# 系统分析与控制原理II：线性系统分析与设计

## 线性控制系统的能控性和能观性

# 概述

- 能控性和能观性：WHY
  - 定性分析：能控性、能观性为设计/综合基础
  - 问题1：都可以控制？

# 概述

- 能控性和能观性：WHY
  - 定性分析：能控性、能观性为设计/综合基础
  - 问题2：反馈量？

# 概述：本章要讨论的问题

- 能控性与能观性：WHAT?
  - 连续（离散）定常（时变）系统：含义、定义
- 能控性与能观性：HOW?
  - 连续（离散）定常（时变）系统：如何判断（秩判据、标准型判据、格拉姆矩阵）
- 能控性与能观性：对偶关系
  - 对偶系统满足什么条件；对偶系统具有什么联系
- 状态空间表达式的能控/能观标准型与结构分解
  - 规范化：4类标准型、3种结构分解
- 能控/能观性与传函关系
  - 实现问题、零极点对消

# 概述：本章安排

# 概述：重点&预备知识

## 重点

- 能控性、能观性（连续定常系统、基本含义、判别方法）
- 对偶原理
- 4类标准型、结构分解、最小实现

## 预备知识

- 坐标变换、矩阵乘逆等运算、定积分、矩阵的秩、等

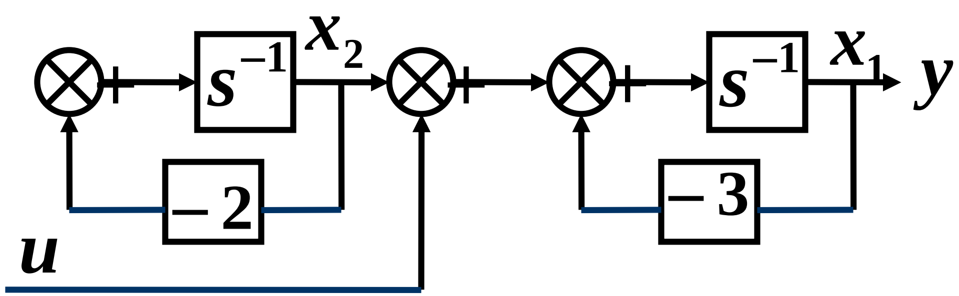
# 线性控制系统的能控性和能观性

# 能控性的定义

- 直观讨论
  - 能控问题：系统的输入能否控制状态（输出）的转移
  - 状态（输出）能控性：揭示系统输入对状态（输出）的控制能力
  - 若某状态（输出）变量的运动受输入的影响/控制/支配，则该状态（输出）变量能控；反之，为不能控变量
  - 若所有状态（输出）变量能控，则系统状态（输出）完全能控，简称能控
  - 若存在任一状态（输出）变量不能控，则系统状态（输出）不完全能控
  - 本课程主要讨论状态能控性：状态方程

# 能控性的定义

➢ 直观讨论




❑ 能控状态变量

❑ 能控输出变量

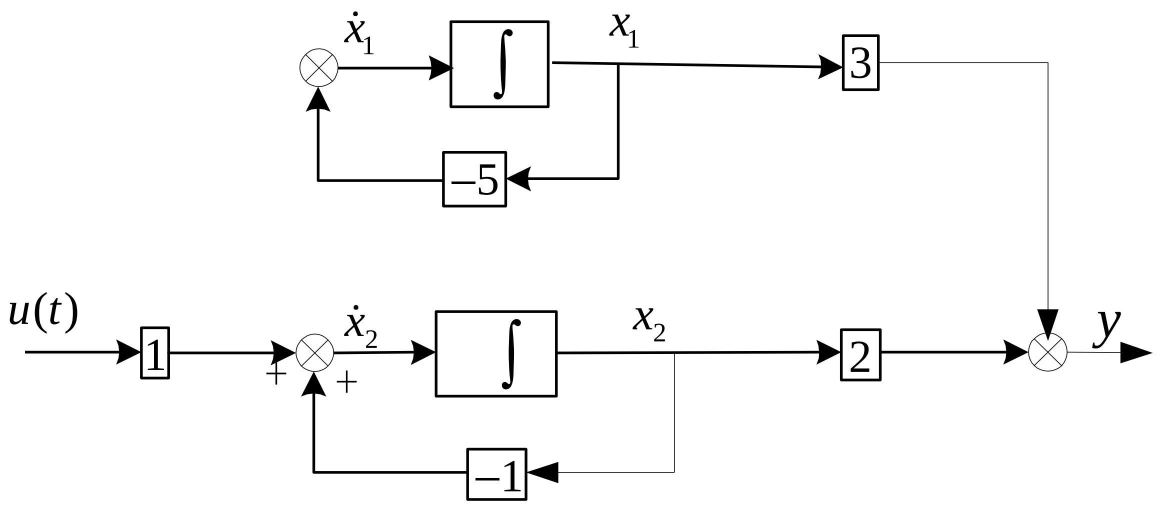
# 能控性的定义

## ➢ 直观讨论

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

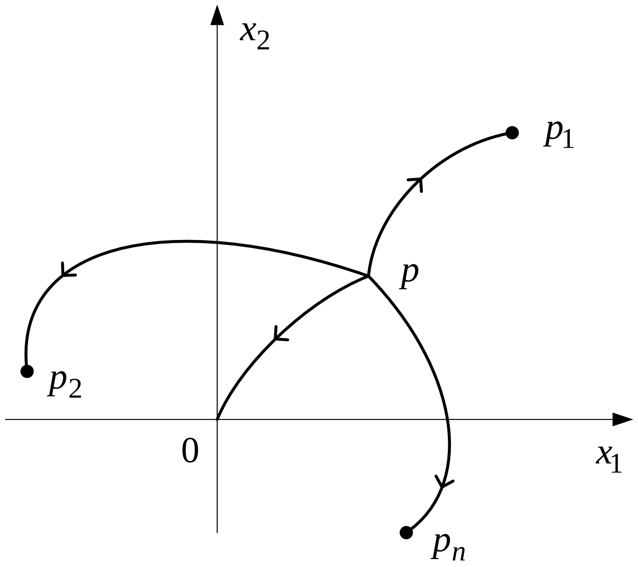
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

- ❑ 能控状态变量
- ❑ 能控输出变量



# 能控性的定义

- 连续定常系统的（状态）能控性定义　$\dot{x} = Ax + Bu$
  - 若存在一个分段连续的输入u(t)，能在有限时间 $[t_0,t_f]$ 内，使得系统的某一初始状态 $x(t_0)$ 转移到任一终端状态 $x(t_f)$，则称此状态是能控的，能控状态
  - 若系统在状态空间中所有状态都是能控的，则称系统是状态完全能控的




$$x(t_0) = P$$

$$\Big\downarrow \; u(t) \quad [t_0, t_f]$$

$$x(t_f) = P_1, \cdots, P_n$$

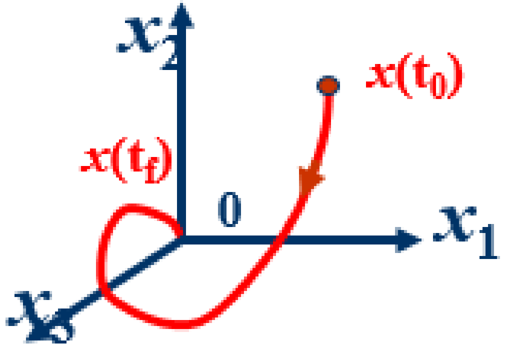
# 能控性的定义

- 能控状态变量、能控状态
  - 若存在一个分段连续的输入u(t)，能在有限时间 $[t_0,t_f]$ 内，使得系统的某一初始状态 $x(t_0)$ 转移到任一终端状态 $x(t_f)$ ，则称此状态是能控的，能控状态
  - 若系统在状态空间中所有状态都是能控的，则称系统是状态完全能控的

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

# 能控性的定义

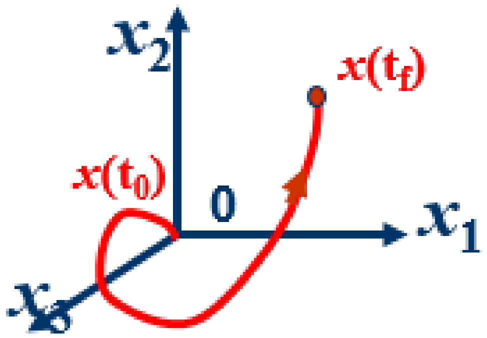
- 关于起止点
  - 若存在输入u(t)，能在有限时间 $[t_0,t_f]$ 内，将系统从任意非零初始状态 $x(t_0)$ 转移到终端状态 $x(t_f) = 0$ ，则称状态 $x(t_0)$ 是能控的。



# 能控性的定义

➢ 关于起止点

❑ 如果存在输入u(t)，能在有限时间 $[t_0,t_f]$ 内，将系统从初始状态 $x(t_0)=0$ 转移到任意非零终端状态 $x(t_f)$ ，则称状态 $x(t_f)$ 是能达的。



# 能控性的定义

- 关于控制输入
  - 在讨论能控性问题时，不计较 $u(t)$ 的约束，只要能使状态从 $x(t_0)$ 到达 $x(t_f)$ 即可，而不讨论到达的轨迹；具有非唯一性

# 上次课回顾

- 能控性含义

# 线性控制系统的能控性和能观性

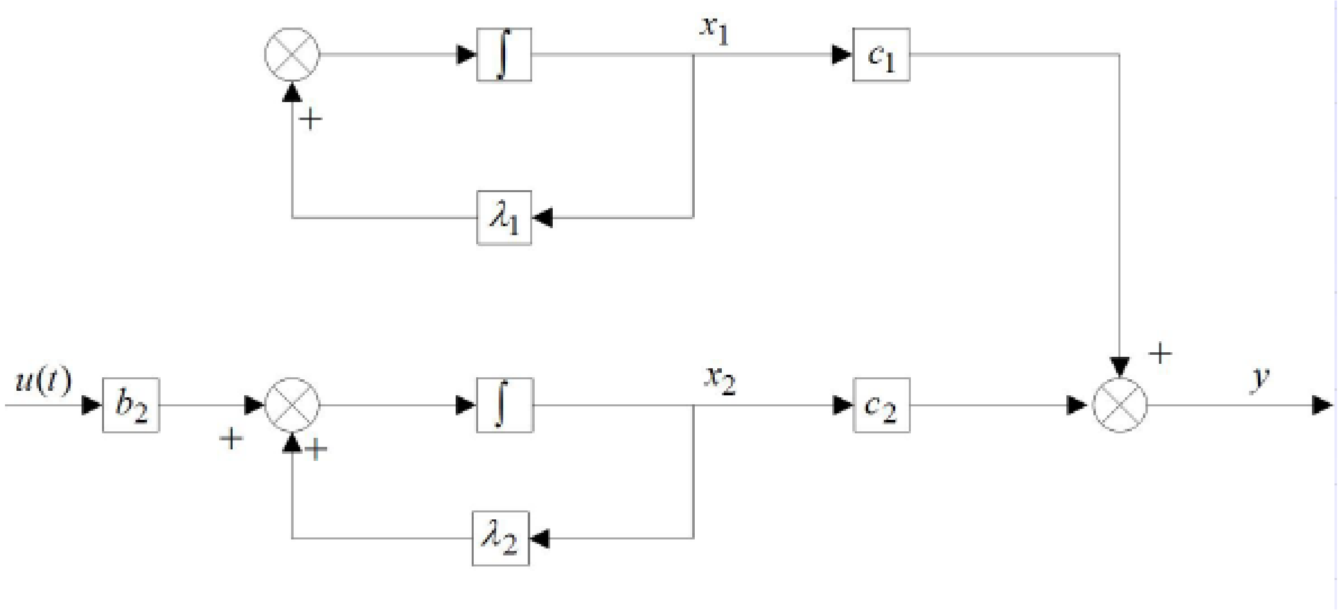
3.1 能控性的定义
3.2 线性定常系统的能控性判别
3.3 线性连续定常系统的能观性
3.4 离散系统的能控性与能观性
3.5 时变系统的能控性与能观性
3.6 能控性与能观性的对偶关系
3.7 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型
3.8 线性系统的结构分解
3.9 传递函数矩阵的实现问题
3.10 传递函数中零极点对消与状态能控性和能观性之间的关系

# 线性定常系统的能控性判别

- 约旦标准型判定

  - 单输入系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = [c_1, \quad c_2]\, \boldsymbol{x} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + b_2 u \end{aligned}}$$



# 线性定常系统的能控性判别

## 约旦标准型判定

- 单输入系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = [c_1, \quad c_2]\, \boldsymbol{x} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + b_2 u \end{aligned}}$$

- 当A为对角线矩阵时，若B的任一行不为0，则系统完全能控

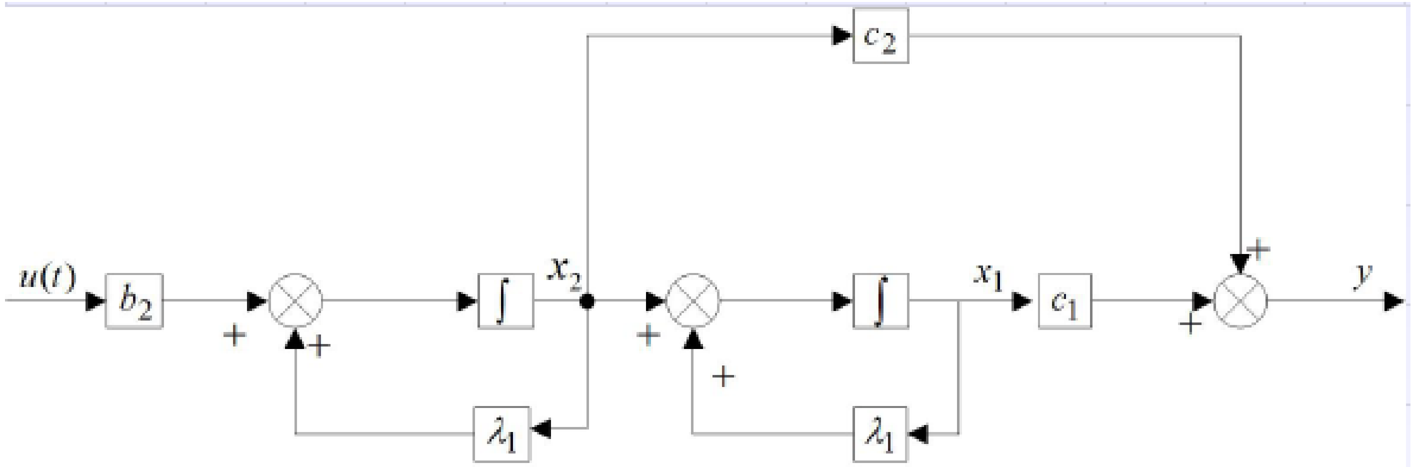
# 线性定常系统的能控性判别

- 约旦标准型判定

  - 单输入系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = [c_1, \quad c_2]\, \boldsymbol{x}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + b_2 u \end{aligned}$$



