بسم الله الرحمن الرحیم

پردازش سیگنال های گسسته در زمان

دکتر آرش امینی

امیرحسین رستمی 96101635

گزارش پروژه درس

تابستان 99

سوال اول:(فیلتر بانک ها)

قسمت اول:

DownSampling :

$$X_1(z) = \frac{1}{2}\left[H_0(z^{1/2})X(z^{1/2}) + H_0(-z^{1/2})X(-z^{1/2})\right]$$

$$X_2(z) = \frac{1}{2}\left[H_1(z^{1/2})X(z^{1/2}) + H_1(z^{1/2})X(z^{1/2})\right]$$

حال با توجه به اینکه $Y_1 = X_1$ ، $Y_2 = X_2$ و جایگذاری z^2 به جای z داریم :

$$Y_1(z^2) = \frac{1}{2}\left[H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)\right] \qquad (1)$$

$$Y_2(z^2) = \frac{1}{2}\left[H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)\right] \qquad (2)$$

حال پس از UpSampling ، پس عبور از Synthesis filter Bank و جمع شدن دو سیگنال خواهیم داشت :

$$Y(z) = Y_1(z^2)G_0(z) + Y_2(z^2)G_1(z)$$

حال روابط (1) و (2) را در عبارت بالا جایگذاری می‌کنیم :

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{2}\left[H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)\right]X(z) \\ &+ \frac{1}{2}\left[H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(-z)\right]X(-z) \end{aligned} \qquad (3)$$

حال برای اینکه سیستم بدون aliasing باشد ، باید به فرم یک تاخیر ساده و یک بهره باشد. ($Y(z) = gz^{-d}X(z)$)

برای این منظور باید در رابطه‌ی (3) ضریب $X(-z)$ صفر باشد و ضریب $X(z)$ برابر با gz^{-d} باشد .

بنابراین شروط لازم و کافی برای عدم اعوجاج به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\begin{cases} H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z) = gz^{-d} \\ H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z) = 0 \end{cases}$$

قسمت دوم:

در قسمت قبل شروط لازم و کافی برای اینکه سیستم بدون اعوجاج باشد را به دست آوردیم. حال کافی است نشان دهیم، با انتخاب $H_0(z)$ ، $H_1(z)$ ، $G_0(z)$ ، $G_1(z)$ به صورت گفته شده، شرایط مذکور برقرار می‌شوند.

$$\begin{cases} G_0(z) = H_1(-z) \\ G_1(z) = -H_0(-z) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z) = H_0(-z)H_1(-z) + H_1(-z)(-H_0(-z)) = 0 \checkmark$$

بنابراین با شرایط گفته شده، شرط دوم برای زدودن aliasing، برقرار می‌شود.

قسمت سوم:

حال شرایط گفته شده در قسمت قبل را در شرط کافی مربوط به اعوجاج جایگذاری می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z) = gz^{-d} \\ G_0(z) = H_1(-z) \qquad G_1(z) = -H_0(-z) \\ H_1(z) = H_0(-z) \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow H_0(z)H_1(-z) + H_1(z)(-H_0(-z)) = gz^{-d}$$

$$\Longrightarrow H_0^2(z) - H_0^2(-z) = gz^{-d}$$

حال در عبارت به دست آمده، $H_0(z) = c_0 z^{-2n_0} + c_1 z^{-2n_1+1}$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$H_0(z^2) - H_0(-z^2) = (H_0(z) + H_0(-z))(H_0(z) - H_0(-z))$$

$$= \left((c_0 z^{-2n_0} + c_1 z^{-2n_1+1}) + (\underbrace{c_0(-z)^{-2n_0}}_{c_0 z^{-2n_0}} + \underbrace{c_1(-z)^{-2n_1+1}}_{-c_1 z^{-2n_1+1}}) \right)$$

$$\times$$

$$\left((c_0 z^{-2n_0} + c_1 z^{-2n_1+1}) - (c_0(-z)^{-2n_0} + c_1(-z)^{-2n_1+1}) \right)$$

$$= 2c_0 z^{-2n_0} \times 2c_1 z^{-2n_1+1} = 4c_0c_1 z^{-2n_0-2n_1+1} = gz^{-d} \qquad \begin{cases} g = 4c_0c_1 \\ d = 2n_0 + 2n_1 - 1 \end{cases}$$

قسمت چهارم:

توجه:در رابطه $H(z)$ از w استفاده شده است تا حقیقی بودن قسمت به دست آمده در سیگما به عینه مشاهده شود(z همان e^{jw} است.

