系统分析与控制原理II：线性系统分析与设计

线性控制系统

状态空间表达式的解

概述

- 状态空间表达式
  - 建模：对待认识事物的形式化描述
  - 如何利用模型，实现对事物进行认识（分析）或改造（设计）

概述

- 基于状态空间表达式的系统分析

- 定量分析：对系统运动规律进行精确研究，确定系统在给定初始状态与外部作用下的响应，状态表达式的解

概述

- 基于状态空间表达式的系统分析

- 定性分析：对系统基本特征进行研究，定性判据系统性能：
  - 能控性、能观性、稳定性、鲁棒性、……

概述

- 基于状态空间表达式的系统分析
  - 利用状态空间表达式，揭示系统演变过程、系统基本特征
  - 定量分析：
    - ✓ 对系统运动规律进行精确研究，确定系统在给定初始状态与外部作用下的响应
    - ✓ 状态表达式的解
  - 定性分析：
    - ✓ 对系统基本特征进行研究，定性判据系统性能：
    - ✓ 能控性、能观性、稳定性、鲁棒性、……

概述：本章要讨论的问题

- 状态空间表达式的解：
  - ✓ 为什么？
  - ✓ 是什么？
- 状态空间表达式的解：
  - ✓ 怎么算？
- 连续状态空间表达式的离散化：
  - ✓ 为什么？
  - ✓ 怎么算？

概述：本章要讨论的问题

- 状态空间表达式的解：为什么？是什么？
  - 精确表征系统随时间的演变过程
  - 解的形式，系统多样性（定常系统、时变系统；连续系统、离散系统）
  - 状态转移矩阵：定义、性质、物理含义

概述：本章要讨论的问题

- 状态空间表达式的解：为什么？是什么？
  - 精确表征系统随时间的演变过程
  - 解的形式，系统多样性：定常系统、时变系统；连续系统、离散系统
  - 状态转移矩阵：定义、性质、物理含义
- 状态空间表达式的解：怎么算？（状态转移矩阵）
  - 求解统一化：状态转移矩阵、刻画状态演变
  - 状态转移矩阵：4类求解思路

概述：本章要讨论的问题

- 状态空间表达式的解：为什么？是什么？
  - 精确表征系统随时间的演变过程
  - 解的形式，系统多样性：定常系统、时变系统；连续系统、离散系统
  - 状态转移矩阵：定义、性质、物理含义
- 状态空间表达式的解：怎么算？（状态转移矩阵）
  - 求解统一化：状态转移矩阵、刻画状态演变
  - 状态转移矩阵：4类求解思路
- 连续状态空间表达式的离散化：为什么？怎么算？
  - 演变过程的连续性（连续系统）、离散化需求（计算机辅助分析与设计）
  - 基于表达式的解、导数定义

概述：本章安排

2.1 线性定常系统齐次状态方程的解（0.5学时）

2.2 矩阵指数函数－状态转移矩阵（1.5学时）

2.3 线性定常系统非齐次状态方程的解（1学时）

2.4 线性时变连续系统状态方程的解（0.5学时）

2.5 离散时间线性系统状态方程的解（0.5学时）

2.6 连续时间状态空间表达式的离散化（1学时）

概述：重点&预备知识

- 重点
  - 状态转移矩阵（基本定义、性质、物理含义、几类计算方法的思路）
  - 线性定常连续系统的解（组成、形式）
  - 连续时间状态空间表达式的离散化（原则；精确离散化、近似离散化）

- 预备知识
  - 坐标变换、拉氏变换（反变换）、卷积、定积分、常微分方程求解、阶乘、指数函数、矩阵乘逆等运算、行列式、特征值、特征向量、泰勒公式、等

线性控制系统状态空间表达式的解

线性定常系统齐次状态方程的解

- 线性定常系统状态方程一般形式

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- 解：揭示系统在初态和控制下的运动形态

线性定常系统齐次状态方程的解

- 线性定常系统状态方程一般形式
  - 状态演变受初始条件和控制输入影响

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

  - 零输入时：控制输入为零时，系统从初始状态出发的自由运动形态

  - 零状态时：初始状态为零，系统在存在外力作用下的受迫运动形态

  - 叠加性：控制输入作用下，系统从初始状态出发的运动形态（演变过程）

线性定常系统齐次状态方程的解

- 齐次状态方程的解
  - 状态演变受初始条件影响

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

  - 揭示系统在无外力作用下的自由运动形态
  - 怎么算：标量方程求解 到 状态方程求解（向量矩阵形式），运算相似性
  - 状态转移矩阵概念的提出：解的形式 提出 状态转移矩阵

线性定常系统齐次状态方程的解

- 怎么算：标量方程求解 到 状态方程求解？

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

线性定常系统齐次状态方程的解

- 基于级数展开的求解方法

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=ax(t)\\ x(0)=x_0\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

设解为如下向量级数形式

$$x(t)=b_0+b_1(t-t_0)+b_2(t-t_0)^2+\cdots+b_k(t-t_0)^k+\cdots$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}b_0=x(t_0)\\ \dot{x}(t)=b_1+2b_2(t-t_0)+\cdots+kb_k(t-t_0)^{k-1}+\cdots\\ Ax(t)=Ab_0+Ab_1(t-t_0)+\cdots+Ab_{k-1}(t-t_0)^{k-1}+Ab_k(t-t_0)^k+\cdots\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$b_1=Ab_0 \quad b_2=\frac{1}{2}Ab_1=\frac{1}{2!}A^2b_0 \quad \cdots \quad b_k=\frac{1}{k!}A^kb_0$$

$$\Downarrow$$

$$x(t)=\left(I+A(t-t_0)+\frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k+\cdots\right)x(t_0)$$

线性定常系统齐次状态方程的解

- 解的形式：

$$x(t)=\left(I+A(t-t_0)+\frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k+\cdots\right)x(t_0)$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{e}^{A(t-t_0)}=I+A(t-t_0)+\frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k+\cdots$$

