系统分析与控制原理Ⅱ：
线性系统分析与设计

控制系统的
状态空间表达式

概述：本章要讨论的问题

- 状态空间表达式：为什么

- 状态空间表达式：是什么

- 状态空间表达式：怎么来

概述：本章要讨论的问题

- 状态空间表达式：为什么
  - 经典控制理论无法完成某些复杂工作
  - 模型：对事物演变的形式/数学化描述、认识/改造的纽带，分析和综合的基础
- 状态空间表达式：是什么
- 状态空间表达式：怎么来

概述：本章要讨论的问题

- 状态空间表达式：为什么
  - 经典控制理论无法完成某些复杂工作
  - 模型：对事物演变的形式/数学化描述、认识/改造的纽带，分析和综合的基础
- 状态空间表达式：是什么
  - 基本概念：状态变量、状态向量、状态空间、状态轨迹、状态空间表达式
  - 组成：状态方程、输出方程、初始条件
- 状态空间表达式：怎么来

概述：本章要讨论的问题

- 状态空间表达式：为什么
  - 经典控制理论无法完成某些复杂工作
  - 模型：对事物演变的形式/数学化描述、认识/改造的纽带，分析和综合的基础
- 状态空间表达式：是什么
  - 基本概念：状态变量、状态向量、状态空间、状态轨迹、状态空间表达式
  - 组成：状态方程、输出方程、初始条件
- 状态空间表达式：怎么来
  - 框图、传函、高阶微分方程、机理
  - 特点：非唯一性、线性非奇异变换
  - 联系与推广：简单到复杂

控制系统的状态空间表达式

概述：重点&预备知识

- 重点
  - 理解概念：状态变量、状态向量、状态空间表达式
  - 结构图、传函、状态空间表达式之间的相互转化
  - 状态空间表达式的线性变换（坐标变换）

- 预备知识
  - 控制相关：传递函数及其简化规则、高阶微分方程
  - 数学相关：线性代数、向量、矩阵运算、拉氏变换
  - 物理：电路、机械运动、电动机

控制系统的状态空间表达式

1.1 状态变量及状态空间表达式

1.2 状态变量及状态空间表达式的模拟结构图

1.3 状态变量及状态空间表达式的建立(一)

1.4 状态变量及状态空间表达式的建立(二)

1.5 状态矢量的线性变换(坐标变换)

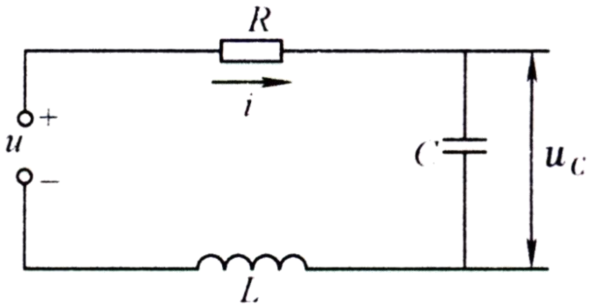
1.6 从状态空间表达式求传递函数阵

1.7 离散时间系统的状态空间表达式

1.8 时变系统和非线性系统的状态空间表达式

上次课回顾

- 状态：独立完整描述系统、最小数目、非唯一、物理含义、储能元件



R-L-C 电路

$$C\frac{du_c}{dt}=i$$
$$L\frac{di}{dt}+Ri+u_c=u$$

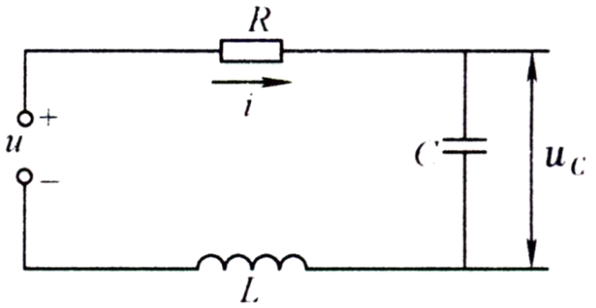
$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_c\\i\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{C}\\-\frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{L}\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

上次课回顾

- 状态：独立完整描述系统、最小数目、非唯一、物理含义、储能元件



R-L-C 电路

$$C\frac{du_c}{dt}=i$$

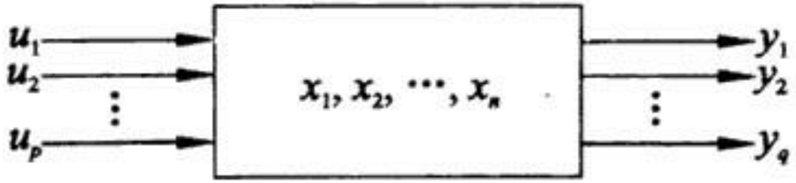
$$L\frac{di}{dt}+Ri+u_c=u$$

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_c\\i\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{C}\\-\frac{1}{L}&-\frac{R}{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{L}\end{pmatrix}u$$

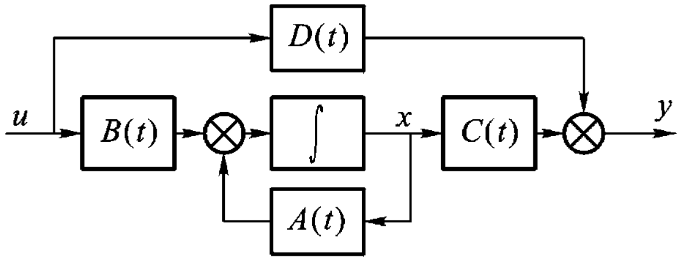
$$y=\begin{pmatrix}1,&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

- 状态空间表达式：状态方程、输出方程



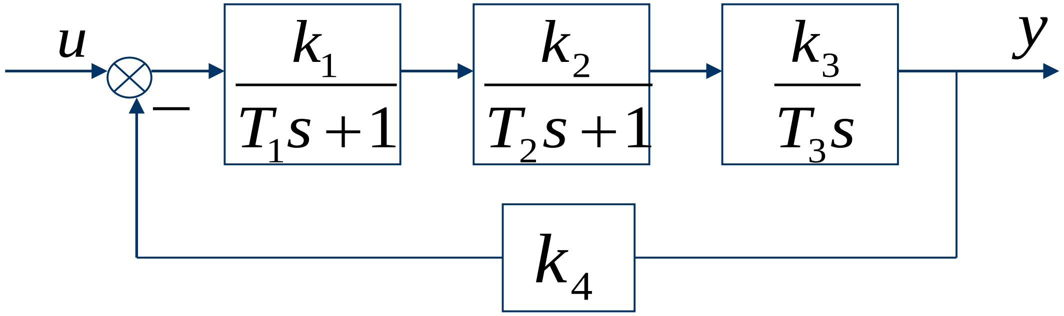
系统的方块图表示

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu\\y&=Cx+Du\end{aligned}}$$

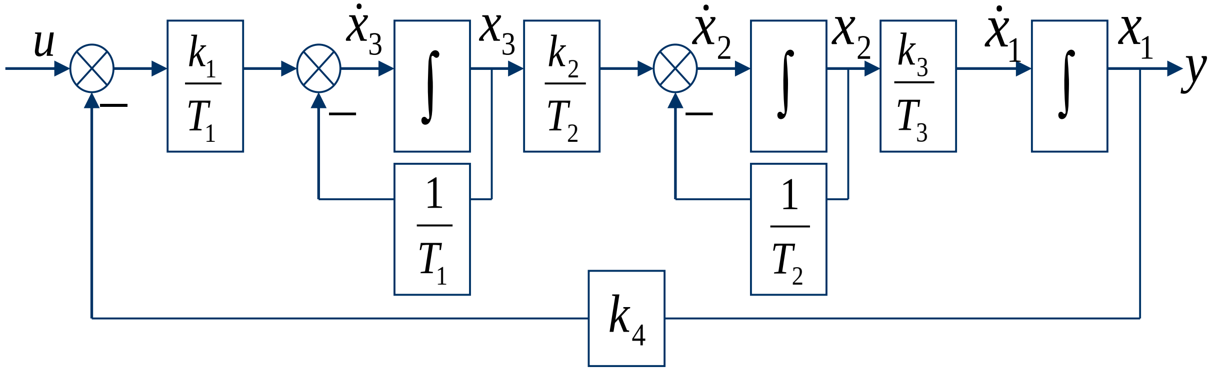


上次课回顾

- 框图建模：基本思路

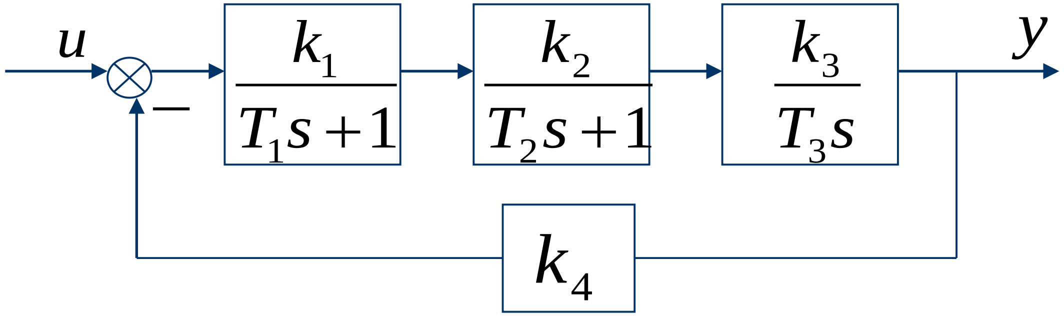


关键：积分器提取、处理

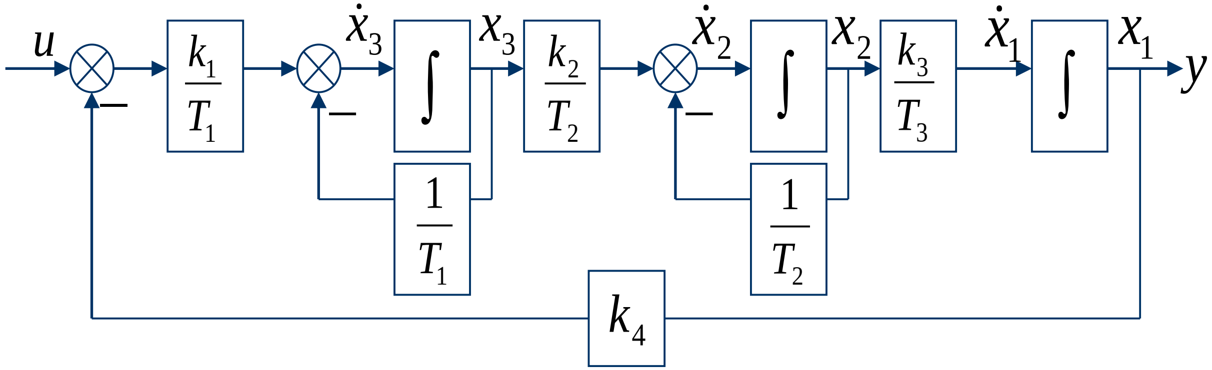


上次课回顾

- 框图建模：基本思路



关键：积分器提取、处理



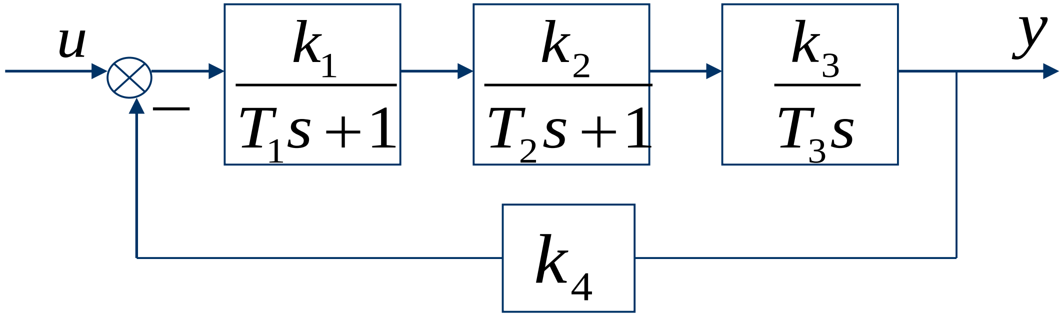
$$\dot{x}_1 = \frac{k_3}{T_1} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2} x_2 + \frac{k_2}{T_2} x_3$$