می‌دانیم که فیلترهای FIR با فاز خطی، 4 حالت ممکن دارند:

نوع I:

$$\left.\begin{aligned} H_0(z) &= \sum_{n=0}^{M} h_0[n]\, z^{-n} \\ H_0(z) &= \sum_{n=0}^{M} h_0[n]\, z^{-(M-n)} \end{aligned}\right\} \longrightarrow H_0(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M} h_0[n]\left(z^{-n} + z^{-(M-n)}\right)$$

(تقارن)

$$\longrightarrow H_0(z) = z^{-M/2} \sum_{n=0}^{M} h_0[n] \cos\left(\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)\right)$$

به طور مشابه: $H_0(-z) = (-z)^{M/2} \sum_{n=0}^{M} h_0[n] \cos\left(\left(\frac{M}{2}-n\right)(\omega-\pi)\right)$

حال $H_0(z)$ و $H_0(-z)$ را در رابطه‌ی بدست آمده در قسمت قبل جایگذاری می‌کنیم:

$$H_0^2(z) - H_0^2(-z)$$

$$= \frac{1}{2} z^{-M} \left(\left(\sum_{n=0}^{M} h_0[n] \cos\left(\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)\right)\right)^2 - (-1)^M \left(\sum_{n=0}^{M} h_0[n] \cos\left(\left(\frac{M}{2}-n\right)(\omega-\pi)\right)\right)^2 \right)$$

$$\xrightarrow[\text{زوج است } M]{\text{با توجه به اینکه}} = \frac{1}{2} z^{-M} \left(\left(\sum_{n=0}^{M} h_0[n] \cos\left(\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)\right)\right)^2 - \left(\sum_{n=0}^{M} h_0[n] \cos\left(\left(\frac{M}{2}-n\right)(\omega-\pi)\right)\right)^2 \right)$$

$(-1)^M = 1$

فاز خطی ⟵ حقیقی ⟶

FIR با فاز خطی

نوع II: در نوع 2 محاسبات دقیقاً مشابه بالا طی می‌شود و فقط در انتها به علت فرد بودن M تغییر کوچکی در خروجی بدست می‌آید:

$$\frac{1}{2} z^{-M} \left(\left(\sum_{n=0} h_0[n] \cos\left(\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)\right)\right)^2 + \left(\sum_{n=0} h_0[n] \cos\left(\left(\frac{M}{2}-n\right)(\omega-\pi)\right)\right)^2 \right)$$

فاز خطی ⟵ حقیقی ⟶

FIR با فاز خطی

ادامه در صفحه بعد.

نوع III : در این حالت در اردای محاسبات ، تقارن فرد باعث می‌شود از روابط زیر شروع کنیم :

$$H_0(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n] z^{-n}$$

$$H_0(z) = \sum_{n=0}^{M} -h[n] z^{-(M-n)} \quad (\text{تقارن})$$

$$\longrightarrow H_0(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{M} h[n] \left(z^{-n} - z^{-(M-n)}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{نوع I}]{\text{مشابه روند حالت}} H_0(z) = j z^{-\frac{M}{2}} \underbrace{\sum_{n=0}^{M} h_0[n] \sin\left(\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)\right)}_{A(\omega)}$$

$$\xrightarrow{\text{به طور مشابه}} H_0(-z) = j(-z)^{\frac{M}{2}} \underbrace{\sum_{n=0}^{M} h_0[n] \sin\left(\left(n-\frac{M}{2}\right)(\omega-\pi)\right)}_{B(\omega)}$$

$$\xrightarrow[\text{و اینکه } (-1)^M = 1 \text{ زوج } M]{\text{مشابه قسمت قبل}} H_0^2(z) - H_0^2(-z) = \frac{1}{2} z^{-M} \underbrace{\left(-A^2(\omega) + B^2(\omega)\right)}_{\text{حقیقی}} \longrightarrow \text{FIR با فاز خطی}$$

$\text{فاز خطی} \longleftarrow \text{حقیقی}$

نوع IV : مشابه نوع III با این تفاوت M فرد است : ($(-1)^M = -1$)

$$\longrightarrow H_0^2(z) - H_0^2(-z) = \frac{1}{2} z^{-M} \underbrace{\left(-A^2(\omega) - B^2(\omega)\right)}_{\text{حقیقی}} \longrightarrow \text{FIR با فاز خطی}$$

$\text{فاز خطی} \longleftarrow \text{حقیقی}$

به این علت نمی‌توان از فیلترهای با تقارن فرد استفاده کرد که روی $H_0(z)$ شرط پایین گذر بودن اعمال شده است .