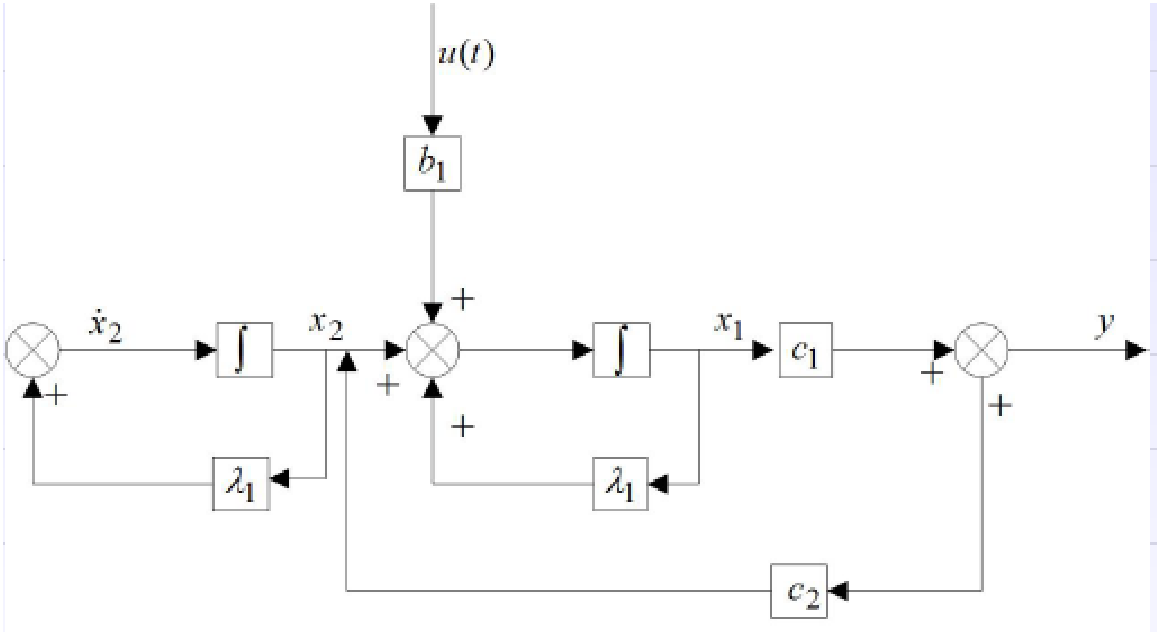
# 线性定常系统的能控性判别

## 约旦标准型判定

### 单输入系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = [c_1, \quad c_2]\, \boldsymbol{x}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + x_2 + b_1 u \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 \end{aligned}}$$

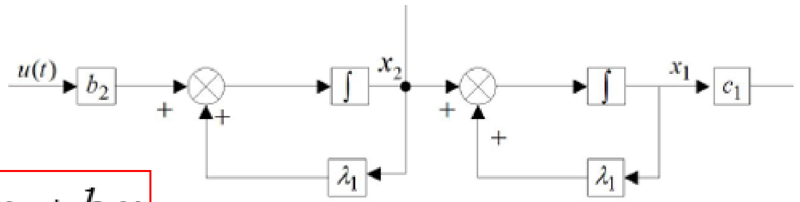


# 线性定常系统的能控性判别

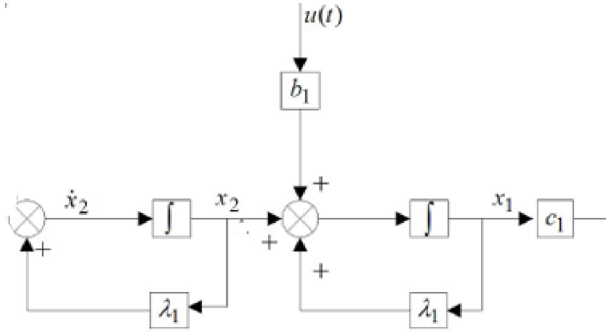
## ➢ 约旦标准型判定

### ❑ 单输入系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = [c_1, \quad c_2]\, \boldsymbol{x} \rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + x_2 + b_1 u \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 \end{aligned}$$




$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = [c_1, \quad c_2]\, \boldsymbol{x} \rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + b_2 u \end{aligned}$$




❑ 当A为约旦块矩阵时，若约当块对应的B最后一行元素不为0，则系统能控

# 线性定常系统的能控性判别

## 约旦标准型判定

- 多输入系统 $\dot{x} = Jx + Bu$

$$
\mathrm{J} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J_l \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_l \end{bmatrix}_{n\times r}
$$

- 当 J 为约旦标准型时，若每个约当块对应的$B_i$最后一行元素不全为0，则系统能控

# 线性定常系统的能控性判别

## ➢ 约旦标准型判定

### ❑ 例

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-7 & & \\ & -5 & \\ & & -1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix}u(t)\qquad \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}-7 & & \\ & -5 & \\ & & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}2\\0\\9\end{bmatrix}u(t)\qquad \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}-7 & & \\ & -5 & \\ & & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0 & 1\\4 & 0\\7 & 5\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 0\\0 & -4 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\4\\3\end{bmatrix}u(t)\qquad \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 0\\0 & -4 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}4 & 2\\0 & 0\\3 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 1\\0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}u$$

# 线性定常系统的能控性判别

- 约旦标准型判定
  - 普通形式的多输入系统：线性变换不改变系统的能控性

$$\dot{x} = Ax + Bu \xrightarrow{x = Tz} \begin{aligned} \dot{z} &= \Lambda_z z + T^{-1}Bu \\ \dot{z} &= Jz + T^{-1}Bu \end{aligned}$$

  - A特征值互异：$T^{-1}B$ 的各行元素非全为0，能控
  - A特征值重根：$T^{-1}B$中与每个约当块最后一行相对应的一行元素非全为0，能控

# 线性定常系统的能控性判别

## 约旦标准型判定

- 例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

✓ 特征值互异

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{bmatrix} \Rightarrow \dot{z}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}z+\frac{1}{|T|}\begin{bmatrix}\lambda_3-\lambda_2\\ \lambda_2-\lambda_1\\ \lambda_1-\lambda_3\end{bmatrix}u$$

# 线性定常系统的能控性判别

➢ 约旦标准型判定

✓ 特征值：两个重根，一个单根

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ \lambda_1 & 1 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_3^2\end{bmatrix} \Longrightarrow \dot{z}=\begin{bmatrix}\lambda_{\text{[redacted]}} & \text{[redacted]} & 0\\ 0 & \lambda_{\text{[redacted]}} & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}z+\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)^2}\begin{bmatrix}-1\\ \lambda_1-\lambda_3\\ 1\end{bmatrix}u$$

✓ 三个重根

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda_1 & 1 & 0\\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1\end{bmatrix} \Longrightarrow \dot{z}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \text{[redacted]} & 0\\ 0 & \lambda_{\text{[redacted]}} & \text{[redacted]}\\ 0 & 0 & \lambda_{\text{[redacted]}}\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

# 线性定常系统的能控性判别

## ➢ 秩判据

✓ 定理：线性定常连续系统(A，B)状态完全能控的充要条件是能控性矩阵满秩，即

$$rankM = n$$

其中，能控性矩阵为 $M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$，系统维数为 n。

- 单输入系统
- 多输入系统，M求秩

$$rank\mathrm{M} = rank\mathrm{M}\mathrm{M}^T$$

# 线性定常系统的能控性判别

- 秩判据
  - ✓ 单输入系统秩判据证明

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$0=e^{At_f}x(0)+\int_{0}^{t_f}e^{A(t_f-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

- 若存在输入u(t)，使得
  - ✓ 在有限时间 [t0,tf] 内
  - ✓ 系统从任意非零 x(t0) 转移到 x(tf) = 0
- 则称状态 x(t0) 是能控的。

# 线性定常系统的能控性判别

- ❑ 若存在输入u(t)，使得
- ✓ 在有限时间 [t0,tf] 内
- ✓ 系统从任意非零 x(t0) 转移到 x(tf) = 0
- ❑ 则称状态 x(t0) 是能控的。

## ➢ 秩判据

### ✓ 单输入系统秩判据证明

$$0 = e^{At_f} x(0) + \int_o^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x}(0) = -\int_0^{t_f} e^{-\boldsymbol{A}\tau} \boldsymbol{Bu}(\tau) d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k}$$

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_f} a_k(\tau) u(\tau) d\tau$$

$$\boxed{\int_0^{t_f} a_k(\tau) u(\tau) d\tau = \beta_k}$$

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \cdot \beta_k = -\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

# 线性定常系统的能控性判别

- 秩判据

  - 例

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$M = [B \ \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad rankM = 1$$

# 线性定常系统的能控性判别

## ➢ 秩判据

✓ 例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\1&0&3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\1&0&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\1&0&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\0&1\\4&2\end{bmatrix}$$

$$Q_c=\begin{bmatrix}B&AB&A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&2&2&4\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&4&2\end{bmatrix}$$

# 线性控制系统的能控性和能观性

3.1 能控性的定义

3.2 线性定常系统的能控性判别

3.3 线性连续定常系统的能观性

3.4 离散系统的能控性与能观性

3.5 时变系统的能控性与能观性

3.6 能控性与能观性的对偶关系

3.7 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

3.8 线性系统的结构分解

3.9 传递函数矩阵的实现问题

3.10 传递函数中零极点对消与状态能控性和能观性之间的关系

# 线性连续定常系统的能观性

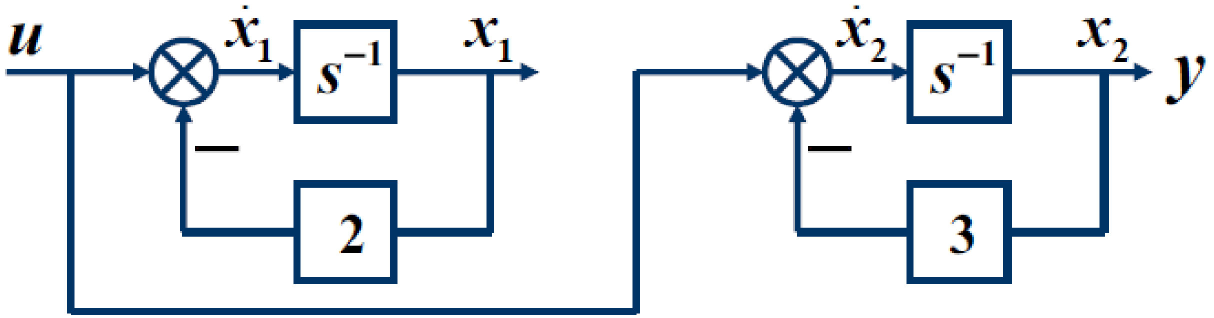
## 直观讨论

- 能观问题：系统的状态能否通过输出反映/识别出来
- 状态能观性：揭示系统输出对状态的识别能力

- 若某状态变量的运动可由输出反映，则该状态变量能观；反之，为不能观状态变量
- 若所有状态变量能观，则系统状态完全能观，简称能观
- 若存在任一状态变量不能观，则系统状态不完全能观

# 线性连续定常系统的能观性

➢ 直观讨论




- 能控状态
- 能观状态

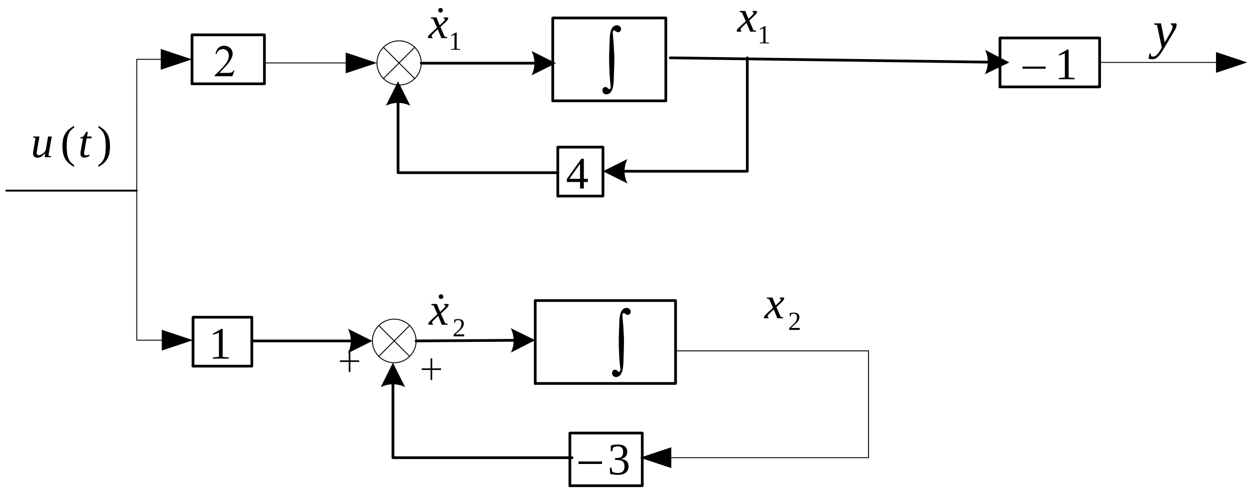
# 线性连续定常系统的能观性

## ➢ 直观讨论

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=[-1 \quad 0]x$$

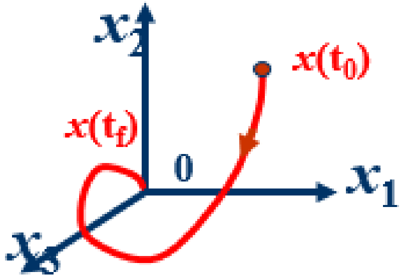
$$\begin{cases}\dot{x}_1=4x_1+2u\\ \dot{x}_2=-3x_2+u\\ y=-x_1\end{cases}$$




