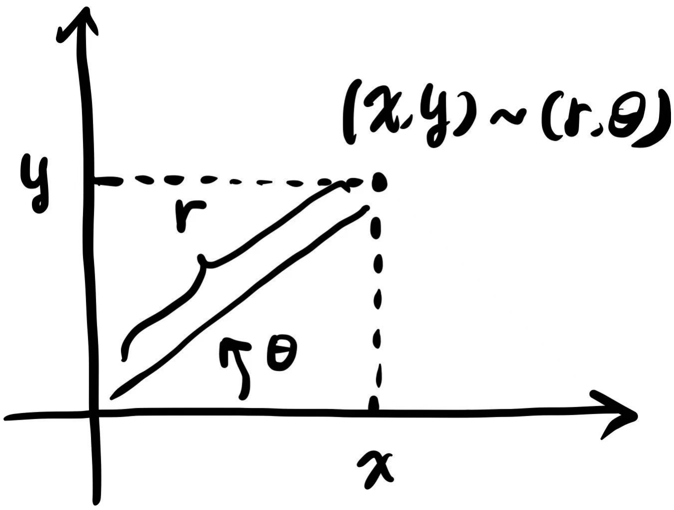
终于结束了绕行, 我们来看看多走的路带来的收获.

> Lesson 5: 最短的捷径就是绕原路, 绕远路才是我的最短捷径.[1]

极坐标 (polar coordinate)

其实在【005】中已经借用了一点极坐标的概念, 这里再正式地介绍一遍. 在平面直角坐标系里, 一个点所在的位置具有两个自由度 (degree of freedom), 因此一般不多不少需要两个独立变量来锚定这个点, 通常我们会有一个点的 x-轴坐标和 y-轴坐标来表示这个点的位置 (x, y). 当然, 我们也可以在建立坐标系后, 利用和原点的距离 r, 和一个方向, 例如【x-轴正方向】至【这个点和原点的连线】顺时针方向形成的夹角 θ, 来表示一个点的位置 (r, θ).



不难看出, 存在以下的转换

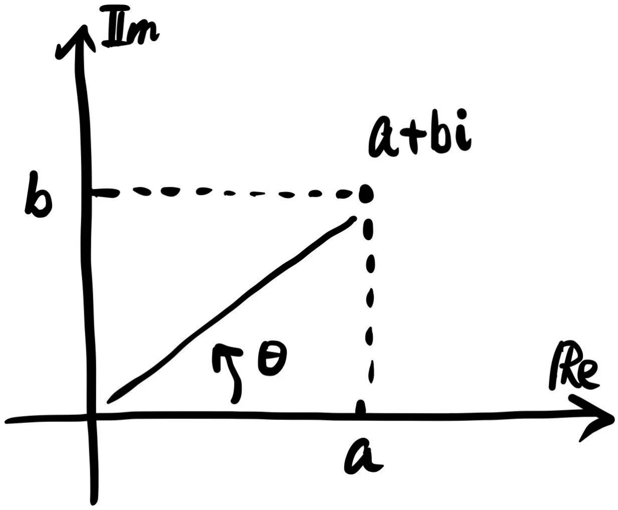
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$; $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\theta \end{cases}$.

复平面 (complex plane)

考虑实数的时候, 有时我们会想象有一条数轴, 在【001】和【002】中, 我们将这条数轴添上了最初离散分布的整数, 然后又补上了似乎没有空隙的有理数, 最后才用全体实数彻底"填满"了. 在【006】中, 我们研究的对象再次扩展到了复数, 于是一条实轴似乎"放不下"这些复数的存在了, 我们便添加一条额外的, 与之前实数轴垂直的虚数轴, 如此一来便构成了一个复平面.

那么考虑一个复数 $(a + bi)$, 它的实部大小便是 a, 虚部大小便是 b, 仿照着实二维平面直角坐标系, 我们便可以在复平面上标出 $(a + bi)$ 对应的一个点. 既然如此, 我们可以继续仿照着极坐标, 表示出至原点的距离, 以及 x-轴正方向到这个点和原点的连线顺时针方向形成的夹角, 这两个量在复平面中分别被称作**模** (modulus, 合理怀疑有音译成分) 和**辐角** (argument), 记作

$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2},\ \arg(a + bi) = \arctan\frac{b}{a}$.



> 像, 太像了.[2]

若是把模和辐角分别记作 r 和 θ, 则这个复数 $(a+bi)$ 便可以表示为

$(a+bi)=r\cos\theta+ir\sin\theta.$

复数的指数形式

有那么一点跳脱, 怎么突然扯到指数了呢? 在【002】中, 其实我们只讨论过指数为有理数的情况, 当然指数是任意实数的情况, 例如 $\sqrt{2}$, 我们也可以利用 $\sqrt{2}=1.414213...$ 去估算, 或者丢给一个科学计算器; 但是当指数是虚数或者复数时, 似乎情况就不大一样了...考虑自然常数为底数, 我们从自然常数的定义出发,【008】中我们有