یک فیلتر با تقارن فرد نمی‌تواند یک فیلتر پایین گذر باشد . بنابراین برای طراحی $H_0(z)$ باید از یک فیلتر با تقارن زوج استفاده کنیم .

قسمت پنجم:

توجه:در رابطه $H(z)$ از w استفاده شده است تا جایگذاری w = pi/2 تسهیل گردد.(z همان e^{jw} است).

در فیلتر نوع I بدلت آورده بودیم :

$$H(z) = H_0(z) - H_0^2(-z) = \frac{1}{2} z^{-M} \left(\left(\sum_{n=0}^{M} h_0[n] \cos\left(\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)\right)\right)^2 - \left(\sum_{n=0}^{M} h_0[n] \cos\left(\left(\frac{M}{2}-n\right)(\omega-\pi)\right)\right)^2 \right) \qquad (1)$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} : \quad \cos\left(\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)\right) = \cos\left(\left(\frac{M}{2}-n\right)(\omega-\pi)\right) \qquad (2)$$

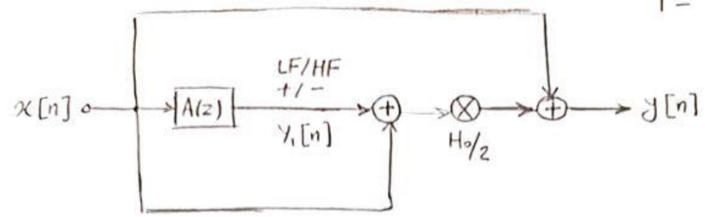
$\xrightarrow{(1),(2)}$ در فرکانس $\frac{\pi}{2}$: $H(e^{j\omega}) = 0$

بنابراین در فرکانس $\omega = \frac{\pi}{2}$ ، تابع تبدیل صفر میشود که این اعوجاج شدیدی را در این فرکانس نشان می‌دهد. بنابراین نمی‌توانیم از فیلتر نوع I بهره ببریم.

سوال دوم:(طراحی فیلترها)

قسمت اول:

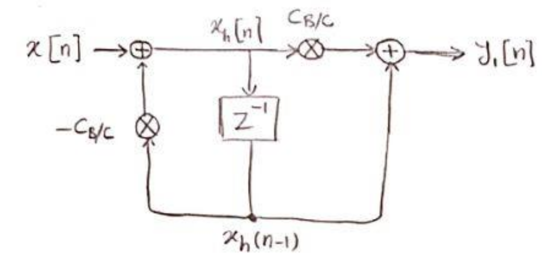
ابتدا مشخصه کلی فیلتر را بدست می آوریم :



$$Y_1(z) = \pm X(z)A(z)$$

$$Y(z) = X(z) + \big(X(z) + Y_1(z)\big) \times \frac{H_0}{2} = X(z) + \big(X(z) \pm X(z)A(z)\big) \times \frac{H_0}{2}$$

$$\longrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + \frac{H_0}{2}(1 \pm A(z)) \quad (1)$$



$$X_h(z) = X(z) - C_{B/C} z^{-1} X_h(z) \longrightarrow X_h(z) = \frac{X(z)}{1 + C_{B/C} z^{-1}}$$

$$Y_1(z) = C_{B/C} X_h(z) + z^{-1} X_h(z) = (C_{B/C} + z^{-1}) \frac{X(z)}{1 + C_{B/C} z^{-1}}$$

$$\longrightarrow A(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)} = \frac{C_{B/C} + z^{-1}}{1 + C_{B/C} z^{-1}} \quad (2)$$

$$\xRightarrow{\text{طبق } (1), (2)} H(z) = 1 + \frac{H_0}{2}\left(1 + \frac{\pm (C_{B/C} + z^{-1})}{1 + C_{B/C} z^{-1}}\right)$$

