⑦ Уравнение в полных дифференциалах.

Опр. Ур-е вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (6) наз-ся ур-м в полн. диф-х, если его левая часть есть полный диф-л некоторой ф-и $u(x,y)$, т.е.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$$

$\Rightarrow$ (6) перепишем: $du(x,y) = 0$

$$\int du(x,y) = \int 0\, du$$

$$u(x,y) = C \text{ — общ. реш. (6)}$$

Теорема. Для того чтобы выражение $\Delta = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ было полным диф-м, необх. и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (7)$$

где ф-и $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их част. произв. непрерывны в обл. D.

Причем: $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$ — из определения полного дифференциала

Пример. $y' = \dfrac{5-2xy}{3y^2+x^2}$

Запишем в диф-й форме

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5-2xy}{3y^2+x^2}$$

$(3y^2+x^2)dy = (5-2xy)dx$ или $(5-2xy)dx - (3y^2+x^2)dy = 0$

$$\underbrace{(2xy-5)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(3y^2+x^2)}_{Q(x,y)}dy = 0$$

Проверим условие для полн. диф.

$\frac{\partial P}{\partial y} = +2x = \frac{\partial Q}{\partial x} = +2x \Rightarrow$ полный диф-л

Найдем $u(x,y)$:

— тип const

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = 2xy-5, \Rightarrow u(x,y) = \int (2xy-5)\,dx = x^2y - 5x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) = 3y^2 + x^2 \quad (*)$$

Но! $\frac{\partial u}{\partial y}$ можно найти и через $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2y - 5x + \varphi(y)\right)'_y = x^2 + \varphi'(y) \quad (**)$$

Приравняем (*) и (**):

$$3y^2 + x^2 = x^2 + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = 3y^2, \Rightarrow \varphi(y) = \int 3y^2\,dy = y^3 + C_1, \text{ тогда:}$$

$$u(x,y) = x^2y - 5x + y^3 + C_1$$

Тогда общее решение (6):

$$u(x,y) = C$$

$$x^2y - 5x + y^3 + C_1 = C_2 \quad = C$$

или

$$x^2y - 5x + y^3 = C \quad \text{— общее решение.}$$

Интегрирующий множитель

Иногда (7) не выполняется, $\Rightarrow$ диф. уравнение не является диф. ур. в полных диф-х. Такое диф. ур. можно свести к диф. ур. в полных диф-х, умножив его на функцию $\mu(x,y)$ — интегрирующий множитель:

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

Тогда (7) выполняется: $\frac{\partial(\mu\cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu\cdot Q)}{\partial x}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot P + \mu\cdot\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot Q + \frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\mu \quad \text{(по св-ву производных)}$$

Чтобы найти μ нужно проинтегрировать обе части. Положим, что $\mu=\mu(x)$ (зависит только от x):

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial \mu}{\partial x}Q+\frac{\partial Q}{\partial x}\mu$$

$$-\frac{\partial \mu}{\partial x}Q=\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

или

$$-\frac{d\mu}{dx}Q=\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

разделим переменные:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q}dx$$

интегрируя, находим:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx}$$ — зависит только от x

Аналогично, когда $\mu=\mu(y)$ — зависит только от y:

$$\mu(y)=e^{\int\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}\cdot dy}$$ — зависит только от y

Пример. $\overset{P}{(x^2-y)}dx+\overset{Q}{(x^2y^2+x)}dy=0$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1\neq\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy^2+1$$

Проверим: $$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{-1-2xy^2-1}{x^2y^2+x}=\frac{-2\cancel{(1+xy^2)}}{x\cancel{(1+xy^2)}}=-\frac{2}{x}$$ - зависит только от x

Тогда: $$\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx}=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2}$$

Умножим наше уравнение на $\frac{1}{x^2}$:

$$\frac{1}{x^2}(x^2-y)dx+\frac{1}{x^2}(x^2y^2+x)dy=0$$

$\left(1-\frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y^2+\frac{1}{x}\right)dy = 0$ — уравнение в полных диф-х (проверьте)

$\quad P \qquad\qquad\qquad Q$

$\frac{\partial u}{\partial x} = P = 1 - \frac{y}{x^2}$, $\Rightarrow u(x,y) = \int\left(1-\frac{y}{x^2}\right)dx = x - y\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) + \varphi(y) =$
$= x + \frac{y}{x} + \varphi(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x+\frac{y}{x}+\varphi(y)\right)'_y = \frac{1}{x} + \varphi'(y)$

Но, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q = y^2 + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y^2 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \varphi'(y)$

$y^2 = \varphi'(y)$

$\Downarrow$

$\varphi(y) = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + C_1$

$u(x,y) = x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} + C_1$

$\Downarrow$

$x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} + C_1 = C_2$

$x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} = C$ — общее решение

---

(8) Диф. уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Опр ДУ порядка >1, назыв-ся уравнениями высших порядков:

$F(x, y, y', y'') = 0$ — уравнение 2-го порядка в общем виде.

Основной метод решения — понижение порядка.
Однако, этот метод применим только для уравнений вида:

1) $y'' = f(x)$ или $y^{(n)} = f(x)$ — порядок n

Решение таких уравнений может быть найдено последовательным интегрированием.

Пример:

$y'' = e^{2x}$

$y' = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$

$$y=\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C_1\right)dx=\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2$$

2) Уравнения, не содержащие явно y.

$$G(x,y',y'')=0$$

Замена $z=y'$ $\Rightarrow G(x,z,z')=0$

Пример.

$$xy''+y'=0$$

$$z=y',\ z'=y''$$

$$xz'+z=0$$

$$\frac{x\,dz}{dx}=-z$$

$$x\,dz=-z\,dx$$

$$\frac{dz}{z}=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dz}{z}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln z=-\ln x+\ln C_1$$

$\ln C_1=const$, удобнее вместо C_1 записать $\ln C_1$

$$z=\frac{C_1}{x}$$

$$y'=\frac{C_1}{x}\Rightarrow y=\int\frac{C_1}{x}dx=C_1\ln|x|+C_2$$

3) Уравнения содержащие явно x.

$$G(y,y',y'')=0$$

Замена $y'=p,\quad p=p(y)$

$$y''=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p \quad \text{или } y''=p\cdot p'$$

производная сложной ф-и

$$\Rightarrow G(y,p,p'p)=0$$

Пример: $2y \cdot y'' = (y')^2 + 1$

$y' = p, \quad y'' = p \cdot p'$

Тогда: $2y \cdot p \cdot p' = p^2 + 1$

$$\frac{2yp\,dp}{dy} = (p^2+1)$$

$$2yp\,dp = (p^2+1)\,dy$$

$$\frac{p\,dp}{p^2+1} = \frac{dy}{2y}$$

$$\int \frac{p\,dp}{p^2+1} = \int \frac{dy}{2y}$$

$$\frac{1}{2}\ln|p^2+1| = \frac{1}{2}\ln|y| + \frac{1}{2}\ln c_1$$

$$\ln|p^2+1| = \ln|y \cdot c_1|$$

$$p^2 + 1 = y \cdot c_1$$

$$p = \pm\sqrt{yc_1 - 1}, \Rightarrow y' = \pm\sqrt{yc_1 - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{yc_1 - 1}$$

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{yc_1 - 1}} = dx$$

$$\pm\frac{2}{c_1} \cdot \sqrt{yc_1 - 1} = x + c_2$$