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

- 矩阵指数函数、状态转移矩阵

线性控制系统状态空间表达式的解

2.1 线性定常系统齐次状态方程的解（自由解）

2.2 矩阵指数函数－状态转移矩阵

2.3 线性定常系统非齐次状态方程的解

2.4 线性时变连续系统状态方程的解

2.5 离散时间线性系统状态方程的解

2.6 连续时间状态空间表达式的离散化

矩阵指数函数—状态转移矩阵

➢ 矩阵指数函数

❑ 定义

$$e^{A(t-t_0)}=I+A(t-t_0)+\frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k+\cdots$$

❑ 状态方程的解：

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0) \Longleftarrow x(t)=\left(I+A(t-t_0)+\frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k+\cdots\right)x(t_0)$$

❑ 解表达式表明

✓ 任意时刻 t 的状态为矩阵指数函数与初始状态的乘积

✓ 与状态线性变换对比：x(t)是x(t0)的一种转移，矩阵指数函数表征了转移规则

❑ 矩阵指数函数 定义为 状态转移矩阵

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 状态转移矩阵

$$\Phi(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}=I+A(t-t_0)+\frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2+\ldots+\frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k+\ldots$$

- ✓ 矩阵：维数
- ✓ 相关因素：t-t0整体为自变量的函数；系统矩阵
- ✓ 起点-终点：t0 时刻到 t 时刻

$$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0) \qquad x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 状态转移矩阵物理含义

$$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)$$

  - 给定初始状态，状态转移矩阵完全决定了状态转移特性，即：
  - 状态转移矩阵包含了系统自由运动的全部信息

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 状态转移矩阵物理含义

$$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)$$

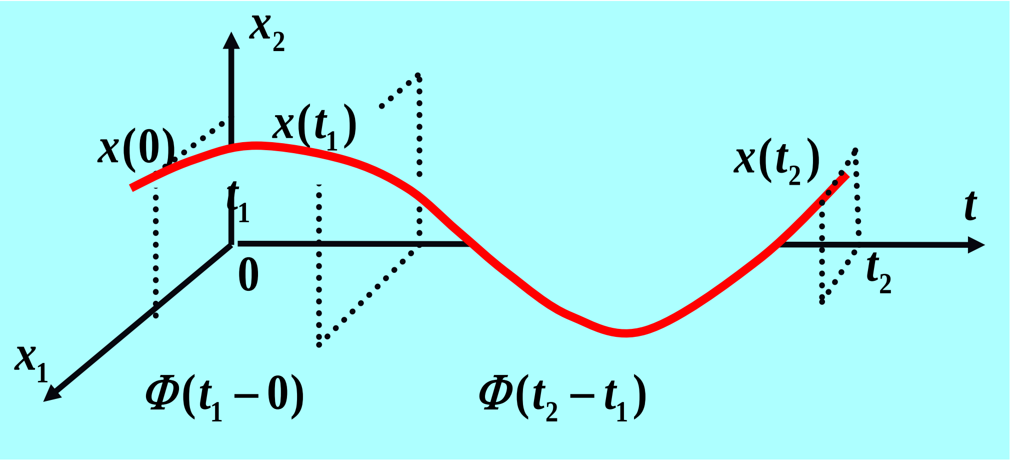
  - 运动轨迹：系统自由运动轨迹是由从初始状态到 t 时刻状态的转移刻画的

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 状态转移矩阵物理含义

$$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)$$

- 组合性质：t0转移到t1再转移到t2，t0转移到t2

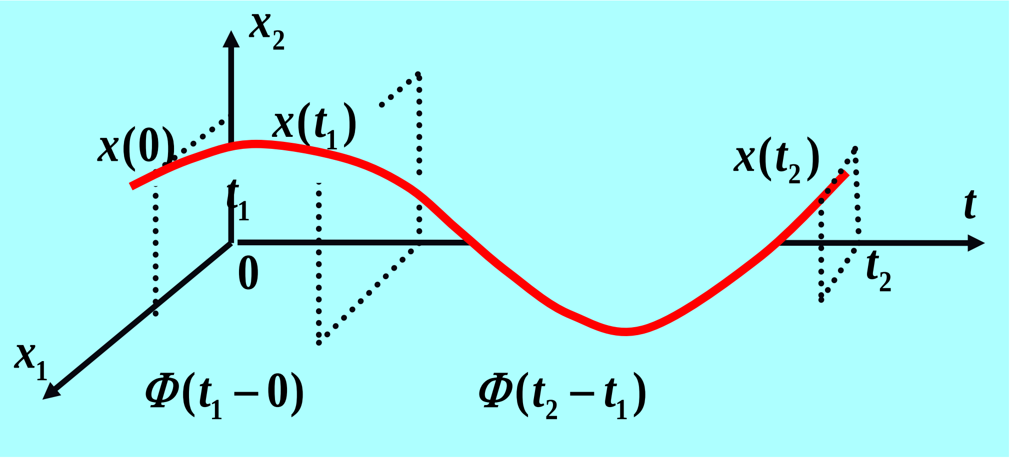


矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 状态转移矩阵物理含义

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0)$$

  - 给定任意初始时刻（可非零）的状态，可求任意时刻 t 状态
  - 给定任意时刻的状态，可求其它所有时刻的状态



上次课回顾

上次课回顾

上次课回顾

上次课回顾

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 状态转移矩阵性质：与标量指数函数联系、结合物理含义理解（转移）
  - $\mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{A\tau}=\mathrm{e}^{A(t+\tau)}\to\Phi(t)\Phi(\tau)=\Phi(t+\tau)$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 状态转移矩阵性质：与标量指数函数联系、结合物理含义理解（转移）

  - $\mathrm{e}^{A(t-t)}=I \rightarrow \Phi(t\text{-}t)=I$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 状态转移矩阵性质：与标量指数函数联系、结合物理含义理解（转移）
  - $\left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At} \rightarrow [\Phi(t)]^{-1} = \Phi(-t)$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 状态转移矩阵性质：与标量指数函数联系、结合物理含义理解（转移）