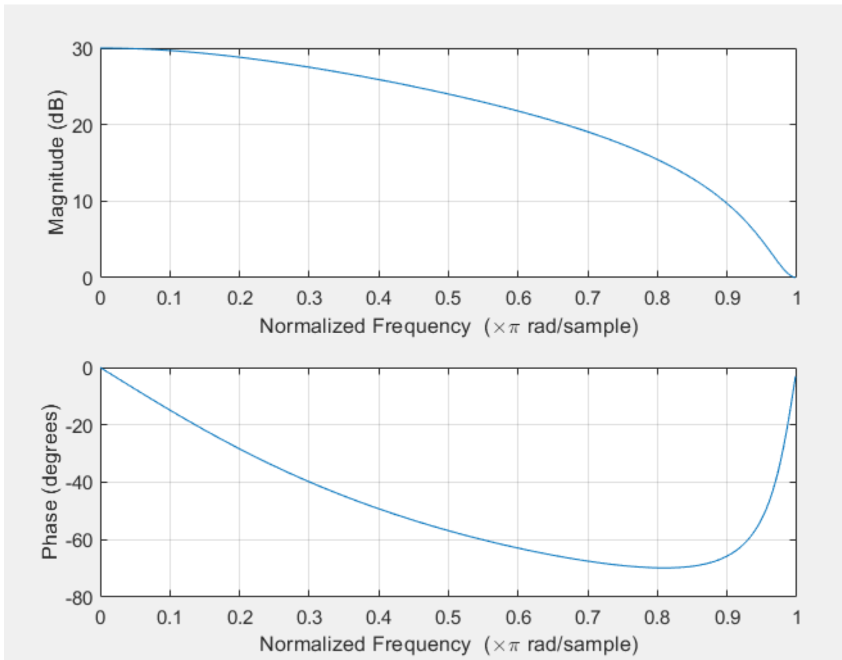
$$\longrightarrow H(z) = \frac{1 + C_{B/C} z^{-1} + \frac{H_0}{2} + \frac{H_0}{2} C_{B/C} z^{-1} \pm \frac{H_0}{2} C_{B/C} \pm \frac{H_0}{2} z^{-1}}{1 + C_{B/C} z^{-1}}$$

$$\longrightarrow H(z) = \frac{\left(1 + \frac{H_0}{2} \pm \frac{H_0}{2} C_{B/C}\right) + \left(C_{B/C} + \frac{H_0}{2} C_{B/C} \pm \frac{H_0}{2} z^{-1}\right)}{1 + C_{B/C} z^{-1}}$$

خروجی:

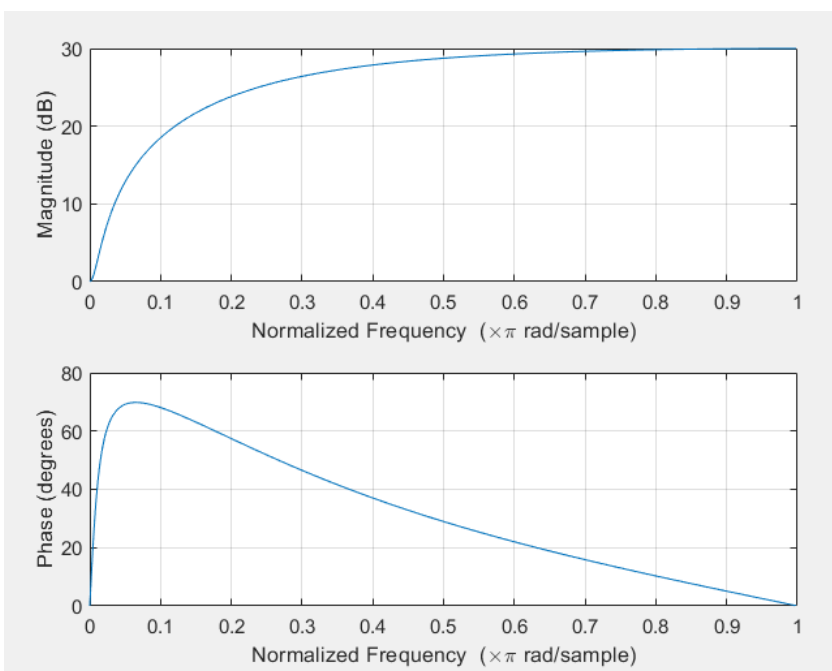
تست پایین گذر به ازای متغیر های زیر:

```
[b, a]  = LOW_HIGH_filt(15, 2500, 15000, 3, 'LOW_f');
freqz(b,a)
```



تست بالاگذر به ازای متغیر های زیر:

```
[b, a]  = LOW_HIGH_filt(15, 2500, 15000, 3, 'HIGH_f');
freqz(b,a)
```