- ❑ 能控状态
- ❑ 能观状态

# 线性连续定常系统的能观性

➢ 能观性定义




$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t_0)=x_0$$
$$y(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

- 状态能观：若指定初始时刻$t_0$，存在有限时间$[t_0,t_f]$，使得在$[t_0,t_f]$内测得的y(t)能够唯一确定$t_0$时刻的一个状态$x(t_0)$，则称该初始状态在t0时刻是能观的；

- 系统完全能观：若系统在初始时刻$t_0$的任意状态$x(t_0)$，可以由在有限时间$[t_0,t_f]$内测得的y(t)唯一确定，则系统完全能观。

# 线性连续定常系统的能观性

## ➢ 能观性定义

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t_0) = x_0$$
$$y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

- 关于控制输入：任意给定的输入

- 能观性判据，基于齐次状态方程和输出方程讨论

# 线性连续定常系统的能观性

## ➢ 能观性定义

- 为什么只需要确定初始状态$x(t_0)$

- 为什么要强调 唯一 确认

# 线性连续定常系统的能观性

- 能观性定义
  - 关于有限时间$[t_0,t_f]$，观测时间
    - C可逆
    - 输出变量个数少于状态变量个数

# 线性连续定常系统的能观性

➤ 定常系统能观性的判别：约旦标准型

✓ 对角线型

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t)$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1\\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2\\ &\vdots\\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n\end{aligned}\right\}, \quad x\ \ t\ = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}x_{10} \\ e^{\lambda_2 t}x_{20} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}x_{n0} \end{pmatrix}$$

$$A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n\\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n\\ &\vdots\\ y_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n\end{aligned}\right\}$$

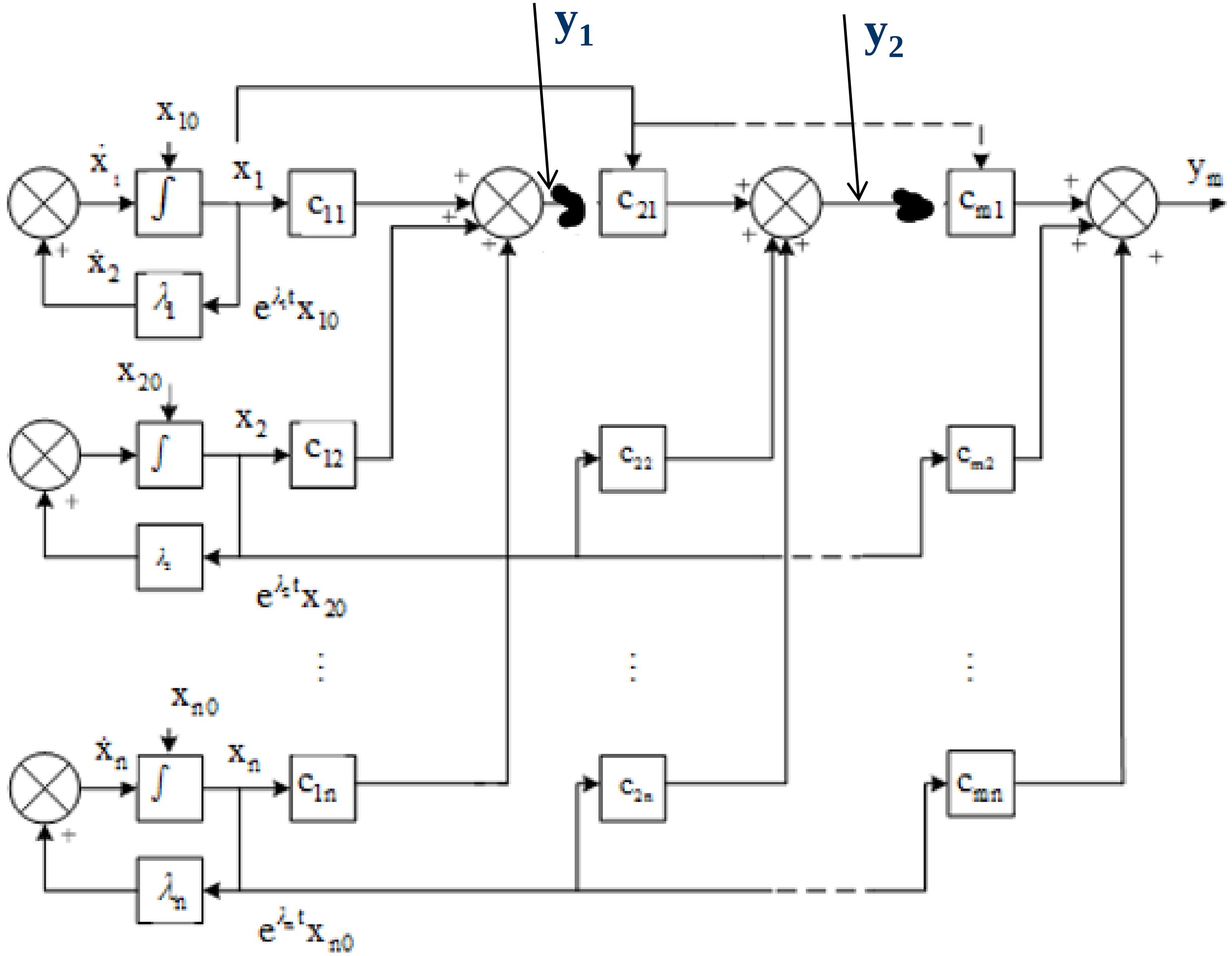
# 线性连续定常系统的能观性

➢ 定常系统能观性的判别：约旦标准型

✓ 对角线型

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1\\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2\\ &\vdots\\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n\end{aligned}\right\},\quad x(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}x_{10}\\ e^{\lambda_2 t}x_{20}\\ \vdots\\ e^{\lambda_n t}x_{n0}\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n\\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n\\ &\vdots\\ y_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n\end{aligned}\right\}$$



# 线性连续定常系统的能观性

- 定常系统能观性的判别：约旦标准型

  - ✓ 对角线型

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n \end{aligned}\right\}$$

# 线性连续定常系统的能观性

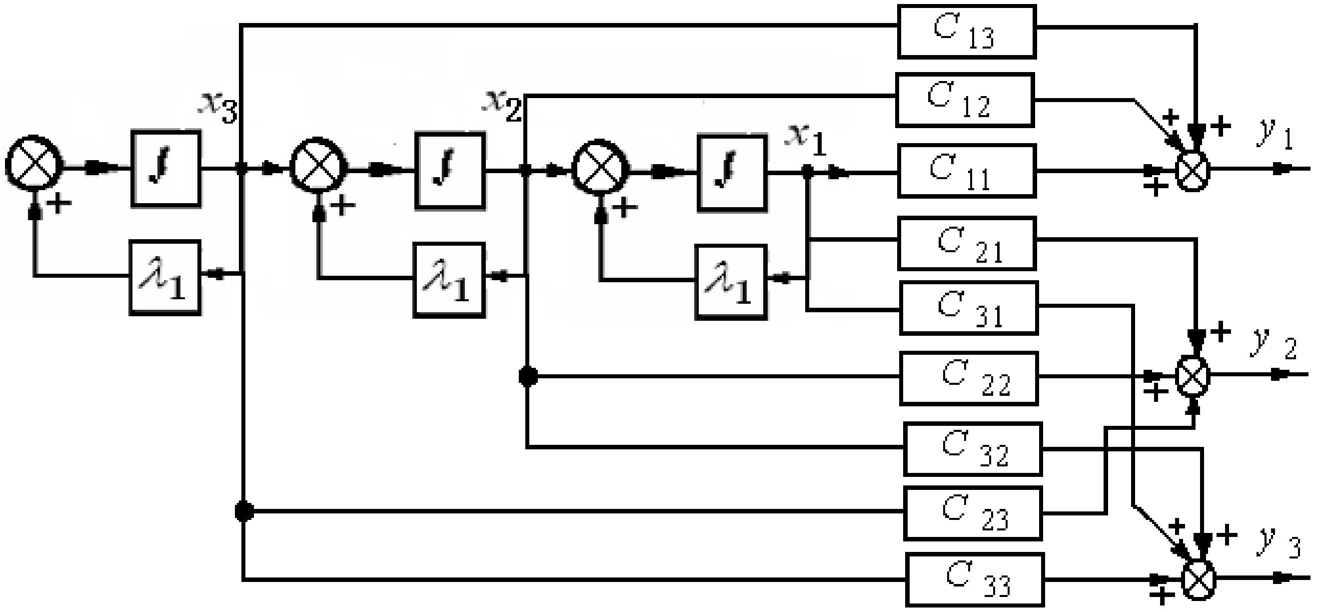
- 定常系统能观性的判别：约旦标准型

  - ✓ 约旦块型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t_0)=x_0$$
$$y(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}$$



# 线性连续定常系统的能观性

- 定常系统能观性的判别：约旦标准型

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_k \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \hat{\boldsymbol{C}}\hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{cases}$$

- ✓ 当A为约旦标准型时，若每个约旦块对应的$C_i$首列非全零，则系统能观
- ✓ 坐标变换不改变系统的能观性

# 线性连续定常系统的能观性

➢ 定常系统能观性的判别：约旦标准型

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}x\quad y=\begin{bmatrix}3&2&0\end{bmatrix}x$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&-5&0\\0&0&5\end{bmatrix}x\quad y=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&8\end{bmatrix}x$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&-7&0\\0&0&5\end{bmatrix}x\quad y=\begin{bmatrix}1&0&3\\2&0&8\end{bmatrix}x$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-3&1\\0&-3\end{bmatrix}x\qquad y=\begin{bmatrix}0&5\end{bmatrix}x$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-7&1&0\\0&-7&1\\0&0&-7\end{bmatrix}x\quad y=\begin{bmatrix}6&4&5\\0&2&1\end{bmatrix}x$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&-4&1\\0&0&0&-4\end{bmatrix}x\quad y=\begin{bmatrix}1&4&0&1\\3&7&0&0\end{bmatrix}x$$

# 线性连续定常系统的能观性

- 定常系统能观性的判别：秩判据

  - 定理：线性定常连续系统(A，C)状态完全能观的充要条件是能观性矩阵满秩，即

$$rankN = n$$

其中，能观性矩阵为 $\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$，系统维数为 n。

- 单输出系统
- 多输出系统，N求秩

# 线性连续定常系统的能观性

- 定常系统能观性的判别：秩判据

  - ✓ 证明：

$$y(t)=Ce^{At}x(0)$$

$$\boxed{e^{At}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)A^k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)CA^kx(0)$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha_0(t)I_m & \alpha_1(t)I_m & \cdots & \alpha_{n-1}(t)I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{n-1}\end{bmatrix}x(0)$$

- ❑ 若系统
- ➢ 任意状态x(t0)由[t0,tf]内测的y(t)
- ➢ 唯一确定
- ❑ 则系统完全能观

$$\begin{bmatrix}y(t_1)\\y(t_2)\\\vdots\\y(t_f)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_0(t_1)\boldsymbol{I}_m & \alpha_1(t_1)\boldsymbol{I}_m & \cdots & \alpha_{n-1}(t_1)\boldsymbol{I}_m\\\alpha_0(t_2)\boldsymbol{I}_m & \alpha_1(t_2)\boldsymbol{I}_m & \cdots & \alpha_{n-1}(t_2)\boldsymbol{I}_m\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\alpha_0(t_f)\boldsymbol{I}_m & \alpha_1(t_f)\boldsymbol{I}_m & \cdots & \alpha_{n-1}(t_f)\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\vdots\\\boldsymbol{CA}^{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)$$

# 线性连续定常系统的能观性

➢ 定常系统能观性的判别：秩判据

✓ 例：

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = Cx$$

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ C^2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -6 & -7 & -1 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -6 & -7 & -1 \\ 6 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \mathrm{rank} N < 3$$

# 线性连续定常系统的能观性

➢ 定常系统能观性的判别：秩判据

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}N = 2 = n$$

# 线性控制系统的能控性和能观性

3.1 能控性的定义
3.2 线性定常系统的能控性判别
3.3 线性连续定常系统的能观性
3.4 离散系统的能控性与能观性
3.5 时变系统的能控性与能观性
3.6 能控性与能观性的对偶关系
3.7 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型
3.8 线性系统的结构分解
3.9 传递函数矩阵的实现问题
3.10 传递函数中零极点对消与状态能控性和能观性之间的关系

# 离散系统的能控性与能观性

## ➤ 能控性定义

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

- 若存在控制向量序列u(k), u(k+1),…,u(l)，使系统在第k步的任意非零状态 x(k) 转移到第l步的零态 x(l)=0，则称系统完全能控。

- ✓ 状态方程
- ✓ 控制输入
- ✓ 有限步数
- ✓ 起止点

# 离散系统的能控性与能观性

- 能控性判定：秩判据

  - 定理：线性定常离散系统(G，H)完全能控的充要条件（G非奇异）或充分条件（G奇异）是能控性矩阵满秩，即

$$Rank(Q_c) = Rank[\boldsymbol{H} \quad \boldsymbol{GH} \quad \cdots \quad \boldsymbol{G}^{n-1}\boldsymbol{H}] = n$$

# 离散系统的能控性与能观性

- 能控性判定：秩判据

  - 证明

$$Rank(Q_c) = Rank[\boldsymbol{H} \quad \boldsymbol{GH} \quad \cdots \quad \boldsymbol{G}^{n-1}\boldsymbol{H}] = n$$

$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} H u(j)$$

$$\Downarrow$$

$$0 = G^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} G^{n-j-1} H u(j)$$

$$\Rightarrow$$

$$-G^n \boldsymbol{x}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} G^{n-j-1} H\boldsymbol{u}(j) = G^{n-1}H\boldsymbol{u}(0) + G^{n-2}H\boldsymbol{u}(1) + \ldots + H\boldsymbol{u}(n\text{-}1)$$

$$\Uparrow$$

$$[H \quad GH \quad \ldots \quad G^{n-1}H]\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \ldots \\ u(0) \end{bmatrix} = -G^n x(0)$$

