

Faculté des Sciences et Techniques Béni Mellal  
Département Génie Mécanique  
Filière Productique & Mécatronique

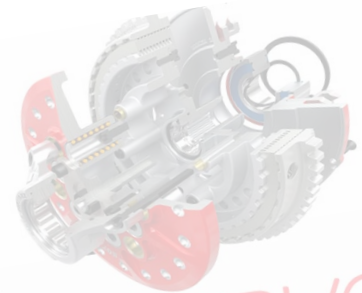
---



# Conception et Modélisation d'un Bras Manipulateur 4R

Mini-Projet du Module : Introduction à la Robotique

Le responsable : Pr. Zekraoui Mustapha



ROS

SOLIDWORKS

MATLAB®  
& SIMULINK®

Réalisé Par :

- LABLIGHI Ahmed
- EL HADAoui Abdelilah

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Contexte . . . . .	2
1.2	Objectifs . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Étude Cinématique Directe</b>	<b>2</b>
2.1	Matrice de Transformation Globale $T$ . . . . .	3
2.2	Étapes de Calcul . . . . .	3
2.2.1	Étape 1 : Calcul de $T_{12} = A_1 \cdot A_2$ . . . . .	3
2.2.2	Étape 2 : Calcul de $T_{123} = T_{12} \cdot A_3$ . . . . .	3
2.2.3	Étape 3 : Calcul de $T = T_{123} \cdot A_4$ . . . . .	4
2.3	Matrice Finale $T$ . . . . .	5
2.4	Position de l'Effecteur . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Étude Cinématique Inverse</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Etude statique</b>	<b>11</b>
4.1	Vitesses et forces statiques : . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Dynamique du Bras Manipulateur</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Simulation sur Matlab Simulink</b>	<b>22</b>
6.1	Espace de travail du Robot . . . . .	22
6.2	Résultat de la simulation de l'espace de travail . . . . .	23
6.3	Simulation du Robot . . . . .	23
6.4	Résultat de simulation du Robot . . . . .	25
6.5	Conception 3D du Robot . . . . .	26
6.6	Exportation vers Matlab Simulink . . . . .	27
6.7	Simulation dans MATLAB Simulink . . . . .	27
6.8	Vérification de la structure mécanique . . . . .	28
6.9	Ajout des Blocs de Commande . . . . .	28
6.10	Simulation de la Cinématique et de la Dynamique . . . . .	29
<b>7</b>	<b>Développement de l'Interface Utilisateur</b>	<b>29</b>
7.1	Conception de l'Interface . . . . .	29
<b>8</b>	<b>Simulation par ROS</b>	<b>30</b>
<b>9</b>	<b>Annexes</b>	<b>31</b>
<b>10</b>	<b>Références et sources</b>	<b>31</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Contexte

Les bras manipulateurs sont largement utilisés dans l'industrie pour des tâches de manipulation, d'assemblage et de soudage. Ce projet vise à concevoir et modéliser un bras manipulateur à 4 degrés de liberté (4R) pour des applications éducatives et industrielles.

## 1.2 Objectifs

Les objectifs de ce projet sont :

- Concevoir un bras manipulateur 4R.
- Modéliser la cinématique et la dynamique du bras.
- Simuler le fonctionnement du bras dans MATLAB Simulink.
- Développer une interface utilisateur pour contrôler le bras.

# 2 Étude Cinématique Directe

Avant de passer à l'analyse détaillée, nous présentons ci-dessous une figure de repérage pour mieux visualiser les différentes parties du système. La cinématique directe du

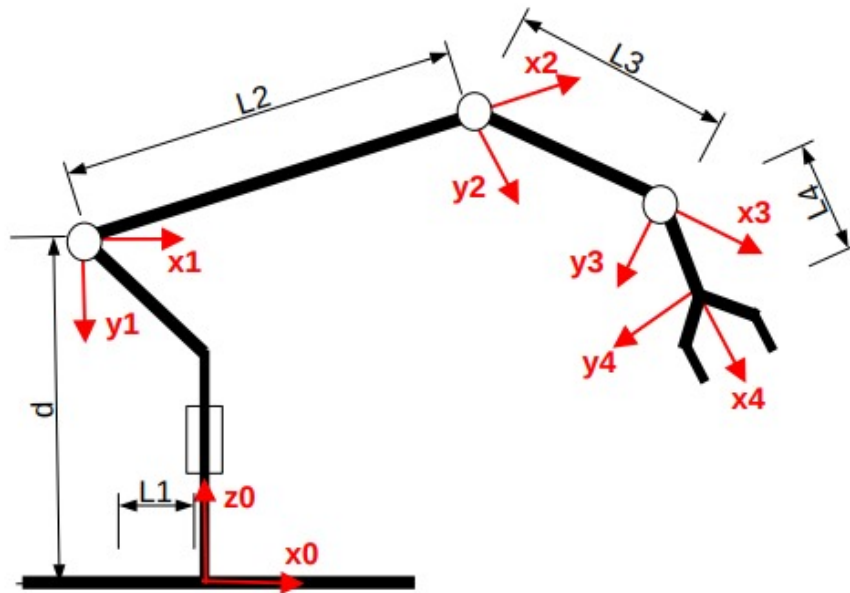


FIGURE 1 – Repérage du système

bras manipulateur 4R est étudiée en utilisant la convention de Denavit-Hartenberg. Les paramètres DH sont les suivants :

La matrice de transformation globale  $T$  est obtenue en multipliant les matrices de chaque articulation :

$$T = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$$

Articulation $i$	$a_i$ (mm)	$\alpha_i$ (°)	$d_i$ (mm)	$\theta_i$
1	50	-90	145	$\theta_1$
2	90	0	0	$\theta_2$
3	108	0	0	$\theta_3$
4	62.5	0	0	$\theta_4$

TABLE 1 – Paramètres DH du bras manipulateur 4R.

Les matrices  $A_i$  sont données par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & -\sin(\theta_1) & 50 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & 50 \sin(\theta_1) \\ 0 & -1 & 0 & 145 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 90 \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 90 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & 108 \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 108 \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 & 62.5 \cos(\theta_4) \\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 & 62.5 \sin(\theta_4) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.1 Matrice de Transformation Globale $T$

La matrice de transformation globale  $T$  est obtenue en multipliant les matrices  $A_1, A_2, A_3$ , et  $A_4$ . Elle est donnée par :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de transformation globale  $T$  est obtenue en multipliant les matrices de transformation homogène  $A_1, A_2, A_3$ , et  $A_4$ . Elle est donnée par :

$$T = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$$

## 2.2 Étapes de Calcul

### 2.2.1 Étape 1 : Calcul de $T_{12} = A_1 \cdot A_2$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) & -\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) & -\sin(\theta_1) & 50 \cos(\theta_1) + 90 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) & \cos(\theta_1) & 50 \sin(\theta_1) + 90 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ -\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) & 0 & 145 - 90 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.2.2 Étape 2 : Calcul de $T_{123} = T_{12} \cdot A_3$

$$T_{123} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Où :

$$\begin{aligned}
T_{11} &= C_1 C_2 C_3 - C_1 S_2 S_3 \\
T_{12} &= -C_1 C_2 S_3 - C_1 S_2 C_3 \\
T_{13} &= -S_1 \\
T_{14} &= 50C_1 + 90C_1 C_2 + 108C_1 C_2 C_3 - 108C_1 S_2 S_3 \\
T_{21} &= S_1 C_2 C_3 - S_1 S_2 S_3 \\
T_{22} &= -S_1 C_2 S_3 - S_1 S_2 C_3 \\
T_{23} &= C_1 \\
T_{24} &= 50S_1 + 90S_1 C_2 + 108S_1 C_2 C_3 - 108S_1 S_2 S_3 \\
T_{31} &= -S_2 C_3 - C_2 S_3 \\
T_{32} &= S_2 S_3 - C_2 C_3 \\
T_{33} &= 0 \\
T_{34} &= 145 - 90S_2 - 108S_2 C_3 - 108C_2 S_3
\end{aligned}$$

### 2.2.3 Étape 3 : Calcul de $T = T_{123} \cdot A_4$

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & 00001 \end{bmatrix}$$

Où : Où la matrice de transformation globale  $T$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
T_{11} &= C_1 C_2 C_3 C_4 - C_1 S_2 S_3 C_4 - C_1 C_2 S_3 S_4 - C_1 S_2 C_3 S_4 \\
T_{12} &= -C_1 C_2 C_3 S_4 + C_1 S_2 S_3 S_4 - C_1 C_2 S_3 C_4 - C_1 S_2 C_3 C_4 \\
T_{13} &= -S_1 \\
T_{14} &= 50C_1 + 90C_1 C_2 + 108C_1 C_2 C_3 - 108C_1 S_2 S_3 + 62.5C_1 C_2 C_3 C_4 - 62.5C_1 S_2 S_3 C_4 \\
&\quad - 62.5C_1 C_2 S_3 S_4 - 62.5C_1 S_2 C_3 S_4 \\
T_{21} &= S_1 C_2 C_3 C_4 - S_1 S_2 S_3 C_4 - S_1 C_2 S_3 S_4 - S_1 S_2 C_3 S_4 \\
T_{22} &= -S_1 C_2 C_3 S_4 + S_1 S_2 S_3 S_4 - S_1 C_2 S_3 C_4 - S_1 S_2 C_3 C_4 \\
T_{23} &= C_1 \\
T_{24} &= 50S_1 + 90S_1 C_2 + 108S_1 C_2 C_3 - 108S_1 S_2 S_3 + 62.5S_1 C_2 C_3 C_4 - 62.5S_1 S_2 S_3 C_4 \\
&\quad - 62.5S_1 C_2 S_3 S_4 - 62.5S_1 S_2 C_3 S_4 \\
T_{31} &= -S_2 C_3 C_4 - C_2 S_3 C_4 + S_2 S_3 S_4 - C_2 C_3 S_4 \\
T_{32} &= S_2 C_3 S_4 + C_2 S_3 S_4 + S_2 S_3 C_4 - C_2 C_3 C_4 \\
T_{33} &= 0 \\
T_{34} &= 145 - 90S_2 - 108S_2 C_3 - 108C_2 S_3 + 62.5(-S_2 C_3 C_4 - C_2 S_3 C_4 + S_2 S_3 S_4 - C_2 C_3 S_4)
\end{aligned}$$

