系统分析与控制原理II：线性系统分析与设计

稳定性与李雅普诺夫方法

概述

- 稳定性：重要性

概述：本章要讨论的问题

- 稳定性：WHAT?

- 稳定性：HOW?

概述：本章安排

4.1 李雅普诺夫关于稳定性的定义

4.2 李雅普诺夫第一法

4.3 李雅普诺夫第二法

4.4 李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

4.5 李雅普诺夫方法在非线性系统中的应用

4.6 稳定性分析：李雅普诺夫方法 + 线性矩阵不等式

概述：重点&预备知识

- 重点
  - 李雅普诺夫定义的稳定性
  - 李雅普诺夫第二方法及其应用

- 预备知识
  - 欧氏范数、标量函数的正/负定、矩阵的正定/负定、顺序主子行列式、导数计算

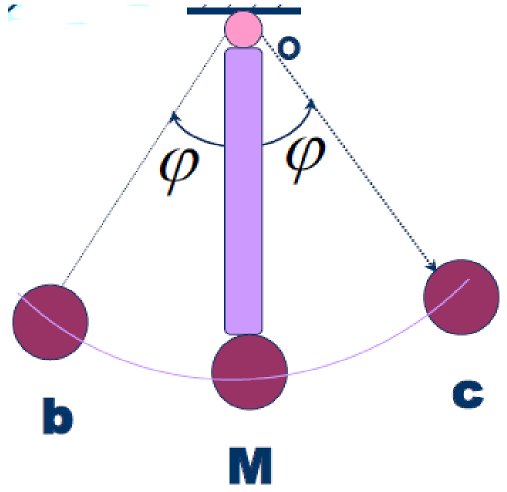
稳定性与李雅普诺夫方法

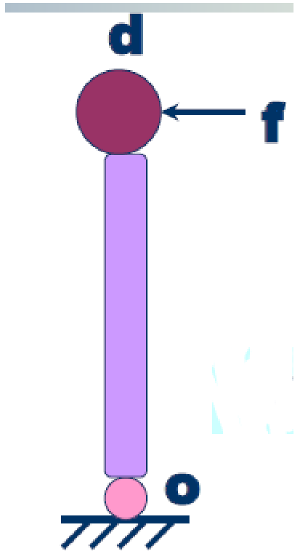
李雅普诺夫关于稳定性的定义

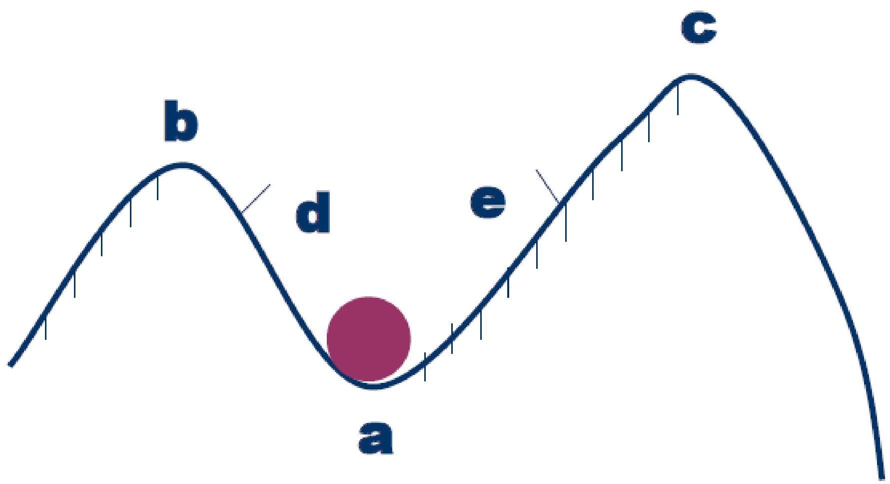
- 直观讨论
  - 内部稳定、外部稳定、及相互关系

李雅普诺夫关于稳定性的定义

➢ 直观讨论



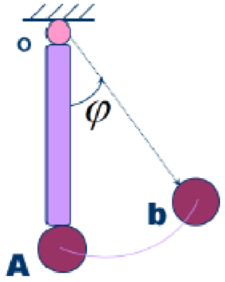




❑ 稳定性：外界干扰使系统平衡被破坏，在外界干扰消失后，系统是否能自动地恢复到原来平衡态，若能，则稳定。

李雅普诺夫关于稳定性的定义

➢ 直观讨论



系统稳定性问题：外界干扰使系统平衡被破坏，在外界干扰消失后，系统是否能自动地恢复到平衡态附近继续工作。

❑ 稳定性：处于平衡状态的系统，因外部作用产生初始偏差，若该偏差随时间逐渐衰减并趋于零，即恢复至原平衡状态，则称系统是稳定的。

✓ 平衡状态：

✓ 外部作用、初始偏差：

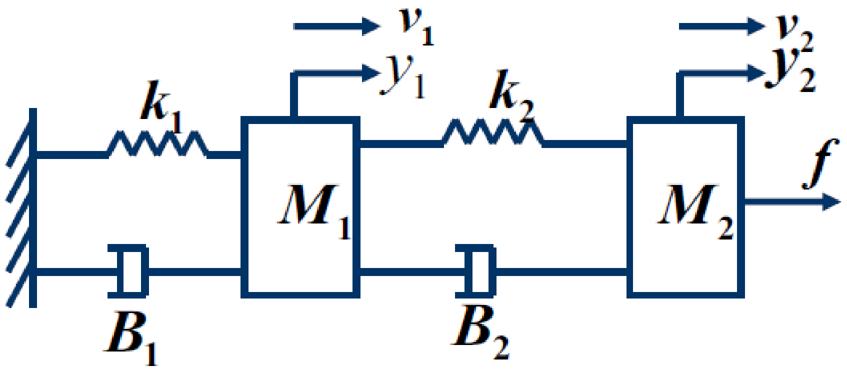
✓ 演变过程、偏差量：

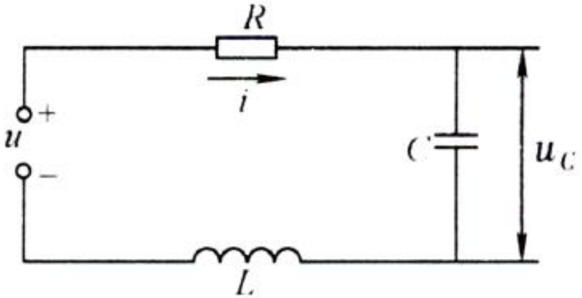
✓ 系统的自由运动：

李雅普诺夫关于稳定性的定义

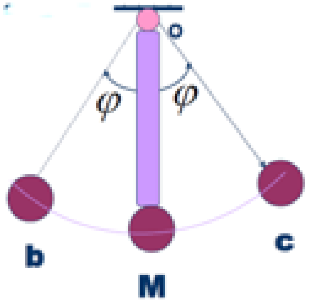
- 平衡状态（平衡态、平衡点）
  - 状态方程：自由运动、无控制输入

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0$$





R-L-C 电路



- ✓ 平衡状态：
- ✓ 外部作用、初始偏差：
- ✓ 演变过程、偏差量：

李雅普诺夫关于稳定性的定义

➢ 平衡状态（平衡态、平衡点）

- 状态方程：自由运动、无控制输入

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0$$

- 平衡状态：若对所有 t 有 $\dot{x} = 0$ 则该状态为平衡状态，x_e

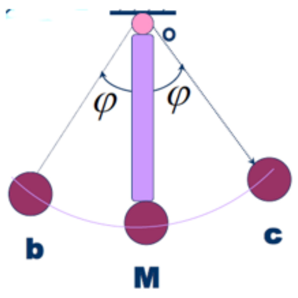
$$f(x_e, t) = 0$$

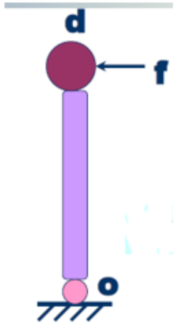
- 平衡点：平衡状态在状态空间中确定的点

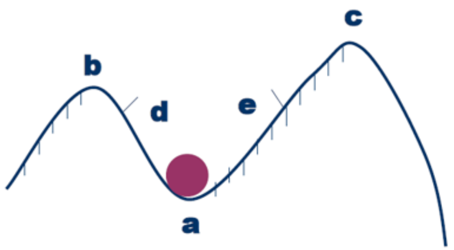
李雅普诺夫关于稳定性的定义

➢ 平衡状态（平衡态、平衡点）

❑ 保持平衡、维持现状不动







❑ 是否唯一？

$$\dot{x} = f(x,t) = Ax$$

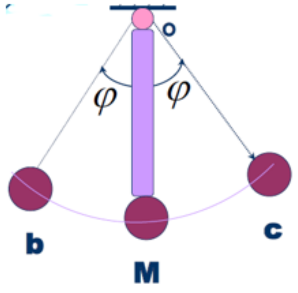
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