# 离散系统的能控性与能观性

## ➢ 能观性定义

$$x(k+1)=Gx(k) \qquad y=Cx(k)$$

- 若指定初始时刻h，系统任意非零初态 x(h) 可由在有限步内测得的输出 y(h), y(h+1),…,y(l) 唯一确定，则系统完全能观。

✓ 齐次状态方程、输出方程

✓ 控制输入

✓ 有限步数

✓ 唯一确定、初态

# 离散系统的能控性与能观性

- 能观性判定：秩判据
  - ✓ 定理：线性定常离散系统(G，C)完全能观的充要条件是能观性矩阵满秩，即

$$Rank(Q_o) = n \qquad Q_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CG} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CG}^{n-1} \end{bmatrix}$$

# 离散系统的能控性与能观性

- 能观性判定：秩判据

  - ✓ 证明 $Rank(Q_o) = n$ $Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}$

$$x(k+1) = Gx(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

⇨

$$\begin{aligned} y(0) &= Cx_0 \\ y(1) &= Cx(1) = CGx_0 \\ &\vdots \\ y(n-1) &= Cx(n-1) = CG^{n-1}x_0 \end{aligned}$$

⇨

$$\begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix}$$

# 离散系统的能控性与能观性

➢ 能观性判定：秩判据

✓ $$x(k+1)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}x(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}x(k)$$

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CG \\ CG^2 \end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}=3$$

# 线性控制系统的能控性和能观性

# 时变系统的能控性与能观性

- 能控性定义

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t)$$

- 若存在控制输入u(t)，能在有限时间$[t_0,t_f]$内，将系统从任意非零初态$x(t_0)$转移到零终态$x(t_f)=0$，则称系统在$t_0$时刻完全能控。

- ✓ 状态方程
- ✓ 控制输入
- ✓ 有限时间
- ✓ 起止点
- ✓ 强调在时刻$t_0$，系统能控

# 时变系统的能控性与能观性

- 能控性判定：
  - 格拉姆矩阵判定：线性时变连续系统在 $t_0$时刻 完全能控的充要条件是：在$[t_0,t_f]$内如下能控格拉姆矩阵非奇异

$$W_c(t_0,t_f)=\int_{t_0}^{t_f}\Phi(t_0,t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0,t)dt$$

  - 秩判据：线性时变连续系统在$t_0$时刻 完全能控的充分条件是：能控性矩阵满秩，即

$$\operatorname{rank}Q_c(t)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B_1(t) & B_2(t) & \dots & B_n(t)\end{bmatrix}=n$$

$$\begin{cases}B_1(t)=B(t)\\ B_i(t)=-A(t)B_{i-1}(t)+\dot{B}_{i-1}(t) \qquad i=2,3,\dots,n\end{cases}$$

# 时变系统的能控性与能观性

## 能观性定义

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t) \qquad y(t)=C(t)x(t)$$

- 若系统在初始时刻$t_0$的任意非零状态$x(t_0)$，可由有限时间$[t_0,t_f]$内测得的输出$y(t)$唯一确定出来，则系统在时刻$t_0$完全能观。

- ✓ 齐次状态方程、输出方程
- ✓ 有限时间
- ✓ 唯一确定，初态
- ✓ 强调在时刻$t_0$，系统能观

# 时变系统的能控性与能观性

## ➢ 能观性判定

✓ 格拉姆矩阵判定：线性时变连续系统在 $[t_0,t_f]$ 完全能控的充要条件是：在$[t_0,t_f]$内如下能观格拉姆矩阵非奇异

$$W_c(t_0,t_f)=\int_{t_0}^{t_f}\Phi(t_0,t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0,t)dt$$

$$\boldsymbol{W}_o(t_0,t_{\mathrm{f}})=\int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\mathrm{d}t$$

✓ 秩判据：线性时变连续系统在 $[t_0,t_f]$ 完全能观的充分条件是：能观性矩阵满秩，即

$$rank\boldsymbol{Q}_o(t_f)=n \qquad \boldsymbol{Q}_o(t)=[C_1(t),C_2(t),\cdots,C_n(t)]^T$$

$$C_1(t)=C(t)$$

$$C_i(t)=-C_{i-1}(t)\boldsymbol{A}(t)+\dot{C}_{i-1}(t),i=2,3,\cdots n$$

# 上次课回顾

- 能控性与能观性：含义、判据

# 线性控制系统的能控性和能观性

# 能控性与能观性的对偶关系

## ➢ 对偶关系

- 能控性 与 能观性：判据、定义，相似性；满足对偶原理

- 对偶系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t) \end{cases}$$

$$\textstyle\sum_1 (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \\ y_2(t) = C_2 x_2(t) \end{cases}$$

$$\textstyle\sum_2 (\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}_2)$$

# 能控性与能观性的对偶关系

## ➢ 对偶关系

- ❑ 能控性 与 能观性：判据、定义，相似性；满足对偶原理

- ❑ 对偶系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t) \end{cases}$$

$$\sum\nolimits_1 (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1)$$

$$A_2 = A_1^T, B_2 = C_1^T, C_2 = B_1^T$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \\ y_2(t) = C_2 x_2(t) \end{cases}$$

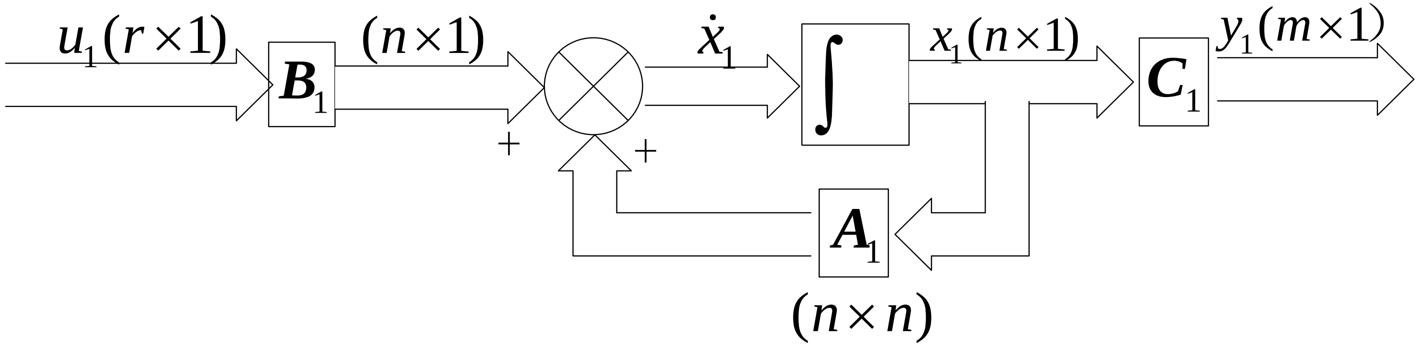
$$\sum\nolimits_2 (\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}_2)$$

# 能控性与能观性的对偶关系

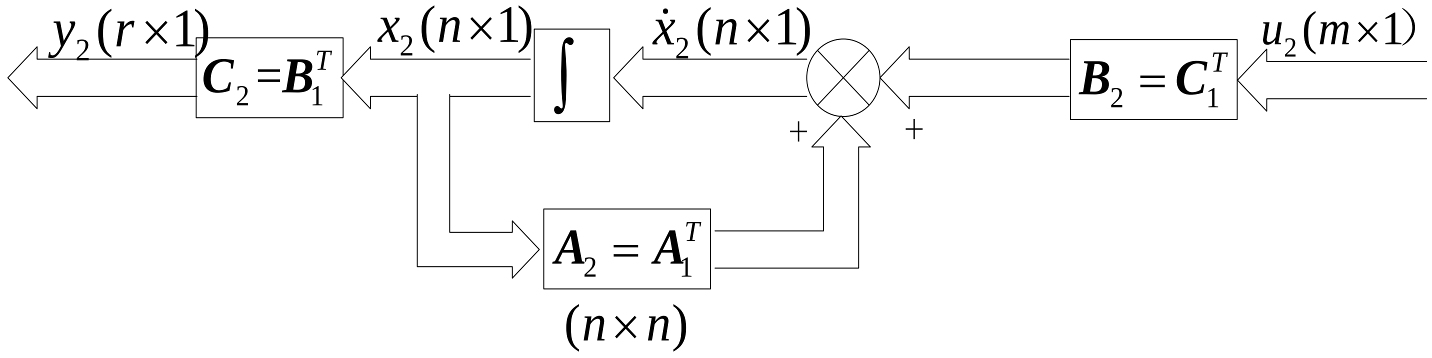
## ➢ 对偶关系

### ❑ 对偶系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t) \end{cases}$$




$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \\ y_2(t) = C_2 x_2(t) \end{cases}$$



# 能控性与能观性的对偶关系

- 对偶关系
  - 对偶系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=A_1x_1(t)+B_1u_1(t)\\ y_1(t)=C_1x_1(t)\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{x}_2(t)=A_2x_2(t)+B_2u_2(t)\\ y_2(t)=C_2x_2(t)\end{cases}\qquad A_2=A_1^T, B_2=C_1^T, C_2=B_1^T$$

✓ 传递函数互为转置

✓ 特征多项式相同

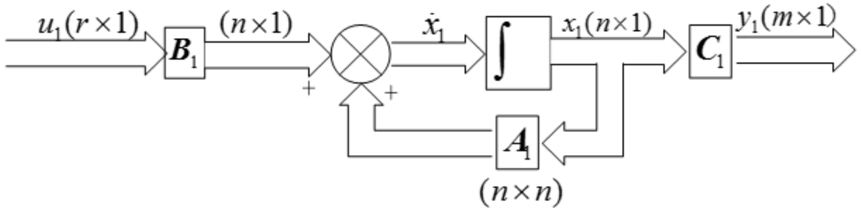
# 能控性与能观性的对偶关系

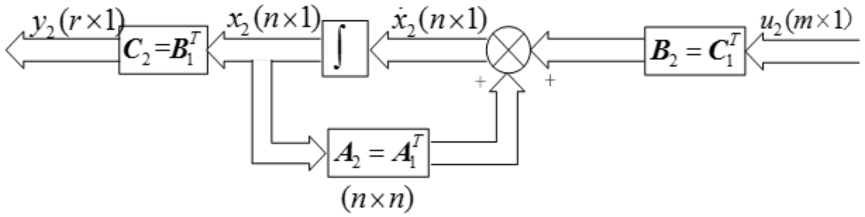
## ➢ 对偶关系

### ❑ 对偶原理

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t)\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \\ y_2(t) = C_2 x_2(t)\end{cases} \qquad A_2 = A_1^T, B_2 = C_1^T, C_2 = B_1^T$$

✓ 系统1完全能控、系统2完全能观；系统1完全能观、系统2完全能控



# 能控性与能观性的对偶关系

- 对偶关系
  - 对偶原理

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=A_1x_1(t)+B_1u_1(t)\\ y_1(t)=C_1x_1(t)\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{x}_2(t)=A_2x_2(t)+B_2u_2(t)\\ y_2(t)=C_2x_2(t)\end{cases}\qquad A_2=A_1^T, B_2=C_1^T, C_2=B_1^T$$

✓ 系统1完全能控、系统2完全能观；系统1完全能观、系统2完全能控

$$M_2=\begin{bmatrix}C_1^T & A_1^TC_1^T & \cdots & (A_1^T)^{n-1}C_1^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1\\ C_1A_1\\ \vdots\\ C_1A_1^{n-1}\end{bmatrix}^T=N_1^T$$

$$N_2=\begin{bmatrix}C_2\\ C_2A_2\\ \vdots\\ C_2A_2^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1^T\\ B_1^TA_1^T\\ \vdots\\ B_1^T(A_1^T)^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1 & A_1B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1\end{bmatrix}^T=M_1^T$$

# 线性控制系统的能控性和能观性

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 能控/观标准化
  - 为什么要标准化
  - 如何标准化（要求、形式、步骤）

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 能控标准型

- n维线性定常系统，若系统状态完全能控，则可化为能控标准型。

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$rank\left[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B\right] = rank\left[b_1 \cdots b_r \vdots Ab_1 \cdots Ab_r \vdots \cdots \vdots A^{n-1}b_1 \cdots A^{n-1}b_r\right] = n$$

- 单输入系统：能控标准型唯一
- 多输入系统：能控标准型不唯一

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## 单输入系统的能控标准型

### 能控标准I型

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ y = \bar{c}\,\bar{x} \end{cases}$$

$$\bar{A} = T_{c1}^{-1}AT_{c1}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = T_{c1}^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{|\lambda I - \boldsymbol{A}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_1 + a_0}$$

$$\bar{c} = cT_{c1} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\beta_0 = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b} + \cdots + a_1\boldsymbol{b}) \\ &\vdots \\ &\beta_{n-2} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} + a_{n-1}\boldsymbol{b}) \\ &\beta_{n-1} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{b} \end{aligned}}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能控标准I型

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}x + \bar{b}u \\ y = \bar{c}\,\bar{x} \end{cases}$$

$$\bar{A} = T_{c1}^{-1} A T_{c1}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = T_{c1}^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = c T_{c1} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{A}\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \bar{A}^2\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -a_{n-1} \\ -a_{n-2} + a_{n-1}^2 \end{bmatrix} \quad \bar{A}^{n-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{n-1} \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}$$

$$rank \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 单输入系统的能控标准型

  - 能控标准I型

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ y = \bar{c}\bar{x}\end{cases}$$

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx$$

$$\bar{A} = T_{c1}^{-1}AT_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A^{n-1}b & A^{n-2}b & \cdots & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = T_{c1}^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = cT_{c1} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能控标准I型

$$T_{c1} = [A^{n-1}b, \quad A^{n-2}b, \quad \cdots, \quad Ab, \quad b]\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + a_{n-2}A^{n-3}b + \cdots + a_1 b \\ e_2 &= A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \cdots + a_2 b \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ e_{n-1} &= Ab + a_{n-1}b \\ e_n &= b \end{aligned}\right\} \Downarrow$$

$$T_{c1} = [e_1, \quad e_2, \quad \cdots, \quad e_n]$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能控标准I型

$$\bar{A}=T_{c1}^{-1}AT_{c1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{bmatrix} ?$$

$$T_{c1}=[e_1,\quad e_2,\quad \cdots,\quad e_n]$$

$$\left.\begin{aligned}
e_1 &= A^{n-1}b+a_{n-1}A^{n-2}b+a_{n-2}A^{n-3}b+\cdots+a_1b\\
e_2 &= A^{n-2}b+a_{n-1}A^{n-3}b+\cdots+a_2b\\
&\vdots\\
e_{n-1} &= Ab+a_{n-1}b\\
e_n &= b
\end{aligned}\right\}$$

$$T_{c1}\bar{A}=AT_{c1}=A[e_1,\quad e_2,\quad \cdots,\quad e_n]=[Ae_1,\quad Ae_2,\quad \cdots,\quad Ae_n]$$

$$\begin{aligned}
Ae_1 &= A(A^{n-1}b+a_{n-1}A^{n-2}b+\cdots+a_1b)\\
&= (A^nb+a_{n-1}A^{n-1}b+\cdots+a_1Ab+a_0b)-a_0b=-a_0b\\
&= -a_0e_n
\end{aligned}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能控标准I型

$$\bar{A}=T_{c1}^{-1}AT_{c1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{bmatrix}$$

?

