Обыкновенные дифференциальные уравнения. Системы дифференциальных уравнений.

① Основные понятия.

До этого мы изучали обыкновенные алгебраические уравнения разных порядков (линейные, квадратные, кубические и т.д.), либо уравнения с трансцендентными функциями (тригонометрические, логарифмические и т.д.). В итоге, при решении этих уравнений мы получали набор чисел.

устно

При решении различных физических и прикладных задач часто получают уравнения, которые связывают независимые переменные с функциями этих переменных и производными этих функций.

Опр. Диф уравнение – это уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные этих функций:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

найти нужно $f(x)$

Пример: $y'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = F(x)$ – первообразная

Опр. Если диф. уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется обыкновенным. В противном случае – диф. уравнение в частных производных.

Опр. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Пример

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ – обыкновенное диф. ур-е I порядка

в общем виде: $F(x, y, y') = 0$

② Задачи, приводящие к диф. уравнениям

1) Материальная точка массы m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной ~~его~~ квадрату скорости v^2. Найти зависимость v от t.

Решение:

t – независимая переменная $\Rightarrow v = v(t)$ – скорость – это функция от t

По II закону Ньютона: $m \cdot a = F$

$a = v'(t)$ – ускорение

По условию $F = -k \cdot v^2$, где k – коэффициент пропорциональности; «–» означает, что скорость уменьшается.

Тогда:

$$m \cdot v' = -k \cdot v^2$$

$$\boxed{v' = -\frac{k}{m} \cdot v^2}$$ – диф. уравнение I порядка.

Найти функцию $v(t)$

2) Рассмотреть задачи: Письменный Д. "Конспект лекций по высшей математике" (стр 326-327.":

– геометрическая – найти кривую.

– закон охлаждения тел

– закон размножения бактерий и т.д.

③ Дифференциальное уравнения I порядка. Основные понятия.

Диф. ур. I порядка в общем виде:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

Это уравнение связывает независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производную y'.

Диф. уравнение (1) можно разрешить относительно y':

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$ – диф. уравнение I порядка разрешенное относительно производной.

Опр Решением (2) будет любая функция $y = y(x)$, такая, что $y'_x = f(x, y(x))$.

Опр Графики решений называются интегральными кривыми.

Рассмотрим уравнение (2) – оно показывает связь между координатами точки (x, y) и угловым коэффициентом касательной, т.е. тангенса угла наклона касательной к оси OX.

Так, если через каждую точку (x, y) провести прямую тангенс угла наклона которой равен $f(x, y)$, то получим семейство прямых называемое полем направлений уравнения (2). Это геометрический смысл диф. уравнения I порядка.

Опр. Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется изоклиной.

Если положить $y' = c \Rightarrow f(x,y) = c$ – уравнение изоклины

Пример.

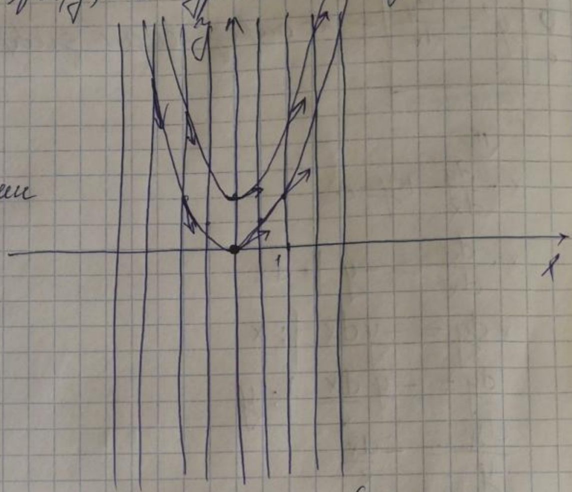
$y' = 2x$

$2x = c$

$x = \frac{c}{2}$ – уравнения изоклин

$x = 0$
$x = \frac{1}{2}$
$x = 1$
$x = 2$ и т.д.

– Это прямые $\parallel Oy$



Опр. Общим решением диф. уравнения первого порядка называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, c)$ которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения диф. уравнения I порядка.

1) $c = const$, $\Rightarrow$ диф. уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких-либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение const-ты $c = c_0$, при котором решением диф. уравнения является функция $y = \varphi(x, c_0)$

Опр. Решение вида $y = \varphi(x, c_0)$ наз-ся частным решением диф. уравнения.

Опр. Задача отыскания любого частного решения диф. уравнения вида $y = \varphi(x, c_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

Теорема. Если в уравнении (2) ф-я $f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Т.е. при выполнении условий теоремы существует единственная интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0)

Пример

1) $xy'+y=0$

$\boxed{y'=\frac{dy}{dx}}$ — по определению дифференциала: $dy=f'(x)dx$ или $dy=y'dx$

запомнить!

$\Downarrow$

$x\cdot\frac{dy}{dx}+y=0$

$x\cdot\frac{dy}{dx}=-y \;|\cdot dx$

$x\,dy=-y\,dx \;|:x$

$dy=-y\frac{dx}{x} \;|:y$

$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$

Проинтегрируем уравнение:

$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$

$\ln y+C_1=-\ln x+C_2$

Т.к. C_1 и $C_2=const$, то можем просто записать:

$\ln y=-\ln x+C$

$\ln y+\ln x=C$

$\ln yx=C$

$\Downarrow$

$yx=e^C$

$y=\frac{e^C}{x}$ — общее решение

Пусть $x_0=1$, $y_0=2$, $\Rightarrow$ $2=\frac{e^C}{1}$

$e^C=2$

$C=\ln 2$

Тогда $y=\frac{e^{\ln 2}}{x}$

$y=\frac{2}{x}$ — частное решение при $x_0=1$, $y_0=2$

А з-ча отыскания частн. решения — з-ча Коши.

2) $x^2y^2y'+1=y$

$x^2y^2\cdot\frac{dy}{dx}+1=y$

$x^2y^2\frac{dy}{dx}=y-1 \;|\cdot dx$

$x^2y^2dy=(y-1)dx \;|:x^2$

$y^2dy=(y-1)\cdot\frac{dx}{x^2} \;|:(y-1)$

$\frac{y^2}{y-1}dy=\frac{dx}{x^2}$

$\int\frac{y^2}{y-1}dy=\int\frac{dx}{x^2}$

$\int\left(\frac{y^2-1}{y-1}+\frac{1}{y-1}\right)dy=\int x^{-2}dx$

$\int\left(y+1+\frac{1}{y-1}\right)dy=-x^{-1}+C$

$\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\frac{1}{x}+C$ – общее решение

Замечание! При делении на $(y-1)$ могло быть потеряно решение $y=1$, но $y=1$ – является решением уравнения.