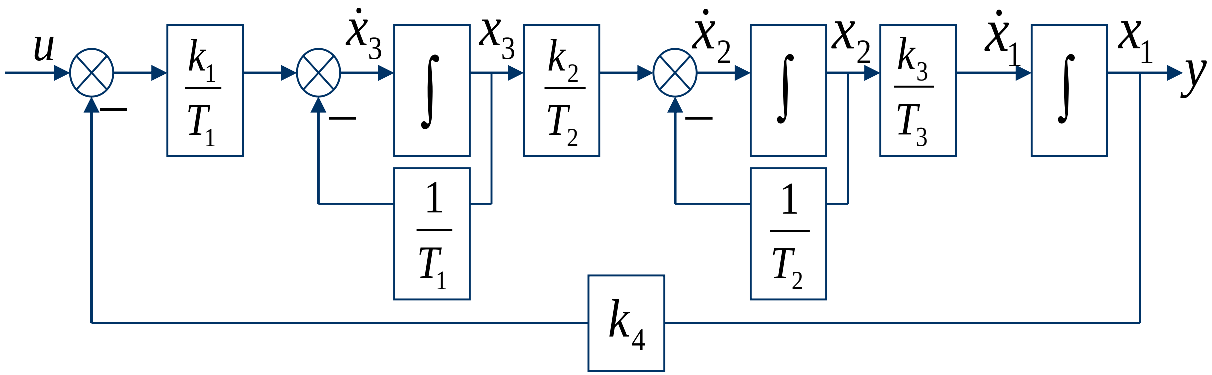
$$\dot{x}_3 = -k_4 \frac{k_1}{T_1} x_1 - \frac{1}{T_1} x_3 + \frac{k_1}{T_1} u \qquad y = x_1$$

上次课回顾

- 框图建模：基本思路



关键：积分器提取、处理



$$\dot{x}_1 = \frac{k_3}{T_1} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2} x_2 + \frac{k_2}{T_2} x_3$$

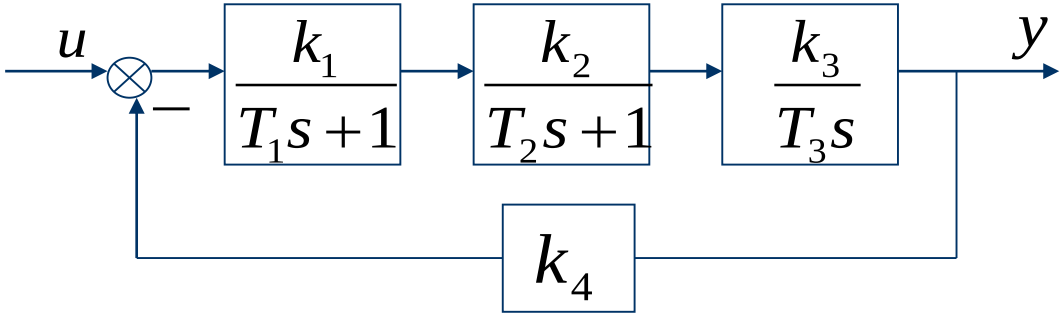
$$\dot{x}_3 = -k_4 \frac{k_1}{T_1} x_1 - \frac{1}{T_1} x_3 + \frac{k_1}{T_1} u \qquad y = x_1$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_3}{T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{k_2}{T_2} \\ \frac{-k_1 k_4}{T_1} & 0 & -\frac{1}{T_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_1}{T_1} \end{bmatrix} u$$

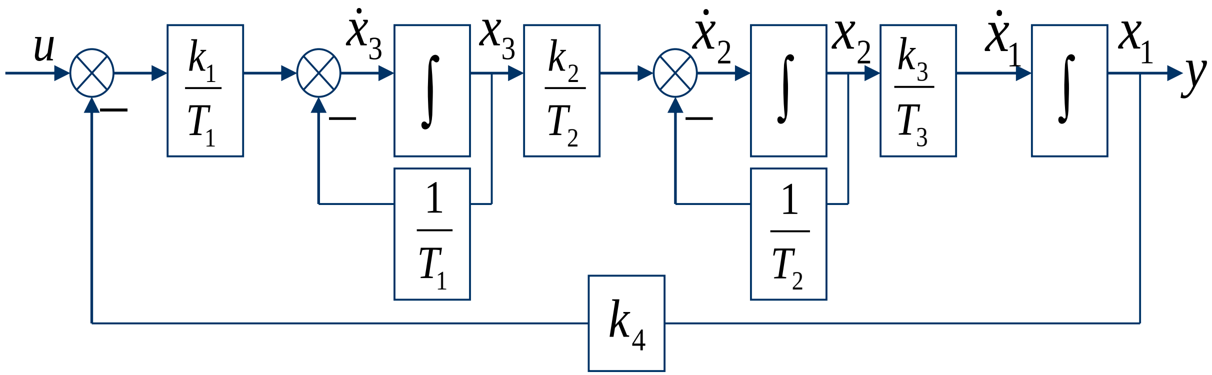
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X$$

上次课回顾

❑ 框图建模：讨论



积分器提取的 必要性？



$$\dot{x}_1 = \frac{k_3}{T_1} x_2$$

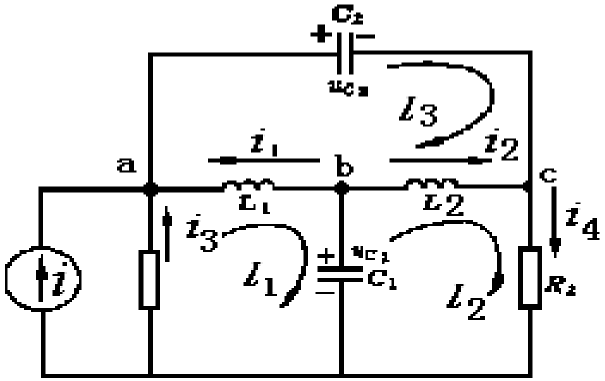
$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2} x_2 + \frac{k_2}{T_2} x_3$$

$$\dot{x}_3 = -k_4 \frac{k_1}{T_1} x_1 - \frac{1}{T_1} x_3 + \frac{k_1}{T_1} u \qquad y = x_1$$

上次课回顾

- 机理建模：基本思路

析原理



选变量

$x_1 = u_{c1} \quad x_2 = u_{c2} \quad x_3 = i_1 \quad x_4 = i_2$

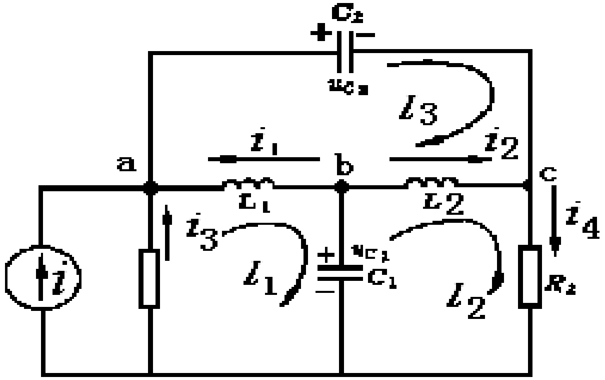
列方程

$$\begin{cases} i + i_3 + x_3 - c_2\dot{x}_2 = 0 \\ c_1\dot{x}_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ c_2\dot{x}_2 + x_3 - i_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -L_1\dot{x}_3 + x_1 + R_1 i_3 = 0 \\ -x_1 + L_2\dot{x}_4 + R_2 i_4 = 0 \\ L_2\dot{x}_4 - L_1\dot{x}_3 - x_2 = 0 \end{cases}$$

上次课回顾

❑ 机理建模：基本思路

析原理



选变量

$$x_1 = u_{c1} \quad x_2 = u_{c2} \quad x_3 = i_1 \quad x_4 = i_2$$

列方程

$$\begin{cases} i + i_3 + x_3 - c_2\dot{x}_2 = 0 \\ c_1\dot{x}_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ c_2\dot{x}_2 + x_3 - i_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -L_1\dot{x}_3 + x_1 + R_1 i_3 = 0 \\ -x_1 + L_2\dot{x}_4 + R_2 i_4 = 0 \\ L_2\dot{x}_4 - L_1\dot{x}_3 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{c_1} & -\frac{1}{c_1} \\ 0 & -\frac{1}{c_2(R_1+R_2)} & \frac{R_1}{c_2(R_1+R_2)} & -\frac{R_2}{c_2(R_1+R_2)} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1(R_1+R_2)} & -\frac{R_1R_2}{L_1(R_1+R_2)} & -\frac{R_1R_2}{L_1(R_1+R_2)} \\ \frac{1}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2(R_1+R_2)} & -\frac{R_1R_2}{L_2(R_1+R_2)} & -\frac{R_1R_2}{L_2(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R_1}{c_2(R_1+R_2)} \\ -\frac{R_1R_2}{L_1(R_1+R_2)} \\ -\frac{R_1R_2}{L_2(R_1+R_2)} \end{bmatrix} i$$

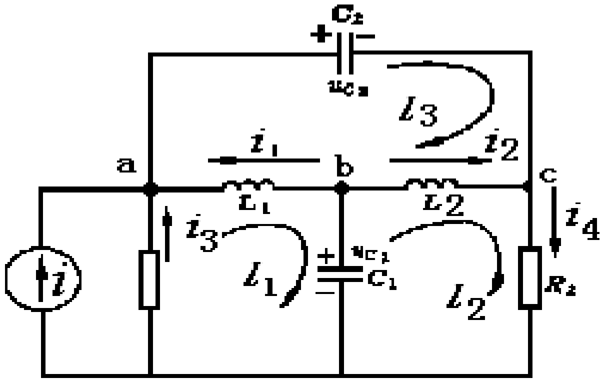
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

标准化

上次课回顾

- 机理建模：基本思路

析原理



选变量

$$x_1 = u_{c1} \quad x_2 = u_{c2} \quad x_3 = i_1 \quad x_4 = i_2$$

列方程

$$\begin{cases} i + i_3 + x_3 - c_2\dot{x}_2 = 0 \\ c_1\dot{x}_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ c_2\dot{x}_2 + x_3 - i_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -L_1\dot{x}_3 + x_1 + R_1 i_3 = 0 \\ -x_1 + L_2\dot{x}_4 + R_2 i_4 = 0 \\ L_2\dot{x}_4 - L_1\dot{x}_3 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{c_1} & -\frac{1}{c_1} \\ 0 & -\frac{1}{c_2(R_1+R_2)} & \frac{R_1}{c_2(R_1+R_2)} & -\frac{R_2}{c_2(R_1+R_2)} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1(R_1+R_2)} & -\frac{R_1R_2}{L_1(R_1+R_2)} & -\frac{R_1R_2}{L_1(R_1+R_2)} \\ \frac{1}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2(R_1+R_2)} & -\frac{R_1R_2}{L_2(R_1+R_2)} & -\frac{R_1R_2}{L_2(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R_1}{c_2(R_1+R_2)} \\ -\frac{R_1R_2}{L_1(R_1+R_2)} \\ -\frac{R_1R_2}{L_2(R_1+R_2)} \end{bmatrix} i$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