?

$$\left.\begin{aligned}
e_1 &= A^{n-1}b+a_{n-1}A^{n-2}b+a_{n-2}A^{n-3}b+\cdots+a_1b\\
e_2 &= A^{n-2}b+a_{n-1}A^{n-3}b+\cdots+a_2b\\
&\ \vdots\\
e_{n-1} &= Ab+a_{n-1}b\\
e_n &= b
\end{aligned}\right\}$$

$$T_{c1}=[e_1,\quad e_2,\quad \cdots,\quad e_n]$$

$$\begin{aligned}
Ae_1 &= A(A^{n-1}b+a_{n-1}A^{n-2}b+\cdots+a_1b)\\
&= (A^nb+a_{n-1}A^{n-1}b+\cdots+a_1Ab+a_0b)-a_0b=-a_0b\\
&= -a_0e_n\\
Ae_2 &= A(A^{n-2}b+a_{n-1}A^{n-3}b+\cdots+a_2b)\\
&= (A^{n-1}b+a_{n-1}A^{n-2}b+\cdots+a_2Ab+a_1b)-a_1b\\
&= e_1-a_1e_n\\
&\ \vdots\\
Ae_{n-1} &= A(Ab+a_{n-1}b)\\
&= (A^2b+a_{n-1}Ab+a_{n-2}b)-a_{n-2}b\\
&= e_{n-2}-a_{n-2}e_n\\
Ae_n &= Ab=(Ab+a_{n-1}b)-a_{n-1}b\\
&= e_{n-1}-a_{n-1}e_n
\end{aligned}$$

$$T_{c1}\bar{A}=AT_{c1}=A[e_1,\quad e_2,\quad \cdots,\quad e_n]=[Ae_1,\quad Ae_2,\quad \cdots,\quad Ae_n]$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能控标准I型

$$\bar{A} = T_{c1}^{-1} A T_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$T_{c1} = [e_1, \quad e_2, \quad \cdots, \quad e_n]$$

$$\begin{aligned}
Ae_1 &= A(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + a_1 b) \\
&= (A^n b + a_{n-1}A^{n-1}b + \cdots + a_1 Ab + a_0 b) - a_0 b = -a_0 b \\
&= -a_0 e_n \\
Ae_2 &= A(A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \cdots + a_2 b) \\
&= (A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + a_2 Ab + a_1 b) - a_1 b \\
&= e_1 - a_1 e_n \\
&\ \ \vdots \\
Ae_{n-1} &= A(Ab + a_{n-1}b) \\
&= (A^2 b + a_{n-1}Ab + a_{n-2}b) - a_{n-2}b \\
&= e_{n-2} - a_{n-2}e_n \\
Ae_n &= Ab = (Ab + a_{n-1}b) - a_{n-1}b \\
&= e_{n-1} - a_{n-1}e_n
\end{aligned}$$

$$T_{c1}\bar{A} = AT_{c1} = A[e_1, \quad e_2, \quad \cdots, \quad e_n] = [Ae_1, \quad Ae_2, \quad \cdots, \quad Ae_n]$$

$$\begin{aligned}
T_{c1}\bar{A} &= [Ae_1, \quad Ae_2, \quad \ldots, \quad Ae_n] \\
&= [-a_0 e_n, \quad (e_1 - a_1 e_n), \quad \cdots, \quad (e_{n-1} - a_{n-1}e_n)] \\
&= [e_1, \quad e_2, \quad \cdots, \quad e_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

➢ 单输入系统的能控标准型

❑ 能控标准I型

$$\bar{b} = T_{c1}^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{c1} \bar{b} = b$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能控标准I型

$$\left.\begin{aligned}
e_1 &= A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + a_{n-2}A^{n-3}b + \cdots + a_1 b \\
e_2 &= A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \cdots + a_2 b \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
e_{n-1} &= Ab + a_{n-1}b \\
e_n &= b
\end{aligned}\right\}$$

$$T_{c1} = [e_1, \quad e_2, \quad \cdots, \quad e_n]$$

$$\bar{b} = T_{c1}^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{c1}\bar{b} = b = e_n = [e_1, \quad e_2, \quad \cdots, \quad e_n]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 单输入系统的能控标准型

  - 能控标准I型

$$\beta_0 = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b} + \cdots + a_1\boldsymbol{b})$$
$$\vdots$$
$$\beta_{n-2} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} + a_{n-1}\boldsymbol{b})$$
$$\beta_{n-1} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{b}$$

$$\bar{c} = cT_{c1} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

$$\bar{c} = cT_{c1} = c[e_1, \quad e_2, \quad \cdots, \quad e_n]$$

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + a_{n-2}A^{n-3}b + \cdots + a_1 b \\ e_2 &= A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \cdots + a_2 b \\ \vdots \quad & \vdots \\ e_{n-1} &= Ab + a_{n-1}b \\ e_n &= b \end{aligned}\right\}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能控标准I型

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ y = \bar{c}\bar{x} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(s) &= \bar{c}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{b} \\ &= \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➤ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能控标准I型

$$\begin{cases}\dot{x}=\bar{A}x+\bar{b}u\\ y=\bar{c}x\end{cases}$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad \bar{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\bar{c}=\begin{bmatrix}\beta_0&\beta_1&\cdots&\beta_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}W(s)&=\bar{c}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{b}\\&=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}\end{aligned}$$

### 上次课回顾

✓ 传递函数有零点，m = n

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ns^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}\beta_0&\beta_1&\cdots&\beta_{n-1}\end{bmatrix}\quad d=b_n$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能控标准I型：例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\0&2&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}x$$

$$Q_c=[\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{Ab}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}2&4&6\\1&6&8\\1&2&12\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0&0\\0&0&\ddots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}\qquad \bar{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\bar{C}&=CT_{c1}\\&=C\begin{bmatrix}A^{n-1}B&A^{n-2}B&\cdots&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&&\\a_{n-1}&1&&&\\\vdots&\vdots&\ddots&&\\a_2&a_3&\ddots&1&\\a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\beta_0&\beta_1&\cdots&\beta_{n-1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能控标准I型：例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ \boxed{-a_0 \quad -a_1 \quad \cdots \quad -a_{n-2} \quad -a_{n-1}}\end{bmatrix} \quad \bar{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=CT_{c1}$$

$$=C\begin{bmatrix}A^{n-1}B & A^{n-2}B & \cdots & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_2 & a_3 & \ddots & 1 & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-9\lambda+2=0$$

$$a_2=0\,,\ a_1=-9\,,\ a_0=2$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能控标准I型：例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\0&2&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}x$$

$$a_2=0\,,\;a_1=-9\,,\;a_0=2$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&9&0\end{bmatrix}$$

$$\bar{c}=c\boxed{\begin{bmatrix}A^2b&Ab&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\a_2&1&0\\a_1&a_2&1\end{bmatrix}}\leftarrow T_{c1}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4&6\\1&6&8\\1&2&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-9&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&9&0\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ \bar{y}=\begin{bmatrix}3&2&1\end{bmatrix}\bar{x}\end{cases}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 单输入系统的能控标准型

  - 能控标准II型

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u$$
$$y = \bar{c}\bar{x}$$

$$\bar{A} = T_{c2}^{-1}AT_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \bar{b} = T_{c2}^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{c} = cT_{c2} = [\bar{\beta}_0 \quad \bar{\beta}_1 \quad \cdots \quad \bar{\beta}_{n-1}]$$

$$\bar{\beta}_0 = cb$$
$$\bar{\beta}_1 = cAb$$
$$\vdots$$
$$\bar{\beta}_{n-1} = cA^{n-1}b$$

$$\boxed{T_{c2} = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能控标准II型

$$\dot{x} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u$$
$$y = \bar{c}\bar{x}$$

$$\bar{A} = T_{c2}^{-1}AT_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix},\ \bar{b} = T_{c2}^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \bar{c} = cT_{c2} = [\bar{\beta}_0 \quad \bar{\beta}_1 \quad \cdots \quad \bar{\beta}_{n-1}]$$

$$\boxed{T_{c2} = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}}$$

$$\bar{\boldsymbol{A}} = T_{c1}^{-1}\boldsymbol{A}T_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{b}} = T_{c1}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}T_{c1} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

$$\boxed{P_{c1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能观标准I型

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad y = cx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}u \\ y = \tilde{c}\tilde{x} \end{cases}$$

$$\tilde{A} = T_{01}^{-1}AT_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix},\ \tilde{b} = T_{01}^{-1}b = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_0 \\ \bar{\beta}_1 \\ \vdots \\ \bar{\beta}_{n-2} \\ \bar{\beta}_{n-1} \end{bmatrix},\ \tilde{c} = cT_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_0 &= cb \\ \bar{\beta}_1 &= cAb \\ &\vdots \\ \bar{\beta}_{n-1} &= cA^{n-1}b \end{aligned}$$

$$T_{01}^{-1} = N = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - \boldsymbol{A}\right| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_1 + a_0$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 单输入系统的能控标准型

  - 能观标准I型 与 能观标准II型 对偶

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}u \\ y = \tilde{c}\tilde{x}\end{cases} \qquad \tilde{A} = T_{01}^{-1}AT_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \ \tilde{b} = T_{01}^{-1}b = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_0 \\ \bar{\beta}_1 \\ \vdots \\ \bar{\beta}_{n-2} \\ \bar{\beta}_{n-1} \end{bmatrix}, \tilde{c} = cT_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}} = \bar{\boldsymbol{A}}x + \bar{\boldsymbol{b}}u \\ y = \bar{\boldsymbol{c}}\,\bar{x}\end{cases} \qquad \bar{A} = T_{c2}^{-1}AT_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \ \bar{b} = T_{c2}^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{c} = cT_{c2} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_0 & \bar{\beta}_1 & \cdots & \bar{\beta}_{n-1} \end{bmatrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能观标准II型

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+bu\\ y&=cx\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{b}u\\ y=\tilde{c}\tilde{x}\end{cases}$$

$$\tilde{A}=T_{02}^{-1}AT_{02}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&\cdots&0&-a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{bmatrix},\ \tilde{b}=T_{02}^{-1}b=\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\vdots\\\beta_{n-2}\\\beta_{n-1}\end{bmatrix},\ \tilde{c}=cT_{02}=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{|\lambda I-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda_1+a_0}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\beta_0&=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b}+\cdots+a_1\boldsymbol{b})\\&\vdots\\\beta_{n-2}&=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{Ab}+a_{n-1}\boldsymbol{b})\\\beta_{n-1}&=\boldsymbol{cb}\end{aligned}}$$

$$\boxed{T_{02}^{-1}=\begin{bmatrix}1&a_{n-1}&\cdots&a_2&a_1\\0&1&\cdots&a_3&a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&a_{n-1}\\0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}CA^{n-1}\\\vdots\\CA\\C\end{bmatrix}}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 单输入系统的能控标准型

### ❑ 能观标准II型 与 能观标准I型 对偶

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}u \\ y = \tilde{c}\tilde{x}\end{cases}$$

$$\tilde{A} = T_{02}^{-1}AT_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix},\ \tilde{b} = T_{02}^{-1}b = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix},\ \tilde{c} = cT_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}} = \bar{\boldsymbol{A}}x + \bar{\boldsymbol{b}}u \\ y = \bar{\boldsymbol{c}}\bar{x}\end{cases}$$

$$\bar{\boldsymbol{A}} = T_{c1}^{-1}\boldsymbol{A}T_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{b}} = T_{c1}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}T_{c1} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

# 线性控制系统的能控性和能观性

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 线性系统的结构分解
  - 为什么要分解
    - ✓ 不完全能控/观
    - ✓ 能控（观）子空间、不能控（观）子空间
    - ✓ 最小实现
  - 如何分解
    - ✓ 条件
    - ✓ 形式
    - ✓ 步骤

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## 按能控性分解

- n维线性定常系统，若状态不完全能控，则可进行按能控性分解

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned} \xrightarrow[x = R_c\hat{x}]{rankQ_c = rank[\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{Ab}\ \ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}\ \cdots\ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] = n_1 < n} \begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y &= \hat{C}\hat{x}\end{aligned}$$

$$x = \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\ n_1 \\ \}\ n - n_1 \end{matrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 按能控性分解

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu\\ y&=Cx\end{aligned}\quad \xrightarrow[x=\boldsymbol{R}_c\hat{x}]{rankQ_c=rank[\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{Ab}\ \ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]=n_1<n}\quad \begin{aligned}\dot{\hat{x}}&=\hat{A}\hat{x}+\hat{B}u\\ y&=\hat{C}\hat{x}\end{aligned}$$

$$\hat{x}=\left[\begin{array}{c}\hat{x}_1\\ \hdashline \hat{x}_2\end{array}\right]\begin{array}{l}\}\,n_1\\ \}\,n-n_1\end{array}$$

$$\hat{A}=R_c^{-1}AR_c=\begin{array}{cl}\left[\begin{array}{c|c}\hat{A}_{11}&\hat{A}_{12}\\ \hdashline 0&\hat{A}_{22}\end{array}\right] & \begin{array}{l}\}\,n_1\\ \}\,n-n_1\end{array}\\ \begin{array}{cc}\ \ n_1\ \ & \ \ n-n_1\end{array} & \end{array}$$

$$\hat{B}=R_c^{-1}B=\left[\begin{array}{c}B_1\\ \hdashline 0\end{array}\right]\begin{array}{l}\}\,n_1\\ \}\,n-n_1\end{array}$$

$$\hat{C}=CR_c=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c:c}\hat{C}_1&\hat{C}_2\end{array}\right]\\ \begin{array}{cc}n_1 & n-n_1\end{array}\end{array}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