  - $$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{At} = A\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}A \rightarrow \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 状态转移矩阵性质：与标量指数函数联系、结合物理含义理解（转移）
  - $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At} \Leftarrow AB = BA$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 状态转移矩阵新定义
  - 对线性定常连续系统 $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$，如果存在矩阵 $\Phi(t-t_0)$

    满足如下矩阵微分方程和初始条件

    $$\dot{\Phi}(t-t_0) = A\Phi(t-t_0), \quad \Phi(t-t_0)\big|_{t=t_0} = I$$

    那么该矩阵为系统的状态转移矩阵。

- ✓ 与前面无穷级数定义是一致的，具有相同性质
- ✓ 目的：将状态转移矩阵概念推广到时变系统、离散系统

  将不同类型系统的解进行统一化描述
- ✓ 矩阵维数与系统维数一致

矩阵指数函数—状态转移矩阵

例：验证如下矩阵是否为某系统的状态转移矩阵

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

- 验证初始条件：$\Phi(t-t_0)\big|_{t=t_0}=I$

$$\Phi(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

例：验证如下矩阵是否为某系统的状态转移矩阵

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

- 验证初始条件：$\Phi(t-t_0)\big|_{t=t_0}=I$

$$\Phi(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

- 验证微分方程：$\dot{\Phi}(t-t_0)=A\Phi(t-t_0)$
  - ✓ 假设其是状态转移矩阵，则系统矩阵为：$A=\dot{\Phi}(0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$
  - ✓ 微分方程条件？

$$\dot{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \\ 2e^{-t}-4e^{-2t} & e^{-t}-4e^{-2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}=A\Phi(t) \checkmark$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 状态转移矩阵的求解
  - 基于无穷级数定义的求解方法
  - 基于坐标变换和标准型系统矩阵的求解方法
  - 基于拉氏变换/反变换的求解方法
  - 基于凯莱-哈密顿定理的求解方法（无限项化为有限项）

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 基于无穷级数定义的求解方法

$$\boxed{e^{A(t-t_0)} = I + A(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k + \cdots}$$

例：系统矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$，求状态转移矩阵

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - t^2 + t^3 + \cdots & t - \frac{3}{2}t^2 - \frac{7}{6}t^3 + \cdots \\ -2t + 3t^2 - \frac{7}{3}t^3 + \cdots & 1 - 3t + \frac{7}{2}t^2 - \frac{5}{2}t^3 + \cdots \end{bmatrix}$$

✓ 步骤简单、易于计算机求解；无法获得解析解（封闭解）

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 状态转移矩阵的求解：系统矩阵为特殊形式
  - 对角线矩阵（互异特征值）

$$A = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \Rightarrow \Phi(t) = e^{At} = diag\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

➢ 状态转移矩阵的求解：系统矩阵为特殊形式

- 约旦块矩阵（重根）

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \square & 0\\ \square & \lambda & \ddots & \square\\ \square & \square & \ddots & 1\\ 0 & \square & \square & \lambda\end{bmatrix}\Rightarrow e^{At}=\Phi(t)=e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1 & t & \cdots & \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\\ 0 & 1 & \cdots & \dfrac{t^{n-3}}{(n-3)!} & \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 共轭复根 $A=\begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}\Rightarrow\Phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}e^{\sigma t}$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 状态转移矩阵的求解：系统矩阵为特殊形式

$$A = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \Rightarrow \Phi(t) = e^{At} = diag\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, ..., e^{\lambda_n t}\}$$

- 对角块矩阵

$$A = block\text{-}diag\{A_1, A_2, ..., A_n\} \Rightarrow \Phi(t) = e^{At} = block\text{-}diag\{e^{A_1 t}, e^{A_2 t}, ..., e^{A_n t}\}$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

➢ 坐标变换前后系统的状态转移矩阵关系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \xrightarrow{x=Tz} \dot{z}(t) = T^{-1}ATz(t) \qquad \Phi(t) = e^{At} \rightleftharpoons \hat{\Phi}(t) = e^{T^{-1}ATt}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}(t) &= e^{T^{-1}ATt} \\
&= I + T^{-1}ATt + \frac{1}{2!}(T^{-1}AT)^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(T^{-1}AT)^k t^k + \cdots \\
&= T^{-1}IT + T^{-1}ATt + \frac{1}{2!}T^{-1}A^2T + \cdots \frac{1}{k!}T^{-1}A^kT + \cdots \\
&= T^{-1}(I + At + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots \frac{1}{k!}A^k + \cdots)T \\
&= T^{-1}e^{At}T \\
&= \Phi(t)
\end{aligned}$$

❑ 与系统矩阵类似关系：$\hat{\Phi}(t) = T^{-1}\Phi(t)T \Rightarrow \Phi(t) = T\hat{\Phi}(t)T^{-1}$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 基于坐标变换前后系统关系的求解方法
  - ✓ A 特征根互异：变换为对角线矩阵

$$\Lambda = T^{-1}AT \Rightarrow e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \square & \square & 0 \\ \square & e^{\lambda_2 t} & \square & \square \\ \square & \square & \ddots & \square \\ 0 & \square & \square & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}T^{-1}$$

  - ✓ A 有n个重根：变换为约旦块矩阵

$$J = T^{-1}AT \Rightarrow e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = Te^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \cdots & \dfrac{t^{n-3}}{(n-3)!} & \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}T^{-1}$$

$$A = block\text{-}diag\left\{A_1, A_2, \ldots, A_n\right\}:$$

$$\Rightarrow \Phi(t) = e^{At} = block\text{-}diag\left\{e^{A_1 t}, e^{A_2 t}, \ldots, e^{A_n t}\right\}$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