标准化

✓ 对系统完整描述的相对性：例1-5，建模时，可忽略某些量

控制系统的状态空间表达式

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

- 实现问题
  - 对给定的系统微分方程或传递函数，寻求对应的状态空间描述，不改变系统的输入-输出特性

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

- 实现问题
  - 对给定的系统微分方程或传递函数，寻求对应的状态空间描述，不改变系统的输入-输出特性
  - ✓ 必要性：其它建模困难；传函（外部描述、输入输出信息、辨识）

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

- 实现问题
  - 对给定的系统微分方程或传递函数，寻求对应的状态空间描述，不改变系统的输入-输出特性
  - ✓ 必要性：其它建模困难，传函（外部描述、输入输出信息、辨识）
  - ✓ 要求：具有一致的系统输入-输出特性

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

- 实现问题
  - 对给定的系统微分方程或传递函数，寻求对应的状态空间描述，不改变系统的输入-输出特性
  - ✓ 必要性：其它建模困难，传函（外部描述、输入输出信息、辨识）
  - ✓ 要求：具有一致的系统输入-输出特性
  - ✓ 多样性：状态选择的不唯一性

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

- 实现问题
  - 对给定的系统微分方程或传递函数，寻求对应的状态空间描述，

    不改变系统的输入-输出特性
  - ✓ 必要性：其它建模困难，传函（外部描述、输入输出信息、辨识）
  - ✓ 要求：具有一致的系统输入-输出特性
  - ✓ 多样性：状态选择的不唯一性
  - ✓ 标准型实现：揭示系统内部重要结构特征，能控标准型、能观标准型、并联型
  - ✓ 最小实现：状态数目最少，维数小、积分器少、易硬件实现

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

实现问题基本理解

- 考虑一个单变量（SISO）线性定常系统，其模型是：

  - 一个n阶线性常系数微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_mu^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

  - 或对应传递函数

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0},\quad m\leqslant n$$

- 找到如下线性定常系统的状态空间表达式，使其具有一致的输入-输出特性

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases}$$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

- 实现问题基本定义
  - 考虑一个单变量（SISO）线性定常系统，其模型是
  - 一个n阶线性常系数微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_mu^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

  - 或对应传递函数

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0},\quad m\leqslant n$$

  - 找到如下线性定常系统的状态空间表达式，使其具有一致的输入-输出特性

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases}$$

- 无零极点对消
- 可实现条件：$m\leq n$

状态变量及状态空间表达式的建立（二）

- 能控/能观标准型实现
  - 系统矩阵A为友矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

✓ 传递函数无零点，m=0

✓ 传递函数有零点，m = n

✓ 传递函数有零点，m < n

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

- 情形1：系统传递函数没有零点

✓ 高阶微分方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u(t)$$

✓ 传递函数

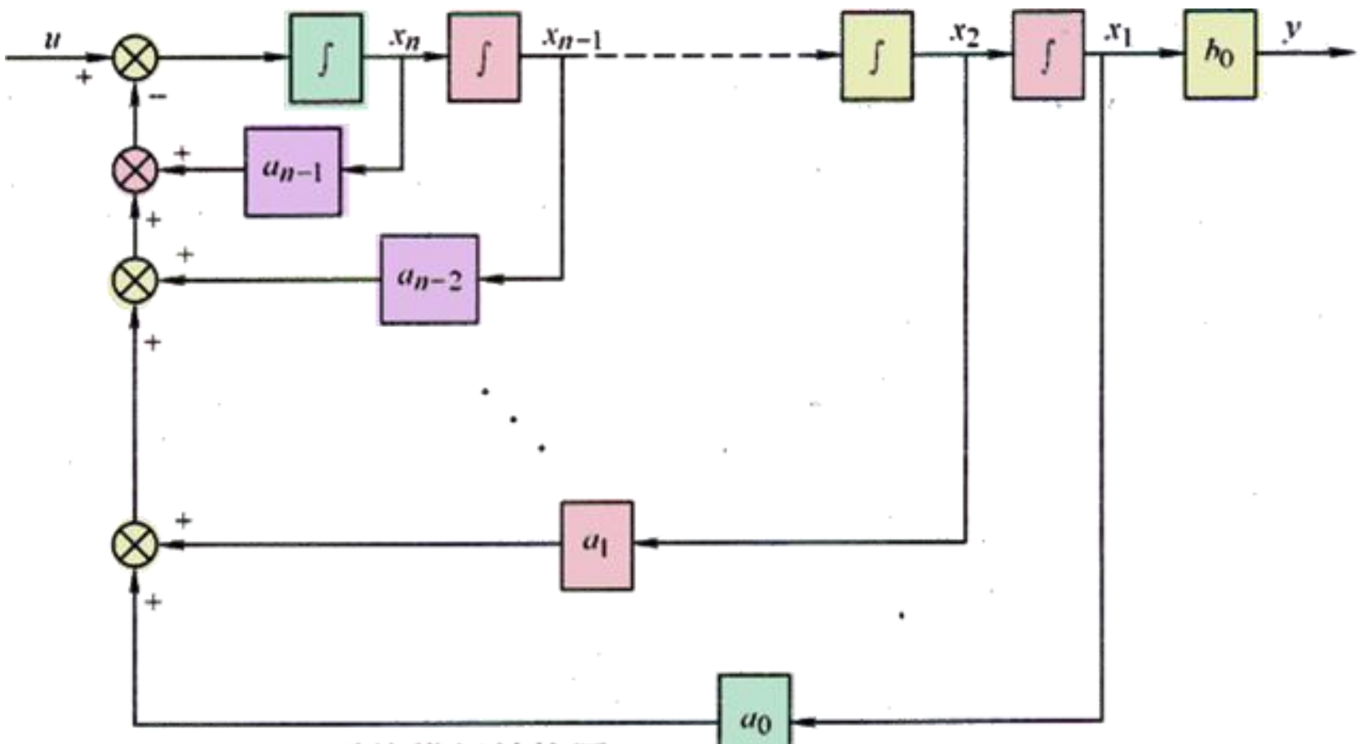
$$W(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

✓ 画图模拟结构图

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u(t)$$



系统模拟结构图

✓ 选择状态变量：积分器

$x_1 = y/b_0$,

$x_2 = \dot{y}/b_0$,

$x_n = y^{(n-1)}/b_0$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

✓ 列写方程，并标准化（化为向量矩阵形式）

$$x_1 = y / b_0,\ x_2 = \dot{y} / b_0, \cdots,\ x_n = y^{(n-1)} / b_0$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{b_0} y \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \cdots\cdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u \end{cases}$$

输出方程

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$W(s)=\frac{b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

输出方程

$$y=\begin{bmatrix}b_0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ \mathbf{c}=\begin{bmatrix}b_0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

✓ 例1-6：若系统的微分方程如下所示，求其状态空间表达式

$$\dddot{y}+6\ddot{y}+41\dot{y}+7y=6u$$

$$x_1=\frac{y}{6};$$

$$x_2=\frac{\dot{y}}{6};$$

$$x_3=\frac{\ddot{y}}{6}$$

$x_1=y/b_0,\ x_2=\dot{y}/b_0,\cdots,\ x_n=y^{(n-1)}/b_0$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{b_0}y \\ \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=x_3 \\ \cdots\cdots \\ \dot{x}_{n-1}=x_n \\ \dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+u \end{cases}$$

$$y=\begin{bmatrix}b_0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

✓ 例1-6：若系统的微分方程如下所示，求其状态空间表达式

$$\dddot{y}+6\ddot{y}+41\dot{y}+7y=6u$$

$$x_1=\frac{y}{6};\quad x_2=\frac{\dot{y}}{6};\quad x_3=\frac{\ddot{y}}{6}$$

$$\dot{x}_1=\frac{\dot{y}}{6}=x_2$$

$$\dot{x}_2=\frac{\ddot{y}}{6}=x_3$$

$$\dot{x}_3=\frac{y^{(3)}}{6}=-7x_1-41x_2-6x_3+u$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -7 & -41 & -6\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$x_1=y/b_0,\ x_2=\dot{y}/b_0,\cdots,\ x_n=y^{(n-1)}/b_0$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{b_0}y\\ \dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \cdots\cdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+u\end{cases}$$

$$y=\begin{bmatrix}b_0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

状态变量及状态空间表达式的建立（二）

✓ 例1-6：若系统的微分方程如下所示，求其状态空间表达式

$$\dddot{y}+6\ddot{y}+41\dot{y}+7y=6u$$

$$x_1=\frac{y}{6};\quad \dot{x}_1=\frac{\dot{y}}{6}=x_2$$

$$x_2=\frac{\dot{y}}{6};\quad \dot{x}_2=\frac{\ddot{y}}{6}=x_3$$

$$x_3=\frac{\ddot{y}}{6}\quad \dot{x}_3=\frac{y^{(3)}}{6}=-7x_1-41x_2-6x_3+u$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -7 & -41 & -6\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=6x_1=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$x_1=y/b_0,\ x_2=\dot{y}/b_0,\cdots,\ x_n=y^{(n-1)}/b_0$$

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{b_0}y\\ \dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \cdots\cdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+u\end{cases}$$

$$y=\begin{bmatrix}b_0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

- 情形2：系统传递函数有零点，且 m = n：能控标准型实现

✓ 高阶微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_mu^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

✓ 传递函数

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

➢ 通过合适选择状态变量，使微分方程组右边不出现 u 的导数项

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases}$$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

✓ 传函的严真化分解（并联分解）

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=b_n+\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$=b_n+\frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\left.\begin{aligned}\beta_0&=b_0-a_0 b_n\\ \beta_1&=b_1-a_1 b_n\\ &\vdots\\ \beta_{n\text{-}1}&=b_{n-1}-a_{n-1}b_n\end{aligned}\right\}$$

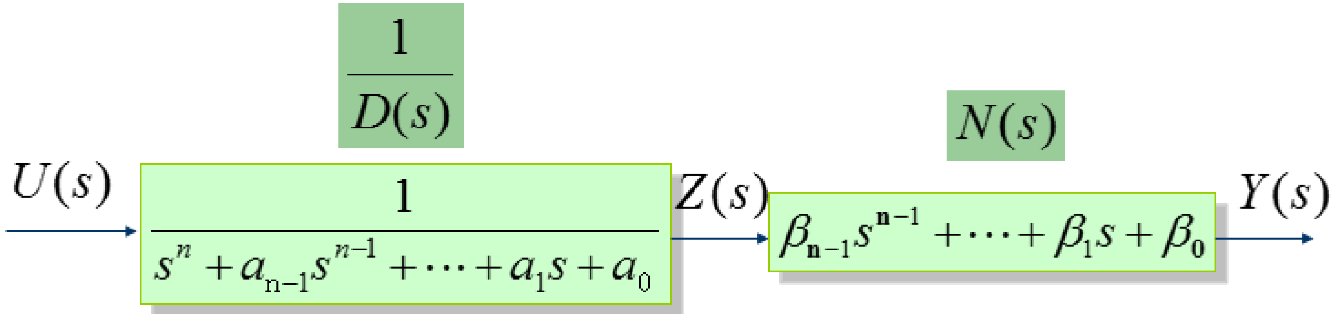
长除法

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases}$$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

- ✓ 严真部分分解（串联分解）

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=b_n+\frac{N(s)}{D(s)}$$



$$\frac{Z(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}\Rightarrow z^{(n)}+a_{n-1}z^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{z}+a_0z=u$$

$$\frac{Y(s)}{Z(s)}=\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1s+\beta_0\quad\Rightarrow y=\beta_{n-1}z^{(n-1)}+\cdots+\beta_1\dot{z}+\beta_0z$$