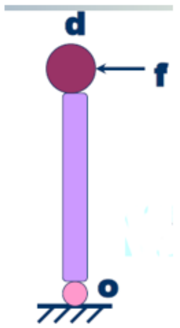
$$\boldsymbol{x}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

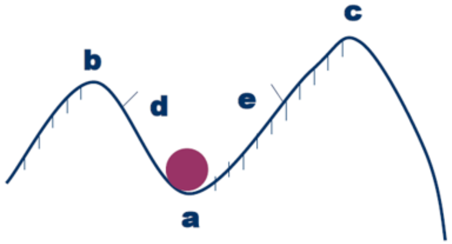
李雅普诺夫关于稳定性的定义

➢ 平衡状态（平衡态、平衡点）

- 保持平衡、维持现状不动







- 是否唯一？

$$\dot{x} = f(x,t) = Ax$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2^3 \end{cases} \quad \boldsymbol{x}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 稳定性针对平衡点而言；非零平衡状态，坐标变换将其转移至坐标原点

李雅普诺夫关于稳定性的定义

- ✓ 平衡状态：
- ✓ 外部作用、初始偏差：
- ✓ 演变过程、偏差量：

➢ 偏差：初始偏差、演变过程偏差量

❑ 与平衡状态的偏差、与平衡点的距离、欧氏范数

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e\|=\sqrt{(x_1-x_{e_1})^2+\cdots(x_n-x_{e_n})^2}$$

❑ 领域：在状态空间中以平衡点为球心，以ε为半径的超球体

$$\|x-x_e\|\le\varepsilon \qquad \varepsilon>0$$

李雅普诺夫关于稳定性的定义

稳定性含义

- 稳定性：处于平衡状态的系统，因外部作用产生初始偏差，该偏差随时间逐渐衰减并趋于零，即恢复至原平衡状态，则称系统是稳定的。

✓ 平衡态

$$f(x_e, t) = 0$$

✓ 初始偏差

$x_0 = x(t_0)$　　$\|x_0 - x_e\|$

✓ 演变过程中偏差量

$x(t)\ [t > t_0]$　　$\|x(t) - x_e\|$:

- 是否稳定？

$$\|x_0 - x_e\|$$

$$\downarrow$$

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e\| = \sqrt{(x_1 - x_{e_1})^2 + \cdots (x_n - x_{e_n})^2}$$

李雅普诺夫关于稳定性的定义

- 稳定性定义

$$\|x_0 - x_e\|$$

$$\downarrow$$

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e\| = \sqrt{(x_1 - x_{e_1})^2 + \cdots (x_n - x_{e_n})^2}$$

- ✓ 李雅普诺夫意义下的稳定（稳定）
- ✓ 渐近稳定：大范围渐近稳定（全局渐近稳定）、局部渐近稳定
- ✓ 不稳定

李雅普诺夫关于稳定性的定义

- 李雅普诺夫意义下的稳定（稳定）
  - 考虑系统 $\dot{x}=f(x,t)$，若对任意给定实数 $\varepsilon>0$ 存在对应实数 $\delta(\varepsilon, t_0)>0$，使得从满足 $\|x_0-x_e\|\le\delta(\varepsilon,t_0)$ 的任意初始状态 x_0出发的解$x(t)$都满足 $\|x(t)-x_e\|\le\varepsilon$， $t\ge t_0$，则系统（平衡状态）是李雅普诺夫意义下稳定。

$$\|x_0-x_e\|$$

$$\downarrow$$

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e\|$$

李雅普诺夫关于稳定性的定义

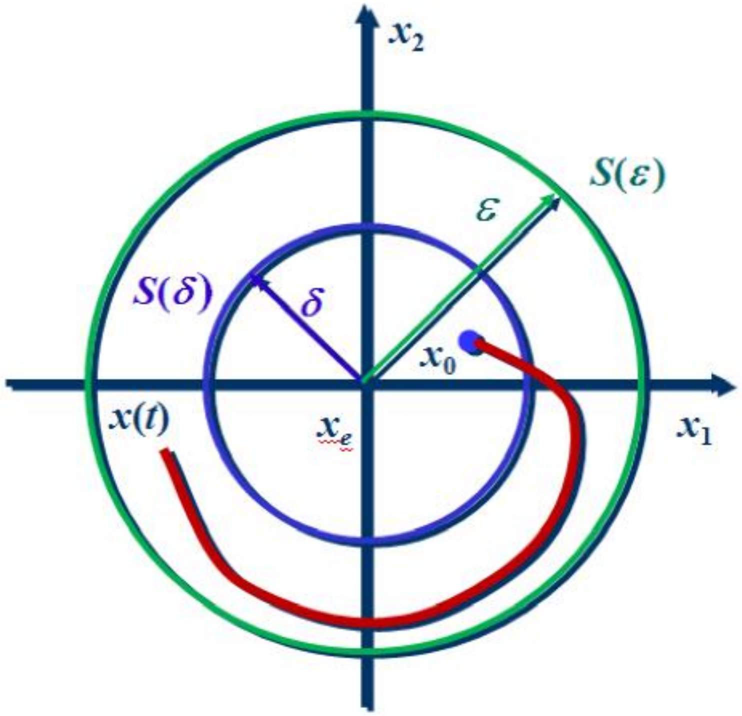
- 李雅普诺夫意义下的稳定（稳定）
  - 考虑系统 $\dot{x}=f(x,t)$，若对任意给定实数 $\varepsilon>0$ 存在对应实数 $\delta(\varepsilon, t_0)>0$，使得从满足 $\|x_0-x_e\|\leq\delta(\varepsilon,t_0)$ 的任意初始状态 x_0 出发的解 $x(t)$ 都满足 $\|x(t)-x_e\|\leq\varepsilon$， $t\geq t_0$，则系统（平衡状态）是李雅普诺夫意义下稳定。