## 2.3 Matrice Finale $T$

La matrice de transformation globale  $T$  est :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Où :

- $T_{11}, T_{12}, T_{13}$  représentent l'orientation de l'effecteur.
- $T_{14}, T_{24}, T_{34}$  représentent la position de l'effecteur. Les éléments  $T_{11}, T_{12}, T_{13}$  représentent l'orientation de l'effecteur.

$$\begin{aligned} T_{11} &= C_1 C_2 C_3 C_4 - C_1 S_2 S_3 C_4 - C_1 C_2 S_3 S_4 - C_1 S_2 C_3 S_4 \\ T_{12} &= -C_1 C_2 C_3 S_4 + C_1 S_2 S_3 S_4 - C_1 C_2 S_3 C_4 - C_1 S_2 C_3 C_4 \\ T_{13} &= -S_1 \end{aligned}$$

## 2.4 Position de l'Effecteur

Les éléments  $T_{14}, T_{24}, T_{34}$  représentent la position de l'effecteur.

$$\begin{aligned} T_{14} &= 50C_1 + 90C_1C_2 + 108C_1C_2C_3 - 108C_1S_2S_3 + 62.5C_1C_2C_3C_4 - 62.5C_1S_2S_3C_4 \\ &\quad - 62.5C_1C_2S_3S_4 - 62.5C_1S_2C_3S_4 \\ T_{24} &= 50S_1 + 90S_1C_2 + 108S_1C_2C_3 - 108S_1S_2S_3 + 62.5S_1C_2C_3C_4 - 62.5S_1S_2S_3C_4 \\ &\quad - 62.5S_1C_2S_3S_4 - 62.5S_1S_2C_3S_4 \\ T_{34} &= 145 - 90S_2 - 108S_2C_3 - 108C_2S_3 + 62.5(-S_2C_3C_4 - C_2S_3C_4 + S_2S_3S_4 - C_2C_3S_4) \end{aligned}$$

# 3 Étude Cinématique Inverse

Calcul de la cinématique inverse à l'aide de méthodes algébriques

$$\begin{bmatrix} * & * & * & n_1 \\ * & * & * & n_2 \\ * & * & * & n_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & m_1 \\ * & * & * & m_2 \\ * & * & * & m_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_1 = \frac{125 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}{2} + 108 \cos(\theta_2 + \theta_3) + 90 \cos(\theta_2)$$

$$m_2 = \frac{125 \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}{2} + 108 \sin(\theta_2 + \theta_3) + 90 \sin(\theta_2)$$

$$m_3 = 0$$

$$n_1 = p_x \cos(\theta_1) + p_y \sin(\theta_1) - 50$$

$$n_2 = 145 - p_z$$

$$n_3 = p_y \cos(\theta_1) - p_x \sin(\theta_1)$$

Nous avons les équations suivantes :

$$m_3 = n_3$$

$$p_y \cos(\theta_1) - p_x \sin(\theta_1) = 0$$

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_1)} = \frac{p_y}{p_x}$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x)$$

## Discussion de la singularité pour $\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x)$

Lorsque l'on utilise l'expression  $\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x)$  pour déterminer un angle en fonction des coordonnées  $p_x$  et  $p_y$ , il existe des cas où une singularité ou une ambiguïté peut apparaître.

### 1. Singulière géométrique : $p_x = 0$ et $p_y = 0$

Quand  $p_x = 0$  et  $p_y = 0$ , le point se trouve exactement à l'origine du repère. Dans ce cas,  $\theta_1$  est **indéfini** car la direction n'a pas de sens à l'origine.

**Conséquence :** Le système ne peut pas déterminer une orientation pour  $\theta_1$ , ce qui correspond à une **singularité géométrique**.

### 2. Problème de sensibilité

Lorsque  $p_x$  ou  $p_y$  est très proche de zéro (mais pas exactement nul), la valeur de  $\theta_1$  devient **très sensible** aux petites variations de  $p_x$  ou  $p_y$ .

**Conséquence :** Des erreurs numériques ou des oscillations importantes peuvent apparaître, en particulier si les données d'entrée sont bruitées ou instables.

### 3. Cas particuliers

— Si  $p_y = 0$  :

$$\theta_1 = \begin{cases} 0^\circ, & \text{si } p_x > 0, \\ 180^\circ \text{ ou } -180^\circ, & \text{si } p_x < 0. \end{cases}$$

— Si  $p_x = 0$  :

$$\theta_1 = \begin{cases} 90^\circ, & \text{si } p_y > 0, \\ -90^\circ, & \text{si } p_y < 0. \end{cases}$$

Ces cas ne constituent pas une singularité en soi, mais ils nécessitent une gestion particulière pour éviter des discontinuités dans le calcul ou le contrôle.

## Conséquences de la singularité

1. **Problème en cinématique inverse** : À la singularité ( $p_x = 0$  et  $p_y = 0$ ), la cinématique inverse ne peut pas fournir de solution unique pour  $\theta_1$ , ce qui complique le contrôle du système.
2. **Perte de degré de liberté** : À la singularité, certaines directions de mouvement deviennent impossibles, ou bien un même mouvement peut correspondre à plusieurs solutions pour  $\theta_1$ .
3. **Instabilité dans le contrôle** : Près de la singularité, des discontinuités ou une sensibilité excessive peuvent rendre le système instable.

## Gestion de la singularité

- **Éviter la singularité** : Planifier les trajectoires pour que le système ne passe pas par l'origine ( $p_x = 0$  et  $p_y = 0$ ).
- **Ajout d'une tolérance** : Si  $p_x$  et  $p_y$  sont proches de zéro ( $|p_x|, |p_y| < \epsilon$ ), fixer une valeur par défaut pour  $\theta_1$ , comme  $0^\circ$  ou une valeur précédente.
- **Utilisation d'une autre représentation** : Reformuler le problème en utilisant des quaternions ou une autre convention d'angles pour éviter ce type de singularité.
- **Approximations numériques** : Développer des méthodes stables pour gérer les cas où  $p_x$  et  $p_y$  approchent zéro.

## Conclusion

La singularité de  $\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x)$  apparaît principalement à l'origine du repère ( $p_x = 0, p_y = 0$ ). Une gestion attentive est nécessaire pour garantir la stabilité et la fiabilité du système, notamment en cinématique inverse et en contrôle.

Nous avons également :

$$p_x \cos(\theta_1) + p_y \sin(\theta_1) - 50 = \frac{125 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}{2} + 108 \cos(\theta_2 + \theta_3) + 90 \cos(\theta_2)$$

$$145 - p_z = \frac{125 \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}{2} + 108 \sin(\theta_2 + \theta_3) + 90 \sin(\theta_2)$$

En posant :

$$N_x = p_x \cos(\theta_1) + p_y \sin(\theta_1) - 50 - 62.5 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

$$N_y = 145 - p_z - 62.5 \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

Nous avons alors :

$$N_x = 108 \cos(\theta_2 + \theta_3) + 90 \cos(\theta_2)$$

$$N_y = 108 \sin(\theta_2 + \theta_3) + 90 \sin(\theta_2)$$

En développant, on obtient :

$$N_x^2 + N_y^2 = 108^2 + 90^2 + 2 \cdot 108 \cdot 90 \cdot \cos(\theta_3)$$

Ce qui donne :

$$\cos(\theta_3) = \frac{N_x^2 + N_y^2 - 108^2 - 90^2}{2 \cdot 108 \cdot 90}$$



Et :

$$\sin(\theta_3) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta_3)}$$

Finalement :

$$\theta_3 = \text{atan2}(\sin(\theta_3), \cos(\theta_3))$$

La formule donnée pour  $\theta_3$  :

$$\theta_3 = \text{atan2}(\sin(\theta_3), \cos(\theta_3))$$

est utilisée pour normaliser un angle dans le plan cartésien. Cependant, elle peut révéler des singularités spécifiques, en fonction de la configuration du robot et de la manière dont  $\theta_3$  est utilisé.

## Singularités et Discussion

**1. Définition d'une singularité** : En robotique, une singularité est une configuration où le robot perd un ou plusieurs degrés de liberté instantanés, ou bien où des calculs (comme l'inverse d'une matrice jacobienne) deviennent indéfinis.

**2. Utilisation d'atan2** : La fonction  $\text{atan2}(y, x)$  est bien définie sauf si  $x = 0$  et  $y = 0$ , c'est-à-dire quand  $\cos(\theta_3) = 0$  et  $\sin(\theta_3) = 0$ . Cela se produit lorsque  $\theta_3$  est mal défini ou que les entrées sont erronées.

**3. Cas pratiques** : -  $\sin(\theta_3) = 0$  implique  $\theta_3 = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), où l'angle est aligné avec un axe. Cela peut correspondre à une singularité mécanique, selon le système. -  $\cos(\theta_3) = 0$  implique  $\theta_3 = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ . Ici aussi, cela peut signifier que le robot est dans une position critique où il est plus difficile de commander ses mouvements.