状态变量及状态空间表达式的建立（二）

✓ 利用无零点结果

$$z^{(n)}+a_{n-1}z^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{z}+a_0z=u$$

$$\begin{cases} x_1=z \\ x_2=\dot{z} \\ x_3=\ddot{z} \\ \vdots \\ x_n=z^{(n-1)} \end{cases}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_0 &= b_0-a_0b_n \\ \beta_1 &= b_1-a_1b_n \\ &\vdots \\ \beta_{n\text{-}1} &= b_{n-1}-a_{n-1}b_n \end{aligned}\right\}$$

$$y=\beta_{n-1}z^{(n-1)}+\cdots+\beta_1\dot{z}+\beta_0z$$

$$y=\beta_0x_1+\beta_1x_2+\cdots+\beta_{n-1}x_n \quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1}\end{bmatrix}$$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

✓ 传递函数

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_{\mathbf{n}}s^{\mathbf{n}}+b_{\mathbf{n}-1}s^{\mathbf{n}-1}+\cdots+b_1 s+b_{\mathbf{0}}}{s^n+a_{\mathbf{n}-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_{\mathbf{0}}}$$

✓ 状态空间表达式

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$d=b_n$$

$$\left.\begin{aligned}\beta_0&=b_0-a_0b_n\\ \beta_1&=b_1-a_1b_n\\ &\vdots\\ \beta_{n\text{-}1}&=b_{n-1}-a_{n-1}b_n\end{aligned}\right\}$$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

✓ 例：若系统的微分方程如下所示，求其状态空间表达式

$$\dddot{y}+9\ddot{y}+8\dot{y}=\ddot{u}+4\dot{u}+u$$

$$n=3,\ a_2=9, a_1=8, a_0=0$$

$$b_2=1,\ b_1=4,\ b_0=1$$

$$\beta_i=[1\quad 4\quad 1]$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-8&-9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u \qquad y=[1\quad 4\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\frac{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases}$$

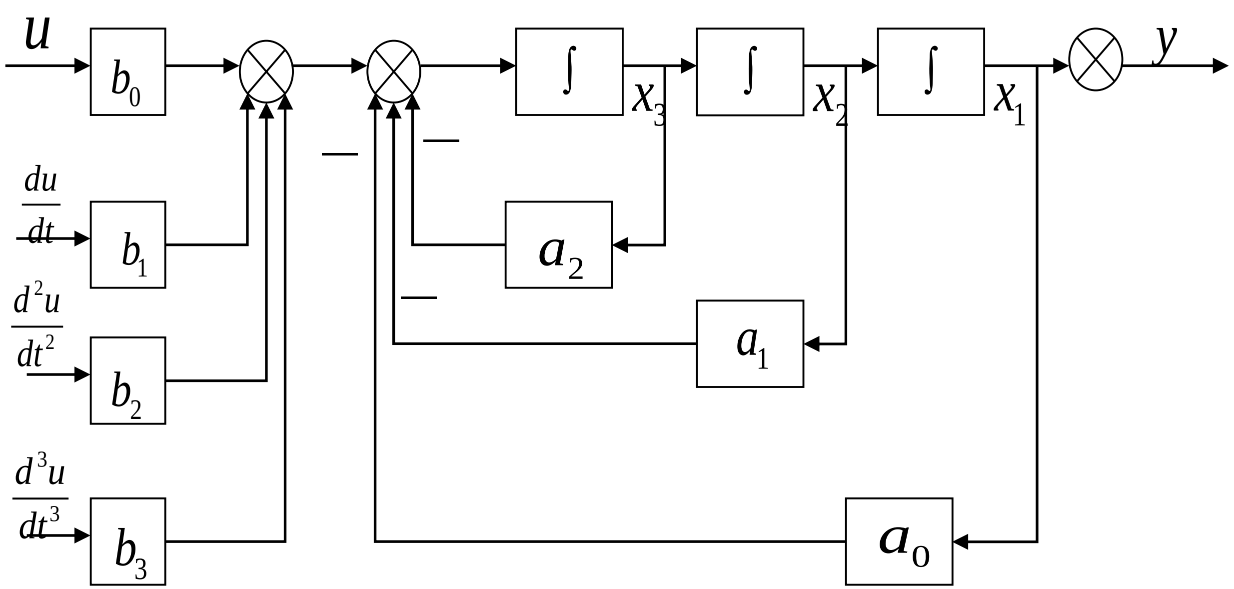
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}=[\beta_0\quad \beta_1\quad \cdots\quad \beta_{n-1}]\qquad d=b_n$$

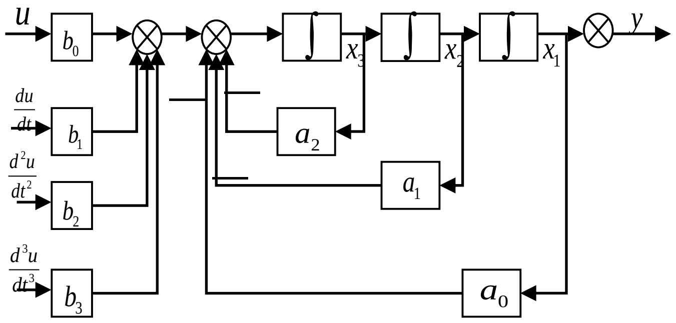
状态变量及状态空间表达式的建立(二)

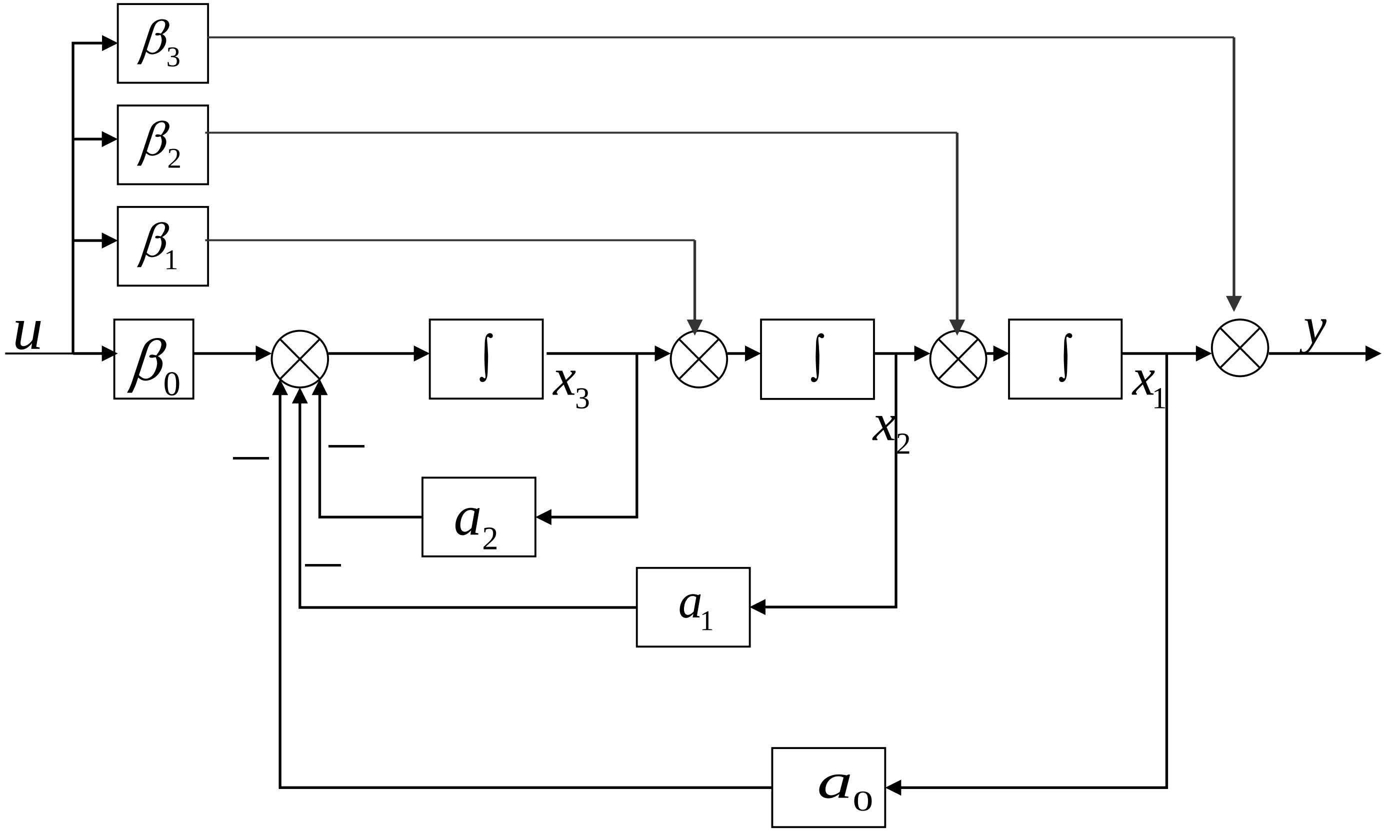
- 情形2：系统传递函数有零点（m = n）：能观标准型实现

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-a_0x_1-a_1x_2-a_2x_3+b_0u+b_1\dot{u}+b_2\ddot{u}+b_3\dddot{u}\\ y=x_1\end{cases}$$

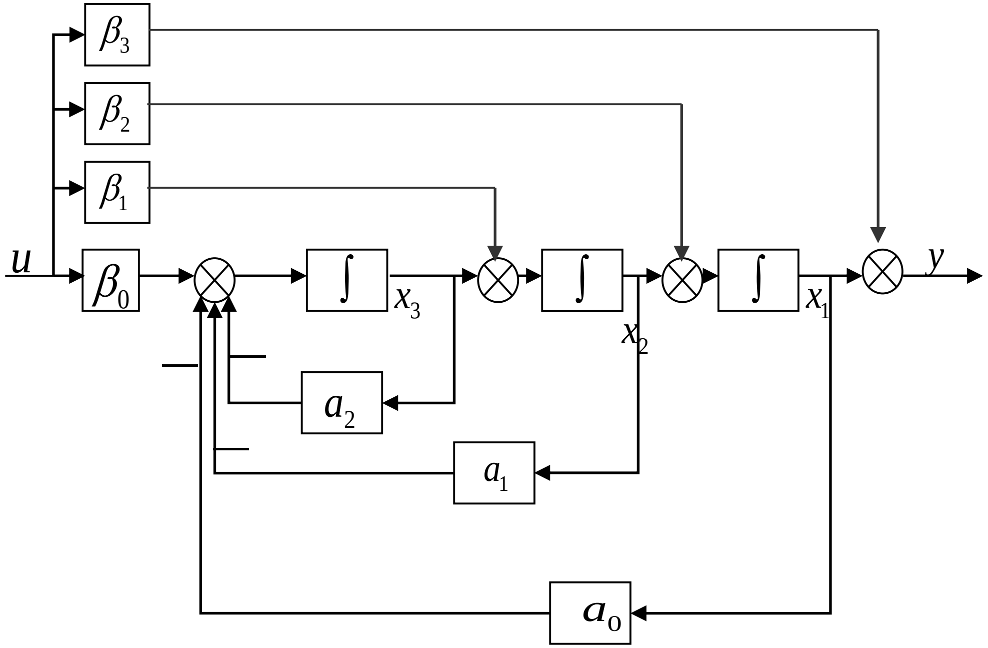


状态变量及状态空间表达式的建立（二）





状态变量及状态空间表达式的建立（二）



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_2\\ \beta_1\\ \beta_0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\beta_3 u$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ a_2 & 1 & 0 & 0\\ a_1 & a_2 & 1 & 0\\ a_0 & a_1 & a_2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_3\\ \beta_2\\ \beta_1\\ \beta_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_3\\ b_2\\ b_1\\ b_0\end{bmatrix}$$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_0 & a_1 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}+\beta_n u$$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&1\\ -a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_{n-1}\\ \beta_{n-2}\\ \vdots\\ \beta_1\\ \beta_0\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\beta_n u$$

$$\begin{bmatrix}1&&&&0\\ a_{n-1}&1&&&\\ a_{n-2}&a_{n-1}&1&&\\ \vdots&\vdots&&\ddots&\\ a_0&a_1&\cdots&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_n\\ \beta_{n-1}\\ \vdots\\ \beta_1\\ \beta_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_n\\ b_{n-1}\\ \vdots\\ b_1\\ b_0\end{bmatrix}$$

$$\frac{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&1\\ -a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}\beta_0&\beta_1&\cdots&\beta_{n-1}\end{bmatrix}\qquad d=b_n$$