初始状态：

$$\|x_0-x_e\|\leq\delta(\varepsilon,t_0),\ t=t_0$$

状态变化过程：

$$\|x(t)-x_e\|\leq\varepsilon，\quad t\geq t_0$$



李雅普诺夫关于稳定性的定义

- 渐近稳定

  - 考虑系统 $\dot{x}=f(x,t)$ ，若系统（平衡状态）是李雅普诺夫意义下稳定的，而且系统状态最终趋近于平衡态，即 $\lim_{t\to\infty}x(t)=x_e$，则系统（平衡状态）是渐近稳定。

$$\|x_0-x_e\|$$

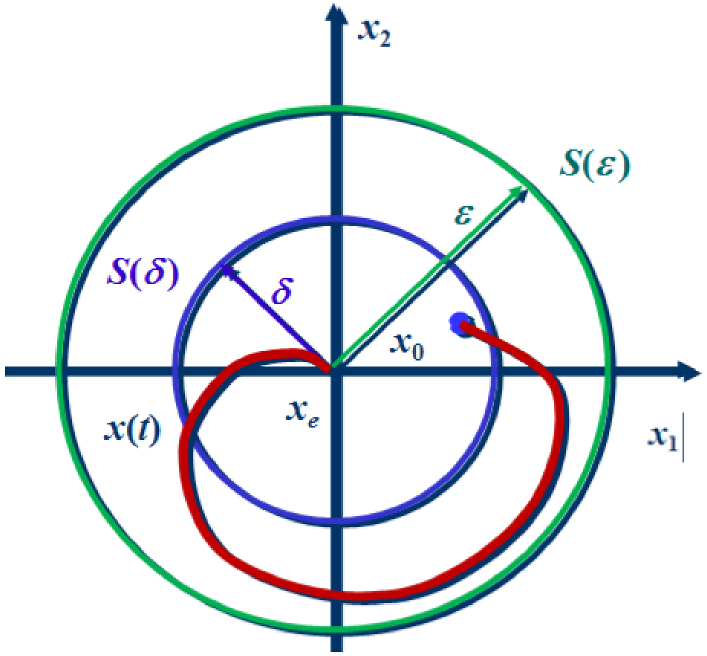
$$\downarrow$$

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e\|$$

李雅普诺夫关于稳定性的定义

➢ 渐近稳定

- 考虑系统 $\dot{x}=f(x,t)$ ，若系统（平衡状态）是李雅普诺夫意义下稳定的，而且系统状态最终趋近于平衡态，即 $\lim_{t\to\infty}x(t)=x_e$，则系统（平衡状态）是渐近稳定。



初始状态：

$$\|x_0-x_e\|\le\delta(\varepsilon,t_0),\ t=t_0$$

状态变化过程：

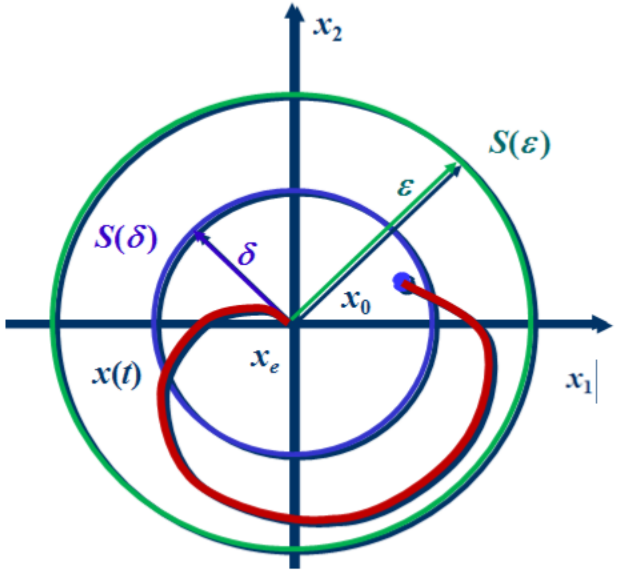
$$\|x(t)-x_e\|\le\varepsilon,\quad t\ge t_0$$

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=x_e$$

李雅普诺夫关于稳定性的定义

- 大范围（全局）渐近稳定、范围（局部）渐近稳定

  - 考虑系统 $\dot{x}=f(x,t)$ ，若系统（平衡状态）是渐近稳定，且初始偏差可为任意值（从整个状态空间出发的初始状态），则系统（平衡状态）是全局渐近稳定的；反之，称为局部渐近稳定。



$$\|x_0 - x_e\| \le \delta(\varepsilon, t_0),\ t = t_0$$

$$\|x(t) - x_e\| \le \varepsilon,\quad t \ge t_0 \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = x_e$$

李雅普诺夫关于稳定性的定义

- 大范围（全局）渐近稳定、范围（局部）渐近稳定
  - 讨论
    - ✓ 全局渐近稳定：只有一个平衡状态
    - ✓ 局部渐近稳定：可选初始条件范围
    - ✓ 线性系统
    - ✓ 非线性系统

李雅普诺夫关于稳定性的定义

➢ 不稳定

- 考虑系统 $\dot{x}=f(x,t)$，若对某一实数 $\varepsilon>0$ 和任意小的实数 $\delta(\varepsilon,\ t_0)>0$，使得从满足 $\|x_0-x_e\|\le\delta(\varepsilon,t_0)$ 的任意初始状态 x_0 出发的所有解 $x(t)$ 中，至少有一个不满足 $\|x(t)-x_e\|\le\varepsilon$，$t\ge t_0$， 则系统（平衡状态）是不稳定性的。

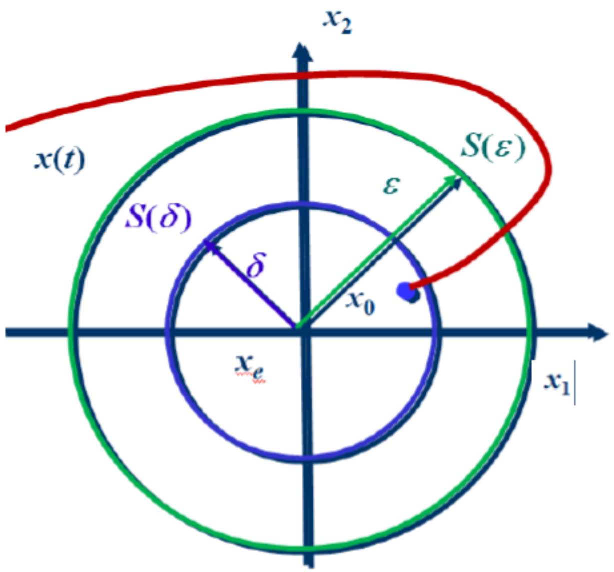
$$\|x_0-x_e\|$$

$$\downarrow$$

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e\|$$

李雅普诺夫关于稳定性的定义

- 不稳定
  - 考虑系统 $\dot{x}=f(x,t)$，若对某一实数 $\varepsilon>0$ 和任意小的实数 $\delta(\varepsilon, t_0)>0$，使得从满足 $\|x_0-x_e\|\le\delta(\varepsilon,t_0)$ 的任意初始状态 x_0 出发的所有解 $x(t)$ 中，至少有一个不满足，$\|x(t)-x_e\|\le\varepsilon$，$t\ge t_0$， 则系统（平衡状态）是不稳定性的。



初始状态：

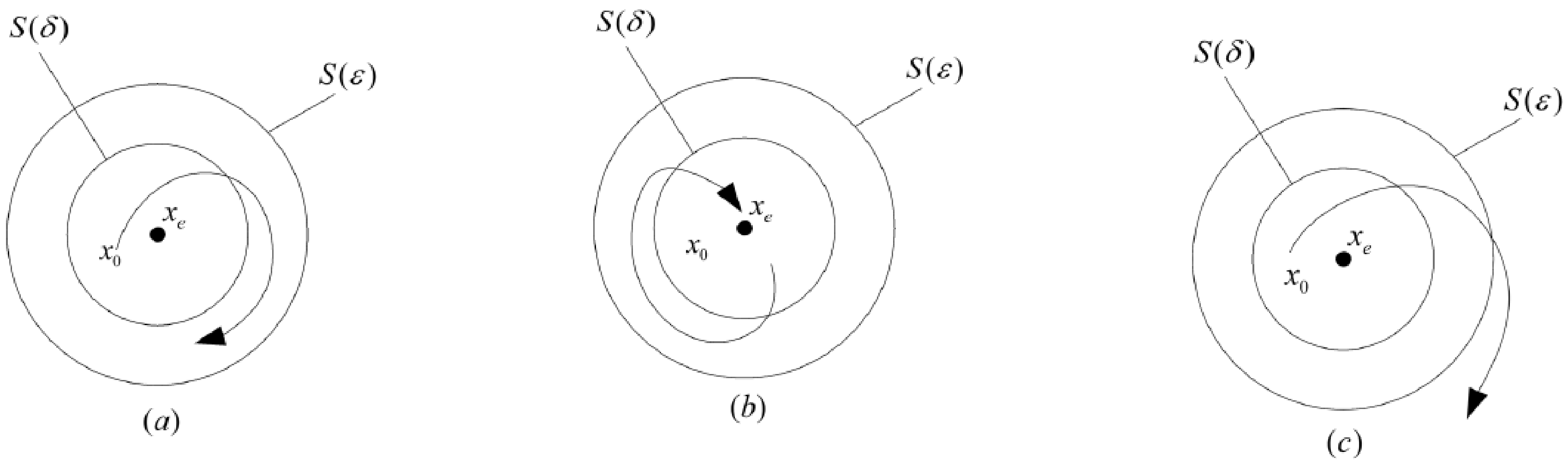
$\|x_0-x_e\|\le\delta(\varepsilon,t_0),\ t=t_0$

