Минимизация логических функций

Любая логическая функция (ЛФ) может быть представлена в виде СДНФ или СКНФ, но эта запись не экономна.

СДНФ и СКНФ используются лишь для первоначального представления ЛФ, т.к. эти формы записи ЛФ не удобны для построения логических схем (ЛС). Поэтому при синтезе ЛС встает задача упрощения записи выражения для ЛФ. Эта задача называется ***минимизацией*** ЛФ.

Цель минимизации – упростить логическую функцию и добиться более компактной реализации логических схем.

Определения

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}$$

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	$x\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0

Каждое из слагаемых соответствует только одной единице в таблице истинности данной функции. Говорят, что каждое слагаемое покрывает единицу функции, а в совокупности они покрывают данную функцию, т.е. являются ***покрытием функции***. Но упростив функцию $f(x,y)=\bar{x}\vee\bar{y}$, получим более простое покрытие.

Оба представления соответствуют одной и той же таблице истинности функции, т.е. обращаются в 1 и 0 на одних и тех же наборах переменных x, y

$\overline{x}$
обращается в единицу на двух наборах (0, 0), (0, 1), а $\overline{y}$ - на (0, 0), (1, 0).

Совместно они покрывают единицами все единицы данной функции. Оба слагаемых $\overline{x}$ и $\overline{y}$ обращаются одновременно в нуль на наборе (1, 1), т.е. там, где функция $f(x, y)$ равна нулю.

Логическая функция φ называется ***импликантой*** логической функции ***F,*** если для любого набора аргументов, на которых φ=1, функция ***F*** также равна 1.

Импликанта функции обращается в 1, по крайней мере, на тех же наборах переменных, на которых сама функция также равна 1.

Примерами импликант могут служить любая конституента функции или группа конституент, объединенная знаком дизъюнкции.

x	y	z	F(x,y,z)	Элементарные конъюнкции СДНФ
0	0	0	0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
0	0	1	1	$\bar{x}\bar{y}z$
0	1	0	1	$\bar{x}y\bar{z}$
0	1	1	0	$\bar{x}yz$
1	0	0	0	$x\bar{y}\bar{z}$
1	0	1	1	$x\bar{y}z$
1	1	0	0	$xy\bar{z}$
1	1	1	0	xyz

Функция $\boldsymbol{\varphi} = \bar{x}y\bar{z}$ является импликантой. Действительно, функция $\boldsymbol{\varphi}$=1 только при x=0, y=1, z=0. Но и функция F также принимает значение 1 на тех же наборах.

Функция $\boldsymbol{\varphi} = xy\bar{z}$ не является импликантой. Действительно, функция $\boldsymbol{\varphi}$=1 при x=1, y=1, z=0. Но F (1,1,0) =0.

Собственная часть импликанты – это функция, полученная путем исключения из ***импликанты*** одного или не-скольких сомножителей.

Например, элементарная конъюнкция $x\bar{y}z$ имеет следующие собственные части $x\bar{y}, xz, \bar{y}z, x, \bar{y}, z.$

Простая импликанта булевой функции – это такая импликанта, которая сама входит в F , а никакая собственная её часть их в функцию F не входит.

Т. е. удаление из ***φ*** хотя бы одной переменной приводит к тому, что полученная функция перестает быть импликантой.

ВИДЫ ДНФ

Среди всех ДНФ (КНФ), реализующих некоторую функцию, можно выбрать наиболее простую.

Критерием простоты может служить

- количество букв в записи ДНФ. Это соответствует минимизации числа входов логической схемы,
- количество элементарных конъюнкций. Это соответствует минимизации числа функциональных элементов логической схемы,
- количество символов «¬» над буквами.

Виды ДНФ

1. Сокращенная ДНФ (СкДНФ) – это представление булевой функции в виде дизъюнкции всех своих простых импликант**.** ***Сокращенную ДНФ*** получают с помощью закона поглощения и закона склеивания

Закон склеивания $xy \vee \bar{x}y = y$

Закон поглощения $xy \vee x = x$

СкДНФ характеризуется тем, что ее слагаемые самые короткие, из нее уже нельзя исключать ни одной буквы, но можно выбросить некоторые импликанты.

Сокращённая ДНФ может содержать импликанты, удаление которых не меняет ТИ.

2. Если из дизъюнкции простых импликантов функции F нельзя отбросить ни одного слагаемого (иначе поменяется таблица истинности), то такая ДНФ ***тупиковой*** ДНФ (ТДНФ).

ДНФ, которую нельзя упростить с помощью этих двух преобразований (закон склеивания, закон поглощения), называют ***тупиковой ДНФ*** (***ТДНФ***).

Тупиковых форм у булевой функции может быть несколько.

Среди найденных тупиковых ДНФ находят кратчайшие и минимальные.

3. Тупиковая форма, содержащая наименьшее число элементарных конъюнкций, называется ***кратчайшей*** ДНФ (***КрДНФ)***

Для заданной булевой функции F существует несколько различных по числу вхождений литералов КрДНФ.

Кратчайшая и тупиковые формы в общем случае не совпадают.

4. ДНФ называется ***минимальной***, если она содержит наименьшее число букв среди всех ДНФ, ей равносильных.

Речь идет о минимальном числе ***букв***, а не ***переменных***.