قسمت دوم:

ابتدا تابع تبدیل فیلتر را بدست می آوریم :

تنها جای بلوک $A_1(z)$ ، بلوک $A_2(z)$ جایگزین شده است . بنابراین می توانیم بنویسیم :

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=1+\frac{H_0}{2}\left(1+A_2(z)\right)$$

تابع تبدیل بلوک $A_2(z)$ نیز به صورت زیر می باشد : (به فرم DF II)

$$A_2(z)=\frac{C_{B/C}-d(1-C_{B/C})z^{-1}+z^{-2}}{1+d(1-C_{B/C})z^{-1}-C_{B/C}z^{-2}}$$

حال با جایگذاری $H(z)$ را محاسبه می کنیم :

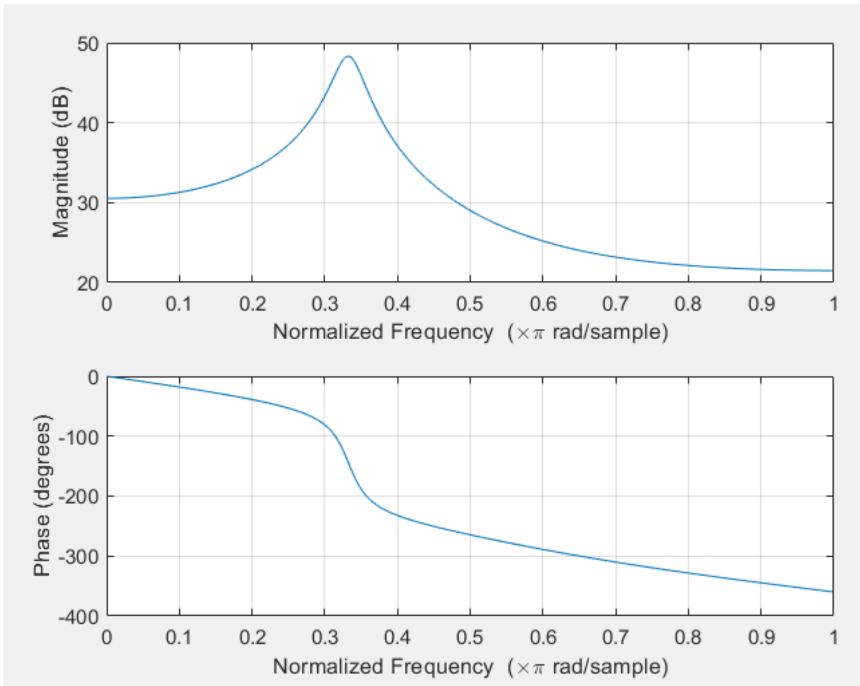
$$1+\frac{H_0}{2}\left(1+\frac{C_{B/C}-d(1-C_{B/C})z^{-1}+z^{-2}}{1+d(1-C_{B/C})z^{-1}-C_{B/C}z^{-2}}\right)$$

$$=\frac{(1+d(1-C_{B/C})z^{-1}-C_{B/C}z^{-2})(1+\frac{H_0}{2})+(C_{B/C}-d(1-C_{B/C})z^{-1}+z^{-2})\frac{H_0}{2}}{1+d(1-C_{B/C})z^{-1}-C_{B/C}z^{-2}}$$

$$\Longrightarrow H(z)=\frac{(1+\frac{H_0}{2}+C_{B/C}\frac{H_0}{2})+(d(1-C_{B/C})(1+\frac{H_0}{2})-d(1-C_{B/C})\times\frac{H_0}{2})z^{-1}+(-C_{B/C}(1+\frac{H_0}{2})+\frac{H_0}{2})z^{-2}}{1+d(1-C_{B/C})z^{-1}-C_{B/C}z^{-2}}$$

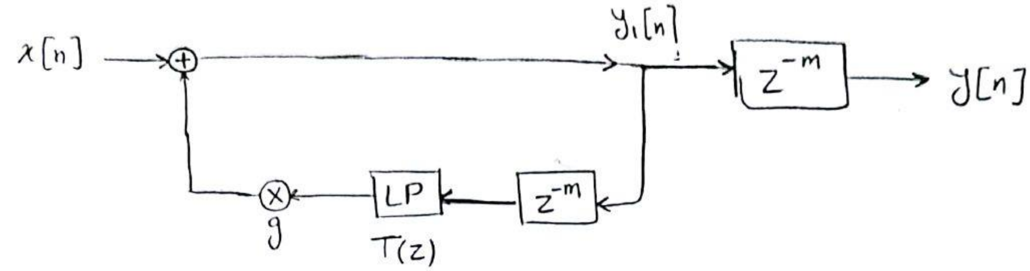
تست میانگذر به ازای متغیر های زیر:

```
[b, a]  = BAND_filt(15, 2500, 8, 15000)
freqz(b,a)
```