状态变化过程：

不管 δ 多么小（初始点离平衡点多近），ε 多么大，随着时间推移，状态总会超出超平面 $S(\varepsilon)$。

李雅普诺夫关于稳定性的定义

➢ 总结



$\|x_0 - x_e\|$

$\|x(t) - x_e\|$:

稳定性与李雅普诺夫方法

4.1　李雅普诺夫关于稳定性的定义

4.2　李雅普诺夫第一法

4.3　李雅普诺夫第二法

4.4　李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

4.5　李雅普诺夫方法在非线性系统中的应用

4.6　稳定性分析：李雅普诺夫方法 + 线性矩阵不等式

李雅普诺夫第一法

- 第一法、间接法
  - 依据：通过系统状态方程的解
  - 结论：线性定常系统状态渐近稳定的充要条件：系统矩阵A的特征值均具有负实部。

    $$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

  - 适用于：线性定常系统、可线性化的非线性系统

李雅普诺夫第一法

- 与经典控制稳定判据的关系
  - 状态渐近稳定的充要条件：系统矩阵A的特征值均具有负实部
  - 系统稳定的充要条件：系统传递函数的极点均位于左半复平面
  - ✓ 差别：内部（状态）稳定性、外部（BIBO）稳定性
  - ✓ 传递函数极点 与 A矩阵特征值 关系

李雅普诺夫第一法

- 与经典控制稳定判据的关系
  - 内部（状态）稳定性、外部（BIBO）稳定性

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\det\left[\lambda I - A\right] = (\lambda+1)(\lambda-1) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = +1$$

$$W(\mathrm{s}) = c\left(sI - A\right)^{-1} b$$

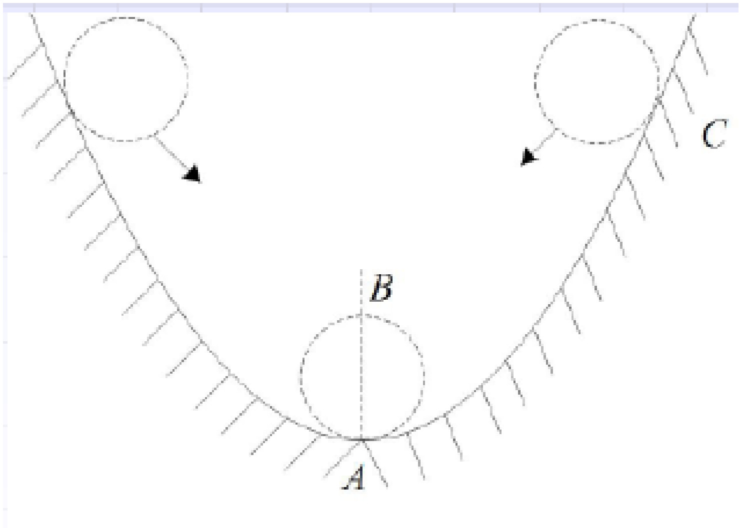
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{s-1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{s+1}$$

稳定性与李雅普诺夫方法

李雅普诺夫第二法

- 第二法、直接法
  - 能量的角度



李雅普诺夫第二法

- 第二法、直接法
  - 虚拟的能量函数：李雅普诺夫函数

某些简单系统（如单摆）：

能量：势能 + 动能

大多系统：复杂性和多样性

找不到能量函数描述系统能量

抽象的状态空间模型：

$$\dot{x} = f(x,t)$$

虚构能量函数，即李雅普诺夫函数：V(x, t)或V(x)。

✓ 如何构造？

如何判稳？

李雅普诺夫第二法

- 标量函数的定号性
  - 正定函数
  - 半正定函数
  - 负定函数
  - 半负定函数
  - 不定函数

李雅普诺夫第二法

- 标量函数的定号性

$2x_2^2$

$x_1^2 + 2x_2^2$

$(x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2$

$-x_1^2 - 2x_2^2$

$-(x_1 + 2x_2)^2$

$-(x_1 + 2x_2)^2 - 5x_1^2$

$-3x_1^2 + 2x_2^2$

李雅普诺夫第二法

➤ 二次型标量函数、矩阵的定号性

$$V(x)=x^TPx=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$V(x)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2$$

$$=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

- 正定矩阵
- 半正定矩阵
- 负定矩阵
- 半负定矩阵

李雅普诺夫第二法

➤ 矩阵的定号性判定：希尔维斯特判据

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, p_{ij}=p_{ji}$$

若 $\Delta_i>0\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，则 P（或 $V(x)$）为正定的。

若 $\Delta_i\begin{cases} >0, & i\text{为偶数} \\ <0, & i\text{为奇数} \end{cases}$，则 P（或 $V(x)$）为负定的。

若 $\Delta_i\begin{cases} \geq 0, & i=(1,2,\cdots,\ n-1) \\ =0, & i=n \end{cases}$，则 P（或 $V(x)$）为半正定(非负定)的。

若 $\Delta_i\begin{cases} \geq 0, & i\text{为偶数} \\ \leq 0, & i\text{为奇数} \\ =0, & i=n \end{cases}$，则 P（或 $V(x)$）为半负定(非正定)的。

$$\Delta_i=p_{11},\Delta_2=\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix},\cdots,\Delta_n=|P|$$