状态变量及状态空间表达式的建立（二）

- 多输入-多输出微分方程的实现：模拟结构图

$$\left.\begin{aligned} \ddot{y}_1 + a_1\dot{y}_1 + a_2 y_2 &= b_1\dot{u}_1 + b_2 u_1 + b_3 u_2 \\ \dot{y}_2 + a_3 y_2 + a_4 y_1 &= b_4 u_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{y}_1 = -a_1\dot{y}_1 + b_1\dot{u}_1 - a_2 y_2 + b_2 u_1 + b_3 u_2$$

$$\dot{y}_2 = -a_3 y_2 - a_4 y_1 + b_4 u_2$$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

- 多输入-多输出微分方程的实现

$$\ddot{y}_1 = -a_1\dot{y}_1 + b_1\dot{u}_1 - a_2y_2 + b_2u_1 + b_3u_2$$

$$\dot{y}_2 = -a_3y_2 - a_4y_1 + b_4u_2$$

$$\Downarrow$$

$$y_1 = \iint\left[(-a_1\dot{y}_1 + b_1\dot{u}_1) - a_2y_2 + b_2u_1 + b_3u_2\right]\mathrm{d}t^2$$

$$= \iint(-a_1\dot{y}_1 + b_1\dot{u}_1)\mathrm{d}t^2 + \iint(b_2u_1 + b_3u_2 - a_2y_2)\mathrm{d}t^2$$

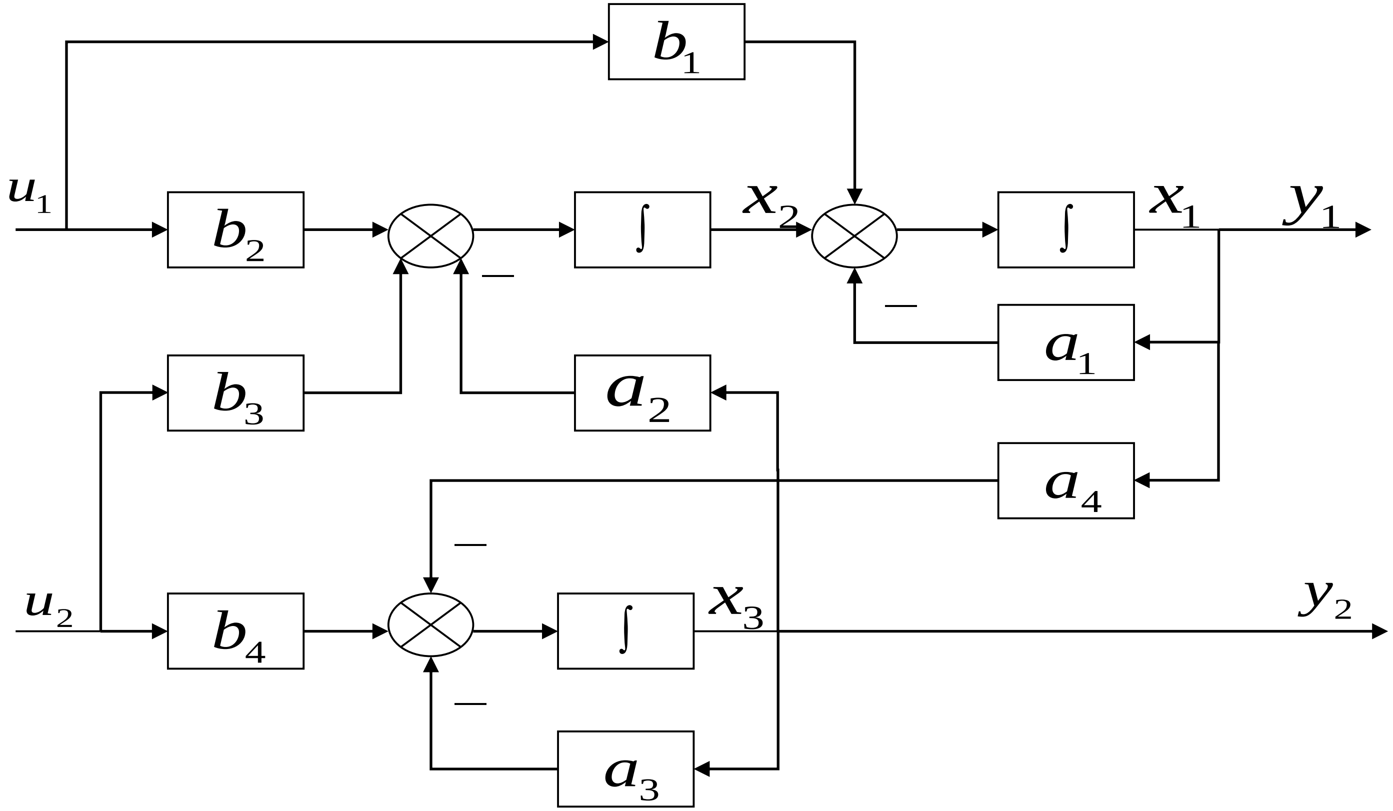
$$= \int(-a_1y_1 + b_1u_1)\mathrm{d}t + \iint(b_2u_1 + b_3u_2 - a_2y_2)\mathrm{d}t^2$$

$$y_2 = \int(-a_3y_2 - a_4y_1 + b_4u_2)\mathrm{d}t$$

状态变量及状态空间表达式的建立(二)

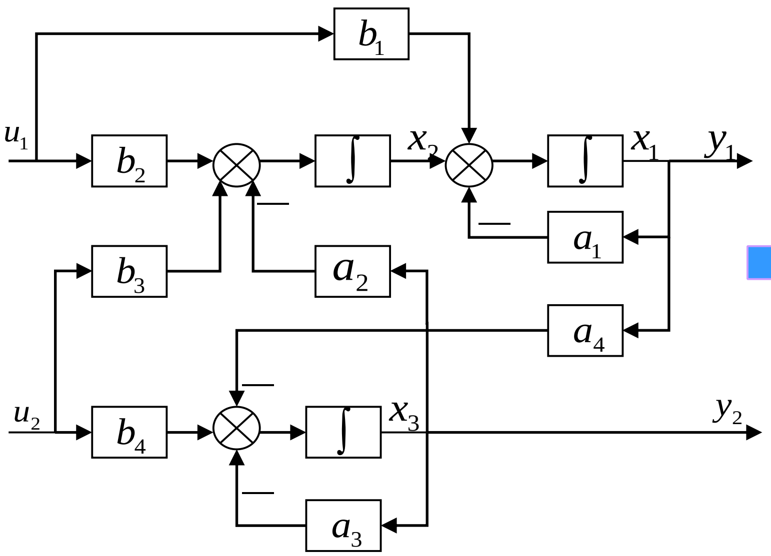
- 多输入-多输出微分方程的实现

$$y_1 = \int(-a_1y_1 + b_1u_1)\mathrm{d}t + \iint(b_2u_1 + b_3u_2 - a_2y_2)\mathrm{d}t^2 \qquad y_2 = \int(-a_3y_2 - a_4y_1 + b_4u_2)\mathrm{d}t$$



状态变量及状态空间表达式的建立(二)

- 多输入-多输出微分方程的实现



$$\dot{x}_1 = -a_1x_1 + x_2 + b_1u_1$$
$$\dot{x}_2 = -a_2x_3 + b_2u_1 + b_3u_2$$
$$\dot{x}_3 = -a_4x_1 - a_3x_3 + b_4u_2$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -a_2\\ -a_4 & 0 & -a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1 & 0\\ b_2 & b_3\\ 0 & b_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

上次课回顾

- 状态空间表达式的实现问题：传函 到 状态空间表达式

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0},\quad m\leqslant n$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases}$$

- ✓ 传递函数无零点，m = 0
- ✓ 传递函数有零点，m < n
- ✓ 传递函数有零点，m = n

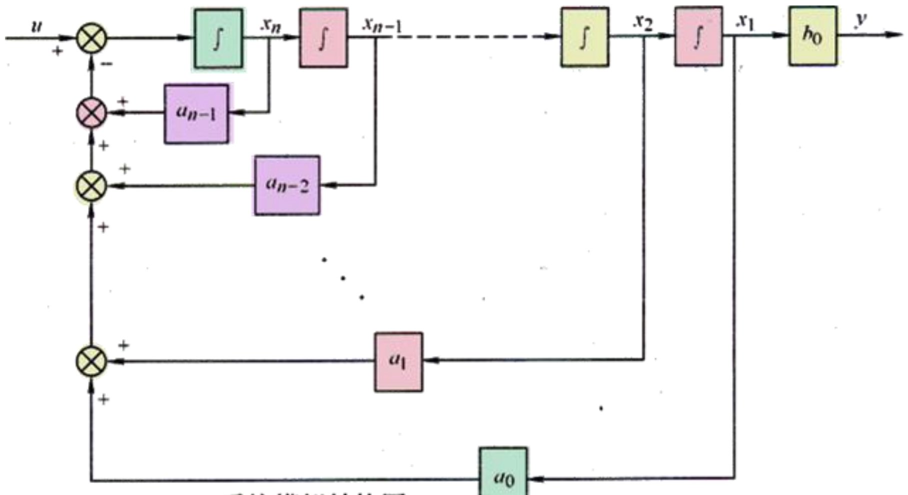
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}$$

上次课回顾

✓ 传递函数无零点，m = 0

$$W(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u(t)$$



系统模拟结构图

列写方程，并标准化（化为向量矩阵形式）

$$x_1 = y/b_0,\ x_2 = \dot{y}/b_0, \cdots,\ x_n = y^{(n-1)}/b_0$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{b_0}y \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \cdots\cdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + u \end{cases}$$

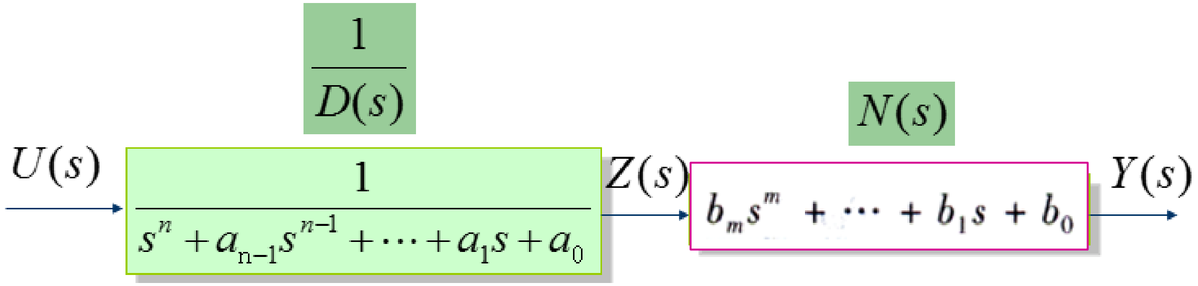
$$y = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