Например, $f(x,y,z) = xy \vee x\bar{y}z \vee yz$

содержит 7 букв, но 3 переменных.

Некоторые функции имеют несколько минимальных форм. Они могут быть найдены специальными способами.

МДНФ не всегда совпадает с КрДНФ логической функции *n* переменных. Хотя для начальных значений *n* ($n = 2$ или $n = 3$) МДНФ всегда совпадает с КрДНФ.

Задача минимизации логической функции в классе ДНФ формулируется следующим образом:

требуется для логической функции *n* переменных *F* построить ДНФ с минимально возможным числом слагаемых (***КрДНФ***) или с минимально возможным числом вхождений литералов (***МДНФ***).

К настоящему времени разработано около 200 различных методов минимизации логических функций в классе ДНФ. Наиболее известными являются метод Квайна, метод Блейка-Порецкого, метод Нельсона, метод неопределенных коэффициентов и др.

Методы минимизации логических функций

1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Сокращенная ДНФ записывается единственным образом для каждой булевой функции. Кроме того, любая ТДНФ, а следовательно и любая МДНФ, получается из сокращенной ДНФ (СокрДНФ) путем удаления из нее некоторых элементарных конъюнкций.

Для построения СокрДНФ обычно используется задание функции в виде СДНФ или произвольной ДНФ. Наиболее универсальным методом перехода к СокрДНФ является выполнение над исходной ДНФ преобразований вида:

а) $A \vee AB = A$ – поглощение;

б) $x A \vee A = A$ – склеивание;

При этом вначале следует выполнить всевозможные попарные склеивания входящих в ДНФ элементарных конъюнкций, а затем поглощения. Далее, если это возможно, преобразования применяют повторно. При этом сложность полученной СокрДНФ может оказаться больше сложности исходной ДНФ.

2. МИНИМИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ КВАЙНА

Метод Квайна позволяет представлять функции в ДНФ или КНФ с минимальным числом букв (т.е. МДНФ).

Метод Квайна основан на попарном сравнении и склеивании по возможности всех конституент СДНФ.

Этапы минимизации логических функций методом Квайна:

- Приведение формулы к СДНФ
- Переход от СДНФ к СкДНФ;
- Переход от СкДНФ к МДНФ

Второй этап – получение сокращенной формы

Теорема Квайна. Если, исходя из СДНФ функции, произвести все возможные операции склеивания, а затем поглощения, то в результате получится СкДНФ, т. е. дизъюнкция всех простых импликант.

Операции склеивания и поглощения выполняются последовательно до тех пор, пока это возможно.

Третий этап – получение минимальной формы. На этом этапе необходимо исключить из выражения лишние простые импликанты. Для этого используется импликантная таблица (матрица) Квайна (таблица покрытий).

Алгоритм нахождения МДНФ

1. В столбцы импликантной матрицы вписать конституенты единицы СДНФ заданной функции, а в строки – простые импликанты функции.

2. Отметить столбцы членов СДНФ, поглощаемых отдельными простыми импликантами (например, знаком +).

3. Найти столбцы импликантной матрицы, имеющие только один крестик. Соответствующие этим крестикам простые импликанты называются ***базисными*** и составляют ***ядро*** ЛФ. Ядро обязательно входит в МСДНФ.

4. Из импликант, не входящих в ядро, выбрать такое минимальное их число с минимальным количеством букв в каждой из этих импликант, которое обеспечит перекрытие всех столбцов, не перекрытых членами ядра.

По методу Квайна получаются тупиковые формы. Их может быть несколько. Среди них и надо искать минимальные формы.

Пример 1. Функция задана таблицей истинности:

Номер набора	x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Пример 2:

Задана функция:

$$F\ (x,y,z) = \sum(0,3,4,6,7)$$

3. МИНИМИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ДИАГРАММ ВЕЙЧА

Диаграммы Вейча представляют собой способ задания булевых функций с помощью специальной таблицы, число клеток которой равно числу всех возможных наборов аргументов булевой функции. Таким образом, каждой клетке диаграммы Вейча можно поставить в соответствие конституенту единицы.

Положение каждой клетки определяется системой горизонтальных и вертикальных координат. Система координат вводится таким образом, чтобы при переходе от любой клетки карты к любой другой, соседней с ней слева или справа, сверху или снизу ячейке, происходила бы смена только одной какой-нибудь координаты.

В клетке диаграммы Вейча ставится единица, если булева функция принимает единичное значение на соответствующем наборе.

Минимизация булевых функций с помощью диаграммы Вейча основывается на отыскании склеивающихся конституент единицы. Склеивающиеся конституенты единицы располагаются в соседних, вертикально или горизонтально расположенных клетках.

Правила минимизации логических функций с помощью диаграммы Вейча (ДВ)

1. Все клетки ДВ, содержащие 1, объединяются в области

2. Каждая область должна представлять прямоугольник с числом клеток 2^k , где k =0,1,2,3 – неотрицательное целое число, т.о. допустимое число клеток в области: 1,2,4,8.

3. Области могут пересекаться

4. Одни и те же клетки могут входить в разные области

5. Областей должно быть как можно меньше

6. Области должны быть как можно крупнее.

7. Карту можно сворачивать