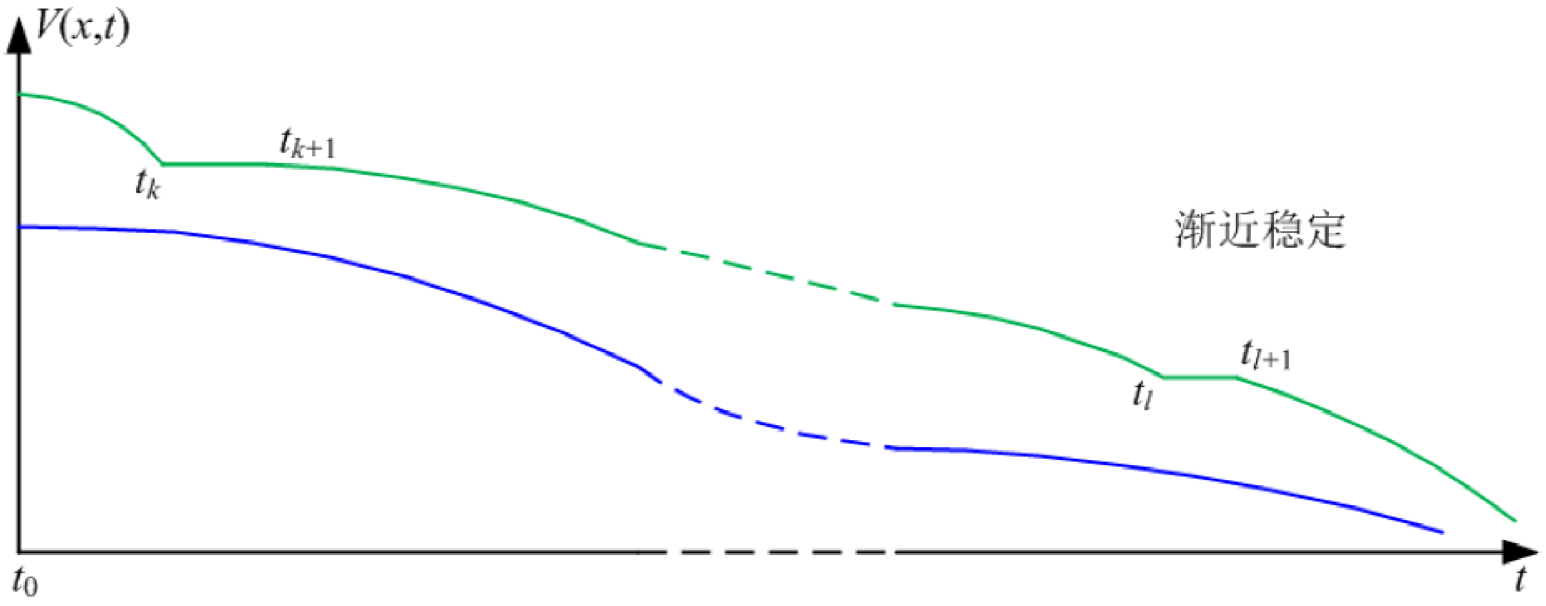
李雅普诺夫第二法

- 李雅普诺夫第二法判据

能量函数 $V(x,t)$	能量变化 $\dot{V}(x,t)$	平衡态稳定性

李雅普诺夫第二法

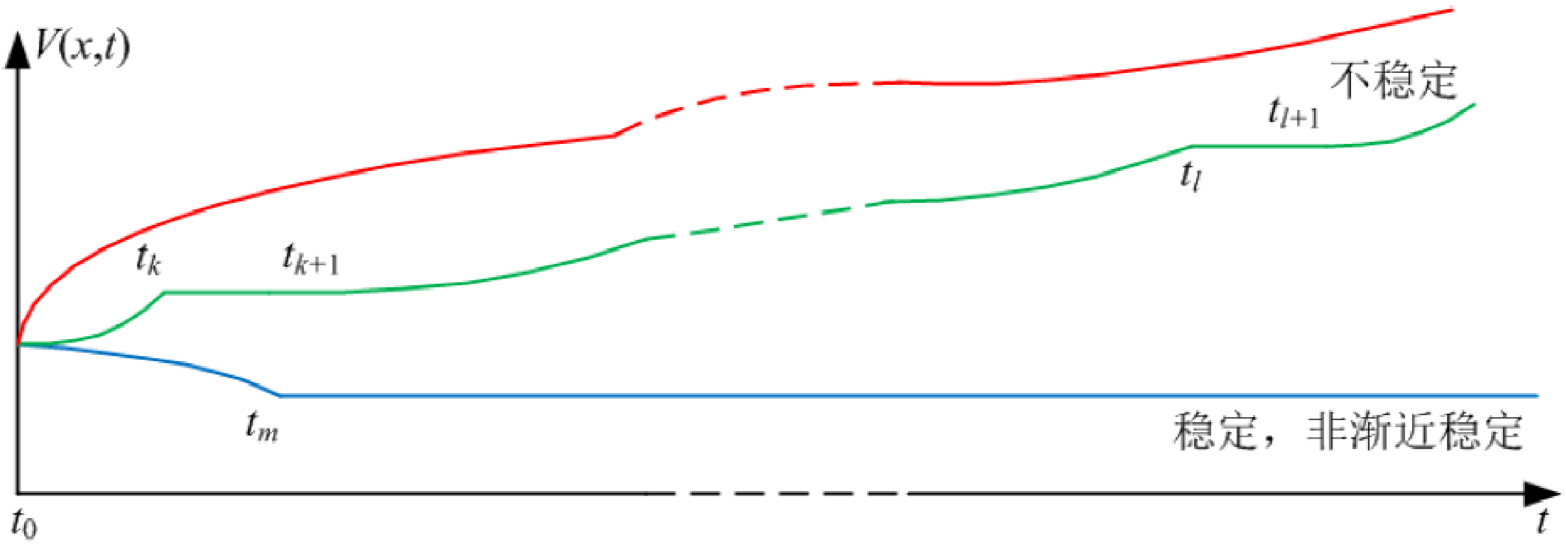
- 渐近稳定判定



能量函数 $V(x,t)$	能量变化 $\dot{V}(x,t)$	平衡态稳定性
正定 (>0)	负定 (<0)	渐近稳定
正定 (>0)	半负定(≤0)，不恒为0	渐近稳定

李雅普诺夫第二法

➤ 渐近稳定判定



能量函数 $V(x,t)$	能量变化 $\dot{V}(x,t)$	平衡态稳定性
正定 (>0)	半负定 (≤0)，恒为0	稳定，非渐近稳定
正定 (>0)	正定(>0)	不稳定
正定 (>0)	半正定(≥0)，不恒为0	不稳定

李雅普诺夫第二法

- 李雅普诺夫第二法判据

能量函数 $V(x,t)$	能量变化 $\dot{V}(x,t)$	平衡态稳定性
正定 (>0)	半负定 (≤0)，恒为0	稳定，非渐近稳定
正定 (>0)	正定(>0)	不稳定
正定 (>0)	半正定(≥0)，不恒为0	不稳定
正定 (>0)	负定 (<0)	渐近稳定
正定 (>0)	半负定(≤0)，不恒为0	渐近稳定

- 关键：找到一个正的能量函数，根据其变化情况

- 适用性：

李雅普诺夫第二法

- 渐近稳定判定

关键点：判断所构造正能量函数随时间的变化情况

例1：设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - (1 - |x_1|)x_2 \end{cases}$$

试分析系统平衡状态的稳定性。

李雅普诺夫第二法

- 渐近稳定判定

关键点：判断所构造正能量函数随时间的变化情况

例1：设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - (1-|x_1|)x_2 \end{cases}$$

试分析系统平衡状态的稳定性。

第1步：计算平衡状态，原点为系统的平衡状态，$x_e = 0$。

李雅普诺夫第二法

➢ 渐近稳定判定

关键点：判断所构造正能量函数随时间的变化情况

例1：设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - (1-|x_1|)x_2 \end{cases}$$

试分析系统平衡状态的稳定性。

第1步：计算平衡状态，原点为系统的平衡状态，$x_e = 0$。

第2步：选取正定能量函数：$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$

第3步：计算并判断能量函数导数定号性：$\dot{V}(x) = -2x_2^2(1-|x_1|)$

李雅普诺夫第二法

- 渐近稳定判定

关键点：判断所构造正能量函数随时间的变化情况

能量函数 $V(x,t)$	能量变化 $\dot{V}(x,t)$	平衡态稳定性
正定 (>0)	半负定 (≤0)，恒为0	稳定，非渐近稳定
正定 (>0)	正定(>0)	不稳定
正定 (>0)	半正定(≥0)，不恒为0	不稳定
正定 (>0)	负定 (<0)	渐近稳定
正定 (>0)	半负定(≤0)，不恒为0	渐近稳定

例1：设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - (1-|x_1|)x_2 \end{cases}$$