上次课回顾

✓ 传递函数有零点，m < n

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$



$$\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\Rightarrow z^{(n)}+a_{n-1}z^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{z}+a_0 z=u$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=z\\ x_2=\dot{z}\\ x_3=\ddot{z}\\ \quad\vdots\\ x_n=z^{(n-1)}\end{cases}\Rightarrow \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$y=b_m z^m+\cdots+b_1\dot{z}+b_0 z$$

$$\Rightarrow y=\beta_0 x_1+\beta_1 x_2+\cdots+\beta_{n-1}x_n\Rightarrow \mathbf{c}=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & \cdots & b_m\end{bmatrix}$$

上次课回顾

✓ 传递函数有零点，m = n

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=b_n+\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}\beta_0&\beta_1&\cdots&\beta_{n-1}\end{bmatrix}\qquad d=b_n$$

控制系统的状态空间表达式

1.1 状态变量及状态空间表达式

1.2 状态变量及状态空间表达式的模拟结构图

1.3 状态变量及状态空间表达式的建立(一)

1.4 状态变量及状态空间表达式的建立(二)

1.5 状态矢量的线性变换(坐标变换)

1.6 从状态空间表达式求传递函数阵

1.7 离散时间系统的状态空间表达式

1.8 时变系统和非线性系统的状态空间表达式

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 系统状态空间表达式的非唯一性
  - 对于给定的同一定常系统，可以选取不同的状态变量，对应着不同的状态空间表达式，即：可用不同形式状态空间表达式描述同一系统

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 系统状态空间表达式的非唯一性
  - 对于给定的同一定常系统，可以选取不同的状态变量，对应着不同的状态空间表达式，即：可用不同形式状态空间表达式描述同一系统
- 不同形式状态空间表达式间的线性非奇异变换关系
  - 对于同一系统的不同状态空间表达式描述，对应的状态向量之间可通过线性非奇异变换相互转化（为什么？）

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 系统状态空间表达式的非唯一性
  - 对于给定的同一定常系统，可以选取不同的状态变量，对应着不同的状态空间表达式，即：可用不同形式状态空间表达式描述同一系统
- 不同形式状态空间表达式间的线性非奇异变换关系
  - 对于同一系统的不同状态空间表达式描述，对应的状态向量之间可通过线性非奇异变换相互转化（为什么？）
- 通过坐标变换，使系统状态空间表达式规范化（对角化、约旦化、标准型），便于系统分析或设计

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 状态矢量的线性变换
  - 描述统一系统的两组不同状态向量存在线性变换关系

$$x = Tz \qquad z = T^{-1}x$$

其中，T 为非奇异变换矩阵

- 变换前后系统关系

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{x = Tz} \begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du \end{cases}$$

  - 系统维数不变，能完全描述系统行为；相关矩阵变化情况

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 状态矢量的线性变换
  - 描述统一系统的两组不同状态向量存在线性变换关系

$$x = Tz \qquad z = T^{-1}x$$

其中，T 为非奇异变换矩阵

- 变换前后系统关系

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{x = Tz} \begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du \end{cases}$$

  - 系统维数不变，能完全描述系统行为
  - 系统矩阵互为相似矩阵，基本特征不变（特征值）

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 状态矢量的线性变换
  - 描述统一系统的两组不同状态向量存在线性变换关系

$$x = Tz \qquad z = T^{-1}x$$

其中，T 为非奇异变换矩阵

- 变换前后系统关系

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned} \xrightarrow{x = Tz} \begin{aligned}\dot{z} &= T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y &= CTz + Du\end{aligned}$$

  - 系统维数不变，能完全描述系统行为
  - 系统矩阵互为相似矩阵，基本特征不变（特征值）
  - 系统传递函数阵不变

状态矢量的线性变换(坐标变换)

例：设系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}u;\quad x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix};\qquad y=\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}x$$

若取变换矩阵为 $T_1=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$，则

- 新的状态向量为 $z=T_1^{-1}x=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}x$，即 $\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x_2\\ \frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2\end{bmatrix}$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

例：设系统的状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u;\quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};\qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} x$$

若取变换矩阵为 $T_1 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$，则

- 新的状态向量为 $z = T_1^{-1} x = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x$，即 $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} x_2 \\ \frac{1}{2} x_1 - \frac{3}{2} x_2 \end{bmatrix}$
- 新的状态空间表达式为

$$\dot{z} = T_1^{-1} A T_1 z + T_1^{-1} B u = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u;\quad z(0) = T_1^{-1} x(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$y = C T_1 z = \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix} z$$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 系统的特征值
  - 对于如下线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

其特征值就是系统矩阵 A 的特征值，即如下特征方程的解

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

  - n 维系统 n 个特征值；互异单根、重根；实数、共轭复数

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 系统的特征值
  - 对于如下线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

其特征值就是系统矩阵 A 的特征值，即如下特征方程的解

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

  - n 维系统 n 个特征值；互异单根、重根；实数、共轭复数

- 特征向量
  - 设 λ_i 为系统的一个特征值，若存在一个n维非零向量 $\boldsymbol{p}_i$ 满足

$$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i。$$

则称向量 $\boldsymbol{p}_i$ 为系统对应于特征值 λ_i的特征向量。

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 系统线性变换的特征值不变性
  - 对于一个线性定常系统，其系统矩阵为 A，经线性变换后，新系统的系统矩阵变为 $T^{-1}AT$
  - 形式不同，但具有相同的特征值，不变性

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - T^{-1}AT| &= |\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT| = |T^{-1}\lambda T - T^{-1}AT| \\
&= |T^{-1}(\lambda I - A)T| = |T^{-1}||\lambda I - A||T| \\
&= |T^{-1}T||\lambda I - A| = |\lambda I - A|
\end{aligned}
$$

  - 特征值不变性，是可将原系统进行规范化变换后再进行分析或设计的依据

状态矢量的线性变换(坐标变换)

例：设某系统的系统矩阵如下所示，试求其特征向量

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

- 特征方程为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 6 & \lambda+11 & -6 \\ 6 & 11 & \lambda-5 \end{vmatrix}=0$$

即 $$\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)=0$$

可得，特征值为

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2,\quad \lambda_3=-3$$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 1）对应特征值 $\lambda_1 = -1$ 的特征向量，设为 $P_1 = \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix}$

则 $AP_1 = \lambda_1 P_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{11} \\ -P_{21} \\ -P_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_{11} + p_{21} - p_{31} &= 0 \\ -6p_{11} - 10p_{21} + 6p_{31} &= 0 \\ -6p_{11} - 11p_{21} + 6p_{31} &= 0 \end{aligned}$$

$p_{21} = 0$

$p_{11} = p_{31}$　　$p_{11} = p_{31} = 1$

$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，同理得 $P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$　$P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 利用线性变换规范化系统状态空间表达式
  - 面向系统的系统矩阵，将系统矩阵转化为特殊形式

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{z} = \overbrace{T^{-1}AT}^{J}z + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du \end{cases}$$

  - 根据系统特征值情况，对角标准型、约旦标准型

无重根：

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

有重根：

$$J = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & \ddots & 1 & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ \hline & & 0 & & \lambda_{q+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{array}\right)$$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 对任意形式系统矩阵，当其无重根时，可变换为对角标准型

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\dot{z}=\underline{T^{-1}AT}z+T^{-1}Bu=\underline{J}z+T^{-1}Bu\\ y=CTz+Du\end{cases}$$

$$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 特征值互异（无重根），可变换为对角标准型，步骤：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

- 求取特征值：$|\lambda I - A| = 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$
- 求取对应特征向量：$AP_i = \lambda_i P_i \rightarrow P_1, P_2, \cdots, P_n$
- 给出变换矩阵：$T = [P_1, P_2, \cdots, P_n]$
- 求取变换后状态空间表达式

$$\begin{cases} \dot{z} = \underline{T^{-1}AT}z + \underline{T^{-1}B}u \\ y = \underline{CT}z + Du \end{cases}$$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

例：设某系统的状态方程如下所示，试将其化为对角标准型

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\0 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}u$$

- 求特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\0 & \lambda+1 & 0\\0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)=0$$

可得，特征值为

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=1,\quad \lambda_3=-1$$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- ❑ 求每个特征值对应的特征向量
- ✓ 对特征值为$\lambda_1 = 2$，有

$$(\lambda_1 I - A)P_1 = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow P_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ✓ 同理，得另外两个特征值对应的特征向量

$$P_2 = \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- ❑ 故，可选取变换矩阵为

$$T = \left[P_1, P_2, P_3\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 根据变换后状态方程的公式，得

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

✓ 新系统的系统矩阵为对角矩阵，对角线元素为特征值

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 对任意形式系统矩阵，当其有重根时，可变换为约旦标准型

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\dot{z} = \underline{T^{-1}AT}z + T^{-1}Bu = \underline{J}z + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du\end{cases}$$

$$J = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_1 & 1 & \mathbf{0} & & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & & \ddots & 1 & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ \hline & & \mathbf{0} & & \lambda_{q+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{array}\right)$$

✓ 广义特征向量

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_1 - AP_1 &= 0 \\ \lambda_1 P_2 - AP_2 &= -P_1 \\ &\vdots \\ \lambda_1 P_q - AP_q &= -P_{q-1} \end{aligned}$$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 特征值相同（重根），可变换为约旦标准型，步骤：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

- 求取特征值：$|\lambda I - A| = 0 \rightarrow \underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{q个}, \underbrace{\lambda_{q+1}, \cdots, \lambda_n}_{n-q}$

- 求取（广义）特征向量：$\underbrace{P_1, \cdots, P_q}_{q个}, \underbrace{P_{q+1}, \cdots, P_n}_{n-q}$

- 给出变换矩阵：$T = \left[P_1, \cdots, P_q, P_{q+1}, \cdots, P_n \right]$

- 计算变换后状态空间表达式：$\begin{cases} \dot{z} = \underline{T^{-1}AT}z + \underline{T^{-1}B}u \\ y = \underline{CT}z + Du \end{cases}$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

例：设系统状态空间表达式如下所示，试将其化为约旦标准型

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

- 求特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ -2 & -3 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2-2=0$$

可得，特征值为

$$\lambda_{1,2}=-1,\quad \lambda_3=2$$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 求每个特征值对应的（广义）特征向量

✓ 对特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_3=2$，有

$$(\lambda_1 I - A)P_1 = 0$$
$$(\lambda_3 I - A)P_3 = 0$$
$$\rightarrow \quad P_1=\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

✓ 对重根 $\lambda_2=-1$，求广义特征向量

$$\lambda_1 P_2 + AP_2 = -P_1$$
$$\rightarrow \quad -\begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow P_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 故，可选取变换矩阵为

$$T=\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 根据变换后状态方程的公式，得

$$\dot{z}=T^{-1}ATz+T^{-1}Bu=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}\frac{2}{9}\\ -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{9}\end{bmatrix}u$$

$$y=CTz=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}z$$

✓ 变换矩阵非唯一

$$-\begin{bmatrix}p_{21}\\ p_{22}\\ p_{23}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{21}\\ p_{22}\\ p_{23}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\longrightarrow P_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}$$

- A 为友矩阵
  - 无重根，对角化的变换矩阵为（范德蒙特矩阵）

$$T=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

  - 有重根，约旦化的变换矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & \lambda_4 & \cdots & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \cdots & \lambda_4^2 & \cdots & \lambda_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_1}(\lambda_1^{n-1}) & \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda_1^2}(\lambda_1^{n-1}) & \cdots & \lambda_4^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

$$
\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\
\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & \lambda_4 & \cdots & \lambda_n \\
\lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \cdots & \lambda_4^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\lambda_1^{n-1} & \dfrac{d}{d\lambda_1}(\lambda_1^{n-1}) & \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{d\lambda_1^2}(\lambda_1^{n-1}) & \cdots & \lambda_4^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}
\end{pmatrix}
$$

例：设系统的系统矩阵如下所示，试将其化为约旦标准型

$$
A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda_{1,2}=-1,\quad \lambda_3=2
$$

$$
\longrightarrow T=\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}
$$

状态矢量的线性变换(坐标变换)

- 为什么有坐标变换，其背景?
- 经过坐标变换的系统与原系统，哪些性质不变?
- 特征值、特征向量（广义特征向量）、约旦标准型
- 如何将具有任意形式的系统矩阵变换为标准型？如何选取变换矩阵?