**4. Singularités physiques** : - Si  $\theta_3$  correspond à une articulation du robot, sa singularité dépend de l'impact sur l'espace de travail. Par exemple : - Si  $\theta_3$  contrôle un axe perpendiculaire, des valeurs limites comme  $\pm 90^\circ$  ou  $0^\circ$  peuvent réduire les directions de mouvement. - Si  $\theta_3$  participe à une boucle fermée, des configurations de "collision" ou de "blocage" peuvent apparaître.

**5. Implémentation numérique** : - Dans un programme, vérifier  $\sin(\theta_3)$  et  $\cos(\theta_3)$  pour les valeurs proches de zéro est nécessaire pour éviter des erreurs dues aux singularités ou à l'instabilité des calculs numériques.

## Résumé

$\text{atan2}(\sin(\theta_3), \cos(\theta_3))$  est une méthode robuste pour calculer  $\theta_3$ , mais il faut analyser physiquement ce que chaque singularité implique pour le système. Les singularités surviennent souvent lorsque l'espace des mouvements disponibles est réduit (par exemple, alignement des axes ou perte de contrôle directionnel). Et nous avons les équations suivantes pour  $N_x$  et  $N_y$  :

$$N_x = 108 \cos(\theta_2 + \theta_3) + 90 \cos(\theta_2)$$

$$N_y = 108 \sin(\theta_2 + \theta_3) + 90 \sin(\theta_2)$$

En développant ces expressions, nous obtenons :

$$N_x = \cos(\theta_2) (108 \cos(\theta_3) + 90) - 108 \sin(\theta_2) \sin(\theta_3)$$

$$N_y = \sin(\theta_2) (108 \cos(\theta_3) + 90) + 108 \cos(\theta_2) \sin(\theta_3)$$

En introduisant les longueurs  $L_2$  et  $L_3$ , où :

$$L_2 = 90, \quad L_3 = 108,$$

les équations deviennent :

$$N_x = \cos(\theta_2) (L_3 \cos(\theta_3) + L_2) - L_3 \sin(\theta_2) \sin(\theta_3)$$

$$N_y = \sin(\theta_2) (L_3 \cos(\theta_3) + L_2) + L_3 \cos(\theta_2) \sin(\theta_3)$$

Ces relations permettent de relier  $N_x$  et  $N_y$  aux angles  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ , et aux longueurs des segments  $L_2$  et  $L_3$ . Nous avons les relations suivantes pour  $\cos(\theta_2)$  et  $\sin(\theta_2)$  :

$$\begin{cases} \cos(\theta_2) = \frac{n_x + L_3 \sin(\theta_3) \sin(\theta_2)}{L_3 \cos(\theta_3) + L_2} \\ \sin(\theta_2) = \frac{n_y - L_3 \cos(\theta_3) \sin(\theta_3)}{L_3 \cos(\theta_3) + L_2} \end{cases}$$

Cela donne également une relation simplifiée pour  $\cos(\theta_2)$  :

$$\cos(\theta_2) = \frac{n_x + L_3 \sin(\theta_3)}{L_3 \cos(\theta_3) + L_2}$$

Enfin, une équation plus détaillée est donnée pour  $\cos(\theta_2)$  :

$$\cos(\theta_2) = \frac{n_x \cdot (L_3 \cos(\theta_3) + L_2) + L_3 \sin(\theta_3) \cdot (n_y - L_3 \cos(\theta_3) \sin(\theta_3))}{(L_3 \cos(\theta_3) + L_2)^2}$$

Ici :

$$\cos(\theta_1) = \cos(\theta_1), \quad \sin(\theta_1) = \sin(\theta_1), \quad \cos(\theta_3) = \cos(\theta_3), \quad \sin(\theta_3) = \sin(\theta_3)$$

Les expressions pour  $\cos(\theta_2)$  et  $\sin(\theta_2)$  sont développées comme suit :

$$\cos(\theta_2) = \frac{n_x \cdot (L_3 \cos(\theta_3) + L_2) + L_3 \sin(\theta_3) \cdot n_y - L_3^2 \cos^2(\theta_3)}{(L_3 \cos(\theta_3) + L_2)^2}$$

En simplifiant davantage :

$$\cos(\theta_2) = \frac{n_x \cdot (L_3 \cos(\theta_3) + L_2) + L_3 \sin(\theta_3) \cdot n_y}{(L_3 \cos(\theta_3) + L_2)^2} - \frac{L_3^2 \sin^2(\theta_3)}{(L_3 \cos(\theta_3) + L_2)^2} \cdot \cos(\theta_2)$$

$$\cos(\theta_2) \cdot \left[ 1 + \frac{L_3^2 \sin^2(\theta_3)}{(L_3 \cos(\theta_3) + L_2)^2} \right] = \frac{n_x \cdot (L_3 \cos(\theta_3) + L_2) + L_3 \sin(\theta_3) \cdot n_y}{(L_3 \cos(\theta_3) + L_2)^2}$$

Finalement :

$$\cos(\theta_2) = \frac{n_x \cdot (L_3 \cos(\theta_3) + L_2) + L_3 \sin(\theta_3) \cdot n_y}{(L_3 \cos(\theta_3) + L_2)^2 + L_3^2 \sin^2(\theta_3)}$$

Pour  $\sin(\theta_2)$ , nous avons :

$$\sin(\theta_2) = \frac{n_y \cdot (L_3 \cos(\theta_3) + L_2) - L_3 \sin(\theta_3) \cdot n_x}{(L_3 \cos(\theta_3) + L_2)^2 + L_3^2 \sin^2(\theta_3)}$$

Enfin, la tangente de  $\theta_2$  est donnée par :

$$\tan(\theta_2) = \frac{\sin(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} = \frac{n_y \cdot (L_3 \cos(\theta_3) + L_2) - L_3 \sin(\theta_3) \cdot n_x}{n_x \cdot (L_3 \cos(\theta_3) + L_2) + L_3 \sin(\theta_3) \cdot n_y}$$

Finalement :

$$\theta_2 = \text{atan2}(\sin(\theta_2), \cos(\theta_2))$$

La formule donnée pour  $\theta_2$  :

$$\theta_2 = \text{atan2}(\sin(\theta_2), \cos(\theta_2))$$

est également utilisée pour normaliser un angle dans le plan cartésien. Cependant, cette formule peut aussi révéler des singularités spécifiques, selon la configuration du robot et la manière dont  $\theta_2$  est utilisé.

\*Singularités et Discussion 1. **Définition d'une singularité** : En robotique, une singularité est une configuration où le robot perd un ou plusieurs degrés de liberté instantanés, ou bien où des calculs (comme l'inverse d'une matrice jacobienne) deviennent indéfinis.

2. **Utilisation d'atan2** : La fonction  $\text{atan2}(y, x)$  est bien définie sauf si  $x = 0$  et  $y = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $\cos(\theta_2) = 0$  et  $\sin(\theta_2) = 0$ . Cela se produit lorsque  $\theta_2$  est mal défini ou que les entrées sont erronées.

3. **Cas pratiques** : -  $\sin(\theta_2) = 0$  implique  $\theta_2 = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), où l'angle est aligné avec un axe. Cela peut correspondre à une singularité mécanique, selon la configuration du robot. -  $\cos(\theta_2) = 0$  implique  $\theta_2 = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ . Ce cas peut aussi signifier que le robot est dans une position critique où il devient difficile de commander ses mouvements.

4. **Singularités physiques** : - Si  $\theta_2$  correspond à une articulation du robot, sa singularité dépend de l'impact sur l'espace de travail. Par exemple : - Si  $\theta_2$  contrôle un axe perpendiculaire, des valeurs limites comme  $\pm 90^\circ$  ou  $0^\circ$  peuvent réduire les directions de mouvement. - Si  $\theta_2$  fait partie d'une boucle fermée, des configurations de "collision" ou de "blocage" peuvent apparaître.

5. **Implémentation numérique** : - Dans un programme, il est nécessaire de vérifier  $\sin(\theta_2)$  et  $\cos(\theta_2)$  pour les valeurs proches de zéro afin d'éviter des erreurs dues aux singularités ou à l'instabilité des calculs numériques.

## Résumé

$\text{atan2}(\sin(\theta_2), \cos(\theta_2))$  est une méthode robuste pour calculer  $\theta_2$ , mais il est crucial de comprendre ce que chaque singularité implique pour le système robotique. Les singularités surviennent souvent lorsque l'espace des mouvements disponibles est réduit (par exemple, lors de l'alignement des axes ou de la perte de contrôle directionnel).