试分析系统平衡状态的稳定性。

第1步：计算平衡状态，原点为系统的平衡状态， $x_e = 0$ 。

第2步：选取正定能量函数： $V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$

第3步：计算并判断能量函数导数定号性： $\dot{V}(x) = -2x_2^2(1-|x_1|)$

当$|x_1| = 1$时， $\dot{V}(x) = 0$ ⟹ 系统平衡态是稳定的。

当$|x_1| > 1$时， $\dot{V}(x) > 0$ ⟹ 系统平衡态是不稳定的。

当$|x_1| < 1$时， $\dot{V}(x) < 0$ ⟹ 系统平衡态是渐近稳定的。

李雅普诺夫第二法

- 渐近稳定判定

能量函数不唯一性

例2：设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

试分析系统平衡状态 $x_e = 0$ 的稳定性。

李雅普诺夫第二法

- 渐近稳定判定

能量函数不唯一性

例2：设系统的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2\end{cases}$$

试分析系统平衡状态 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 的稳定性。

能量函数 $V(x,t)$	能量变化 $\dot{V}(x,t)$	平衡态稳定性
正定 (>0)	半负定 (≤0)，恒为0	稳定，非渐近稳定
正定 (>0)	正定(>0)	不稳定
正定 (>0)	半正定(≥0)，不恒为0	不稳定
正定 (>0)	负定 (<0)	渐近稳定
正定 (>0)	半负定(≤0)，不恒为0	渐近稳定

第1种正定能量函数： $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 > 0 \Longrightarrow \dot{V}(x) = -2x_2^2$

为半负定的，则系统平衡态是稳定的；

李雅普诺夫第二法

能量函数 $V(x,t)$	能量变化 $\dot{V}(x,t)$	平衡态稳定性
正定 (>0)	半负定 (≤0)，恒为0	稳定，非渐近稳定
正定 (>0)	正定(>0)	不稳定
正定 (>0)	半正定(≥0)，不恒为0	不稳定
正定 (>0)	负定 (<0)	渐近稳定
正定 (>0)	半负定(≤0)，不恒为0	渐近稳定

- 渐近稳定判定

能量函数不唯一性

例2：设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

试分析系统平衡状态 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ 的稳定性。

第1种正定能量函数：$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 > 0 \Longrightarrow \dot{V}(x) = -2x_2^2$

为半负定的，则系统平衡态是稳定的；

更进一步，得不恒等于零，平衡态是渐近稳定的。

李雅普诺夫第二法

- 渐近稳定判定

能量函数不唯一性

例2：设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

试分析系统平衡状态 $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ 的稳定性。

第1种正定能量函数： $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 > 0$ ⟹ $\dot{V}(x) = -2x_2^2$

为半负定的，则系统平衡态是稳定的；

更进一步，得不恒等于零，平衡态是渐近稳定的。

第2种正定能量函数：$V(x) = \dfrac{(x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + x_2^2}{2}$ ⟹ $\dot{V}(x) = -\left(x_1^2 + x_2^2\right)$

为负定的，直接可得，系统平衡态渐近稳定。

李雅普诺夫第二法

➢ 渐近稳定判定

基于能量函数观点判断稳定性的讨论：

1）能量函数是系统状态的一个正定标量函数，且连续可导；

2）最简单形式：$V(x)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=\|x-x_e\|^2$，系统状态 $\boldsymbol{x}$ 与平衡点间的距离；

3）能量函数的不唯一性，结论一致性，分析难易程度不同

$$x_1^2+x_2^2=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix};\quad \frac{(x_1+x_2)^2+2x_1^2+x_2^2}{2}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

4）标准二次型函数：

$$V(x)=x^TPx$$

关键问题：能量函数构造问题，如何选择 $\boldsymbol{P}$ 矩阵。

上次课回顾

- 什么是稳定性：李雅普诺夫定义的稳定性

上次课回顾

- 怎么判据稳定性：李雅普诺夫定义的稳定性

稳定性与李雅普诺夫方法

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

例2：设系统的状态方程为 $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2\end{cases}$ 试分析系统平衡状态 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 的稳定性。

第1种正定能量函数： $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{V}(x) = -2x_2^2$

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

例2：设系统的状态方程为 $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2\end{cases}$ 试分析系统平衡状态 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 的稳定性。

第1种正定能量函数： $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 > 0$ $\Rightarrow$ $\dot{V}(x) = -2x_2^2$

第2种正定能量函数：$V(x) = \dfrac{(x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + x_2^2}{2}$ $\Rightarrow$ $\dot{V}(x) = -\left(x_1^2 + x_2^2\right)$

$$x_1^2 + x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

$$\frac{(x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + x_2^2}{2} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

- 线性定常连续系统渐近稳定判据

设如下线性定常系统，系统矩阵 A 非奇异：

$$\dot{x} = Ax$$

系统平衡态 $x_e = 0$为渐近稳定的充要条件是：

- ✓ 李雅普诺夫第一法： 系统矩阵 A 的特征根均具有负实部
- ✓ 李雅普诺夫第二法：

对任意给定的正定对称矩阵Q，如果存在正定矩阵P满足 $A^T P + PA = -Q$

那么系统渐近稳定

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

- 充要条件：对任意给定的正定对称矩阵 Q，存在正定对称矩阵 P 满足 $A^T P + PA = -Q$
  - ✓ 充分性

    即证：对于给定对称正定矩阵 Q，若满足 $A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q$ 要求的正定对称矩阵 P 存在，则系统平衡态是渐近稳定的。

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

- 充要条件：对任意给定的正定对称矩阵 Q，存在正定对称矩阵 P 满足 $A^T P + PA = -Q$

  - 必要性

    即证：如果系统平衡态是渐近稳定的，那么对于给定对称正定矩阵 Q，一定存在对称正定矩阵 P 满足 $A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q$。

假设给定对称正定矩阵为 Q，令一个如下矩阵：

$$P = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} Q e^{At} \mathrm{d}t$$

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

- 充要条件：对任意给定的正定对称矩阵 Q，存在正定对称矩阵 P 满足 $A^T P+PA=-Q$

  - 必要性

即证：如果系统平衡态是渐近稳定的，那么对于给定对称正定矩阵 Q，一定存在对称正定矩阵 P 满足 $A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$。

假设给定对称正定矩阵为 Q，令一个如下矩阵：

$$P=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{A^T t} Q \mathrm{e}^{At} \mathrm{d}t$$

对于上述定义矩阵 P，我们可以发现：

- 因 Q 为对称正定矩阵，有 P 亦为对称正定矩阵；
- 同时，有

$$A^T P+PA=\int_0^{+\infty}\left(A^T \mathrm{e}^{A^T t} Q \mathrm{e}^{At}+\mathrm{e}^{A^T t} Q \mathrm{e}^{At} A\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{A^T t} Q \mathrm{e}^{At}\right)=\mathrm{e}^{A^T t} Q \mathrm{e}^{At}\Big|_0^{+\infty}$$

系统渐近稳定，有 $\lim\limits_{t\to\infty} e^{At}=\lim\limits_{t\to\infty} e^{A^T t}=0$，则$A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$。

综上可知，若系统渐近稳定，则存在$P>0$满足$A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$。

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

- 李雅普诺夫第二法判断稳定的思路：能量函数 + 能量变化

例2：设系统的状态方程为 $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2\end{cases}$ 试分析系统平衡状态 $x_e = 0$ 的稳定性。

第1种正定能量函数： $V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0 \Rightarrow \dot{V}(x) = -2x_2^2$

第2种正定能量函数： $V(x) = \dfrac{(x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + x_2^2}{2} \Rightarrow \dot{V}(x) = -(x_1^2 + x_2^2)$

思路1：首先，构造一个能量函数；接着，计算并分析其导数的定号性；最后，根据定号性给出结论。

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

- 李雅普诺夫第二法判断稳定的思路：能量函数 + 能量变化

对任意给定的正定对称矩阵 Q，存在正定对称矩阵 P 满足 $A^TP+PA=-Q$

我们选择能量函数为：$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$

- 一方面，P 为正定矩阵，则$V(x)>0$；
- 另一方面，能量函数的导数可得

$$\dot{V}(x)=\dot{x}^TPx+x^TP\dot{x}=(Ax)^TPx+x^TP(Ax)=x^T(A^TP+PA)x=-x^TQx$$

因 Q 为正定矩阵，则 $\dot{V}(x)=-x^TQx<0$

综合上述两个方面可知，系统平衡态是渐近稳定的。

思路2：首先，给定一个对称正定矩阵Q；接着，由矩阵 A 和矩阵方程 $A^TP+PA=-Q$，解出矩阵P；最后，利用希尔维斯特判据判别矩阵 P 的定号性，若为正定，则系统渐近稳定。