例：系统矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{bmatrix}$，求状态转移矩阵

- ✓ 求解特征根：$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$
- ✓ 坐标变换：

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_1 I - A)p_1 &= 0\\ (\lambda_1 I - A)p_2 &= -p_1\\ (\lambda_3 I - A)p_3 &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow T = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad J = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2\end{array}\right] = \begin{bmatrix}J_1 & 0\\ 0 & \Lambda\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = T\hat{\Phi}(t)T^{-1}$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

$$J = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} e^{J_1 t} & \\ & e^{\Lambda t} \end{bmatrix}$$

$$A = block\text{-}diag\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}:$$
$$\Rightarrow e^{At} = block\text{-}diag\{e^{A_1 t}, e^{A_2 t}, \ldots, e^{A_n t}\}$$

$$\boxed{J = T^{-1}AT \Rightarrow e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}}$$

$$e^{At} = T\begin{bmatrix} e^{J_1 t} & \\ & e^{\Lambda t} \end{bmatrix}T^{-1} = T\left[\begin{array}{cc|c} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right]T^{-1}$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

$$J = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} e^{J_1 t} & \\ & e^{\Lambda t} \end{bmatrix}$$

$$A = block\text{-}diag\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}:$$
$$\Rightarrow e^{At} = block\text{-}diag\{e^{A_1 t}, e^{A_2 t}, \ldots, e^{A_n t}\}$$

$$\boxed{J = T^{-1}AT \Rightarrow e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}}$$

$$e^{At} = T\begin{bmatrix} e^{J_1 t} & \\ & e^{\Lambda t} \end{bmatrix}T^{-1} = T\left[\begin{array}{cc:c} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right]T^{-1}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -2te^t + e^{2t} & 3te^t + 2e^t - 2e^{2t} & -te^t - e^t + e^{2t} \\ -2(te^t + e^t - e^{2t}) & 3te^t + 5e^t - 4e^{2t} & -te^t - 2e^t + 2e^{2t} \\ -2te^t - 4e^t + 4e^{2t} & 3te^t + 8e^t - 8e^{2t} & -te^t - 3e^t + 4e^{2t} \end{bmatrix}$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 基于拉氏变换/反变换的求解方法

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \xrightarrow[L]{\text{拉氏变换}} (sI - A)X(s) = x_0 \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x_0$$

拉氏反变换

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] \Leftarrow x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]x_0$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

例：系统矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$，求状态转移矩阵

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 基于凯莱-哈密顿定理的求解方法

$$e^{A(t-t_0)} = I + A(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k + \cdots$$

- ✓ 矩阵A满足特征方程：$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$
- ✓ n次项可表示为低次项之和：$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1 A - a_0 I$
- ✓ 类似，所有等于或高于n次项均可表示为低此项之和

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- 基于凯莱-哈密顿定理的求解方法

✓ 所有等于或高于n次项均可表示为低次项之和

✓ 无限项化为有限项

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}A^n t^n + \cdots = \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} + \alpha_{n-2}(t)A^{n-2} \cdots + \alpha_0(t)I$$

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

互异单根

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-2}(t) \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & (n-1)\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & (n-2)\lambda_1^{n-3} & (n-1)\lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ te^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}^{-1}$$

n个重根

矩阵指数函数—状态转移矩阵

- ✓ 矩阵A 互异单根

$$e^{At}=\alpha_{n-1}(t)A^{n-1}+\alpha_{n-2}(t)A^{n-2}\cdots+\alpha_0(t)I$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_1+\alpha_2(t)\lambda_1^2+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1}=e^{\lambda_1 t}\\
&\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_2+\alpha_2(t)\lambda_2^2+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1}=e^{\lambda_2 t}\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_n+\alpha_2(t)\lambda_n^2+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1}=e^{\lambda_n t}
\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} a_0(t)\\ a_1(t)\\ \vdots\\ a_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\\ \vdots\\ e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

✓ 矩阵A有n个重根

$$e^{At}=\alpha_{n-1}(t)A^{n-1}+\alpha_{n-2}(t)A^{n-2}\cdots+\alpha_0(t)I$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1(t)+2\alpha_2(t)\lambda\ldots+(n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda^{n-2}=te^{\lambda t}\\ \vdots\\ (n\text{-}1)!\alpha_{n\text{-}1}(t)=t^{n\text{-}1}e^{\lambda t}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\\ \vdots\\ \alpha_{n-2}(t)\\ \alpha_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&1\\ 0&0&\cdots&1&(n\text{-}1)\lambda_1\\ \vdots&\vdots&1&\vdots&\vdots\\ 0&1&0&(n\text{-}2)\lambda_1^{n-3}&(n\text{-}1)\lambda_1^{n-2}\\ 1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{n-2}&\lambda_1^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_1 t}\\ \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda_1 t}\\ \vdots\\ te^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_1 t}\end{bmatrix}$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

例：系统矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$，求状态转移矩阵

$$e^{At}=\alpha_{n-1}(t)A^{n-1}+\alpha_{n-2}(t)A^{n-2}\cdots+\alpha_0(t)I$$

✓ 特征根：$|\lambda I-A|=\lambda^2+3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1\\ 1 & \lambda_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{-t}\\ e^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A=(2e^{-t}-e^{-2t})\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+(e^{-t}-e^{-2t})\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

矩阵指数函数—状态转移矩阵

例：系统矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$，求状态转移矩阵

✓ 特征根：$|\lambda I-A|=\lambda^2+3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$

$$\alpha_0(t)=(2e^{-t}-e^{-2t})$$

$$\alpha_1(t)=(e^{-t}-e^{-2t})$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_1+\alpha_2(t)\lambda_1^2+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1}&=e^{\lambda_1 t}\\ \alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_2+\alpha_2(t)\lambda_2^2+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1}&=e^{\lambda_2 t}\\ &\vdots\\ \alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_n+\alpha_2(t)\lambda_n^2+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1}&=e^{\lambda_n t}\end{aligned}\right\}$$

上次课回顾

上次课回顾

线性控制系统状态空间表达式的解

2.1 线性定常系统齐次状态方程的解（自由解）

2.2 矩阵指数函数－状态转移矩阵

2.3 线性定常系统非齐次状态方程的解

2.4 线性时变连续系统状态方程的解

2.5 离散时间线性系统状态方程的解

2.6 连续时间状态空间表达式的离散化

线性定常系统非齐次状态方程的解

- 非齐次状态方程的解

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = f(x(t_0), u(t))$$

- 揭示系统在存在外力作用下的受迫运动形态
- 控制输入作用下，系统从初始状态（零或非零）出发的演变

线性定常系统非齐次状态方程的解

- 非齐次状态方程的解

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\Rightarrow x(t)=f(x(t_0),u(t))$$