## 4 Etude statique

### 4.1 Vitesses et forces statiques :

#### Solide 0

Pour la base  $\{0\}$  :

$${}^0\mathbf{W}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^0\mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d} \end{pmatrix}.$$

#### Solide 1

$${}^1\mathbf{W}_1 = {}^1\mathbf{R} \cdot {}^0\mathbf{W}_0 + \dot{\theta}_1 \hat{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix}.$$

$${}^1\mathbf{V}_1 = {}^1\mathbf{R} \cdot ({}^0\mathbf{V}_0 + {}^0\mathbf{W}_0 \times \mathbf{P}_1).$$

Calcul détaillé :

$${}^1\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -s_1 & c_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^0\mathbf{V}_0 + {}^0\mathbf{W}_0 \times \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d} \end{pmatrix}.$$

$${}^1\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{d} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

#### Solide 2

$${}^0\mathbf{W}_2 = {}^2\mathbf{R} \cdot {}^0\mathbf{W}_0 + \dot{\theta}_2 \hat{z}_2 = \begin{pmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_2 \hat{z}_2.$$

$${}^0\mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}.$$

$${}^2\mathbf{V}_2 = {}^2\mathbf{R} \cdot ({}^1\mathbf{V}_1 + {}^1\mathbf{W}_1 \times \mathbf{P}_2).$$

Calcul détaillé :

$${}^2\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^1\mathbf{V}_1 + {}^1\mathbf{W}_1 \times \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \ell_2 \dot{\theta}_1 - \dot{d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$${}^2\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} s_2(\ell_1 \dot{\theta}_1 - \dot{d}) \\ c_2(\ell_1 \dot{\theta}_1 - \dot{d}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### Solide 3

$${}^3\mathbf{W}_3 = {}^3\mathbf{R} \cdot {}^2\mathbf{W}_2 + \dot{\theta}_3 \hat{z}_3 = \begin{pmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}.$$

$${}^3\mathbf{W}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}.$$

$${}^3\mathbf{V}_3 = {}^3\mathbf{R} \cdot ({}^2\mathbf{V}_2 + {}^2\mathbf{W}_2 \times \mathbf{P}_3).$$

Calcul détaillé :

$${}^3\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^2\mathbf{V}_2 + {}^2\mathbf{W}_2 \times \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} \ell_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - \dot{d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$${}^3\mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} c_3 s_2(\ell_1 \dot{\theta}_1 - \dot{d}) + s_3(\ell_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)) \\ -s_3 s_2(\ell_1 \dot{\theta}_1 - \dot{d}) + c_3(\ell_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### Solide 4

$${}^4\mathbf{W}_4 = {}^4\mathbf{R} \cdot {}^3\mathbf{W}_3 + \dot{\theta}_4 \hat{z}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4 \end{pmatrix}.$$

$${}^4\mathbf{V}_4 = {}^4\mathbf{R} \cdot ({}^3\mathbf{V}_3 + {}^3\mathbf{W}_3 \times \mathbf{P}_4).$$

Calcul détaillé :

$${}^4\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c_4 & s_4 & 0 \\ -s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$${}^4\mathbf{V}_4 = \begin{pmatrix} c_4 s_3 s_2(\ell_2 \dot{\theta}_1 - \dot{d}) + s_4(\ell_4(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)) \\ -s_4 s_3 s_2(\ell_2 \dot{\theta}_1 - \dot{d}) + c_4(\ell_4(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 5 Dynamique du Bras Manipulateur

### Calcul des centres d'inertie $\mathbf{P}_{Ci}$

#### Expression générale

Pour un centre d'inertie  $\mathbf{P}_{Ci}$ , exprimé dans le repère 0 :

$$\mathbf{P}Ci^0 = R_i \cdot \mathbf{P}_{Ci}^i$$

où :

- $R_i$  est la matrice de rotation du repère  $i$  par rapport au repère 0,
- $\mathbf{P}Ci^i$  est le centre d'inertie  $\mathbf{P}Ci$  dans son propre repère local  $i$ ,
- $\mathbf{P}_{Ci}^0$  est le centre d'inertie exprimé dans le repère 0.

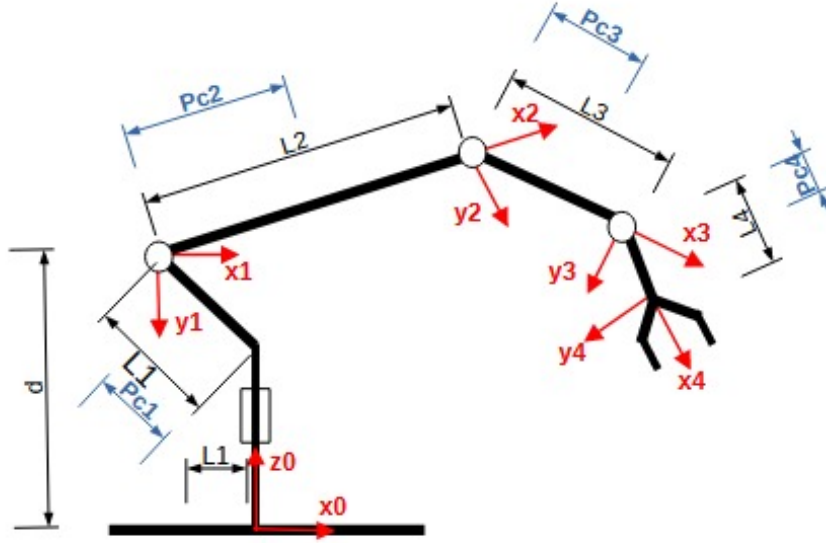


FIGURE 2 – le système des masses

### Calcul des centres d'inertie $P_{Ci}$

Pour le solide 1 :

$$P_{C1}^0 = R_1 \cdot \begin{bmatrix} x_{C1} \\ y_{C1} \\ z_{C1} \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{bmatrix} x_{C1} \\ y_{C1} \\ z_{C1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour le solide 2 :

$$P_{C2}^0 = R_2 \cdot \begin{bmatrix} x_{C2} \\ y_{C2} \\ z_{C2} \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{bmatrix} x_{C2} \\ y_{C2} \\ z_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour le solide 3 :

$$P_{C3}^0 = R_3 \cdot \begin{bmatrix} x_{C3} \\ y_{C3} \\ z_{C3} \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{bmatrix} x_{C3} \\ y_{C3} \\ z_{C3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour le solide 4 :

$$\mathbf{P}_{C4}^0 = R_4 \cdot \begin{bmatrix} x_{C4} \\ y_{C4} \\ z_{C4} \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{bmatrix} x_{C4} \\ y_{C4} \\ z_{C4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_4}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### Forme explicite de $R$

Pour chaque lien  $i$ , la matrice  $R_i$  est définie en fonction de l'angle  $\theta_i$  :

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Résultat final pour chaque solide

Solide 1 :

$$\mathbf{P}_{C1}^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \cdot \frac{L_1}{2} \\ \sin(\theta_1) \cdot \frac{L_1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solide 2 :

$$\mathbf{P}_{C2}^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \cdot \frac{L_2}{2} \\ \sin(\theta_2) \cdot \frac{L_2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solide 3 :

$$\mathbf{P}_{C3}^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) \cdot \frac{L_3}{2} \\ \sin(\theta_3) \cdot \frac{L_3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Solide 4 :**

$$\mathbf{P}_{C4}^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) \cdot \frac{L_4}{2} \\ \sin(\theta_4) \cdot \frac{L_4}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les vitesses des centres d'inertie  $\mathbf{V}Ci^0$  pour chaque solide peuvent être obtenues en dérivant les expressions des positions des centres d'inertie  $\mathbf{P}Ci^0$  par rapport au temps. Voici les expressions détaillées.

## Expression générale

Pour un centre d'inertie  $\mathbf{P}_{Ci}^0$ , sa vitesse dans le repère 0 est donnée par :

$$\mathbf{V}Ci^0 = \frac{d\mathbf{P}Ci^0}{dt}.$$

## Matrice de rotation

La matrice de rotation  $R_i$  dépend de l'angle  $\theta_i$ , et sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\frac{dR_i}{dt} = \dot{\theta}_i \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\theta_i) & -\cos(\theta_i) & 0 \\ \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Calcul des vitesses pour chaque solide

### 1. Pour le solide 1

Position du centre d'inertie  $\mathbf{P}_{C1}^0$  dans le repère 0 :

$$\mathbf{P}_{C1}^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \cdot \frac{L_1}{2} \\ \sin(\theta_1) \cdot \frac{L_1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vitesse du centre d'inertie  $\mathbf{V}_{C1}^0$  :

$$\mathbf{V}_{C1}^0 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1) \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \frac{L_1}{2} \\ \cos(\theta_1) \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \frac{L_1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 2. Pour le solide 2

Position du centre d'inertie  $\mathbf{P}_{C2}^0$  dans le repère 0 :

$$\mathbf{P}_{C2}^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \cdot \frac{L_2}{2} \\ \sin(\theta_2) \cdot \frac{L_2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vitesse du centre d'inertie  $\mathbf{V}_{C2}^0$  :

$$\mathbf{V}_{C2}^0 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \frac{L_2}{2} \\ \cos(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \frac{L_2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$



### 3. Pour le solide 3

Position du centre d'inertie  $\mathbf{P}_{C3}^0$  dans le repère 0 :

$$\mathbf{P}_{C3}^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) \cdot \frac{L_3}{2} \\ \sin(\theta_3) \cdot \frac{L_3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vitesse du centre d'inertie  $\mathbf{V}_{C3}^0$  :

$$\mathbf{V}_{C3}^0 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_3) \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \frac{L_3}{2} \\ \cos(\theta_3) \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \frac{L_3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 4. Pour le solide 4

Position du centre d'inertie  $\mathbf{P}_{C4}^0$  dans le repère 0 :

$$\mathbf{P}_{C4}^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) \cdot \frac{L_4}{2} \\ \sin(\theta_4) \cdot \frac{L_4}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vitesse du centre d'inertie  $\mathbf{V}_{C4}^0$  :

$$\mathbf{V}_{C4}^0 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_4) \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \frac{L_4}{2} \\ \cos(\theta_4) \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \frac{L_4}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### Remarque

Pour chaque solide  $i$ , l'expression des vitesses est obtenue en utilisant :

$$\frac{d}{dt}(\cos(\theta_i)) = -\sin(\theta_i) \cdot \dot{\theta}_i, \quad \frac{d}{dt}(\sin(\theta_i)) = \cos(\theta_i) \cdot \dot{\theta}_i.$$

### Vitesses Angulaires des Solides

Les vitesses angulaires  $\mathbf{W}_i^0$  pour chaque solide exprimées dans le repère 0 sont données par les vecteurs suivants :

#### 1. Pour le solide 1

La vitesse angulaire  $\mathbf{W}_1^0$  est donnée par :

$$\mathbf{W}_1^0 = \dot{\theta}_1 \hat{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