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\equiv\mathrm{e}.$

不难推出, 对于任意实数 x, 有

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\mathrm{e}^x.$

把上面结论推广到虚数,

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n=\mathrm{e}^i.$

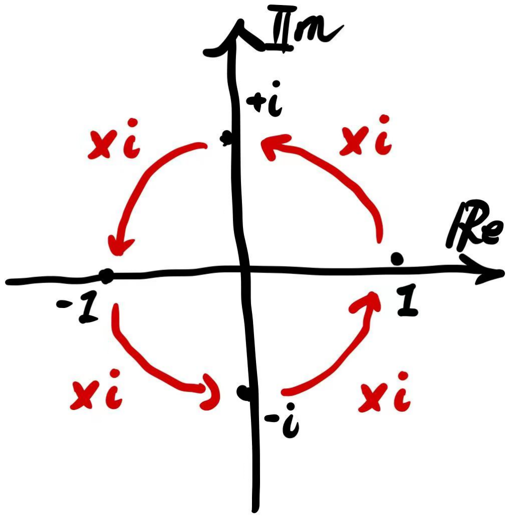
如果上式让您感到不适 (uncomfortable), 您大可用二项式展开 (参见【007】) 来确认一下上述结果的正当性 (validity). 怎么理解这个 e^i 呢, 不妨来看看它的模和辐角.

在此之前, 我们还需要一些小引理 (lemma [3], 区别于llama大羊驼, 好冷), 这里没有严谨证明, 仅提供一个思路:

引理1: $\boxed{|(a+bi)^n|=|a+bi|^n}$.

> 当 $n=2$ 时, $(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$. 于是
>
> $$\begin{aligned}|(a+bi)^2|=&\sqrt{(a^2-b^2)^2+(2ab)^2}\\=&\sqrt{(a^2+b^2)^2}\\=&\sqrt{(a^2+b^2)}^2\\=&|a+bi|^2.\end{aligned}$$
>
> 用数学归纳法 (关于数学归纳法, 可以参见【007】中的一个实例) 便不难得出结论.

引理2: $\boxed{\arg((a+bi)^n)=n\cdot\arg(a+bi)}$.

> 这里需要引入一个新的视角, 我们把复数看作一个"作用", 将一个复数作用在某一个数 z 上, 在复平面上事实上是将 z 对应的点关于原点旋转了. 考虑 $i \times 1$, 即将 i 作用到 1 上, 得到了 i, 相当于逆时针旋转了 $90°$; 继续作用 i, 得到了 -1, 相当于又逆时针旋转了 $90°$... 于是用 i 作用 n 次, 即作用了 i^n, 相当于将其作用对象, 关于原点, 旋转了 i 的辐角 $90°$ n 次, 便是旋转了 $n90°$. ($90°$ 用 $\pi/2$ 弧度表述其实会更好, 关于弧度可以参考【005】, 下文若无额外说明, 角度皆用弧度制).
>
> 
>
>
> 这个结论可以推广到其他任意复数, 便有了上述结论.

事实上, 利用辐角和模来表述一个复数, 上述两则引理可以总结成一条:

引理1+2: $\boxed{[r(\cos\theta + i\cos\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$.

那么来看 e^i , 它的模

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{e}^i| &= \left|\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{i}{n}\right)^n\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}^{\,n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n/2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/2n} = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{1/2n} = 1.
\end{aligned}
$$

上式第二行到第三行利用了引理1, 最后一行先是利用了自然常数的定义, 然后当 $n\to\infty$ 便有 $1/2n\to 0$, 于是 $\mathrm{e}^0 = 1$. 再来看辐角

$$
\begin{aligned}
\arg(\mathrm{e}^i) &= \lim_{n\to\infty} n\arg\left(1+\frac{i}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\arctan\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n} = 1.
\end{aligned}
$$

上式先是利用了引理2, 然后当 $n\to\infty$ 时 $1/n\to 0$, 然后在这个极限下 (啊, 还是, 极限我们晚点再稍严格地讨论) 有 $\arctan\frac{1}{n}\to\frac{1}{n}$.

> 当然也可以用**小角度近似** (small angle approximation) 来理解 (注意, 是理解不是证明) 这个过程. 小角度近似即, 使用弧度制时, 当 $\theta \ll 1$, 有 $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta$.

这样利用模和辐角, 我们有

$\mathrm{e}^i = \cos 1 + i\sin 1.$

同理可得 $|\mathrm{e}^{ib}| = 1$, $\arg(\mathrm{e}^{ib}) = b$, 进而

$e^{ib} = \cos b + i \sin b$.

早一些地结论 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = e^i$ 其实可以推广到任意复数 $(a+ib)$, 即 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a+ib}{n}\right)^n = e^{a+ib} = e^a e^{ib}$, 那么

$\boxed{e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)}$ [4].

---

1. *ジョジョの奇妙な冒険 Part7 スティール・ボール・ラン.* ↩

2. *让子弹飞.* ↩

3. **公理/假定** (axiom/postulate): 默认为真无需证明的陈述. **定义** (definition): 准确无歧义的对一个术语的描述. **定理** (theorem): 证明为真的大结论. **引理** (lemma): 为了证明定理的小结论. **推论** (Corollary): 借助定理可简短地证明的结论. 一本严格的数学书经常会出现前面这些令人畏惧的词, 类似的还有**命题** (proposition), **推测/猜想** (conjecture), **断言** (claim)等等. ↩

4. a+ib 取 iπ 便可以得到著名的欧拉公式, 确实非常美丽, 虚实正负在此交汇, 圆周率和自然常数也藏于其中. ↩