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

- 李雅普诺夫第二法判断稳定的思路：能量函数 + 能量变化

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

例3：试分析如下系统平衡状态，$x_e = 0$，的稳定性：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x$$

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

例3：试分析如下系统平衡状态，$x_e = 0$，的稳定性：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x$$

第1步：选取Q矩阵：$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

例3：试分析如下系统平衡状态，$x_e = 0$，的稳定性：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x$$

第1步：选取Q矩阵：$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$， $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$

第2步：求解矩阵方程 $A^T P + PA = -Q$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

例3：试分析如下系统平衡状态，$x_e = 0$，的稳定性：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

第3步：判断矩阵P 的定号性，计算各阶顺序主子行列式

$$\Delta_1 = \frac{5}{4} > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow$$

P 正定，平衡点渐近稳定。

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

例3：试分析如下系统平衡状态，$x_e = 0$，的稳定性：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x$$

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \Rightarrow \text{渐近稳定}$$

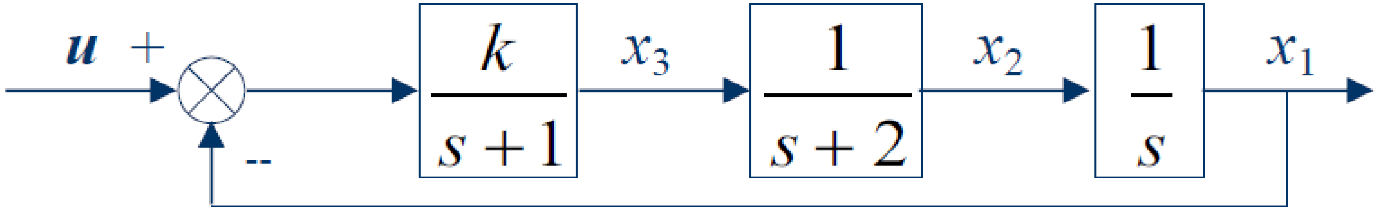
第3步：判断矩阵P 的定号性，计算各阶顺序主子行列式

$$\Delta_1 = \frac{5}{4} > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow$$

P 正定，平衡点渐近稳定。

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

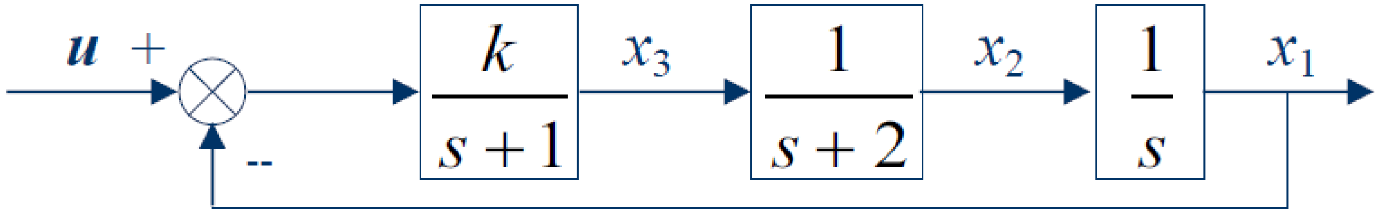
例4：对于如下系统



试用李雅普诺夫方法保证系统渐近稳定的k值。

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

例4：对于如下系统



试用李雅普诺夫方法保证系统渐近稳定的k值。

第1步：状态空间模型建立，平衡点

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -k & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\k\end{bmatrix}u$$

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

能量函数：$V(t) = x^T P x$；能量函数导数：$\dot{V}(t) = -x^T \left(A^T P + PA \right) x$

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -k & 0 & -1\end{bmatrix}x$$

能量函数：$V(t)=x^T Px$；能量函数导数：$\dot{V}(t)=-x^T\left(A^T P+PA\right)x$

能量正定 (>0)	能量导数负定 (<0)	平衡点渐近稳定

能量正定 (>0)	半负定(≤0)，不恒为0	平衡点渐近稳定

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -k & 0 & -1\end{bmatrix}x$$

能量函数：$V(t)=x^{T}Px$；能量函数导数：$\dot{V}(t)=-x^{T}\left(A^{T}P+PA\right)x$

能量正定 (>0)	半负定(≤0)，不恒为0	平衡点渐近稳定

第2步：选取Q 矩阵：

$$A^{T}P+PA=-Q=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

则能量函数导数 $\dot{V}(t)=-x_3^2\le 0$ 为负半定。

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -k & 0 & -1\end{bmatrix}x$$

能量函数：$V(t)=x^TPx$；能量函数导数：$\dot{V}(t)=-x^T\left(A^TP+PA\right)x$

能量正定 (>0)	半负定(≤0)，不恒为0	平衡点渐近稳定

第2步： 选取Q 矩阵：

$$A^TP+PA=-Q=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

则能量函数导数 $\dot{V}(t)=-x_3^2\le 0$ 为负半定。

$$\left.\begin{matrix}\dot{V}(t)\equiv 0\Rightarrow\begin{Bmatrix}x_3\equiv 0\\ \dot{x}_3\equiv 0\end{Bmatrix}\\ \dot{x}_3=-kx_1-x_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow x_1\equiv 0\Rightarrow\left.\begin{matrix}\dot{x}_1\equiv 0\\ \dot{x}_1=x_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x_1\equiv 0\\ x_2\equiv 0\\ x_3\equiv 0\end{cases}$$

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

第3步：求解矩阵方程 $A^T P + PA = -Q$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

解6个线性方程 $\Rightarrow$ $P=\begin{bmatrix} \frac{k^2+12k}{12-2k} & \frac{6k}{12-2k} & 0 \\ \frac{6k}{12-2k} & \frac{3k}{12-2k} & \frac{k}{12-2k} \\ 0 & \frac{k}{12-2k} & \frac{6}{12-2k} \end{bmatrix}$

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

$$P=\begin{bmatrix} \frac{k^2+12k}{12-2k} & \frac{6k}{12-2k} & 0 \\ \frac{6k}{12-2k} & \frac{3k}{12-2k} & \frac{k}{12-2k} \\ 0 & \frac{k}{12-2k} & \frac{6}{12-2k} \end{bmatrix}$$

第4步： 计算各阶顺序主子行列式

$$\Delta_1=\frac{k^2+12k}{12-2k},\ \Delta_2=\frac{3k^2}{12-2k},\ \Delta_3=\frac{k^3}{2}$$

第5步： 计算保证系统渐近稳定的 k 取值范围

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -k & 0 & -1\end{bmatrix}x$$

特征方程： $|sI-A|=0 \Rightarrow a_0s^3+a_1s^2+a_2s+a_3=s^3+3s^2+2s+k=0$

赫尔维茨判据：

$$\left.\begin{matrix}a_{0,1,2,3}>0\\ a_1a_2-a_0a_3>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}k>0\\ 6-k>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow 0<k<6$$

劳斯判据：

s^3	a_0	a_2
s^2	a_1	a_3
s^1	$\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}$	
s^0	a_3	

$\Rightarrow$

s^3	1	2
s^2	3	k
s^1	$\frac{6-k}{3}$	
s^0	k	

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\frac{6-k}{3}>0\\ k>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow 0<k<6$$