控制系统的状态空间表达式

从状态空间表达式求传递函数阵

传递函数阵

- 在经典控制理论中，SISO系统的复数域描述：传递函数
- 实现问题：由传递函数建立状态空间表达式
- MIMO系统的复数域描述？实现问题的逆问题？与标量传递函数的联系？

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

✓ 实现

✓ 非唯一性

✓ 逆问题

✓ 是否唯一？

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}}$$

从状态空间表达式求传递函数阵

基于Laplace变换的传递函数阵求解

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \xrightarrow{\text{拉氏变换}} \begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1} BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

- 输入-状态的传递函数阵

$$W_{ux}(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = (sI - A)^{-1} B$$

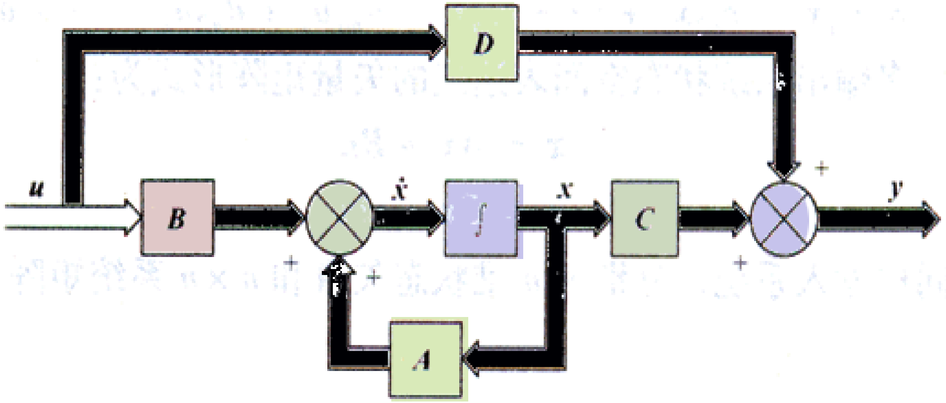
- 输入-输出的传递函数阵

$$W_{uy}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D$$

从状态空间表达式求传递函数阵

- 基于系统结构矢量图求解

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$



b)

从状态空间表达式求传递函数阵

□ 传递函数阵

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B+D$$

➢ 维数：m*r

$$\mathbf{W}(s)=\begin{pmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1r}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \cdots & W_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{m1}(s) & W_{m2}(s) & \cdots & W_{mr}(s) \end{pmatrix}$$

✓ $W_{ij}(s)$ ：标量函数，表征第j个输入对第i个输出的传递关系

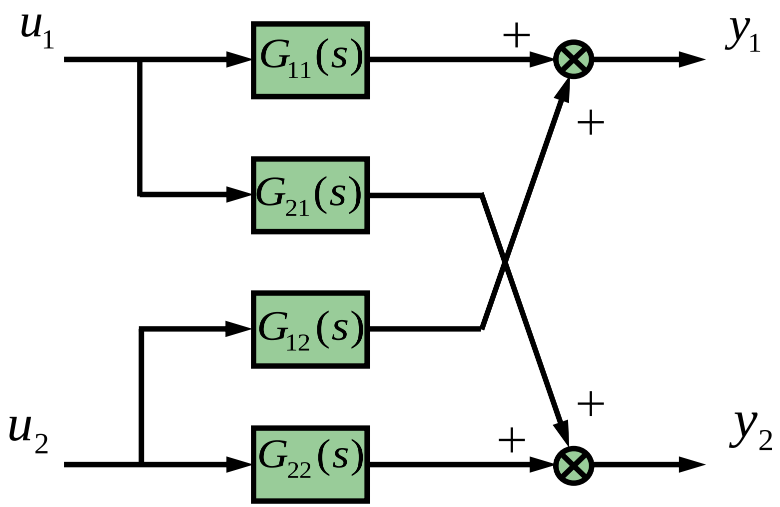
✓ $i \neq j$ ：不同标号的输入与输出相互关联，称为耦合关系

✓ MIMO系统相比SISO系统的复杂性

从状态空间表达式求传递函数阵

- 系统耦合关系，双输入-双输出系统

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$



从状态空间表达式求传递函数阵

- 传递函数阵-系统特征

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$\boldsymbol{W}(s) = \frac{1}{|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|}[\boldsymbol{C}\,\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|]$$

- ✓ 分母：系统矩阵特征多项式，传递函数极点为系统矩阵特征值
- ✓ 分子：多项式矩阵

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0},$$

从状态空间表达式求传递函数阵

- 唯一性：状态空间表达式非奇异线性变换不改变传递函数阵

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

✓ 实现
✓ 非唯一性

✓ 逆问题
✓ 是否唯一？

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu\\ y&=Cx+Du\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu\\ y&=Cx+Du\end{aligned}\quad\xrightarrow{z=T^{-1}x}\quad\begin{aligned}\dot{z}&=T^{-1}ATz+T^{-1}Bu\\ y&=CTz+Du\end{aligned}$$

$$W(s)=C(sI-A)^{-1}B+D\qquad \widetilde{W}(s)=CT(sI-T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B+D$$

从状态空间表达式求传递函数阵

- 唯一性：状态空间表达式非奇异线性变换不改变传递函数阵

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

✓ 实现 ✓ 非唯一性 ↓ ↑ ✓ 逆问题 ✓ 是否唯一？

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu\\ y&=Cx+Du\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu\\ y&=Cx+Du\end{aligned}\quad\xrightarrow{z=T^{-1}x}\quad\begin{aligned}\dot{z}&=T^{-1}ATz+T^{-1}Bu\\ y&=CTz+Du\end{aligned}$$

$$W(s)=C(sI-A)^{-1}B+D\quad\Downarrow\quad\widetilde{W}(s)=CT(sI-T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B+D$$

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(s)&=CT(sI-T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B+D\\ &=C[T(sI-T^{-1}AT)T^{-1}]^{-1}B+D\\ &=C[T(sI)T^{-1}-TT^{-1}ATT^{-1}]^{-1}B+D\\ &=C(sI-A)^{-1}B+D=W(s)\\ &=W(s)\end{aligned}$$

从状态空间表达式求传递函数阵

- 子系统在各种连接时的传递函数阵和状态空间方程

从状态空间表达式求传递函数阵

子系统在各种连接时的传递函数阵

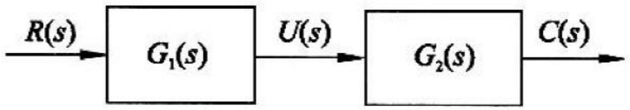
- 两个子系统：串联、并联、反馈（为什么、怎么得到新系统）

$$\Sigma 1:(A_1, B_1, C_1, D_1)$$

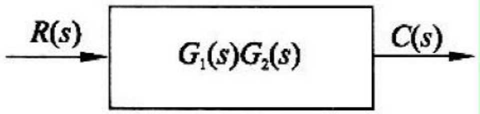
$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 &= C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{aligned}\right\}$$

$$\Sigma 2:(A_2, B_2, C_2, D_2)$$

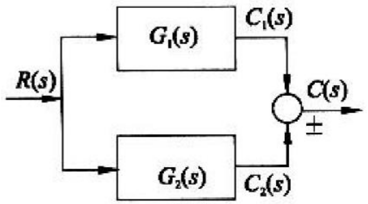
$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_2 &= A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 &= C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{aligned}\right\}$$



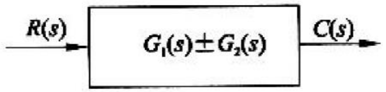
(a)



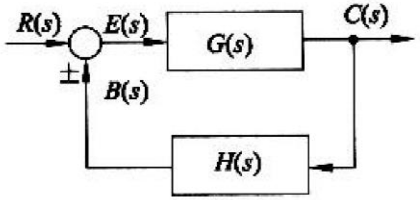
(b)



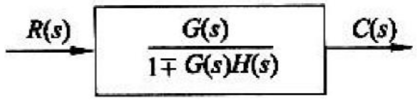
(a)



(b)



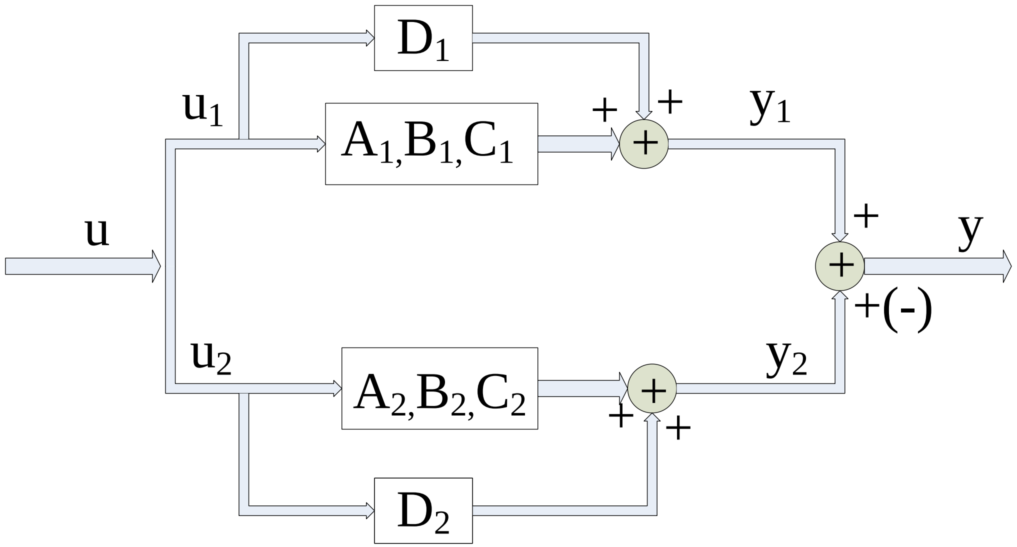
(a)



(b)

从状态空间表达式求传递函数阵

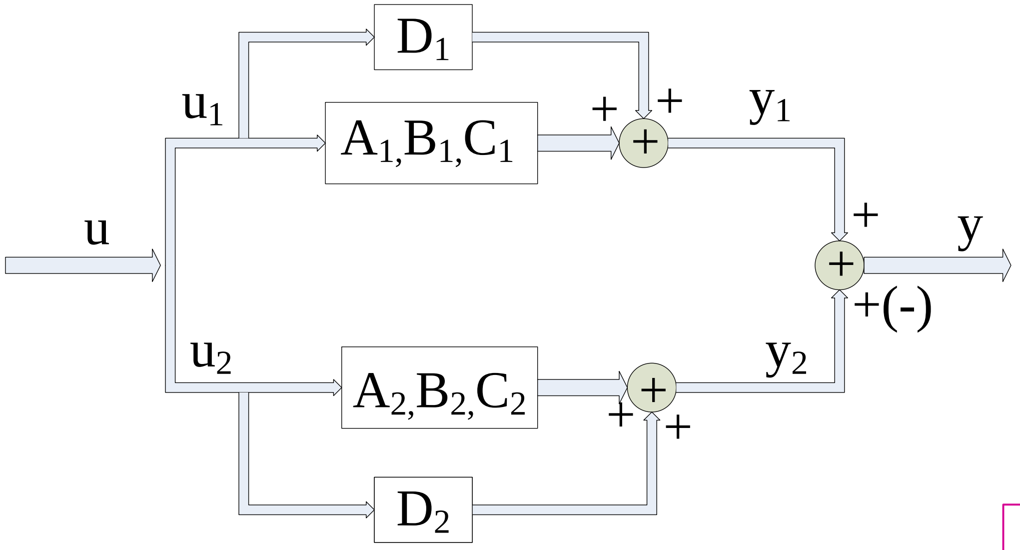
- 两子系统并联：共用输入、同维输出之和、状态扩维；状态空间表达式、传函



$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1\\ y_1 = C_1x_1 + D_1u_1\end{cases}\qquad \Sigma_2:\begin{cases}\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2\\ y_2 = C_2x_2 + D_2u_2\end{cases}$$