- 揭示系统在存在外力作用下的受迫运动形态
- 控制输入作用下，系统从初始状态（零或非零）出发的演变

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases} \Rightarrow \quad x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases} \Rightarrow$$

线性定常系统非齐次状态方程的解

➢ 非齐次状态方程的解

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = f(x(t_0), u(t))$$

- 揭示系统在存在外力作用下的受迫运动形态
- 控制输入作用下，系统从初始状态（零或非零）出发的演变

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ x(t) &= \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

线性定常系统非齐次状态方程的解

- 非齐次状态方程的解：变量分离

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\Rightarrow \dot{x} - Ax = Bu \Rightarrow e^{-At}(\dot{x} - Ax) = e^{-At}Bu$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}e^{-At}x = e^{-At}Bu \Rightarrow \int_{t_0}^{t}\frac{d}{d\tau}\left[e^{-A\tau}x(\tau)\right]d\tau = \int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

线性定常系统非齐次状态方程的解

- 非齐次状态方程的解：变量分离

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\Rightarrow \dot{x} - Ax = Bu \Rightarrow e^{-At}(\dot{x} - Ax) = e^{-At}Bu$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}e^{-At}x = e^{-At}Bu \Rightarrow \int_{t_0}^{t}\frac{d}{d\tau}\left[e^{-A\tau}x(\tau)\right]d\tau = \int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

线性定常系统非齐次状态方程的解

- 非齐次状态方程的解：拉氏变换/反变换、卷积 $L^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

线性定常系统非齐次状态方程的解

- 非齐次状态方程的解：物理意义

$$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

- 包括两个部分：初始条件相关、控制输入相关
- 第一部分：由初始条件引起的自由运动

✓ 初始条件由状态转移矩阵转移获得

✓ 与初始时刻的控制输入无关，零输入响应

线性定常系统非齐次状态方程的解

- 非齐次状态方程的解：物理意义

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

- 包括两个部分：初始条件相关、控制输入相关

- 第二部分：由控制输入引起的受迫运动，改变系统演变关键
  - ✓ 控制输入与状态转移矩阵的卷积
  - ✓ 与初始条件无关，零状态响应

线性定常系统非齐次状态方程的解

- 非齐次状态方程的解：物理意义

$$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

- 包括两个部分：初始条件相关、控制输入相关
- 第一部分：由初始条件引起的自由运动
  - ✓ 初始条件由状态转移矩阵转移获得
  - ✓ 与初始时刻的控制输入无关，零输入响应
- 第二部分：由控制输入引起的受迫运动，改变系统演变关键
  - ✓ 控制输入与状态转移矩阵的卷积
  - ✓ 与初始条件无关，零状态响应

线性定常系统非齐次状态方程的解

例：求下列系统在单位阶跃函数作用下的解

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

线性定常系统非齐次状态方程的解

例：求下列系统在单位阶跃函数作用下的解

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

✓ 状态转移矩阵：$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

线性控制系统状态空间表达式的解

线性时变连续系统状态方程的解

- 基于状态转移矩阵的定常系统解推广

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\x(t_0)=x_0\end{cases}\Rightarrow x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)\\x(t_0)=x_0\end{cases}\Rightarrow$$

线性时变连续系统状态方程的解

- 基于状态转移矩阵的定常系统解推广

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau$$

线性时变连续系统状态方程的解

- 连续时变系统的状态转移矩阵

对线性定常连续系统 $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ ，如果存在矩阵 $\Phi(t-t_0)$

满足如下矩阵微分方程和初始条件

$$\dot{\Phi}(t-t_0) = A\Phi(t-t_0), \quad \Phi(t-t_0)\big|_{t=t_0} = I$$

- 状态转移矩阵定义：对线性时变连续系统 ，如果存在矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 满足如下条件

$$\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0), \quad \Phi(t,t_0) = I$$

那么该矩阵为系统的状态转移矩阵。

线性时变连续系统状态方程的解

➢ 状态转移矩阵性质

定常系统

$$\Phi(t)\Phi(\tau)=\Phi(t+\tau)$$

$$\Phi(t-t)=\Phi(0)=I$$

$$[\Phi(t)]^{-1}=\Phi(-t)$$

$$\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)=\Phi(t)A$$

$\rightarrow$

时变系统

$$\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0)=\Phi(t_2,t_0)$$

$$\Phi(t,t)=I$$

$$\Phi(t,t_0)=\Phi^{-1}(t_0,t)$$

$$\dot{\Phi}(t,t_0)=A(t)\Phi(t,t_0)$$

❑ 状态转移矩阵性质不变

❑ 状态转移矩阵是对各类系统的统一定义

线性时变连续系统状态方程的解

➤ 线性时变齐次状态方程的解

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad x(t_0) = x_0$$

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0) \\ \Phi(t_0,t_0) = I \end{cases}$$

线性时变连续系统状态方程的解

➢ 线性时变非齐次状态方程的解

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\ \overset{?}{\Rightarrow} x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau$$

❑ 叠加原理：系统解包括初始状态和控制输入两部分转移获得

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)+\Phi(t,t_0)x_u(t)$$

$$x(t_0)=x_0$$

线性时变连续系统状态方程的解

- 线性时变非齐次状态方程的解

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$\Uparrow$$

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \Phi(t,t_0)x_u(t)$$

线性时变连续系统状态方程的解

➢ 线性时变非齐次状态方程的解

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \Phi(t,t_0)x_u(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\Phi}(t,t_0)[x(t_0) + x_u(t)] + \Phi(t,t_0)\dot{x}_u(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$\Downarrow \quad \dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$$

$$A(t)\Phi(t,t_0)[x(t_0) + x_u(t)] + \Phi(t,t_0)\dot{x}_u(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$\Downarrow$$

$$A(t)x(t) + \Phi(t,t_0)\dot{x}_u(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}_u(t) = \Phi^{-1}(t,t_0)B(t)u(t) = \Phi(t_0,t)B(t)u(t)$$

$$\Downarrow$$

$$x_u(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + x_u(t_0)$$

$$\Downarrow \quad x(t) = \Phi(t,t_0)[x(t_0) + x_u(t)] \Rightarrow x_u(t_0) = 0$$