➢ 按能控性分解

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

$$y = \hat{C}\hat{x}$$

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hline 0 & \hat{A}_{22} \end{array}\right] \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{array}\right]$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

❑ 能控状态变量组、能控子系统

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_c = \hat{\boldsymbol{A}}_{11}x_c + \hat{\boldsymbol{A}}_{12}x_{\bar{c}} + \hat{\boldsymbol{B}}_1 u \\ y_1 = \hat{\boldsymbol{C}}_1 x_c \end{cases}$$

❑ 不能控状态变量组、不能控子系统

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{\bar{c}} = \hat{\boldsymbol{A}}_{22}x_{\bar{c}} \\ y_2 = \hat{\boldsymbol{C}}_2 x_{\bar{c}} \end{cases}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

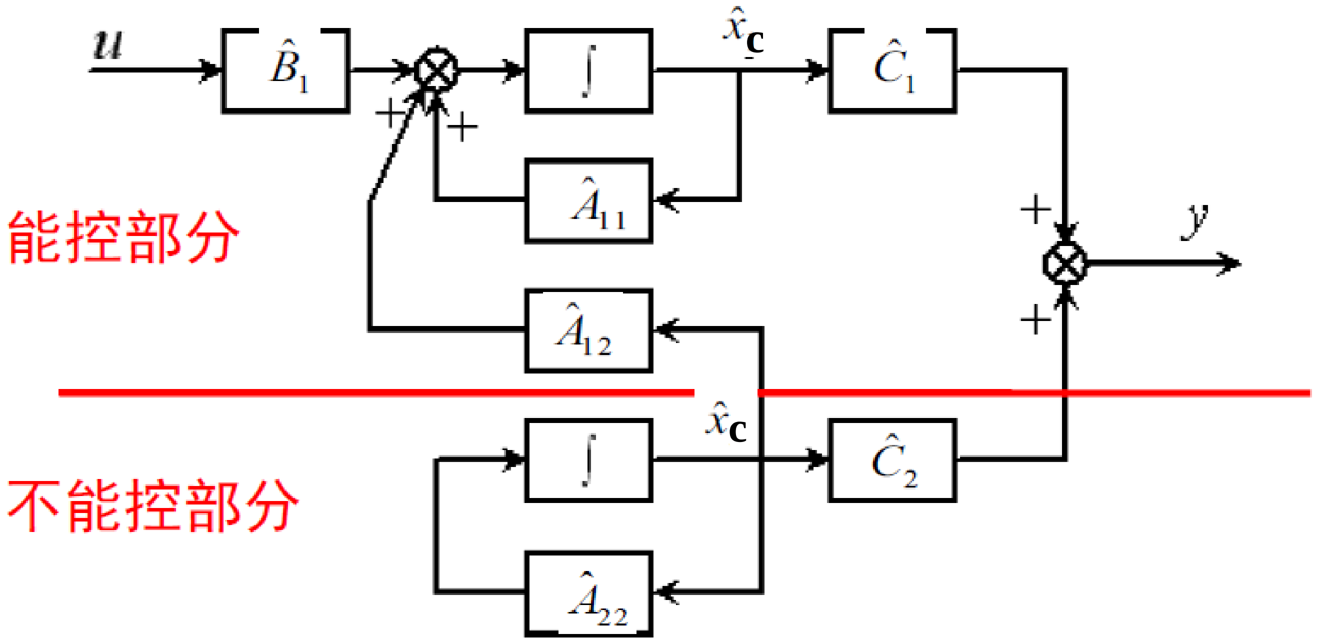
- 按能控性分解

  - 能控状态、能控子系统

$$
\begin{cases}
\dot{\hat{x}}_c = \hat{\boldsymbol{A}}_{11} x_c + \hat{\boldsymbol{A}}_{12} x_{\bar{c}} + \hat{\boldsymbol{B}}_1 u \\
y_1 = \hat{\boldsymbol{C}}_1 x_c
\end{cases}
$$

  - 不能控状态、不能控子系统

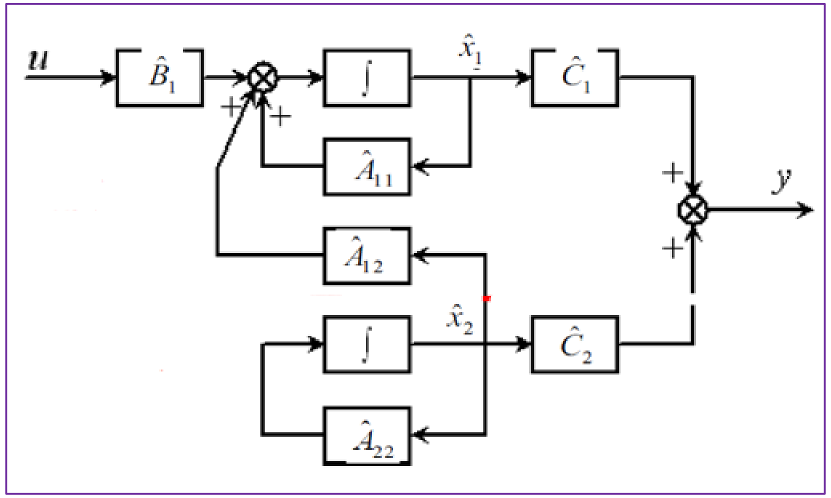
$$
\begin{cases}
\dot{\hat{x}}_{\bar{c}} = \hat{\boldsymbol{A}}_{22} x_{\bar{c}} \\
y_2 = \hat{\boldsymbol{C}}_2 x_{\bar{c}}
\end{cases}
$$



# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 按能控性分解

### ❑ 传递函数关系




$$
\begin{aligned}
W(s) &= C(sI-A)^{-1}B \\
&= \hat{C}(sI-\hat{A})^{-1}\hat{B} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-\hat{A}_{11} & -\hat{A}_{12} \\ 0 & sI-\hat{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \hat{C}_1(sI-\hat{A}_{11})^{-1}\hat{B}_1 \\
&= \widetilde{W}_1(s)
\end{aligned}
$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 按能控性分解

### ❑ 坐标变换矩阵

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned} \xrightarrow[\mathrm{rank}[\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}\ \cdots\ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] = n_1 < n]{x = \boldsymbol{R}_c\hat{x}\ \ ?} \begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y &= \hat{C}\hat{x}\end{aligned}$$

$$R_c = [\underline{R_1\ \ \cdots\ \ R_{n1}}\ \ \cdots\ \ R_n]$$

- ✓ 能控性矩阵中选择n1个线性无关列向量，作为Rc的前n1列；
- ✓ 其余n-n1列，在保证Rc非奇异条件下，任意选

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 按能控性分解

### ❑ 例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}x$$

$$R_c=\begin{bmatrix}\underline{R_1 \quad \cdots \quad R_{n1}} & \cdots & R_n\end{bmatrix}$$

- ✓ 能控性矩阵选择n1个线性无关列，为Rc前n1列
- ✓ 其余n-n1列，在保证Rc非奇异条件下，任意选

$$\text{rank}Q=\text{rank}[\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{AB}\ \ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}]=\text{rank}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}=2<3=n$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 按能控性分解

❑ 例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}x$$

$$R_c=\begin{bmatrix}R_1 & \cdots & R_{n1} & \cdots & R_n\end{bmatrix}$$

✓ 能控性矩阵选择n1个线性无关列，为Rc前n1列

✓ 其余n-n1列，在保证Rc非奇异条件下，任意选

$$M=[b,\quad Ab,\quad A^2b]=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$R_1=b=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad R_2=Ab=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad R_3=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

即

$$R_c=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 按能控性分解

❑ 例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&1&-2\end{bmatrix}x$$

$$\boxed{\boldsymbol{R}_c=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}}$$

$$\dot{\hat{x}}=R_c^{-1}AR_c\hat{x}+R_c^{-1}bu$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u$$

$$=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\1&-2&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=CR_c\hat{x}=\begin{bmatrix}1&-1&-2\end{bmatrix}\hat{x}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➤ 按能控性分解

❑ 例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}x$$

$$\boxed{\boldsymbol{R}_c=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}}$$

$$\boxed{R_c=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}}$$

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=CR_c\hat{x}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\end{bmatrix}\hat{x}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 按能控性分解

  - 例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}x$$

$$\boldsymbol{R}_c=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=CR_c\hat{x}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\end{bmatrix}\hat{x}$$

$$R_c=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\end{bmatrix}\hat{x}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 按能控性分解

  - 例

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x$$

$$\boxed{\boldsymbol{R}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{R_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = CR_c\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \hat{x}$$

$$\boxed{\dot{\hat{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{x}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u}$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \hat{x}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## 按能控性分解

### 例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&1&-2\end{bmatrix}x$$

$$\boxed{\boldsymbol{R}_c=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}}$$

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\1&-2&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=CR_c\hat{x}=\begin{bmatrix}1&-1&-2\end{bmatrix}\hat{x}$$

$$\boxed{\dot{\hat{x}}_1=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-2\end{bmatrix}\hat{x}_1+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u}$$

$$\boxed{R_c=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}}$$

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&-2&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&-1&-2\end{bmatrix}\hat{x}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## 按能观性分解

- n维线性定常系统，若状态不完全能观，则可进行按能观性分解

$$\mathrm{rank}Q_o = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = n_1 < n$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad \xrightarrow[x = \boldsymbol{R}_o \hat{x}]{} \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y &= \hat{C}\hat{x} \end{aligned}$$

$$x = \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} x_o \\ \hdashline x_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n_1 \\ \}n - n_1 \end{matrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

➢ 按能观性分解

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned} \xrightarrow[x = \boldsymbol{R}_o \hat{x}]{\operatorname{rank} Q_o = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = n_1 < n} \begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y &= \hat{C}\hat{x}\end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{R}_o^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_o = \begin{array}{c c} \left[\begin{array}{c:c} \hat{\boldsymbol{A}}_{11} & 0 \\ \hdashline \hat{\boldsymbol{A}}_{21} & \hat{\boldsymbol{A}}_{22} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}n_1 \\ \}n-n_1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n_1} & \underbrace{\quad}_{n-n_1} \end{array} & \end{array} \qquad \hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{R}_o^{-1}\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{c} \hat{\boldsymbol{B}}_1 \\ \hdashline \hat{\boldsymbol{B}}_2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}n_1 \\ \}n-n_1 \end{array}$$

$$\hat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_o = \left[\begin{array}{c:c} \underbrace{\hat{\boldsymbol{C}}_1}_{n_1} & \underbrace{0}_{n-n_1} \end{array}\right] \qquad \hat{x} = \left[\begin{array}{c} x_o \\ \hdashline x_{\bar{o}} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}n_1 \\ \}n-n_1 \end{array}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

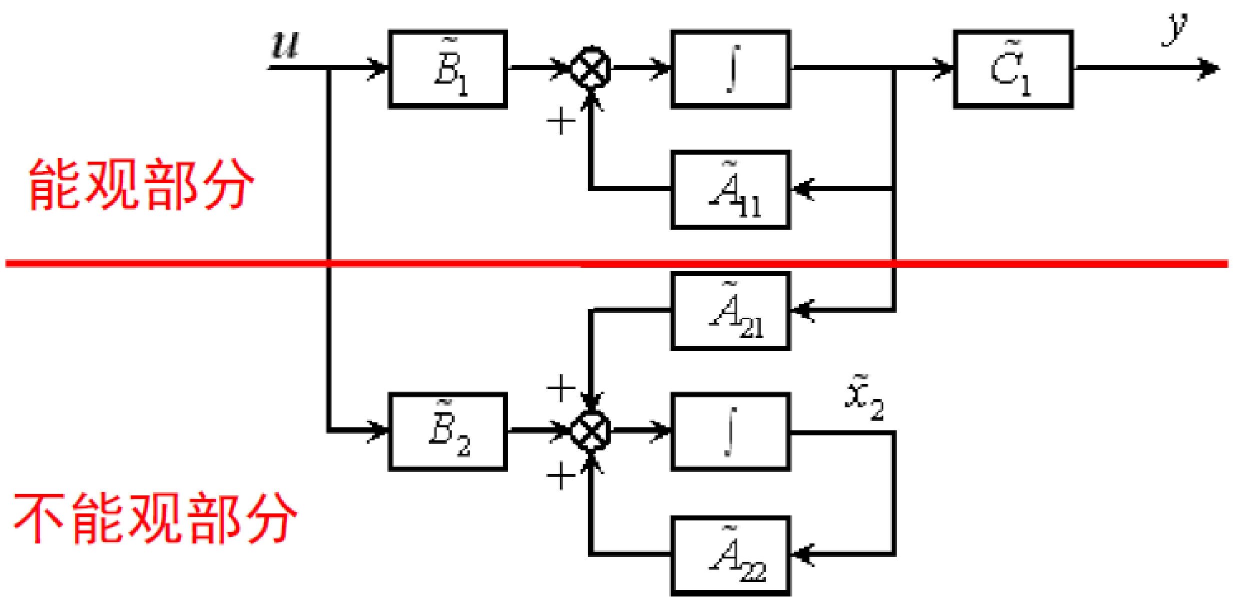
➢ 按能观性分解

- 能观状态变量组、能观子系统

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_o = \hat{\boldsymbol{A}}_{11}x_o + \hat{\boldsymbol{B}}_1 u \\ y_1 = y = \hat{\boldsymbol{C}}_1 x_o \end{cases}$$

- 不能观状态变量组、不能观子系统

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{\bar{o}} = \hat{\boldsymbol{A}}_{21}x_o + \hat{\boldsymbol{A}}_{22}x_{\bar{o}} + \hat{\boldsymbol{B}}_2 u \\ y_2 = 0 \end{cases}$$




- 传函关系

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 按能观性分解

### ❑ 坐标变换矩阵

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx \quad \xrightarrow{x = \boldsymbol{R}_o \hat{x}} \quad \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \qquad y = \hat{C}\hat{x}$$

$$\mathrm{rank}Q_o = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = n_1 < n$$

$$R_0^{-1} = \begin{bmatrix} R_1' \\ R_2' \\ \vdots \\ R_{n1}' \\ \vdots \\ R_n' \end{bmatrix}$$