## 2. Pour le solide 2

La vitesse angulaire  $\mathbf{W}_2^0$  est donnée par :

$$\mathbf{W}_2^0 = \dot{\theta}_2 \hat{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

## 3. Pour le solide 3

La vitesse angulaire  $\mathbf{W}_3^0$  est donnée par :

$$\mathbf{W}_3^0 = \dot{\theta}_3 \hat{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

## 4. Pour le solide 4

La vitesse angulaire  $\mathbf{W}_4^0$  est donnée par :

$$\mathbf{W}_4^0 = \dot{\theta}_4 \hat{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

## Matrices d'Inertie des Solides

Les matrices d'inertie  $\mathbf{I}_i$  pour chaque solide exprimées dans le repère 0 sont données par :

### 1. Pour le solide 1

La matrice d'inertie  $\mathbf{I}_1$  est :

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} I_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z1} \end{bmatrix}$$

### 2. Pour le solide 2

La matrice d'inertie  $\mathbf{I}_2$  est :

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} I_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z2} \end{bmatrix}$$

### 3. Pour le solide 3

La matrice d'inertie  $\mathbf{I}_3$  est :

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} I_{x3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z3} \end{bmatrix}$$

#### 4. Pour le solide 4

La matrice d'inertie  $\mathbf{I}_4$  est :

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} I_{x4} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y4} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z4} \end{bmatrix}$$

#### Calcul de l'énergie cinétique pour chaque solide

L'énergie cinétique totale  $K_i$  pour chaque solide  $i$  est donnée par la formule :

$$K_i = \frac{1}{2}m_i \mathbf{V}Ci^0 \cdot \mathbf{V}Ci^0 + \frac{1}{2}\omega_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \omega_i$$

#### 1. Pour le solide 1

L'énergie cinétique  $K_1$  est donnée par :

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1 \left[ \left( -\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 \frac{L_1}{2} \right)^2 + \left( \cos(\theta_1)\dot{\theta}_1 \frac{L_1}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2 I_{z1}$$

#### 2. Pour le solide 2

L'énergie cinétique  $K_2$  est donnée par :

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2 \left[ \left( -\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 \frac{L_2}{2} \right)^2 + \left( \cos(\theta_2)\dot{\theta}_2 \frac{L_2}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 I_{z2}$$

#### 3. Pour le solide 3

L'énergie cinétique  $K_3$  est donnée par :

$$K_3 = \frac{1}{2}m_3 \left[ \left( -\sin(\theta_3)\dot{\theta}_3 \frac{L_3}{2} \right)^2 + \left( \cos(\theta_3)\dot{\theta}_3 \frac{L_3}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}\dot{\theta}_3^2 I_{z3}$$

#### 4. Pour le solide 4

L'énergie cinétique  $K_4$  est donnée par :

$$K_4 = \frac{1}{2}m_4 \left[ \left( -\sin(\theta_4)\dot{\theta}_4 \frac{L_4}{2} \right)^2 + \left( \cos(\theta_4)\dot{\theta}_4 \frac{L_4}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}\dot{\theta}_4^2 I_{z4}$$

$$K_{\text{totale}} = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

$$\begin{aligned} K_{\text{totale}} = & \frac{1}{2}m_1 \left[ \left( -\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 \frac{L_1}{2} \right)^2 + \left( \cos(\theta_1)\dot{\theta}_1 \frac{L_1}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2 I_{z1} \\ & + \frac{1}{2}m_2 \left[ \left( -\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 \frac{L_2}{2} \right)^2 + \left( \cos(\theta_2)\dot{\theta}_2 \frac{L_2}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 I_{z2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} m_3 \left[ \left( -\sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 \frac{L_3}{2} \right)^2 + \left( \cos(\theta_3) \dot{\theta}_3 \frac{L_3}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \dot{\theta}_3^2 I_{z3} \\
& + \frac{1}{2} m_4 \left[ \left( -\sin(\theta_4) \dot{\theta}_4 \frac{L_4}{2} \right)^2 + \left( \cos(\theta_4) \dot{\theta}_4 \frac{L_4}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \dot{\theta}_4^2 I_{z4} \\
P_{C1}^0 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \cdot \frac{L_1}{2} \\ \sin(\theta_1) \cdot \frac{L_1}{2} \\ P_{C1,z} \end{bmatrix}, \quad U_1 = m_1 \cdot \mathbf{g} \cdot P_{C1}^0 = m_1 \cdot g \cdot \sin(\theta_1) \cdot \frac{L_1}{2}. \\
P_{C2}^0 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \cdot \frac{L_2}{2} \\ \sin(\theta_2) \cdot \frac{L_2}{2} \\ P_{C2,z} \end{bmatrix}, \quad U_2 = m_2 \cdot \mathbf{g} \cdot P_{C2}^0 = m_2 \cdot g \cdot \sin(\theta_2) \cdot \frac{L_2}{2}. \\
P_{C3}^0 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) \cdot \frac{L_3}{2} \\ \sin(\theta_3) \cdot \frac{L_3}{2} \\ P_{C3,z} \end{bmatrix}, \quad U_3 = m_3 \cdot \mathbf{g} \cdot P_{C3}^0 = m_3 \cdot g \cdot \sin(\theta_3) \cdot \frac{L_3}{2}. \\
P_{C4}^0 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) \cdot \frac{L_4}{2} \\ \sin(\theta_4) \cdot \frac{L_4}{2} \\ P_{C4,z} \end{bmatrix}, \quad U_4 = m_4 \cdot \mathbf{g} \cdot P_{C4}^0 = m_4 \cdot g \cdot \sin(\theta_4) \cdot \frac{L_4}{2}.
\end{aligned}$$

$$U_{\text{totale}} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

$$U_{\text{totale}} = m_1 \cdot g \cdot \sin(\theta_1) \cdot \frac{L_1}{2} + m_2 \cdot g \cdot \sin(\theta_2) \cdot \frac{L_2}{2} + m_3 \cdot g \cdot \sin(\theta_3) \cdot \frac{L_3}{2} + m_4 \cdot g \cdot \sin(\theta_4)$$

## Équations de Lagrange avec torques

### 1. Énergies cinétique et potentielle totales

$$K = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{1}{2} m_i (\mathbf{V} C_i^T \mathbf{V} C_i) + \frac{1}{2} \omega_i^T \mathbf{I} C_i \omega_i \right),$$

$$U = \sum_{i=1}^4 m_i g \cdot \mathbf{P}_{C_i}.$$

### 2. Lagrangien

$$L = K - U.$$

### 3. Équations de Lagrange

Pour chaque angle  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \tau_i.$$

## 4. Calcul des termes

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_i}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_i} \right),$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \frac{\partial K}{\partial \theta_i} - \frac{\partial U}{\partial \theta_i}.$$

Équation finale :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \left( \frac{\partial K}{\partial \theta_i} - \frac{\partial U}{\partial \theta_i} \right) = \tau_i.$$

## Équations de Lagrange pour les Torques $\tau_i$

### 1. Fonction de Lagrange

La fonction de Lagrange est définie comme :

$$L = K_{\text{total}} - U_{\text{total}},$$

où  $K_{\text{total}}$  est l'énergie cinétique totale et  $U_{\text{total}}$  est l'énergie potentielle totale.

### 2. Énergie cinétique totale

$$K_{\text{total}} = \frac{1}{2}m_1 \left[ \left( -\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 \frac{L_1}{2} \right)^2 + \left( \cos(\theta_1)\dot{\theta}_1 \frac{L_1}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}Iz1\dot{\theta}_1^2$$
$$+ \frac{1}{2}m_2 \left[ \left( -\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 \frac{L_2}{2} \right)^2 + \left( \cos(\theta_2)\dot{\theta}_2 \frac{L_2}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}Iz2\dot{\theta}_2^2 + \dots$$

### 3. Énergie potentielle totale

$$U_{\text{total}} = m_1 g \sin(\theta_1) \frac{L_1}{2} + m_2 g \sin(\theta_2) \frac{L_2}{2} + \dots$$

## 4. Équations de Lagrange

Les équations de Lagrange pour chaque degré de liberté  $\theta_i$  sont données par :

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i}.$$

Pour  $\tau_1$  :

1. Calcul de  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}$  :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 \dot{\theta}_1 \left( \frac{L_1}{2} \right)^2 + Iz1\dot{\theta}_1.$$

2. Dérivée temporelle :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1 \ddot{\theta}_1 \left( \frac{L_1}{2} \right)^2 + I_{z1} \ddot{\theta}_1.$$

3. Calcul de  $\frac{\partial L}{\partial \theta_1}$  :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_1 g \cos(\theta_1) \frac{L_1}{2}.$$

4. Expression finale pour  $\tau_1$  :

$$\tau_1 = m_1 \ddot{\theta}_1 \left( \frac{L_1}{2} \right)^2 + I_{z1} \ddot{\theta}_1 + m_1 g \cos(\theta_1) \frac{L_1}{2}.$$

**Pour  $\tau_2, \tau_3, \tau_4$  :**

De manière similaire, les expressions pour les autres torques sont :

$$\tau_2 = m_2 \ddot{\theta}_2 \left( \frac{L_2}{2} \right)^2 + I_{z2} \ddot{\theta}_2 + m_2 g \cos(\theta_2) \frac{L_2}{2},$$

$$\tau_3 = m_3 \ddot{\theta}_3 \left( \frac{L_3}{2} \right)^2 + I_{z3} \ddot{\theta}_3 + m_3 g \cos(\theta_3) \frac{L_3}{2},$$

$$\tau_4 = m_4 \ddot{\theta}_4 \left( \frac{L_4}{2} \right)^2 + I_{z4} \ddot{\theta}_4 + m_4 g \cos(\theta_4) \frac{L_4}{2}.$$