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$= \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

线性时变连续系统状态方程的解

- 状态转移矩阵如何计算：齐次标量方程推广仍成立？

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t), \quad x(t_0)$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{x(t)} = a(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dx(\tau)}{x(\tau)} = \ln(x)\Big|_{t_0}^{t} = \ln x(t) - \ln x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow \ln x(t) - \ln x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right)x(t_0)$$

线性时变连续系统状态方程的解

- 状态转移矩阵如何计算：齐次标量方程推广仍成立？

$$\frac{dx(t)}{dt}=a(t)x(t),\quad x(t_0)$$
$$\Rightarrow\ \frac{dx(t)}{x(t)}=a(t)dt$$
$$\Rightarrow\int_{t_0}^{t}\frac{dx(\tau)}{x(\tau)}=\ln(x)\Big|_{t_0}^{t}=\ln x(t)-\ln x(t_0)=\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau$$
$$\Rightarrow\ln x(t)-\ln x(t_0)=\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau$$
$$\Rightarrow x(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau\right)x(t_0)$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t),\quad x(t_0)$$
$$\Rightarrow\ \frac{dx(t)}{x(t)}=A(t)dt$$
$$\Rightarrow\int_{t_0}^{t}\frac{dx(\tau)}{x(\tau)}=\ln(x)\Big|_{t_0}^{t}=\ln x(t)-\ln x(t_0)=\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau$$
$$\Rightarrow\ln x(t)-\ln x(t_0)=\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau$$
$$\Rightarrow x(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)x(t_0)$$

线性时变连续系统状态方程的解

- 状态转移矩阵如何计算：齐次标量方程推广仍成立？

$$x(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)x(t_0)$$

- 条件成立：用定义验证

$$A(t)\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau A(t)\xrightarrow[\Phi(t,t_0)=I]{\dot{\Phi}(t,t_0)=A(t)\Phi(t,t_0)}\Phi(t,t_0)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)$$

$$\Uparrow$$

$$A(t_1)A(t_2)=A(t_2)A(t_1)$$

线性时变连续系统状态方程的解

- 状态转移矩阵的计算
  - 解析法：$A(t_1)A(t_2)=A(t_2)A(t_1)$

$$\Phi(t,t_0)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)$$
$$=I+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\cdots+\frac{1}{k!}[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau]^k+\cdots$$

  - 无穷级数法：$A(t_1)A(t_2)\neq A(t_2)A(t_1)$：

$$\Phi(t,t_0)=I+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau$$
$$+\int_{t_0}^{t}A(\tau_0)\int_{t_0}^{\tau_0}A(\tau_1)d\tau_1 d\tau_0$$
$$+\int_{t_0}^{t}A(\tau_0)\int_{t_0}^{\tau_0}A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1}A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 d\tau_0+\cdots$$

  - 例：课本例2-9、2-10

线性控制系统状态空间表达式的解

2.1 线性定常系统齐次状态方程的解（自由解）

2.2 矩阵指数函数－状态转移矩阵

2.3 线性定常系统非齐次状态方程的解

2.4 线性时变连续系统状态方程的解

2.5 离散时间线性系统状态方程的解

2.6 连续时间状态空间表达式的离散化

离散时间线性系统状态方程的解

- 基于状态转移矩阵的系统解推广

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ x(k)\big|_{k=k_0} = x(k_0) \end{cases} \Rightarrow x(k) = \Phi(k - k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k - k_0 - j - 1)Hu(j)$$

离散时间线性系统状态方程的解

➢ 基于状态转移矩阵的系统解推广

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ x(k)\big|_{k=k_0} = x(k_0) \end{cases} \Rightarrow x(k) = \Phi(k-k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k-k_0-j-1)Hu(j)$$

❑ 状态转移矩阵定义：对线性时变离散系统 ，如果存在矩阵 $\Phi(k-k_0)$ 满足如下条件

$$\Phi(k-k_0+1) = G\Phi(k-k_0), \quad \Phi(k_0-k_0) = I$$

那么该矩阵为系统的状态转移矩阵。

离散时间线性系统状态方程的解

➢ 状态转移矩阵性质

连续系统

$$\Phi(t)\Phi(\tau)=\Phi(t+\tau)$$

$$\Phi(t-t)=\Phi(0)=I$$

$$[\Phi(t)]^{-1}=\Phi(-t)$$

$$\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)=\Phi(t)A$$

$\rightarrow$

离散系统

- 状态转移矩阵性质不变
- 状态转移矩阵是对各类系统的统一定义

离散时间线性系统状态方程的解

- 递推法、Z变换/反变换法（P80）

$$
\begin{aligned}
& x(k+1)=Gx(k)+Hu(k), x(k)\big|_{k=0}=x(0) \\
& \quad \Downarrow \\
& k=0: x(1)=Gx(0)+Hu(0) \\
& k=1: x(2)=Gx(1)+Hu(1)=G^2x(0)+GHu(0)+Hu(1) \\
& k=2: x(3)=Gx(2)+Hu(2)=G^3x(0)+G^2Hu(0)+GHu(1)+Hu(2) \\
& \quad \vdots \\
& \quad \Downarrow \\
& x(k)=G^kx(0)+\sum_{j=0}^{k-1}G^{k-j-1}Hu(j)
\end{aligned}
$$

$$x(k)=G^kx(0)+\sum_{j=0}^{k-1}G^{j}Hu(k-j-1)$$

离散时间线性系统状态方程的解

- 状态方程解的物理意义

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ x(k)\big|_{k=0} = x(0) \end{cases} \Rightarrow x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(j)$$

