⑨ Линейные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами.

Опр Линейное диф. уравнение II порядка с постоянными коэф-ми имеет вид:
$$y''+py'+qy=f(x) \quad (8),$$ где
$p, q = const$, $f(x)$ – функция от x.

Рассмотрим уравнение (8), если $f(x)=0$, =>:
$$y''+py'+qy=0 \quad (9)$$ – линейное однородное уравнение II пор. с постоян. коэффициентами.

1) Линейное однородное ур. II пор. с постоян. коэф-ми.
$$y''+py'+qy=0$$
Составим характеристическое уравнение $\left(\begin{smallmatrix} y' \to k \\ y'' \to k^2 \end{smallmatrix}\right)$:
$$k^2+pk+q=0 \quad (10)$$
(10) – это квадратное ур-е => имеет 2 корня:
- либо 2 разных действительных;
- либо 2 одинаковых действительных;
- либо 2 комплексных сопряжённых.

Комплексное число имеет вид: $z=x+iy$, где i – мнимая единица, $i^2=-1$, $x,y\in R$ (посмотрите самостоятельно)

$z_1=x+iy$ и $z_2=x-iy$ – сопряженные – отличаются только знаком

Вернемся к (10):

а) $D>0$ => (10) имеет 2 действительных корня $k_1 \neq k_2$, тогда общее решение (9) имеет вид:
$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x} \quad (c_1, c_2 = const)$$
б) $D=0$ => (10) имеет 2 действит. корня $k_1=k_2=k$, => общее решение (9) имеет вид:
$$y=c_1e^{kx}+c_2xe^{kx} \quad (c_1, c_2 = const)$$

в) $D<0$, $\Rightarrow$ (10) имеет 2 сопряженных комплексных корня $\alpha \pm i\beta$ ($\alpha, \beta \in R$, $i^2=-1$), $\Rightarrow$ общее решение (9) имеет вид: $\underline{y=c_1 e^{\alpha x}\cdot \sin\beta x + c_2 e^{\alpha x}\cdot \cos\beta x}$ ($c_1, c_2 = const$)

Пример.

1) $y''-3y'+2y=0$

$k^2-3k+2=0$

$D=9-8=1$

$k_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}$ $\nearrow 2$, $\searrow 1$ $\Rightarrow$ общ. реш: $\underline{y=c_1e^{2x}+c_2e^x}$

2) $y''-9y=0$

$k^2-9=0$

$(k-3)(k+3)=0$

$k_1=3$, $k_2=-3$, $\Rightarrow$ общ. реш.: $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$

3) $y''+6y'+13y=0$

$k^2+6k+13=0$

$D=36-52=-16<0$

$i^2=-1$ - мнимая единица

$k_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{-1\cdot16}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{i^2\cdot16}}{2}=\frac{-6\pm4i}{2}=$ $\nearrow \underset{\alpha}{-3}+\underset{\beta}{2}i$, $\searrow -3-2i$

Общ. реш.: $y=c_1e^{-3x}\sin 2\beta+c_2e^{-3x}\cdot\cos 2\beta$

2) Линейные неоднородные диф. уравнения II порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим (8): $y''+py'+qy=f(x)$

Общее решение (8) = общ. реш. однородного уравнения (9) + + частное решение уравнения (8)

Алгоритм реш-я.

1. Выписываем однор. ур. (9), соответствующее уравнению (8):

$$y''+py'+qy=0$$

2. Находим общ реш $\bar{y}$ этого уравнения

3. Находим частное решение z неоднор. ур (8) по схеме:

№ п/п	Вид правой части	Корни харак. ур.	Вид части. реш (8) z.
1.	$f(x)$ – многочлен $A_m(x)$ степени m	а) 0 – не корень х ур.	$\Rightarrow$ а) $z=P_m(x)$ – мн-н степ. m
		б) 0 – корень х. ур. кратности S	$\Rightarrow$ б) $z=x^S\cdot P_m(x)$
2.	$f(x)=A_m(x)\cdot e^{\alpha\cdot x}$	а) α – не корень х. ур	$\Rightarrow$ а) $z=P_m(x)\cdot e^{\alpha x}$
		б) α – корень х. ур кр-ти S	$\Rightarrow$ б) $z=x^S\cdot P_m(x)\cdot e^{\alpha x}$
3.	$f(x)=A_m(x)\cos\beta x+B_m(x)\sin\beta x$	а) $\alpha\pm\beta i$ – не корень х. ур	$\Rightarrow$ а) $z=P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x$
		б) $\alpha\pm\beta i$ – корень х. ур. кр-ти S	$\Rightarrow$ б) $z=x^S(P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$
4.	$f(x)=e^{\alpha x}(A_m\cos\beta x+B_m\sin\beta x)$	а) – " –	$\Rightarrow$ а) $z=e^{\alpha x}(P_m\cos\beta x+Q_n\sin\beta x)$
		б) – " –	$\Rightarrow$ б) $z=x^S e^{\alpha x}(P_m\cos\beta x+Q_m\sin\beta x)$

4. Общ реш (8): $\underline{y=\bar{y}+z}$

х. ур. – характеристическое уравнение

ДР. 1) $y'' - 2y' + y = 3e^x$

$k^2 - 2k + 1 = 0$

$D = 4 - 4 = 0$

$k = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \bar{y} = c_1 e^x + c_2 x e^x$

$\ast\ 3e^x$ – случай 2.

$\alpha = 1$ – корень х. ур. кратности 2. ; т.е. 2 корня $= 1$. $A_m(x) = 3\ (m=0)$

$\Rightarrow z = x^2 \cdot P \cdot e^x$

$z' = 2xPe^x + x^2 P e^x$

$z'' = 2Pe^x + 2xPe^x + 2xPe^x + x^2 Pe^x$

$\ast\ 2Pe^x + \cancel{2xPe^x} + \cancel{2xPe^x} + \cancel{x^2Pe^x} - \cancel{4xPe^x} - \cancel{2x^2Pe^x} + \cancel{x^2Pe^x} = 3e^x$

$2Pe^x = 3e^x$

$2P = 3 \Rightarrow P = \frac{3}{2} \Rightarrow z = \frac{3}{2} x^2 e^x$

$y = (c_1 e^x + c_2 x e^x) + \frac{3}{2} x^2 e^x$

2) $y'' + y = x - \sin 2x$

$k^2 + 1 = 0$

$k^2 = -1$

$k = \pm i$

$\bar{y} = c_1 e^0 \sin x + c_2 e^0 \cos x = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

$\ast\ f(x) = x - \sin 2x$

$f_1(x) = x$ – многочлен степ. 1, – случай 1

$f_2 = -\sin 2x$, случ. 3 $A_m = -1$

$z_1 = Px + Q$

$z_1' = P$

$z_1'' = 0$

Подставим в уравнение вместо y, y', y'':

$Px + Q = x$

$P = 1,\ Q = 0$

$z_1 = x$

$z_2 = P\cos\beta x + Q\sin\beta x = P\cos 2x + Q\sin 2x$

$z_2' = -2P\sin 2x + 2Q\cos 2x$

$z_2'' = -4P\cos 2x - 4Q\sin 2x$

$-4P\cos 2x - 4Q\sin 2x + P\cos 2x + Q\sin 2x = -\sin 2x$

$-3P\cos 2x - 3Q\sin 2x = -\sin 2x$

$P = 0$; $-3Q = -1$

$Q = \frac{1}{3}$

$z_2 = \frac{1}{3}\sin 2x$

$z = z_1 + z_2$

$y = x + \frac{1}{3}\sin 2x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$