从状态空间表达式求传递函数阵

- 两子系统并联：共用输入、同维输出之和、状态扩维；状态空间表达式、传函



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}u$$

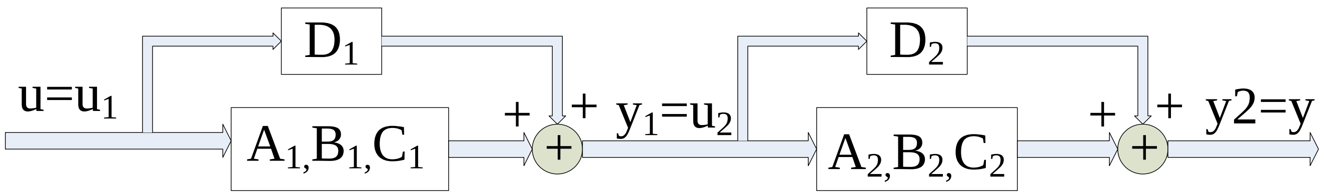
$$y=\begin{bmatrix}C_1 & \pm C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+(D_1\pm D_2)u$$

$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{x}_1=A_1x_1+B_1u_1\\ y_1=C_1x_1+D_1u_1\end{cases}\qquad \Sigma_2:\begin{cases}\dot{x}_2=A_2x_2+B_2u_2\\ y_2=C_2x_2+D_2u_2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}W(s)&=\begin{bmatrix}C_1 & \pm C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(sI-A_1)^{-1} & 0\\ 0 & (sI-A_2)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}+(D_1\pm D_2)\\ &=\left[C_1(sI-A_1)^{-1}B_1+D_1\right]\pm\left[C_2(sI-A_2)^{-1}B_2+D_2\right]\\ &=W_1(s)\pm W_2(s)\end{aligned}$$

从状态空间表达式求传递函数阵

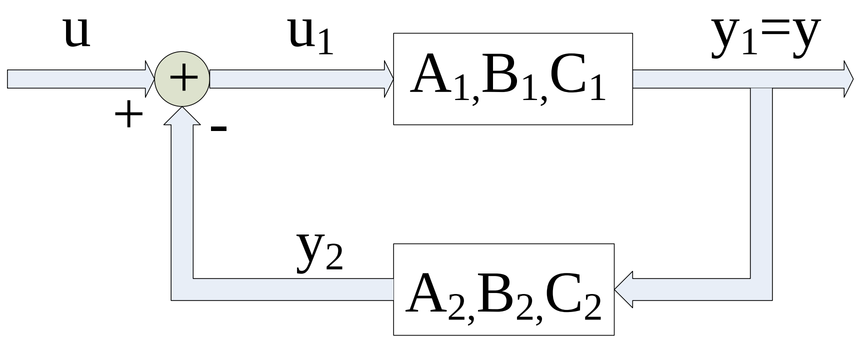
- 两子系统串联：新系统状态、输入、输出、状态空间表达式、传函 $W(s)=W_2(s)W_1(s)$



$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{x}_1=A_1x_1+B_1u_1\\ y_1=C_1x_1+D_1u_1\end{cases}\qquad \Sigma_2:\begin{cases}\dot{x}_2=A_2x_2+B_2u_2\\ y_2=C_2x_2+D_2u_2\end{cases}$$

从状态空间表达式求传递函数阵

➢ 反馈结构：新系统状态、输入、输出、状态空间表达式、传函



$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1 \\ y_1 = C_1x_1\end{cases} \qquad \Sigma_2:\begin{cases}\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2 \\ y_2 = C_2x_2\end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{W}(s) = \boldsymbol{W}_1(s)\left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{W}_2(s)\boldsymbol{W}_1(s)\right]^{-1}}$$

离散时间系统的状态空间表达式

离散时间状态空间表达式

- 为什么：计算机辅助设计
- 形式是什么：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k) \\
\boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)
\end{aligned}
$$

- 怎么得到：
  - ✓ 类似连续系统：模拟结构图、差分方程、脉冲传函
  - ✓ 连续系统离散化

时变系统和非线性系统的状态空间表达式

- 时变系统
  - 为什么
  - 形式是什么
  - 连续线性时变系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

  - 离散线性时变系统
  - 非线性时变系统

时变系统和非线性系统的状态空间表达式

非线性系统

- 为什么：如电子元器件饱和
- 形式是什么
- 时不变非线性系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_r), i = 1, 2, \cdots, n \\ y_j &= g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_r), j = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}\right\}$$

- 时变非线性系统

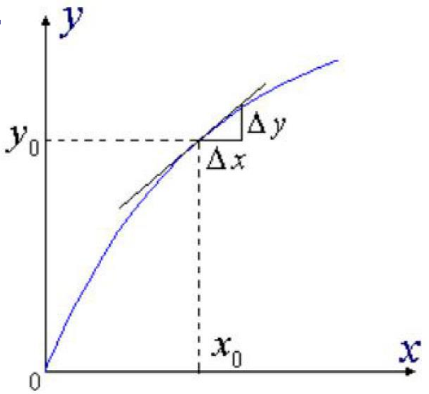
$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_r; t), i = 1, 2, \cdots, n \\ y_j &= g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_r; t), j = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}\right\}$$

- 工作点线性化、精确线性化

时变系统和非线性系统的状态空间表达式

非线性系统工作点线性化

- 为什么要、为什么可以



- 如何线性化：泰勒展式、雅克比矩阵

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u)\\ y &= g(x,u)\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}\dot{x}_0 &= f(x_0,u_0)\\ y_0 &= g(x_0,u_0)\end{aligned}$$

$$f(x,u) = f(x_0,u_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}\delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0}\delta u + $$

$$g(x,u) = g(x_0,u_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}\delta x + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_0,u_0}\delta u + $$

$$\Rightarrow$$

$$\delta\dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}\delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0}\delta u$$

$$\delta y = y - y_0 = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}\delta x + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_0,u_0}\delta u$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,u_0} = A; \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0} = B$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0,u_0} = C; \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_0,u_0} = D$$

$$\Rightarrow$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\hat{u}$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + D\hat{u}$$

本章小结

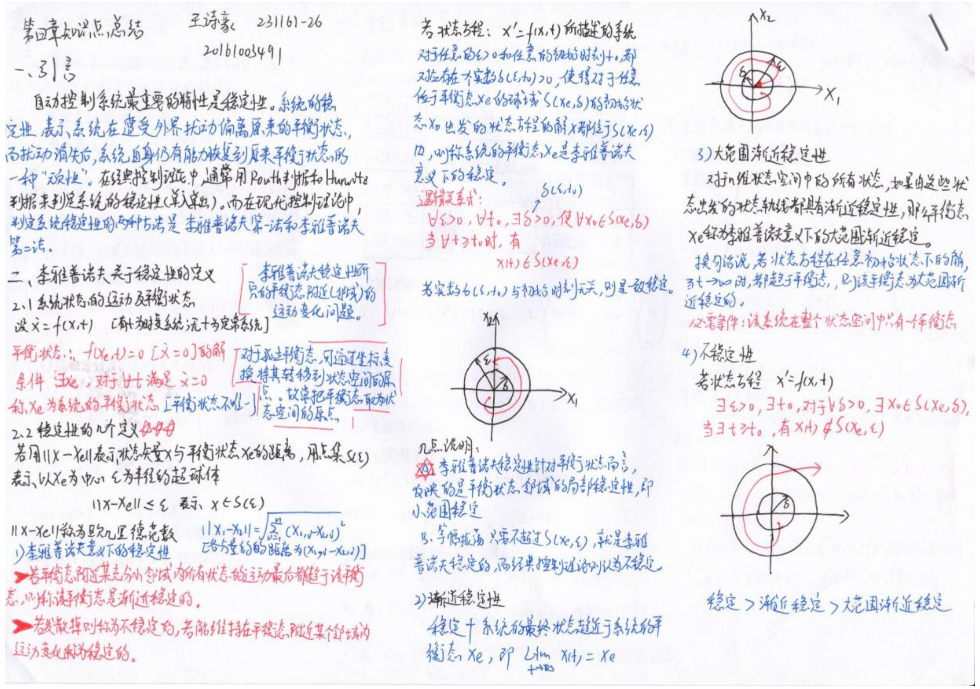
- 概念理解
  - 状态空间表达式：形式、组成、特点、分类、等
  - 传递函数矩阵

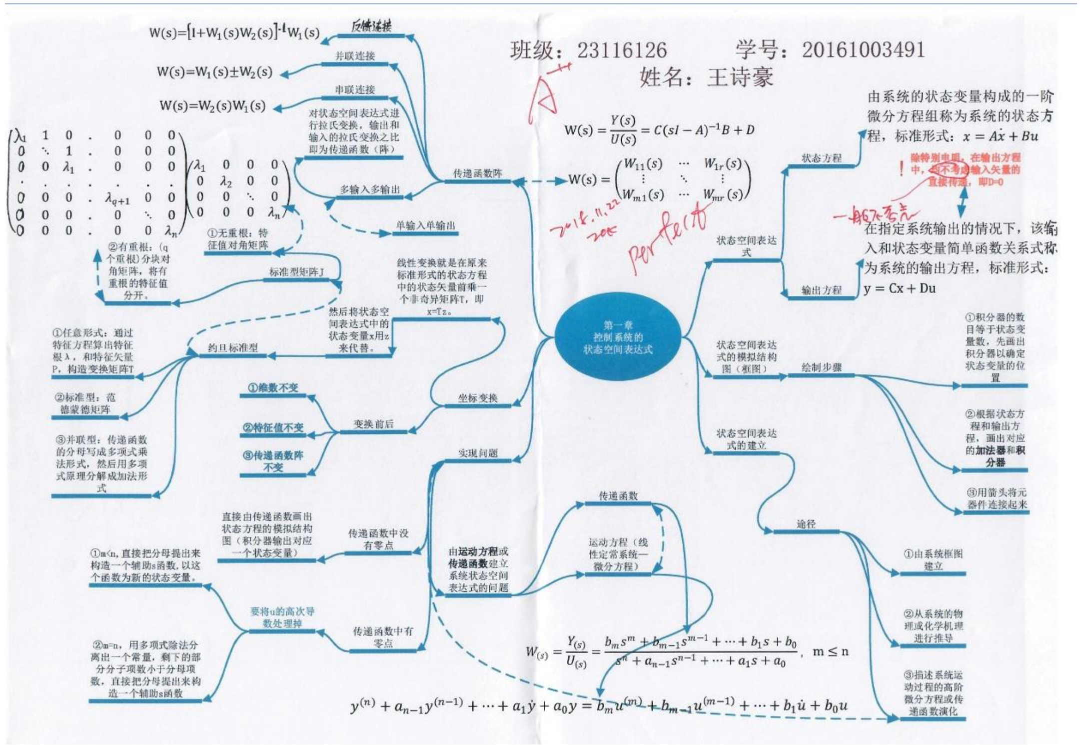
- 相关运算
  - 结构图、传函、状态空间表达式之间的相互转化
  - 状态空间表达式的线性变换（坐标变换）

本章作业

- 知识点梳理

- 课后习题：1.1、1.3、1-9(2)；





谢谢！