  - 两个部分：零输入响应 + 零状态响应
  - 离散的运行轨迹
  - 零状态响应部分：与采样时刻以前的控制输入有关，与本时刻控制输入无关

$$\begin{pmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ \vdots \\ x(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ G^2 \\ G^3 \\ \vdots \\ G^k \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} H & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ GH & H & 0 & \cdots & 0 \\ G^2H & GH & H & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ G^{k-1}H & G^{k-2}H & G^{k-3}H & \cdots & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{pmatrix}$$

离散时间线性系统状态方程的解

- 离散时间线性系统状态转移矩阵

$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(j)$$

$$x(k) = \Phi(k-k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k-k_0-j-1)Hu(j)$$

$$\boxed{\Phi(k-k_0) = G^{k\text{-}k_0}}$$

$$\Phi(k-k_0+1) = G\Phi(k-k_0), \quad \Phi(k_0-k_0) = I$$

离散时间线性系统状态方程的解

- 状态转移矩阵的计算
  - 基于定义计算

$$\Phi(k) = G^k$$

  - 基于坐标变换前后系统关系的求解方法：P78 例2-11

  - 基于Z变换/反变换的求解方法：P81 例2-12

$$\Phi(k) = G^k = Z^{-1}[(zI - G)^{-1} z]$$

离散时间线性系统状态方程的解

- 离散时间线性时变系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ x(k)\big|_{k=k_0} = x(k_0) \end{cases} \Rightarrow x(k) = \Phi(k - k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k - k_0 - j - 1)Hu(j)$$

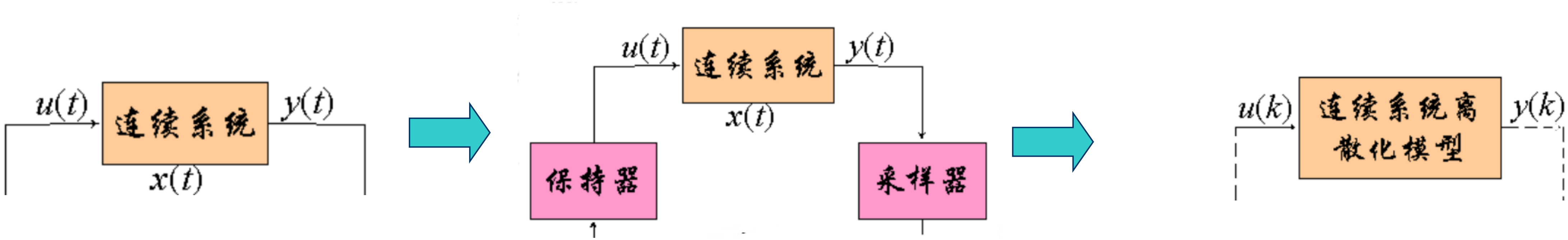
线性控制系统状态空间表达式的解

- 2.1 线性定常系统齐次状态方程的解（自由解）
- 2.2 矩阵指数函数－状态转移矩阵
- 2.3 线性定常系统非齐次状态方程的解
- 2.4 线性时变连续系统状态方程的解
- 2.5 离散时间线性系统状态方程的解
- 2.6 连续时间状态空间表达式的离散化

连续时间状态空间表达式的离散化

➢ 问题的提出

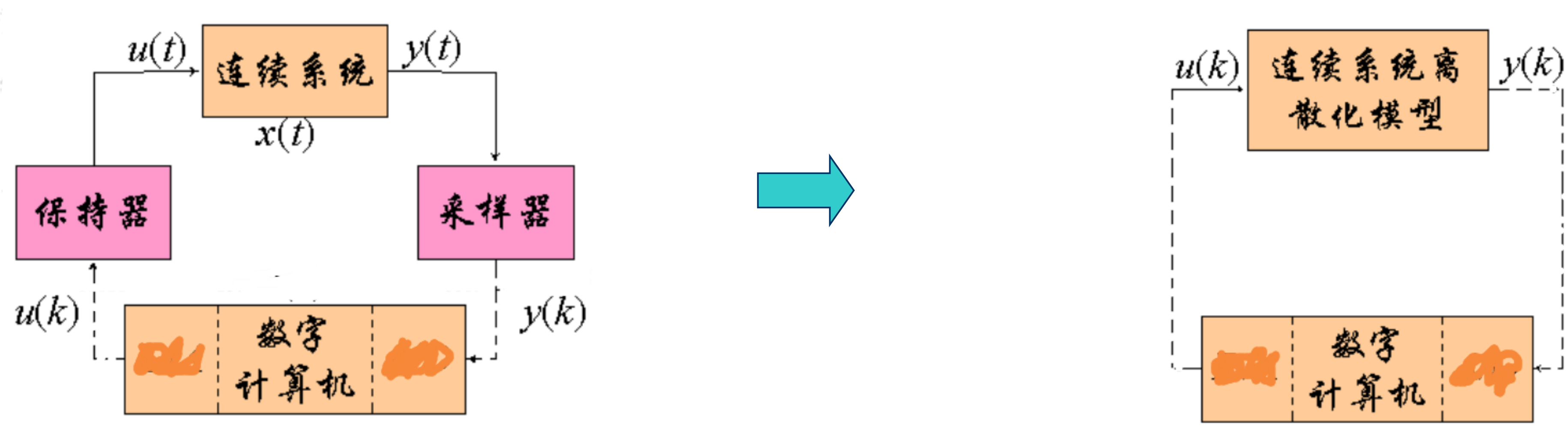
- ❑ 被控对象连续变化，为连续系统；计算机离散处理过程
- ❑ 为利用离散系统理论开展分析