**Matrice d'inertie  $M(\theta)$**

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}m_1 L_1^2 + I_{z,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}m_2 L_2^2 + I_{z,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}m_3 L_3^2 + I_{z,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}m_4 L_4^2 + I_{z,4} \end{bmatrix}.$$

**Termes de vitesse  $V(\dot{\theta}, \theta)$**

$$V(\dot{\theta}, \theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Terme gravitationnel  $G(\theta)$**

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} m_1 g \cos(\theta_1) \frac{L_1}{2} \\ m_2 g \cos(\theta_2) \frac{L_2}{2} \\ m_3 g \cos(\theta_3) \frac{L_3}{2} \\ m_4 g \cos(\theta_4) \frac{L_4}{2} \end{bmatrix}.$$

## 6 Simulation sur Matlab Simulink

### 6.1 Espace de travail du Robot

#### Le code Matlab

```
L1 = 50; % Longueur du premier segment
L2 = 90; % Longueur du deuxième segment
L3 = 108; % Longueur du troisième segment
L4 = 62.5; % Longueur du quatrième segment

% Gammes des angles pour chaque articulation (en radians)
nb_points = 30; % Résolution de l'espace de travail
q1 = linspace(-pi, pi, nb_points); % Articulation 1
q2 = linspace(-pi/2, pi/2, nb_points); % Articulation 2
q3 = linspace(-pi, pi, nb_points); % Articulation 3
q4 = linspace(-pi/2, pi/2, nb_points); % Articulation 4
q5 = linspace(-pi, pi, nb_points); % Articulation 5
q6 = linspace(-pi, pi, nb_points); % Articulation 6

% Initialisation des points dans l'espace 3D
points = [];

% Boucles pour parcourir les combinaisons des angles
for theta1 = q1
    for theta2 = q2
        for theta3 = q3
            for theta4 = q4
                for theta5 = q5
                    for theta6 = q6
                        % Calcul des coordonnées du point final (cinématique directe)
                        x = L2*cos(theta1)*cos(theta2) + L3*cos(theta1)*cos
(theta2+theta3) + L4*cos(theta1)*cos(theta2+theta3+theta4);
                        y = L2*sin(theta1)*cos(theta2) + L3*sin(theta1)*cos
(theta2+theta3) + L4*sin(theta1)*cos(theta2+theta3+theta4);
                        z = L1 + L2*sin(theta2) + L3*sin(theta2+theta3) + L4*sin
(theta2+theta3+theta4);

                        % Stocker les coordonnées dans la matrice des points
                        points = [points; x, y, z];
                    end
                end
            end
        end
    end
end

% Tracé de l'espace de travail
figure;
```

```

scatter3(points(:,1), points(:,2), points(:,3), 1, 'filled'); % Points dans l'espace
3D
xlabel('X'); ylabel('Y'); zlabel('Z');
title('Espace de travail du robot');
grid on;

```

## 6.2 Résultat de la simulation de l'espace de travail

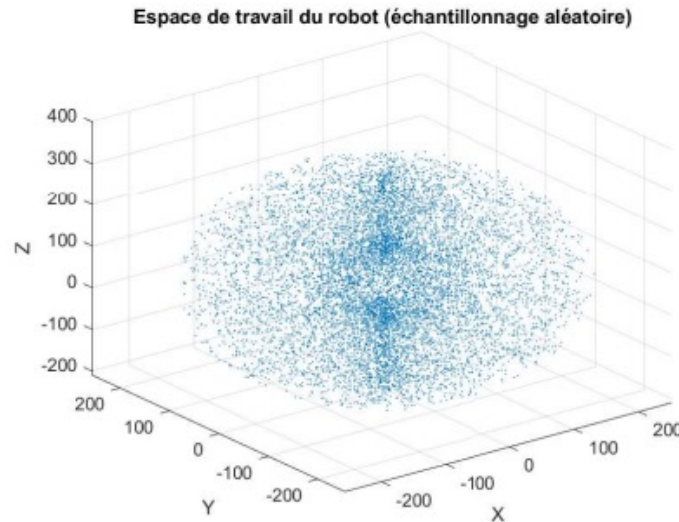


FIGURE 3 – espace du travail de robot

## 6.3 Simulation du Robot

```

% Paramètres du robot (longueurs des segments)
L1 = 50; % Longueur du segment 1
L2 = 90; % Longueur du segment 2
L3 = 108; % Longueur du segment 3
L4 = 62.5; % Longueur du segment 4
% Nombre d'étapes dans la simulation
num_steps = 100;
% Génération d'angles pour chaque articulation
theta1 = linspace(0, pi/2, num_steps); % Articulation 1
theta2 = linspace(0, pi/4, num_steps); % Articulation 2
theta3 = linspace(0, -pi/4, num_steps); % Articulation 3
theta4 = linspace(0, pi/6, num_steps); % Articulation 4
theta5 = linspace(0, pi/4, num_steps); % Articulation 5
theta6 = linspace(0, pi/2, num_steps); % Articulation 6
% Initialisation de la figure
figure;
hold on;

```



```

grid on;
axis equal;
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
title('Simulation du robot 6 DOF');

```

## Boucle pour simuler le mouvement

```

for i = 1:num_steps
    % Angles courants
    t1 = theta1(i);
    t2 = theta2(i);
    t3 = theta3(i);
    t4 = theta4(i);

    % Calcul des positions des points clés (cinématique directe)
    % Base
    x0 = 0; y0 = 0; z0 = 0;

    % Joint 1
    x1 = 0; y1 = 0; z1 = L1;

    % Joint 2
    x2 = L2 * cos(t1) * cos(t2);
    y2 = L2 * sin(t1) * cos(t2);
    z2 = L1 + L2 * sin(t2);

    % Joint 3
    x3 = x2 + L3 * cos(t1) * cos(t2 + t3);
    y3 = y2 + L3 * sin(t1) * cos(t2 + t3);
    z3 = z2 + L3 * sin(t2 + t3);

    % Joint 4
    x4 = x3 + L4 * cos(t1) * cos(t2 + t3 + t4);
    y4 = y3 + L4 * sin(t1) * cos(t2 + t3 + t4);
    z4 = z3 + L4 * sin(t2 + t3 + t4);

    % Tracé des segments du robot
    clf;
    plot3([x0, x1], [y0, y1], [z0, z1], 'r', 'LineWidth', 2); % Segment 1
    hold on;
    plot3([x1, x2], [y1, y2], [z1, z2], 'g', 'LineWidth', 2); % Segment 2
    plot3([x2, x3], [y2, y3], [z2, z3], 'b', 'LineWidth', 2); % Segment 3
    plot3([x3, x4], [y3, y4], [z3, z4], 'k', 'LineWidth', 2); % Segment 4

    % Points
    scatter3([x0, x1, x2, x3, x4], [y0, y1, y2, y3, y4], [z0, z1, z2, z3, z4], 50, 'fi

```

```

% Configuration de l'affichage
axis([-200, 200, -200, 200, 0, 200]);
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
grid on;
pause(0.1); % Pause pour l'animation
end