سوال سوم: (اضافه کردن Effect های صدا)

ابتدا یک توضیح کلی راجع به بخش های موازی می دهم و تابع تبدیل آن هارا محاسبه می کنم:



$$X(z) + gT(z)z^{-m}Y_1(z) = Y_1(z) \longrightarrow Y_1(z)\left(1-gT(z)z^{-m}\right) = X(z)$$

$$Y(z) = Y_1(z)z^{-m} = z^{-m}\frac{X(z)}{1-gT(z)z^{-m}} = \left(\frac{z^{-m}}{1-gT(z)z^{-m}}\right)X(z)$$

$$\Longrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-m}}{1-gT(z)z^{-m}}$$

طبق تعریف سوال : $T(z) = \frac{1-g_1}{1-g_1 z^{-1}}$

$$\Longrightarrow H(z) = \frac{z^{-m}}{1-g\frac{1-g_1}{1-g_1z^{-1}}z^{-m}} = \frac{z^{-m}(1-g_1z^{-1})}{1-g_1z^{-1}-g(1-g_1)z^{-m}}$$

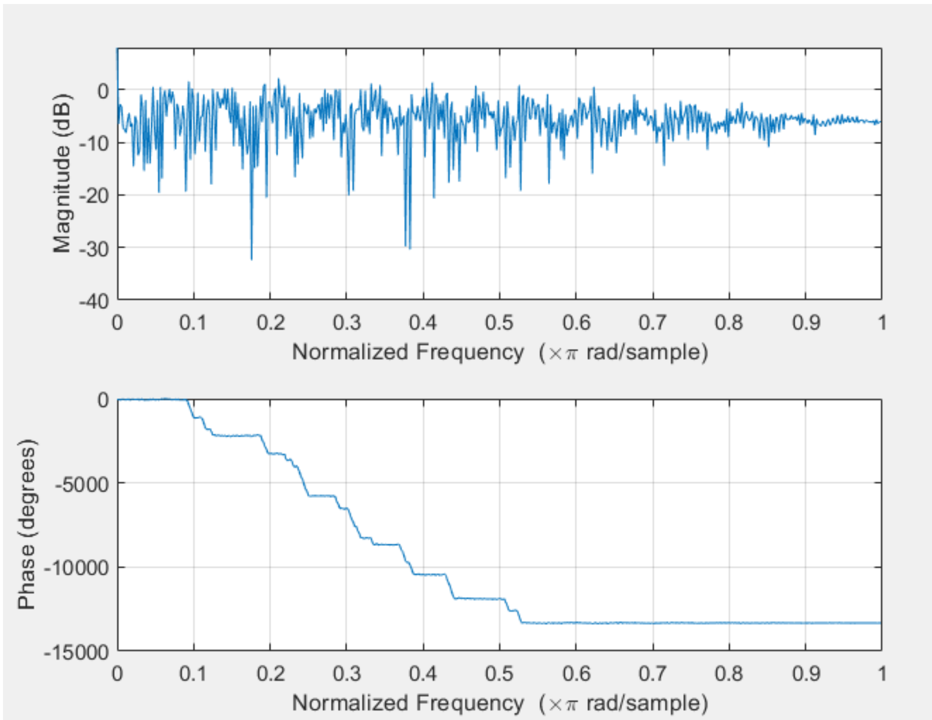
بنابراین effect لرزش صدا دارای تابع تبدیل بالا می باشد.

حال به کمک توضیحات صورت پروژه به تکمیل ساختار specificDesign می پردازیم و در ادامه خروجی یک نمونه تست آن را قرار می دهیم.

یک نمونه خروجی به ازای متغیر های زیر:

```
Fs = 15000;
cd = floor(0.05*rand([1,6]).*Fs);
g2 = g1 = 0.8(for all indexes);
```

with some arbitrary values for cg,cg1 and some other parameters.