- ✓ 能观性矩阵中选择n1个线性无关行向量，作为Ro的前n1行；
- ✓ 其余n-n1行，在保证Ro非奇异条件下，任意选

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 按能观性分解

### ❑ 例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}x$$

$$R_0^{-1}=\begin{bmatrix}R_1'\\ R_2'\\ \vdots\\ R_{n1}'\\ \vdots\\ R_n'\end{bmatrix}$$

✓ 能观性矩阵选n1个线性无关行，为Ro前n1行

✓ 其余n-n1行，在保证Ro非奇异，任意选

$$\operatorname{rank}Q_o=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\\ \boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 3\\ -2 & 3 & -4\end{bmatrix}=2<3=n$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 按能观性分解

❑ 例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&1&-2\end{bmatrix}x$$

$$R_0^{-1}=\begin{bmatrix}R_1'\\R_2'\\\vdots\\R_{n1}'\\\vdots\\R_n'\end{bmatrix}$$

✓ 能观性矩阵选n1个线性无关行，为Ro前n1行

✓ 其余n-n1行，在保证Ro非奇异，任意选

$$\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-2\\1&-2&3\\-2&3&-4\end{bmatrix}$$

$$R_1'=C=\begin{bmatrix}0&1&-2\end{bmatrix}$$

$$R_2'=CA=\begin{bmatrix}1&-2&3\end{bmatrix}$$

$$R_3'=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$$

得

$$R_0^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-2\\1&-2&3\\0&0&1\end{bmatrix},\quad R_0=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&0&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

➢ 按能观性分解

❑ 例

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x$$

$$R_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= R_o^{-1} A R_o \tilde{x} + R_o^{-1} b u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= C R_o \tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x_o + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_o \end{cases}$$

# 上次课回顾

- 对偶原理

# 上次课回顾

- 能控标准型、按能控性分解

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{\boldsymbol{A}}x + \bar{\boldsymbol{b}}u \\ y = \bar{\boldsymbol{c}}\bar{x} \end{cases}$$

# 上次课回顾

- 能观标准型、按能观性分解

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$\Rightarrow$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$
$$y = \hat{C}\hat{x}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## 按能控和能观性分解

- n维线性定常系统，若状态不完全能观且不完全能控，则可进行按能控能观性分解

$$\text{rank}Q_o = \text{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = n_1 < n$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$rankQ_c = rank[\boldsymbol{b} \;\; \boldsymbol{Ab} \;\; \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} \;\cdots\; \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] = n_1 < n$$

$$x = R\bar{x}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \bar{A}\boldsymbol{x} + \bar{B}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \bar{C}\boldsymbol{x}$$

$$x =$$

$$\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

➤ 按能控和能观性分解

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx \quad \xrightarrow{x = R\bar{x}} \quad \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \qquad y = \bar{C}\bar{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \\ \dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = R^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CR = [C_1, \quad 0, \quad C_3, \quad 0]$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

➤ 按能控和能观性分解

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx \xrightarrow{x = R\bar{x}} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \qquad y = \bar{C}\bar{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \\ \dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 按能控和能观性分解

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \\ \dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

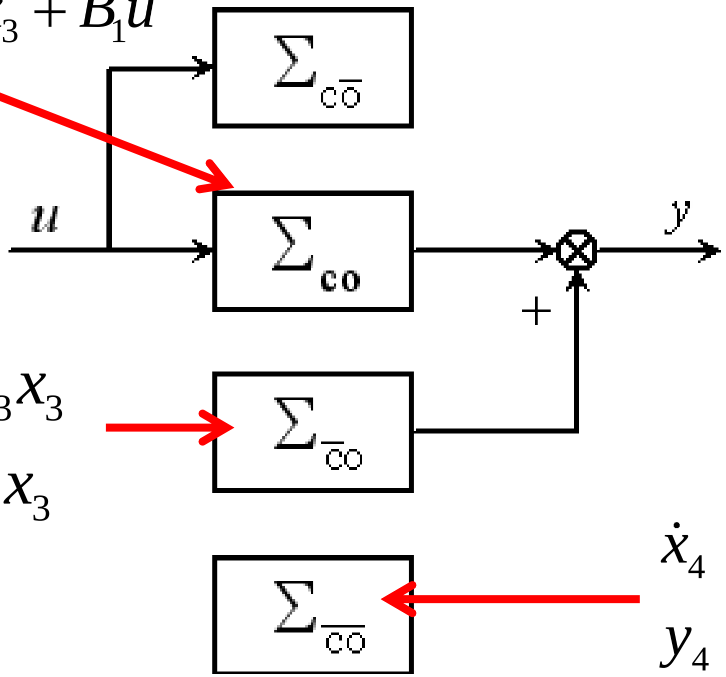
$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 + B_2 u$$

$$y_2 = 0$$

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{13}x_3 + B_1 u$$

$$y_1 = C_1 x_1$$




$$\dot{x}_3 = A_{33}x_3$$

$$y_3 = C_3 x_3$$

$$\dot{x}_4 = A_{43}x_3 + A_{44}x_4$$

$$y_4 = 0$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

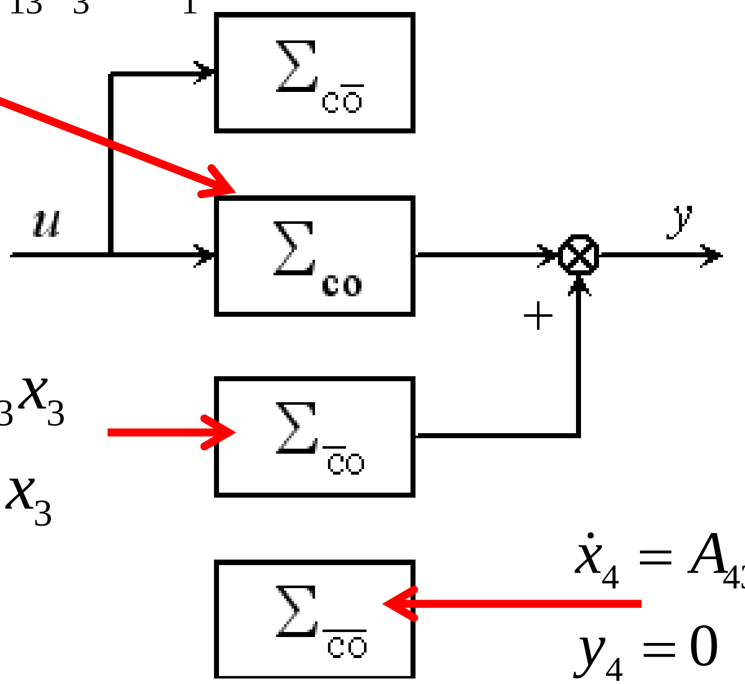
➢ 按能控和能观性分解

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 + B_2 u$$

$$y_2 = 0$$

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{13}x_3 + B_1 u$$

$$y_1 = C_1 x_1$$

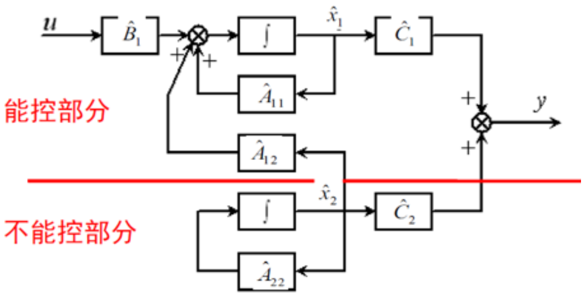


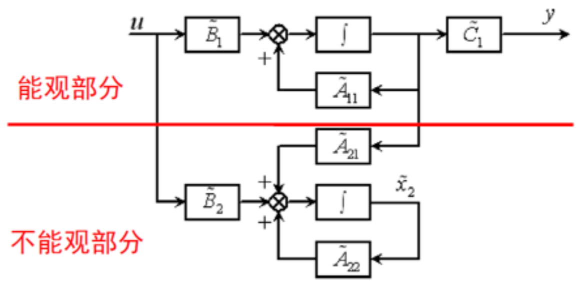

$$\dot{x}_3 = A_{33}x_3$$

$$y_3 = C_3 x_3$$

$$\dot{x}_4 = A_{43}x_3 + A_{44}x_4$$

$$y_4 = 0$$




❑ 传递函数

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{C}}_1(s\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{A}}_{11})^{-1}\hat{\boldsymbol{B}}_1$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 按能控和能观性分解方法

  - 约旦标准型

$$x$$

$$\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & & & \\ 0 & -4 & & & & \\ & & 3 & 1 & & \\ & & 0 & 3 & & \\ & & & & -1 & 1 \\ & & & & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4 \, x_5 \, x_6 \end{bmatrix}^T$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 按能控和能观性分解方法
  - 约旦标准型

$$x$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\overline{co}} \end{bmatrix} \qquad x_{co} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_{c\bar{o}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad x_{\bar{c}o} = x_4 \quad x_{\overline{co}} = x_6$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & & & \\ 0 & -4 & & & & \\ & & 3 & 1 & & \\ & & 0 & 3 & & \\ & & & & -1 & 1 \\ & & & & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} [x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6]^T$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

➤ 按能控和能观性分解方法

❑ 约旦标准型

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{co}\\ \dot{x}_{c\bar{o}}\\ \dot{x}_{\bar{c}o}\\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & 0 & A_{13} & 0\\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24}\\ 0 & 0 & A_{33} & 0\\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\\ x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}C_1 & 0 & C_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\\ x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{co}\\ \dot{x}_{c\bar{o}}\\ \dot{x}_{\bar{c}o}\\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1 & & & & \\ 0 & -4 & & & & \\ & & 3 & 0 & 1 & 0\\ & & 0 & -1 & 0 & 1\\ & & & & 3 & 0\\ & & & & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\\ x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\\ 4 & 3\\ 1 & 6\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\\ x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}$$

$$x_{co}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$x_{c\bar{o}}=\begin{bmatrix}x_3\\ x_5\end{bmatrix}$$

$$x_{\bar{c}o}=x_4$$

$$x_{\bar{c}\bar{o}}=x_6$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 按能控和能观性分解方法

  - 约旦标准型

$$x$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\overline{co}} \end{bmatrix}$$

$$x_{co} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_{c\bar{o}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$x_{\bar{c}o} = x_4$$

$$x_{\overline{co}} = x_6$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 按能控和能观性分解方法
  - 先能控分解再能观分析

$$x \longrightarrow \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 按能控和能观性分解方法

### ❑ 先能控分解再能观分析

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$x = \boldsymbol{R}_c \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_c^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_c \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{R}_c^{-1}\boldsymbol{B}u \\ \qquad = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ 0 & \boldsymbol{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{B}} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_c \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_c (\boldsymbol{A}_1, \hat{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{C}_1): \begin{cases} \dot{x}_c = \boldsymbol{A}_1 x_c + \boldsymbol{A}_2 x_{\bar{c}} + \hat{\boldsymbol{B}}u \\ y_1 = \boldsymbol{C}_1 x_c \end{cases} \\ \sum_{\bar{c}} (\boldsymbol{A}_4, 0, \boldsymbol{C}_2): \begin{cases} \dot{x}_{\bar{c}} = \hat{\boldsymbol{A}}_4 x_{\bar{c}} \\ y_2 = \hat{\boldsymbol{C}}_2 x_{\bar{c}} \end{cases} \end{cases}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## 按能控和能观性分解方法

### 先能控分解再能观分析

$$\sum\nolimits_{\bar{c}}(\boldsymbol{A}_4, 0, \boldsymbol{C}_2):\begin{cases}\dot{x}_{\bar{c}} = \hat{\boldsymbol{A}}_4 x_{\bar{c}} \\ y_2 = \hat{\boldsymbol{C}}_2 x_{\bar{c}}\end{cases} \quad \xRightarrow{x_{\bar{c}} = \boldsymbol{R}_{o2}\begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\overline{co}} \end{bmatrix}} \quad \begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\overline{co}}\end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_{o2}^{-1}\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{R}_{o2}\begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\overline{co}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}_{33} & 0 \\ \hat{\boldsymbol{A}}_{43} & \hat{\boldsymbol{A}}_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\overline{co}} \end{bmatrix} \\ y_2 = \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{R}_{o2} = \begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{C}}_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\overline{co}} \end{bmatrix}\end{cases}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 按能控和能观性分解方法

  - 先能控分解再能观分析

$$x_{\bar{c}} = R_{o2}\begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$\sum\nolimits_c(A_1,\hat{B},C_1):\begin{cases}\dot{x}_c = A_1 x_c + A_2 x_{\bar{c}} + \hat{B}u \\ y_1 = C_1 x_c\end{cases}$$

$$x_c = R_{o1}\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}}\end{bmatrix} = P_{o1}^{-1}A_1P_{o1}\begin{bmatrix}x_{co} \\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix} + P_{o1}^{-1}A_2P_{o2}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix} + P_{o1}^{-1}\hat{B}u \\ \qquad = \begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co} \\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\hat{A}_{13} & 0 \\ \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\hat{B}_1 \\ \hat{B}_2\end{bmatrix}u \\ y = C_1P_{o1}\begin{bmatrix}x_{co} \\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{C}_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co} \\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}\end{cases}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 按能控和能观性分解方法

  - 先能控分解再能观分析

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_{\bar{c}o}\\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}_{o2}^{-1}\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{R}_{o2}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}_{33} & 0\\ \hat{\boldsymbol{A}}_{43} & \hat{\boldsymbol{A}}_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}\\ y_2=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{R}_{o2}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{C}}_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\dot{x}=Ax+Bu$$
$$y=Cx$$

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_{co}\\ \dot{x}_{c\bar{o}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}_{o1}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}_{o1}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}+\boldsymbol{P}_{o1}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}_{o2}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}+\boldsymbol{P}_{o1}^{-1}\hat{\boldsymbol{B}}u\\ \qquad=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}_{11} & 0\\ \hat{\boldsymbol{A}}_{21} & \hat{\boldsymbol{A}}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}_{13} & 0\\ \hat{\boldsymbol{A}}_{23} & \hat{\boldsymbol{A}}_{24}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{B}}_1\\ \hat{\boldsymbol{B}}_2\end{bmatrix}u\\ y=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{P}_{o1}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{C}}_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}\end{cases}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## 按能控和能观性分解方法