```

## 6.4 Résultat de simulation du Robot

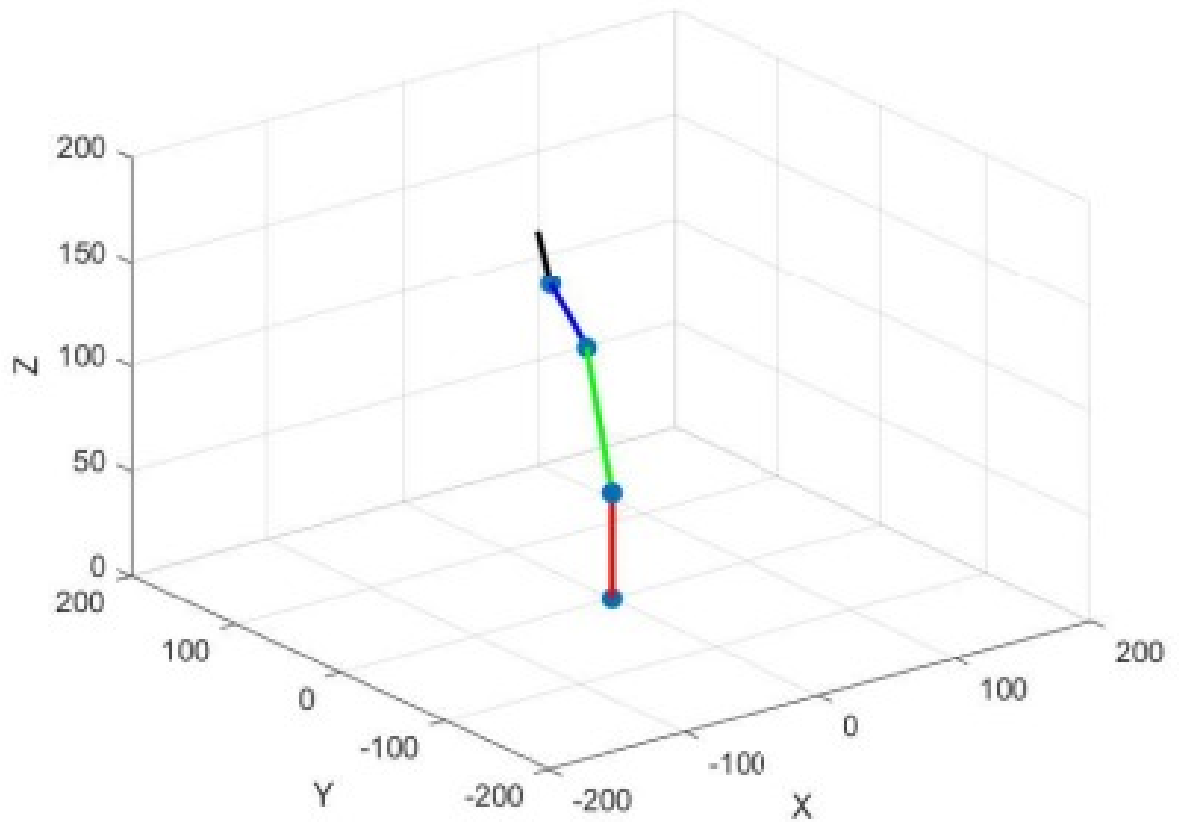


FIGURE 4 – Simulation du Robot

## 6.5 Conception 3D du Robot

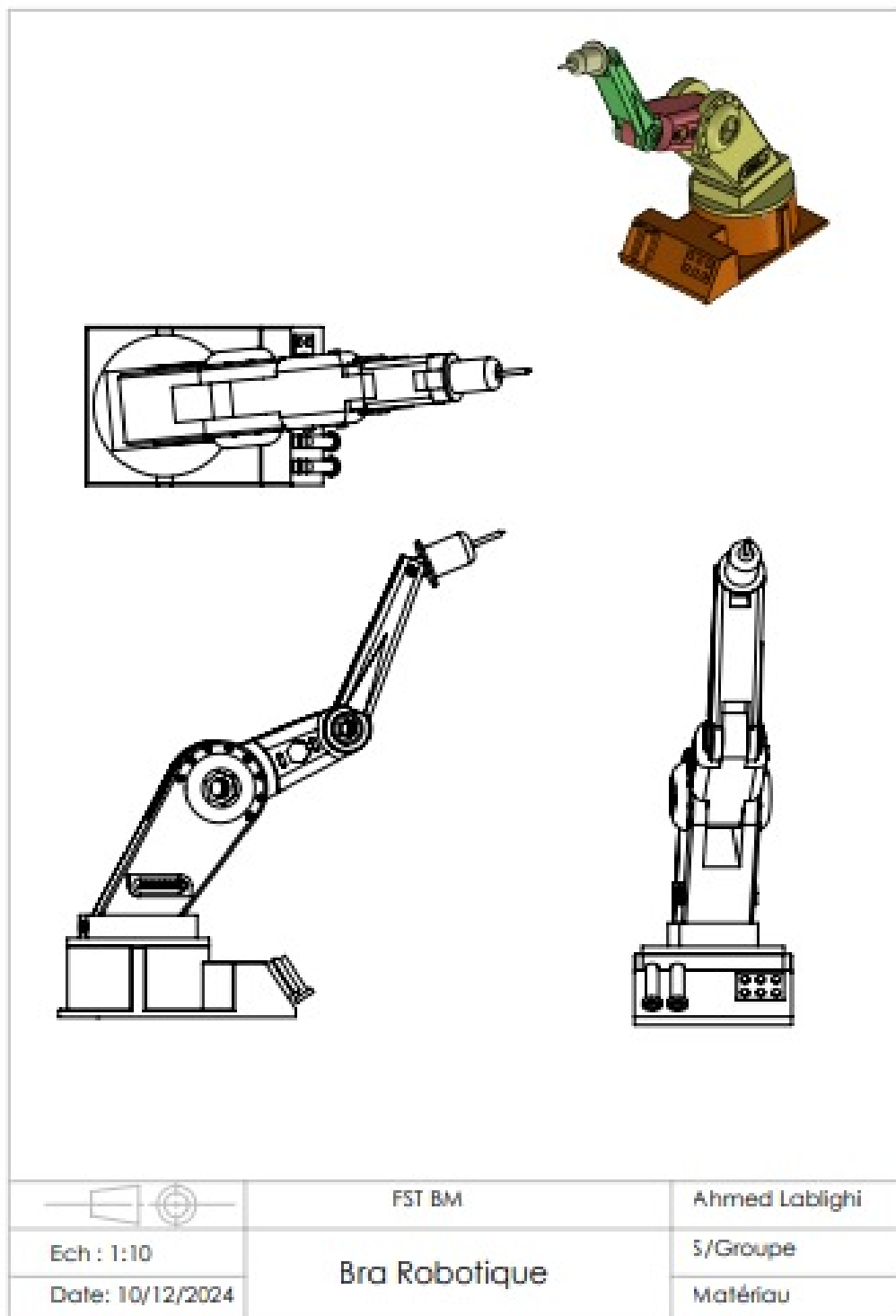


FIGURE 5 – Mise en plan

## 6.6 Exportation vers Matlab Simulink

La bibliothèque Simscape Multi-body Link de MATLAB est un outil puissant permettant d'établir une intégration directe entre les modèles CAO, comme ceux réalisés dans SolidWorks, et l'environnement de simulation MATLAB/Simulink. Cette bibliothèque facilite l'exportation des modèles mécaniques en format XML, décrivant la structure et les articulations du système. Avec cette approche, chaque composant du modèle est importé en tant que bloc Simscape, prêt pour une simulation dynamique. Cela permet d'exploiter la puissance de MATLAB Simulink pour analyser les comportements dynamiques, simuler les contraintes, tester les lois de commande et optimiser les performances du système. En utilisant Simscape Multi-body Link, il devient possible de créer une simulation réaliste et fonctionnelle d'un bras robotique directement basé sur sa conception 3D.

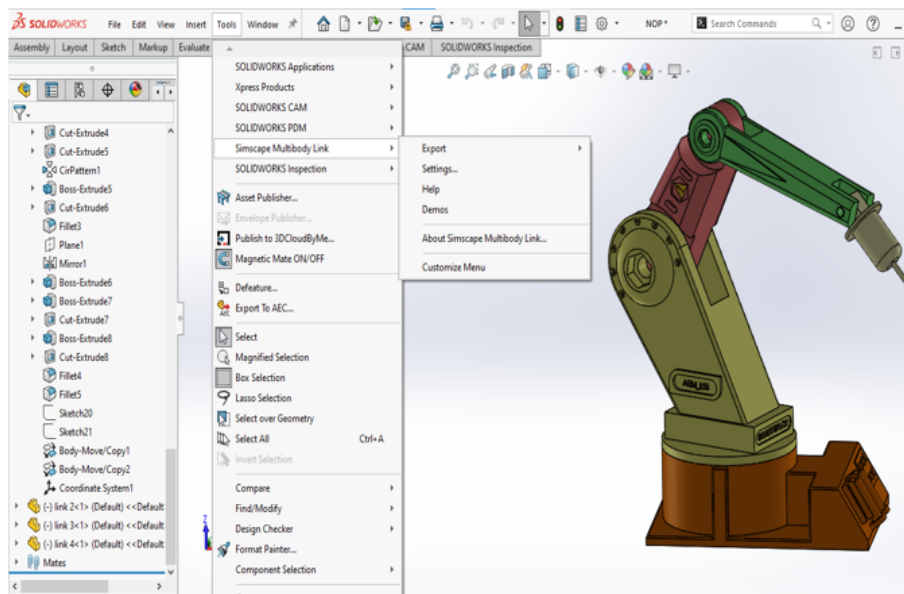


FIGURE 6 – le bras en Solidworks

## 6.7 Simulation dans MATLAB Simulink

La simulation dans MATLAB Simulink permet d'analyser et de valider les performances dynamiques et cinématiques du bras robotique à 4 rotations après son importation depuis SolidWorks. Voici les étapes principales pour réaliser cette simulation : 4.1 Importation du Modèle Chargement du modèle dans MATLAB : Utilisez la commande suivante pour importer le fichier XML généré par Simscape Multibody Link :

```
Command Window
>> mech_import
Warning: The Simscape Multibody First Generation library will soon be deprecated. Import the CAD model in to a Second Generation model. For more information, see Model_Import in the product documentation.
> In mech_deprecation_warning
In mech_import (line 97)
%>>
```

FIGURE 7 – la commande

## 6.8 Vérification de la structure mécanique

Ouvrez le modèle dans Simulink pour inspecter les articulations, les connexions, et les paramètres dynamiques.

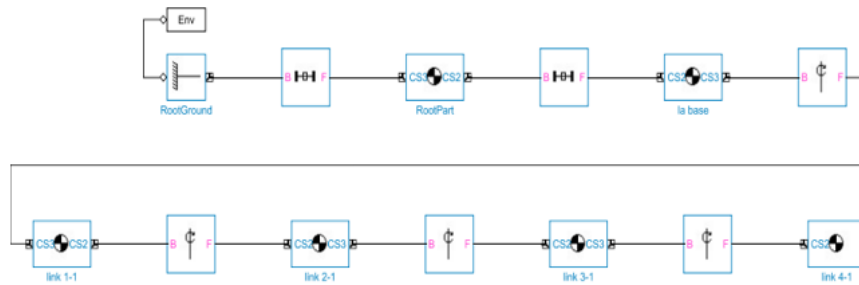


FIGURE 8 – le modèle dans Simulink

Assurez-vous que les pièces mobiles \*rotations ou translations\* correspondent aux contraintes définies dans SolidWorks.