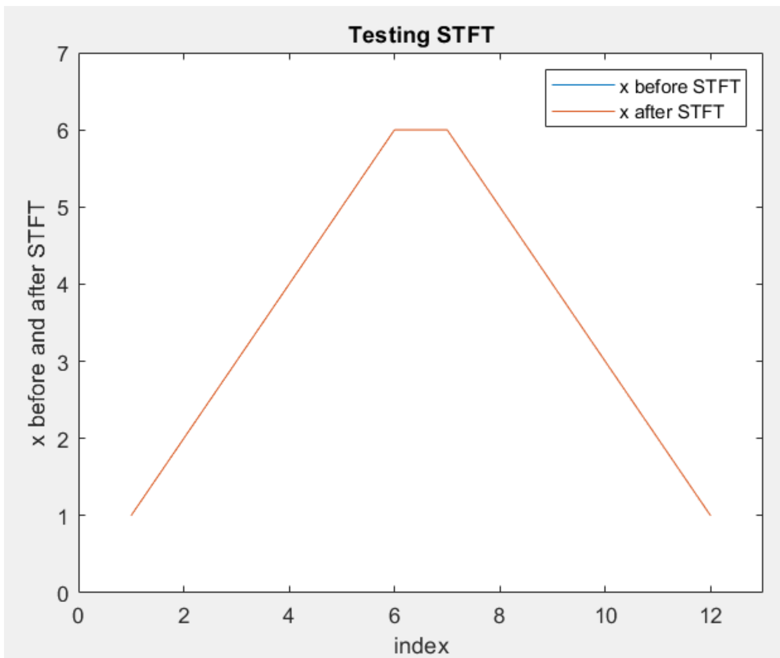


سوال چهارم:(STFT)

کد های STFT و ISTFT تکمیل و ضمیمه گردید.

یک نمونه تست عملکرد:

یک سیگنال تولید کردیم و به STFT دادیم و سپس به کمک ISTFT وارون خروجی STFT را محاسبه کردیم و نتیجه چنین شد که همان سیگنال اولیه طبق انتظار به دست آمد و همانطور که ملاحظه می کنید در اثر با هم کشیدن هم بر روی یکدیگر ترسیم می شوند.



جزییات پیاده سازی STFT و ISTFT در پاسخ ضمیمه شده موجود است.

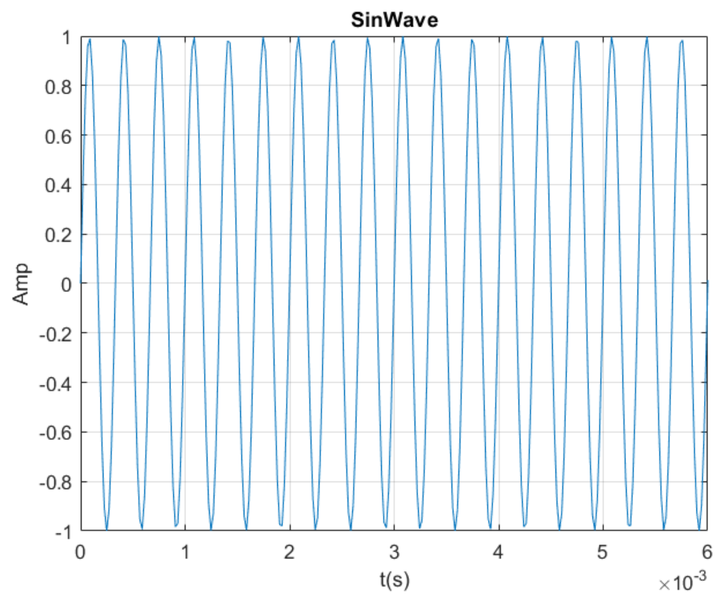
سوال پنجم:

قسمت اول و دوم:

