy^{n-1}=x^1y^{n-1}$, $y^n=x^0y^n$.
- 合并后这些项的系数是合并前它们分别出现的次数,
  - $x^n$ 相当于展开时每一个 $(x+y)$ 都选取 $x$ 的情况, 只有一种这样的情况, 即合并前 $x^n$ 只可能出现 1 次, 那么合并后它的系数便是 1.
  - $(x^{n-1}y^1)$ 相当于展开时每一个 $(x+y)$ 选取了 $(n-1)$ 个 $x$ 和 1 个 $y$, 利用组合学的知识有 $n=\frac{n!}{1!(n-1)!}$ 种这样的情况, 即合并前 $(x^{n-1}y^1)$ 出现 $n$ 次, 那么合并后它的系数便是 $n$.

  > 这个 $n$ 可以这么看待, 选取的这个 $y$ 可以出自这 $n$ 项 $(x+y)$ 中的任意一个, 于是便有 $n$ 种可能.

  - $(x^{n-2}y^2)$ 相当于展开时每一个 $(x+y)$ 选取了 $(n-2)$ 个 $x$ 和 2 个 $y$, 利用组合学的知识有 $\frac{n(n-1)}{2!}=\frac{n!}{1!(n-1)!}$ 种这样的情况, 即合并前 $(x^{n-1}y^1)$ 出现 $n$ 次, 那么合并后它的系数便是 $n$.

  > 这个 $\frac{n(n-1)}{2!}$ 可以这么看待, 选取的这两个 $y$ 可以出自这 $n$ 项 $(x+y)$ 中的任意两个, 第一个 $y$ 有 $n$ 种选法, 第二个因为第一个"占用"了一个 $(x+y)$, 因此它只有 $(n-1)$ 种选法, 综上便有了 $n(n-1)$; 然后两个 $y$ 的顺序是无所谓的, 两个 $y$ 本身先后的排序会额外引入一个倍数 2, 于是除掉.

  - ...
  - $(x^{n-r}y^r)$ 相当于展开时每一个 $(x+y)$ 选取了 $(n-r)$ 个 $x$ 和 $r$ 个 $y$, 利用组合学的知识有 $\frac{n(n-1)\ldots(n-r)}{(n-r)!}=\frac{n!/r!}{(n-r)!}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=\binom{n}{r}$ 种这样的情况, 即合并前 $(x^{n-1}y^1)$ 出现 $\binom{n}{r}$ 次, 那么合并后它的系数便是 $\binom{n}{r}$.

  > 这个 $\frac{n(n-1)\ldots(n-r)}{(n-r)!}$ 可以这么看待, 选取的这 $r$ 个 $y$ 可以出自这 $n$ 项 $(x+y)$ 中的任意 $r$ 个, 第一个 $y$ 有 $n$ 种选法, 第二个因为第一个"占用"了一个 $(x+y)$, 因此它只有 $(n-1)$ 种选法, 第三个于是只有 $(n-2)$ 种... 综上便有了 $n(n-1)\ldots(n-r)$;
  > 然后 $r$ 个 $y$ 的顺序是无所谓的, $r$ 个 $y$ 本身先后的排序, 第一个 $y$ 顺序可能是 1 至 $r$, 有 $r$ 种选择, 第二个只有 $(r-1)$... 于是会额外引入一个倍数 $r(r-1)\ldots 1=r!$, 于是除掉.

- 可见某一项 $(x^{n-r}y^r)$, 系数应为 $\binom{n}{r}$, $r=0$ 至 $r=n$ 的项都是允许的, 于是利用求和符号表示, 便有了最开始的结论.

这样的思路也可以推出杨辉三角 (Pascal's Triangle):

```
    1
   1 1
  1 2 1
 1 3 3 1
1 4 6 4 1
```

三角的左右两边由 1 填满, 中间的某个数字是左上和右上两个数字之和. 不难发现, 从第二行开始, 每一行的数字是都是二项式展开的系数.

上述的推导, 和类似【抛 $n$ 次公平的硬币, 得到 $r$ 次正面和 $(n-r)$ 次反面】的场景有着非常深的联系, 这里暂时不做展开.

**数学归纳法**

这个方法一般只能用于证明, 不能用于推导.

> **数学归纳法** (proof by induction) 思路如下
>
> 1. **归纳奠基** (base case), 证明第一个情况是对的;
> 2. 归纳递推, 假设第 $n$ 个情况正确, 以此推出第 $(n+1)$ 个情况正确, 便有所有情况都成立.
>
> 已知若情况n成立便有情况(n+1)也成立; 因为有情况1成立, 于是代入n=1, 便有情况2也成立; 现在知道情况2也成立了, 继续代入n=2, 便有情况3也成立...

思路已经给到, 具体证明留作练习. 一点提示是 $\binom{r}{n+1}=\binom{r}{n}+\binom{r-1}{n}$.

**应用**

除了常规的 $n$ 是整数的一些应用, 在保证展开的形式是**收敛** (coverge) 的情况下 (即求和的形式不会趋向于正/负无穷), 二项式展开的负整数, 甚至分数形式也是成立的.

例如狭义相对论 (special relativity) 中, 随着物体运动速度变化, 物体的相对论性质量 (relativitic mass) [1] 会变大, 它和静止质量 $m_0$ 符合关系式

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

上式中 $v$ 时速度, $c$ 是光速. 根据幂运算的规律 (复习【002】), 上式可以改写成

$$m=m_0(1-v^2/c^2)^{-1/2}.$$

在估算例如速度在 $0.01c$ 或更小时, 相对论性质量与静止质量之差, 直接计算 $(m-m_0)$ 通常看不出 $m$ 与 $m_0$ 的区别 [2]; 事实上, 我们可以利用二项式展开, 因为

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots,$$

代入 $x=(v^2/c^2)$ 与 $n=\frac{1}{2}$ 便有

$$m=m_0\left(1+(-1/2)\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2!}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right)=m\left(1+\frac{v^2}{2c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\ldots\right).$$

这个形式下, 相对论性质量与静止质量之差就很明显

$$m\left(\frac{v^2}{2c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\ldots\right),$$

利用前几项便可以得到很好的近似.

---

1. 静止质量是物体静止时的质量, 或者说某个观察者发现某物体处于静止状态下时这个物体的质量; 相对论性质量则是物体相对观察者具有一定速度时, 观察者观察到的质量. ↩

2. 计算机保存的并不是准确值, 而是浮点数 (暂不展开), 可以暂且不太正确但道理就这么个道理地理解为: 它保存的答案是一个写成科学计数法的数值, 并且位数有限, 超过一定位数的部分就被切掉了; 于是两个很接近的数字在计算机看来有可能是相等的, 进而计算不出差值. ↩