- 例

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

➢ 按能控和能观性分解方法

❑ 例

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$$M = [b, \quad Ab, \quad A^2 b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 按能控和能观性分解方法

❑ 例

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}0&1&-2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$M=[b,\quad Ab,\quad A^2b]=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&-3\\0&1&-2\end{bmatrix}$$

$$R_1=b=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad R_2=Ab=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad R_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## 按能控和能观性分解方法

- 例

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$M=[b,\quad Ab,\quad A^2b]=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$R_1=b=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad R_2=Ab=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad R_3=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{R}_c=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 按能控和能观性分解方法

❑ 例

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}0&1&-2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$M=[b,\quad Ab,\quad A^2b]=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&-3\\0&1&-2\end{bmatrix}$$

$$R_1=b=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad R_2=Ab=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad R_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{R}_c=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}}$$

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\1&-2&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=CR_c\hat{x}=\begin{bmatrix}1&-1&-2\end{bmatrix}\hat{x}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

➢ 按能控和能观性分解方法

❑ 例

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}0&1&-2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$M=[b,\quad Ab,\quad A^2b]=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&-3\\0&1&-2\end{bmatrix}$$

$$R_1=b=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad R_2=Ab=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad R_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{R}_c=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}}$$

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_c(t)\\ \dot{x}_{\bar{c}}(t)\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}0&-1&-1\\1&-2&-2\\ \hdashline 0&0&-1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_c(t)\\ x_{\bar{c}}(t)\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}1\\0\\ \hdashline 0\end{array}\right]u(t)\\ y(t)=\left[\begin{array}{cc:c}1&-1&-2\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_c(t)\\ x_{\bar{c}}(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

## ➢ 按能控和能观性分解方法

❑ 例

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_c=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}x_c+\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}x_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u\\ y_1=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x_c\end{cases}$$

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_c(t)\\ \dot{x}_{\bar{c}}(t)\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -2\\ \hdashline 0 & 0 & -1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_c(t)\\ x_{\bar{c}}(t)\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}1\\0\\ \hdashline 0\end{array}\right]u(t)\\ y(t)=\left[\begin{array}{cc:c}1 & -1 & -2\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_c(t)\\ x_{\bar{c}}(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

➢ 按能控和能观性分解方法

❑ 例

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_c=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}x_c+\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix}x_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u\\ y_1=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x_c\end{cases}$$

$$N=\begin{bmatrix}C_1\\ C_1A_{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$R_0^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad R_0=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

➢ 按能控和能观性分解方法

❑ 例
$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}0&1&-2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$\dot{x}_c=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-2\end{bmatrix}x_c+\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}\dot{x}_c+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$

$$y_1=\begin{bmatrix}1&-1\end{bmatrix}x_c$$

$$R_0^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix},\quad R_0=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{co}\\ \dot{x}_{c\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}x_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}x_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{co}\\ \dot{x}_{c\bar{o}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}_{o1}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}_{o1}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}+\boldsymbol{P}_{o1}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}_{o2}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}+\boldsymbol{P}_{o1}^{-1}\hat{\boldsymbol{B}}u$$

$$y_1=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}$$

$$y=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{P}_{o1}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}$$

# 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 按能控和能观性分解方法

  - 例 $\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{co}\\ \dot{x}_{c\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}x_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{co}\\ \dot{x}_{c\bar{o}}\\ \dot{x}_{\bar{c}o}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\\ x_{\bar{c}o}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\\ x_{\bar{c}o}\end{bmatrix}$$

# 线性控制系统的能控性和能观性

# 传递函数矩阵的实现问题

- 实现与最小实现
  - 为什么要讨论实现，最小实现
  - SISO系统实现推广到MIMO
  - 最小实现的步骤

# 传递函数矩阵的实现问题

## ➢ 实现的基本概念

- 对于给定传递函数W(s)，若存在一个状态空间表达式

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

使 $C(sI-A)^{-1}B + D = W(s)$ 成立，则该状态空间表达式为其一个实现。

- 可实现条件

$$\boldsymbol{W}(s) = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1r}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \cdots & W_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{m1}(s) & W_{m2}(s) & \cdots & W_{mr}(s) \end{pmatrix} = \frac{\boldsymbol{\beta}_m s^m + \boldsymbol{\beta}_{n-2} s^m + \cdots + \boldsymbol{\beta}_1 s + \boldsymbol{\beta}_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- 实现非唯一

# 传递函数矩阵的实现问题

## ➢ 能控/能观标准型实现

### ❑ 能控标准型

$$W(s)=\frac{\beta_m s^m+\beta_{n-2}s^m+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$A_c=\begin{bmatrix} 0_r & I_r & 0_r & \cdots & 0_r \\ 0_r & 0_r & I_r & \cdots & 0_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_r & 0_r & 0_r & \cdots & I_r \\ -a_0 I_r & -a_1 I_r & -a_2 I_r & \cdots & -a_{n-1} I_r \end{bmatrix}$$

$$B_c=\begin{bmatrix} 0_r \\ 0_r \\ \vdots \\ 0_r \\ I_r \end{bmatrix}$$

$$C_c=[\beta_0,\quad \beta_1,\quad \cdots,\quad \beta_{n-1}]$$

# 传递函数矩阵的实现问题

## ➢ 能控/能观标准型实现

❑ 能观标准型 $$W(s)=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

$$A_0=\begin{bmatrix}0_m & 0_m & \cdots & 0_m & -a_0 I_m\\ I_m & 0_m & \cdots & 0_m & -a_1 I_m\\ 0_m & I_m & \cdots & 0_m & -a_2 I_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0_m & 0_m & \cdots & I_m & -a_{n-1} I_m\end{bmatrix}$$

$$B_0=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$C_c=[0_m,\quad 0_m,\quad \cdots,\quad 0_m,\quad I_m]$$

# 传递函数矩阵的实现问题

- 能控/能观标准型实现

  - 例

$$W(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{s+1} & \dfrac{1}{s+3}\\[2mm] \dfrac{s}{s+1} & \dfrac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}$$

# 传递函数矩阵的实现问题

## ➢ 能控/能观标准型实现

$$W(s)=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

❑ 例

$$W(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{s+1} & \dfrac{1}{s+3}\\ \dfrac{s}{s+1} & \dfrac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+3}\\ -\dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix}s^2+5s+6 & s^2+3s+2\\ -(s^2+5s+6) & -(s^2+4s+3)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{\boxed{\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}}s^2+\boxed{\begin{bmatrix}5 & 3\\ -5 & -4\end{bmatrix}}s+\boxed{\begin{bmatrix}6 & 2\\ -6 & -3\end{bmatrix}}\right\}$$

$$a_0=6,\quad a_1=11,\quad a_2=6$$

$$\beta_0=\begin{bmatrix}6 & 2\\ -6 & -3\end{bmatrix},\quad \beta_1=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -5 & -4\end{bmatrix},\quad \beta_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

# 传递函数矩阵的实现问题

- 能控/能观标准型实现
  - 例

$$W(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{s+1} & \dfrac{1}{s+3}\\[2mm] \dfrac{s}{s+1} & \dfrac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$a_0=6,\quad a_1=11,\quad a_2=6$$

$$\beta_0=\begin{bmatrix}6 & 2\\ -6 & -3\end{bmatrix},\quad \beta_1=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -5 & -4\end{bmatrix}$$

$$\beta_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$A_c=\begin{bmatrix}0_r & I_r & 0_r\\ 0_r & 0_r & I_r\\ -a_0I_r & -a_1I_r & -a_2I_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\-6&0&-11&0&-6&0\\0&-6&0&-11&0&-6\end{bmatrix}$$

$$B_c=\begin{bmatrix}0_r\\0_r\\I_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$C_c=[\beta_0,\quad \beta_1,\quad \beta_2]=\begin{bmatrix}6&2&5&3&1&1\\-6&-3&-5&-4&-1&-1\end{bmatrix}$$

# 传递函数矩阵的实现问题

- 能控/能观标准型实现

  - 例

$$W(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{s+1} & \dfrac{1}{s+3}\\ \dfrac{s}{s+1} & \dfrac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$a_0=6,\quad a_1=11,\quad a_2=6$$

$$\beta_0=\begin{bmatrix}6 & 2\\ -6 & -3\end{bmatrix},\quad \beta_1=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -5 & -4\end{bmatrix}$$

$$\beta_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$A_0=\begin{bmatrix}0_m & 0_m & -a_0I_m\\ I_m & 0_m & -a_1I_m\\ 0_m & I_m & -a_2I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&-6&0\\0&0&0&0&0&-6\\1&0&0&0&-11&0\\0&1&0&0&0&-11\\0&0&1&0&-6&0\\0&0&0&1&0&-6\end{bmatrix}$$

$$B_0=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2\\-6&-3\\5&3\\-5&-4\\1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

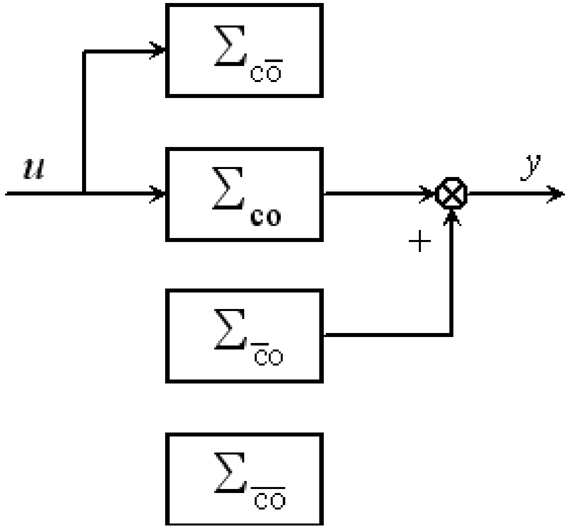
$$C_0=[0_m,\quad 0_m,\quad I_m]=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

# 传递函数矩阵的实现问题

- 最小实现
  - 传递函数W(s)的一个实现为 $\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu\\ y&=Cx\end{aligned}$ ，若其不存在其它实现 $\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}&=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{B}u\\ y&=\tilde{C}\tilde{x}\end{aligned}$ 使维数小于x的维数，则（A,B,C）为最小实现。

✓ 实现非唯一、最小最好

✓ 能控能观、最小实现

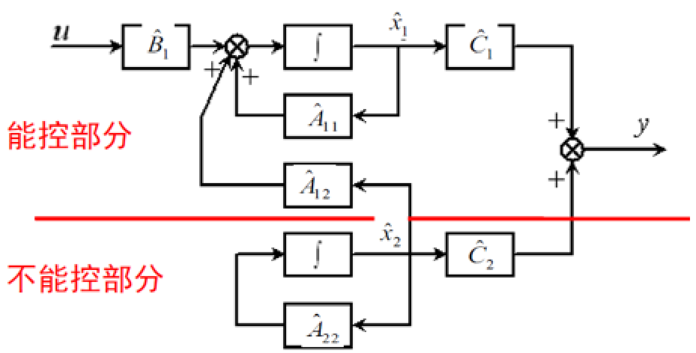


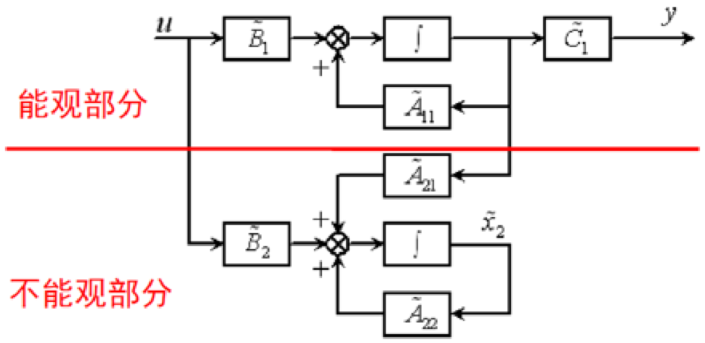
# 传递函数矩阵的实现问题

- 最小实现
  - 由上述分析可知，对应于一个传递函数阵（传递函数）$W(s)$的实现不是唯一的，而且实现的阶数上也有很大的差别。
  - 一般总希望实现的阶次越低越好，但是，阶数显然是不能无限的降低。
  - 因此，在很多可能实现中，总会存在一个状态变量个数最小或阶数最低的实现，这就是最小实现。
  - 事实上，最小实现反映了系统最简单的结构，因此最具有工程意义。如用模拟计算机来实现，则所用的积分器的数目是最少的
  - 对于给定的传递函数阵$W(s)$，虽然其最小实现也不是唯一的，但是，它们的维数是相同的，而且必是代数等价的。

# 传递函数矩阵的实现问题

- 最小实现



# 传递函数矩阵的实现问题

## ➢ 最小实现

**最小实现的步骤**

1)对给定传递函数阵$W(s)$，先初选出一种实现$\Sigma(A,B,C)$，通常最方便的是选取能控标准型实现或能观标准型实现。

2)对上面初选的实现$\Sigma(A,B,C)$，找出其完全能控且完全能观部分$(\tilde{A}_1,\tilde{B}_1,\tilde{C}_1)$，于是这个能控能观部分就是$W(s)$的最小实现。

# 线性控制系统的能控性和能观性

# 传递函数中零极点对消与状态能控性和能观性之间关系

- SISO系统

- MIMO系统

# 本章小结

## 概述：本章要讨论的问题

- 能控性与能观性：WHAT?
  - 连续（离散）定常（时变）系统：含义、定义
- 能控性与能观性：HOW?
  - 连续（离散）定常（时变）系统：如何判断（秩判据、标准型判据、格拉姆矩阵）
- 能控性与能观性：对偶关系
  - 对偶系统满足什么条件；对偶系统具有什么联系
- 状态空间表达式的能控/能观标准型与结构分解
  - 规范化：4类标准型、3种结构分解
- 能控/能观性与传函关系
  - 实现问题、零极点对消

# 本章小结

- 能控性、能观性：含义及其对偶关系

# 本章小结

- 能控性与能观性：判据

# 本章小结

- 系统变换：能控/观标准型、结构分解、

# 本章小结

- 实现、最小实现