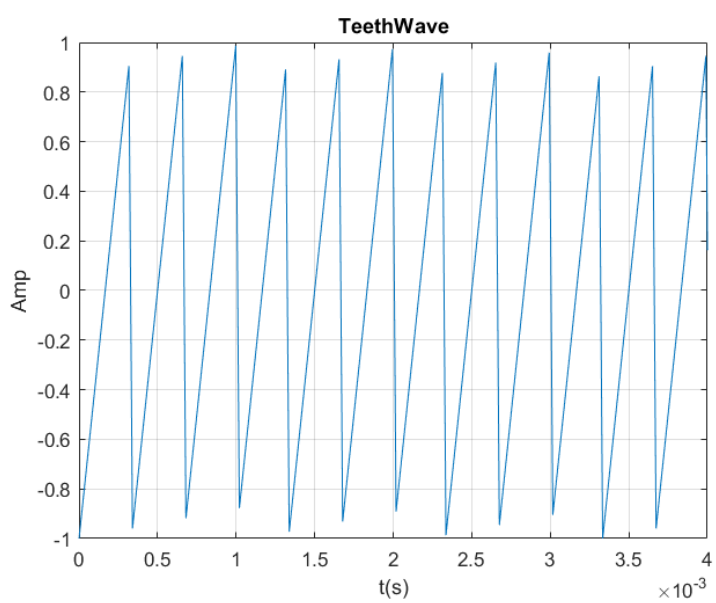
قطعه کد لازم جهت تولید و ذخیره فایل های S1.wav , S2.wav در فایل lastPartCode.m ضمیمه شده است.

توجه Audio3.mp3 لود شده است و از روی آن طول سیگنال های carrier محاسبه شده است(جهت مشاهده توضیحات بیشتر به فایل کد مراجعه کنید).

Carrier سینوسی:



Carrier دندان اره ای:



خروجیِ دو سیگنال carrier در فایل Modulator_sig ضمیمه شده است.

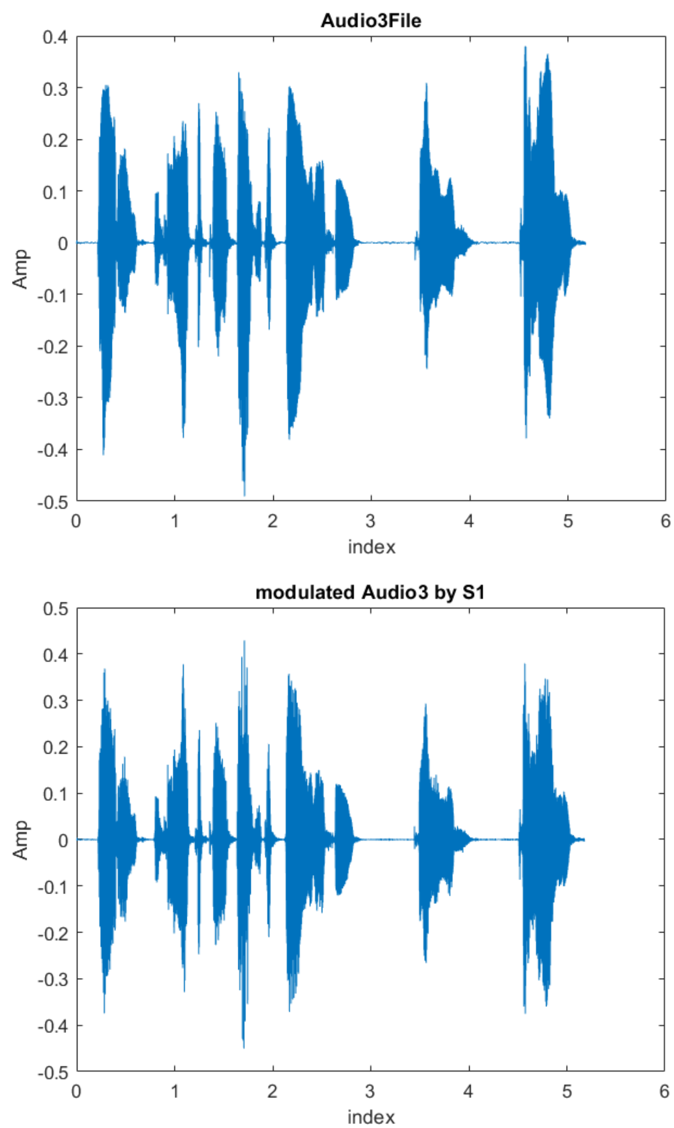
قسمت سوم:

با انجام مطالعات مورد نیاز این تابع را نیز تکمیل کردم و در حاصل در پاسخ ضمیمه شده موجود است.

قسمت چهارم:(کد این بخش در فایل lastPartCode.m آورده شده است).

1ـ مدولاسیون با سینوس:(مدولاسیون روی فایل Audio3 انجام گرفته است).

نمودار های TimeDomain سیگنال ها رسم شده است:



2ـ مدولاسیون با دندان اره ای:(مدولاسیون روی فایل Audio3 انجام گرفته است).

نمودار های TimeDomain سیگنال ها رسم شده است.