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

- 线性时变连续系统稳定性

设如下线性时变系统，系统矩阵 $A(t)$ 为时变矩阵：

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

系统平衡态 $x_e = 0$为渐近稳定的条件是：

对任意给定的连续正定对称矩阵$Q(t)$，存在连续对称矩阵 $P(t)$ 满足如下条件

$$P(t) > 0; \qquad \dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) = -Q(t) < 0 \qquad (*)$$

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

➢ 离散系统稳定性

	连续时间系统	离散时间系统
状态方程	$\dot{x}(t)=f(x(t),t)$	
能量函数	$V(x(t))=x^T(t)Px(t)$	
能量函数变化	$\dot{V}(x(t))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[V(x(t))\right]$	

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

- 离散系统稳定性

能量函数 $V(x(k))$	能量变化 $\Delta V(x(k))$	平衡态稳定性

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

线性定常离散系统渐近稳定判据：

设如下线性定常离散系统，系统矩阵 G 非奇异：

$$x(k+1)=Gx(k)$$

系统平衡态 $x_e=0$为渐近稳定的充要条件是：

1）经典控制理论判据：G 的特征根均位于单位开圆盘内；

2）李雅普诺夫理论判据：

李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

线性时变离散系统渐近稳定判据：

设如下线性时变系统，系统矩阵 $\boldsymbol{G(k)}$ 为时变矩阵：

$$x(k+1)=G(k+1,k)x(k)$$

系统平衡态 $x_e=0$ 为渐近稳定的条件是：

对任意给定的正定对称矩阵$Q(k)$，存在一个对称矩阵 $P(k+1)$ 满足如下条件

$$P(\ \ k\ \ )>0;\ G^T(k+1,k)P(k+1)G(k+1,k)-P(k)=-Q(k)<0\ \ (**)$$

稳定性与李雅普诺夫方法

4.1 李雅普诺夫关于稳定性的定义

4.2 李雅普诺夫第一法

4.3 李雅普诺夫第二法

4.4 李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

4.5 李雅普诺夫方法在非线性系统中的应用

4.6 稳定性分析：李雅普诺夫方法 + 线性矩阵不等式

稳定性分析：李雅普诺夫方法 + 线性矩阵不等式

能量正定 (>0)	能量导数负定 (<0)	平衡点渐近稳定

思路1：首先，构造一个能量函数；接着，计算并分析其导数的定号性；最后，根据定号性给出结论。

思路2：首先，给定一个对称正定矩阵Q；接着，由矩阵 A 和矩阵方程 $A^T P + PA = -Q$，解出矩阵P；最后，利用希尔维斯特判据判别矩阵 P 的定号性，若为正定，则系统渐近稳定。

稳定性分析：李雅普诺夫方法 + 线性矩阵不等式

基于系统状态的非增正能量函数是否存在？

$\dot{x}(t) = Ax(t)$

能量正定 (>0)	能量导数负定 (<0)	平衡点渐近稳定

$$V(x) = x^T P x > 0$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x \\ &= x^T \left(PA + A^T P \right) x \\ &< 0\end{aligned}$$

$\boxed{P > 0}$ $\boxed{A^T P + PA < 0}$

稳定性分析：李雅普诺夫方法 + 线性矩阵不等式

➢ 线性矩阵不等式 LMI

$\boxed{P > 0}$ $\boxed{A^T P + PA < 0}$

一个线性矩阵不等式可以表示成以下的一般形式：

$$L(x) = L_0 + x_1 L_1 + \cdots + x_N L_N < 0 \tag{A.1}$$

其中，$L_0, L_1, \cdots, L_N$是给定的对称矩阵，$x = [x_1, x_2, \cdots, x_N]^T \in R^n$是由其中的变量组成的向量。一般称$x_1, x_2, \cdots, x_N$为决策向量，$x$是由决策变量构成的向量，简称决策向量。

稳定性分析：李雅普诺夫方法 + 线性矩阵不等式

- 线性矩阵不等式 LMI

$$L_0 + x_1 L_1 + \cdots + x_N L_N < 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\boxed{P > 0}$$

$$\boxed{A^T P + PA < 0}$$

稳定性分析：李雅普诺夫方法 + 线性矩阵不等式

- 线性矩阵不等式 LMI

$$\boxed{P > 0}$$

$$\boxed{A^T P + PA < 0}$$

求解工具：MATLAB/LMI Toolbox，MATLAB/YALMIP

稳定性分析：李雅普诺夫方法 + 线性矩阵不等式

- 线性矩阵不等式 LMI

$$\boxed{P > 0}$$

$$\boxed{A^T P + PA < 0}$$

求解工具：MATLAB/LMI Toolbox，MATLAB/YALMIP

- 初始化：设置系统参数、指标参数等已知或性能要求量
- 描述稳定条件中的待求LMI组：待求变量信息、逐个描述LMI
- 求解描述好的LMI：预设置（求解器及相关参量）、求解、判断是否有解

稳定性分析：李雅普诺夫方法 + 线性矩阵不等式

- 线性矩阵不等式 LMI

$\boxed{P > 0}$ $\boxed{A^T P + PA < 0}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x$$

- 初始化：设置系统参数、指标参数等已知或性能要求量

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% 初始化
A = [0 1; -2 -3];
n = size(A,1);
```

稳定性分析：李雅普诺夫方法 + 线性矩阵不等式

➢ 线性矩阵不等式 LMI

$$\boxed{P > 0} \qquad \boxed{A^T P + PA < 0}$$

➢ 描述条件中的待求LMI组：待求变量信息、逐个描述LMI

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% 描述LMI条件
P = sdpvar(n,n,'symmetric'); %%% 定义待求变量

% Fcond = set([P>0,A'*P+P*A<0]); %%% 给出待求LMI组
Fcond = [P>0,A'*P+P*A<0]; %%% 给出待求LMI组
```

稳定性分析：李雅普诺夫方法 + 线性矩阵不等式

➢ 线性矩阵不等式 LMI

$$\boxed{P > 0} \qquad \boxed{A^T P + PA < 0}$$

➢ 求解描述好的LMI：预设置（求解器及相关参量）、求解、判断是否有解

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%% 求解LMI条件
ops = sdpsettings('verbose',0,'solver','sedumi'); %%% 设置求解环境和求解器
diagnostics = solvesdp(Fcond,[],ops); %%% 迭代求解
[m] = checkset(Fcond); %%%  验证每个LMI是否可解

tmin = min(m); %%%
if tmin > 0
    'System is stable, and P is given as'
    P = double(P)
else
    'System is stable, and P is given as'
end
```

稳定性分析：李雅普诺夫方法 + 线性矩阵不等式

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x$$

$$\boxed{P > 0}$$

$$\boxed{A^T P + PA < 0}$$

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% Chuan-Ke Zhang
%%% 2019-12-09
%%% 验证系统的稳定性
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% 初始化
A = [0 1; -2 -3];
n = size(A,1);


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% 描述LMI条件
P = sdpvar(n,n,'symmetric'); %%% 定义待求变量

% Fcond = set([P>0,A'*P+P*A<0]); %%% 给出待求LMI组
Fcond = [P>0,A'*P+P*A<0]; %%% 给出待求LMI组
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% 求解LMI条件
ops = sdpsettings('verbose',0,'solver','sedumi'); %%
diagnostics = solvesdp(Fcond,[],ops); %%% 迭代求解
[m] = checkset(Fcond); %%%  验证每个LMI是否可解

tmin = min(m); %%%
if tmin > 0
    'System is stable, and P is given as'
    P = double(P)
else
    'System is stable, and P is given as'
end
```

```
ans =

System is stable, and P is given as


P =

    1.2097    0.2124
    0.2124    0.3379
```

本章小结

- 概念理解

  - 内部稳定、外部稳定、平衡点、稳定、渐近稳定（全局、局部）、不稳定

- 李雅普诺夫第二方法

本章小结

- 本章作业
  - 知识点梳理
  - 课后习题：4-3（多种方法判断）

谢谢