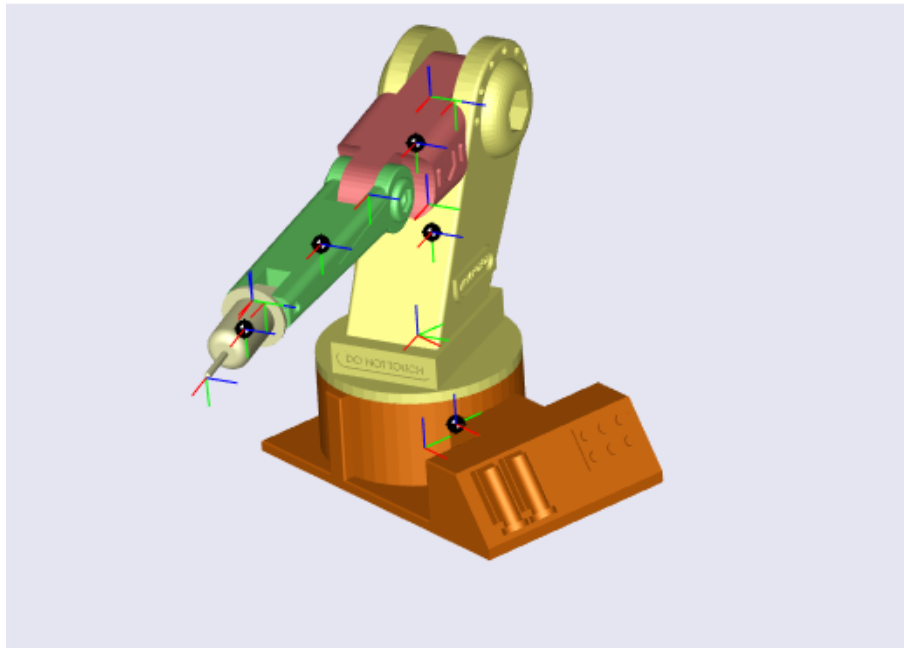


FIGURE 9 – le robot dans Solidworks

## 6.9 Ajout des Blocs de Commande

L'ajout des blocs de commande dans Simulink est une étape essentielle pour simuler et contrôler le bras robotique. Cela implique l'intégration de blocs d'actionneurs, tels que les Rotational Actuators de la bibliothèque Simscape, pour piloter les articulations du bras. Ces actionneurs sont reliés aux joints mécaniques importés depuis SolidWorks, permettant ainsi de convertir les signaux de commande en mouvements rotatifs. Par ailleurs,

des blocs générateurs de signaux, comme Step ou Signal Generator, sont utilisés pour définir les consignes de mouvement (positions, vitesses ou couples) en fonction des besoins de la simulation. Cette configuration permet de reproduire fidèlement le comportement dynamique et d'évaluer les performances des stratégies de commande mises en œuvre.

## 6.10 Simulation de la Cinématique et de la Dynamique

La simulation de la cinématique inverse dans MATLAB Simulink consiste à déterminer les angles des articulations nécessaires pour positionner l'extrémité du bras robotique à une position cible donnée dans l'espace. on va voir dans la partie suivante.

# 7 Développement de l'Interface Utilisateur

## 7.1 Conception de l'Interface

Le développement de l'interface utilisateur (UI) dans MATLAB facilite l'interaction entre l'utilisateur et le système de simulation du bras robotique. Cette interface permet de configurer les paramètres de la simulation, de définir des positions cibles et d'observer les résultats en temps réel.



FIGURE 10 – l'Interface d'Utilisateur

"Default" (en violet) : Fonction : Réinitialise tous les paramètres et curseurs de l'interface à leurs valeurs par défaut. Utilisation : Ramène le bras robotique à une position initiale ou neutre définie, utile pour recommencer une simulation.

"Inverse" (en jaune) : Fonction : Calcule la cinématique inverse à partir des coordonnées (Px,Py,Pz) saisies par l'utilisateur et met à jour les angles des articulations (1,2,3,4).

Utilisation : Permet de commander le bras robotique en spécifiant une position cible dans l'espace cartésien.

"CLOSE" (en rouge) : Fonction : Ferme l'interface utilisateur et met fin à la simulation ou au programme en cours. Utilisation : Utilisé pour quitter l'application une fois les simulations terminées.

## 8 Simulation par ROS

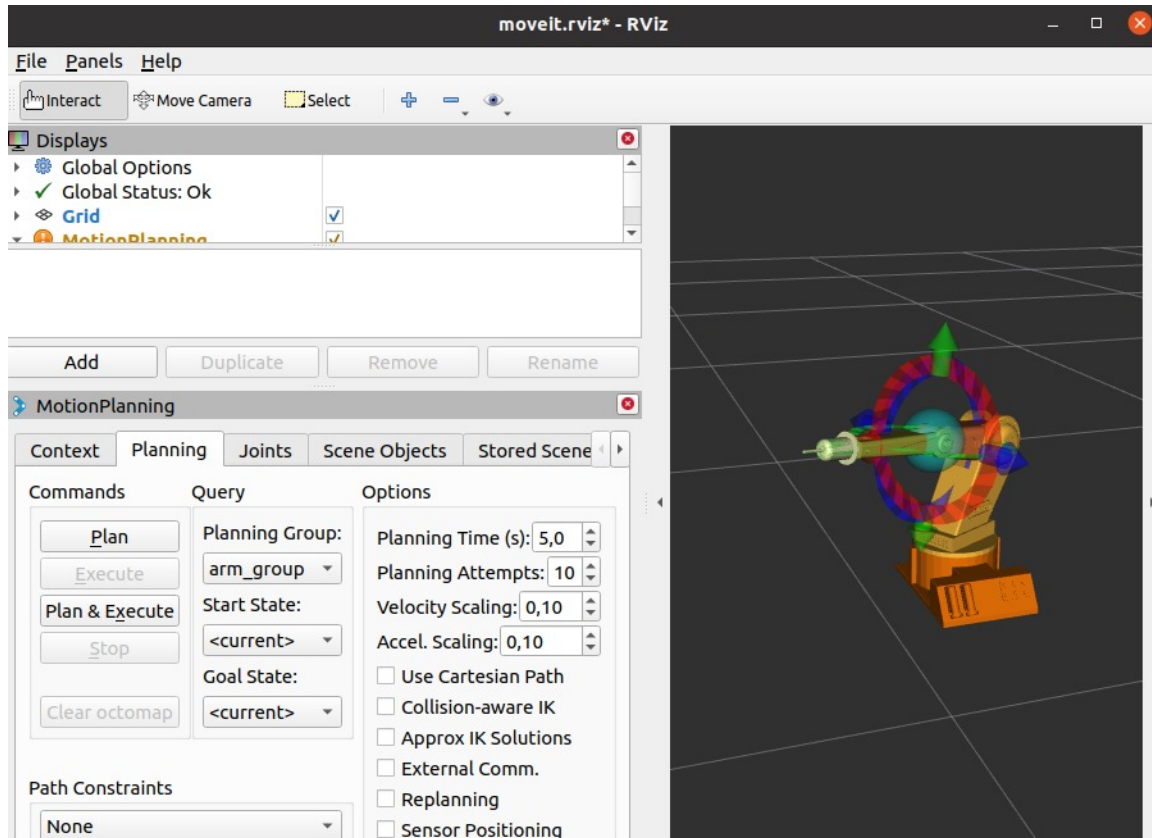


FIGURE 11 – Simulation par ROS

La simulation que nous avons réalisée à l'aide de ROS (Robot Operating System) consiste à modéliser et à exécuter un processus de peinture automatisé. Dans cette simulation, nous avons configuré plusieurs paramètres clés, tels que le temps de peinture (5,0 secondes), le nombre de tentatives de peinture (10), et l'échelle de mouvement (0,10). Nous avons également activé des fonctionnalités avancées comme l'utilisation d'un chemin cartésien pour garantir des trajectoires précises, ainsi qu'une cinématique inverse (IK) prenant en compte les collisions pour éviter les obstacles. Cette simulation permet de tester et d'optimiser le processus de peinture dans un environnement virtuel avant son déploiement sur un robot physique, assurant ainsi une exécution sûre et efficace. NB . le détails de cette partie est sur l'annexe .

## 9 Annexes

### Note au lecteur

Les annexes détaillées, y compris les informations complètes sur la simulation réalisée avec ROS, sont disponibles dans le polycopié ci-joint. Vous pouvez vous y référer pour obtenir des informations supplémentaires sur les paramètres, les fonctionnalités utilisées, et les résultats de la simulation.

## 10 Références et sources

### Références

- [1] ROS Documentation Officielle.  
<https://www.ros.org/documentation/>
- [2] MoveIt! Documentation.  
<https://moveit.ros.org/documentation/>
- [3] Gazebo Simulator.  
<http://gazebo.org/>
- [4] M. W. Spong, S. Hutchinson, et M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*. Wiley, 2005.
- [5] J. J. Craig, *Introduction to Robotics : Mechanics and Control*. Pearson, 2004.
- [6] S. M. LaValle, *Planning Algorithms*. Cambridge University Press, 2006.
- [7] P. Corke, *Robotics, Vision and Control : Fundamental Algorithms in MATLAB*. Springer, 2017.
- [8] K. M. Lynch et F. C. Park, *Modern Robotics : Mechanics, Planning, and Control*. Cambridge University Press, 2017.
- [9] ROS Control Documentation.  
[http://wiki.ros.org/ros\\_control](http://wiki.ros.org/ros_control)
- [10] B. Siciliano et O. Khatib (éditeurs), *Handbook of Robotics*. Springer, 2016.
- [11] Coursera, "Robotics Specialization" par l'Université de Pennsylvanie.  
<https://www.coursera.org/specializations/robotics>
- [12] edX, "Robotics MicroMasters" par l'Université de Columbia.  
<https://www.edx.org/micromasters/columbiacx-robotics>
- [13] LaTeX Documentation.  
<https://www.latex-project.org/help/>
- [14] Overleaf (Guide LaTeX).  
<https://www.overleaf.com/learn>
- [15] IEEE, *The IEEE Guide to Writing in Engineering and Science*. IEEE Press, 2013.