连续时间状态空间表达式的离散化

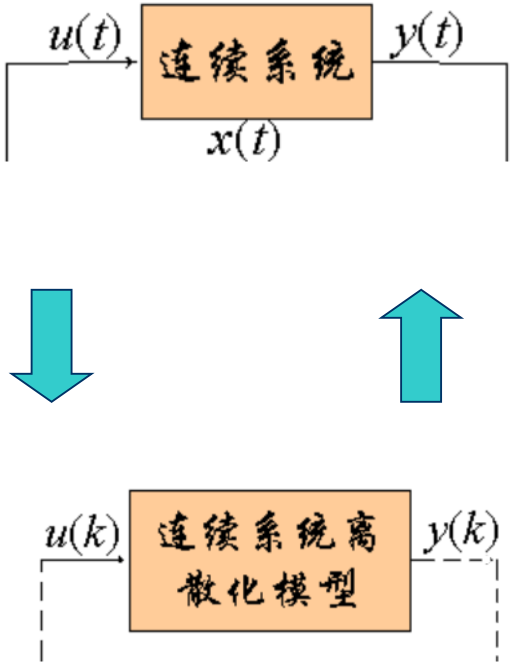
➢ 问题的提出

- ❑ 控制系统的混合状态：被控对象连续变化，为连续系统；基于计算机的离散控制
- ❑ 为利用离散系统理论开展设计



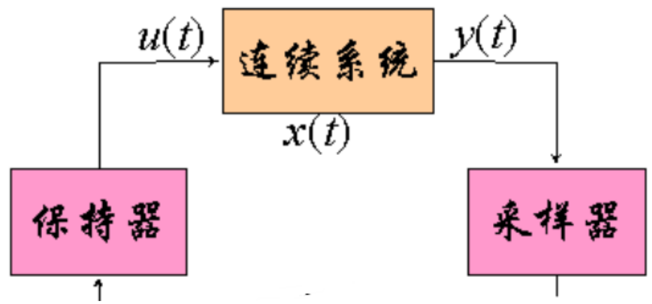
连续时间状态空间表达式的离散化

- 原始连续系统与变换后离散系统关系
  - 在各采样时刻，离散化前后的状态变量、输入变量和输出变量的值保持不变



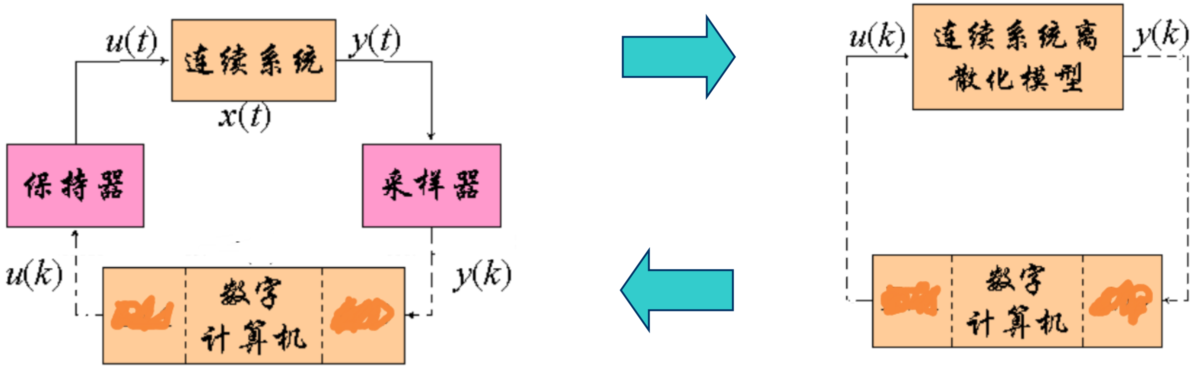
连续时间状态空间表达式的离散化

- 原始连续系统与变换后离散系统关系，离散化要求
  - 在各采样时刻，离散化前后的状态变量、输入变量和输出变量的值保持不变
  - 采样器：满足香农采样定理，即：离散信号可完满复原原来连续信号的条件为采样频率高于两倍的连续信号上限频率；理想采样



连续时间状态空间表达式的离散化

- 原始连续系统与变换后离散系统关系，离散化要求
  - 在各采样时刻，离散化前后的状态变量、输入变量和输出变量的值保持不变
  - 保持器：一般为零阶保持器，即控制输入信号u(t)在采样周期内保持不变，等于前一采样时刻的瞬时值



$$u(t)=u(kT),\ kT\le t<(k+1)T$$

连续时间状态空间表达式的离散化

➢ 线性定常连续系统的离散化

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{cases}\xrightarrow{G,H\infty A,B}$$

$$\begin{cases}x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)\\ y(k)=Cx(k)+Du(k)\end{cases}$$

连续时间状态空间表达式的离散化

➢ 线性定常连续系统的离散化：精确离散化

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t)\end{cases} \xrightarrow{G,H\infty A,B}$$

$$\begin{cases}x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k)\end{cases}$$

❑ 原理：各采样时刻，连续状态方程和离散状态方程解相同

✓ 连续系统的解为：

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

✓ 考虑 $t_0 = kT$ 和 $t = (k+1)T$ 时刻间的变化，有

$$x((k+1)T) = \Phi(T)x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T-\tau]Bd\tau u(kT)$$

连续时间状态空间表达式的离散化

➢ 线性定常连续系统的离散化：精确离散化

$$x((k+1)T)=\Phi(T)x(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi[(k+1)T-\tau]Bd\tau u(kT)$$

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$$

$$\begin{cases} G(T)=\Phi(T)=e^{AT} \\ H(T)=\int_0^T\Phi(t)dtB=\int_0^T e^{At}dtB \end{cases}$$

连续时间状态空间表达式的离散化

➢ 线性定常连续系统的离散化：近似离散化

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \xrightarrow{G,H\infty A,B} ? \begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

❑ 采用条件：采样频率较高，离散化精度要求不高

$$\dot{x}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

$$\Downarrow \quad t_0 = kT, \Delta t = T$$

$$\dot{x}(kT) \approx \frac{x[(k+1)T] - x(kT)}{T}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x[(k+1)T] - x(kT)}{T} \approx Ax(kT) + Bu(kT)$$

$$\Downarrow$$

$$x[(k+1)T] \approx (I + AT)x(kT) + BTu(kT)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} G(T) \approx I + AT \\ H(T) \approx BT \end{cases}$$

❑ 例：P84 2-13

线性控制系统状态空间表达式的解

- 重要概念理解
  - 状态转移矩阵
  - 状态方程解：零动态响应、零输入响应
  - 离散化
- 重要运算
  - 状态转移矩阵计算
  - 定常连续状态空间表达式解计算
  - 连续系统离散化