(4) Дифференциальные уравнения I порядка с разделяющимися переменными.

В общем виде:

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0 \qquad (3)$$ – уравнение с разделяющ-ся переменными

Проинтегрируем (3):

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C, \quad C = const$$ – общий интеграл (или общее решение) уравнения (3).

$P(x)$ зависит только от x, $Q(y)$ – только от y.

Чаще уравнение с разд. переменными выглядит так:

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)\,dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\,dy = 0 \qquad (4)$$

Разделим (4) на $Q_1(y)\cdot P_2(x)$:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy = 0$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy = C, \quad C = const$$ – общий интеграл (или общее решение)

Таким образом, (4) мы свели к виду (3).

Т.е., чтобы решить такое уравнение, нужно разделить переменные, т.е. все что содержит „x" должно умножаться на dx, а что содержит „y" – на dy.
Если разделить переменные не получается, то это уравнение другого вида, и решается другими методами.

уст.

<u>Замечание</u>: При делении на $Q_1(y)\cdot P_2(x)$ следует отдельно решить уравнение: $Q_1(y)\cdot P_2(x) = 0$ и установить

те решения диф. уравнения, которые не могут быть получены из общего решения. Такие решения называются особыми решениями!

Примеры:

1) $(y+xy)\cdot dx+(x-xy)dy=0$

Нам нужно разделить переменные, чтобы все „x" были с dx, а „y"-ки с dy.

$y(1+x)dx+x(1-y)dy=0 \quad \Big| : y\cdot x$

нужно перенести „к dy

к dx

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0$$

$$\int\frac{1+x}{x}dx+\int\frac{1-y}{y}dy=C$$

$$\ln|x|+x+\ln|y|-y=C$$

$\ln|xy|+x-y=C$ – общее решение

Найдем особые решения: $yx=0$
$y=0$ или $x=0$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ – особое решение

Действительно, если подставить $(0,0)$ в уравнение получим тождество!

2) $y\cdot y'=\dfrac{-2x}{\cos y}$

$y'=\dfrac{dy}{dx}, \Rightarrow y\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x}{\cos y} \quad \Big|\cdot dx$

$y\cdot dy=\dfrac{-2x}{\cos y}dx \quad \Big|\cdot \cos y$

$y\cos y\,dy = -2x\,dx$

$\int y\cos y\,dy = -2\int x\,dx$

$\Downarrow$

интегрируя по частям:

$y\sin y + \cos y + \frac{2x^2}{2} = C$

$y\sin y + \cos y + x^2 = C$ – общее решение.

Если задать начальные условия $y(1)=0$, $\Rightarrow$ $x=1$, $y=0$

Подставим их в общее решение:

$\cos 0 + 1 = C$

$2 = C \Rightarrow y\sin y + \cos y + x^2 - 2 = 0$ – частное решение при условии: $y(1)=0$.

⑤ Однородные дифференциальные уравнения.

<u>Опр</u> Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией n-го порядка, если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножается на λ^n:

$$f(\lambda x; \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x,y)$$

<u>Пример</u>: $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

$f(\lambda x; \lambda y) = (\lambda x)^2 - \lambda x \cdot \lambda y + (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 - \lambda^2 xy + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (x^2 - xy + y^2) = \lambda^2 \cdot f(x,y) \Rightarrow$ однородная функция 2-го порядка.

<u>Опр</u> Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x,y)$ называется однородным, если $f(x,y)$ – однородная функция нулевого порядка.

Однородное уравнение можно представить в виде:
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Пусть $\frac{y}{x} = u(x) \Rightarrow y = u(x)\cdot x$

Найдем $y' = u'(x)\cdot x + u(x)$
Но $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(u)$

$$\left.\begin{aligned} y' &= u'(x)\cdot x + u(x) \\ y' &= f\left(\tfrac{y}{x}\right) = f(u) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{u'(x)\cdot x + u(x) = f(u)} \quad (5)$$

(5) – уравнение с разделяющимися переменными

Решим (5):
$$u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot x + u = f(u) \,\Big|\cdot dx$$
$$du\, x = (f(u) - u)\,dx \,\Big|: x(f(u)-u))$$
$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$$ – общее решение однородного ур-е

Далее находим $u(x)$ и далее $y = u(x)\cdot x$

Алгоритм:
1. Замена $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u\cdot x$
2. $y' = u'x + u$
3. Подставить замену в уравнение, $\Rightarrow$ получим уравнение с разделяющимися переменными
4. Решаем его, находим u
5. Находим $y = u\cdot x$.

<u>Пример</u>: $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$

$y' = \frac{du}{dx}$

Замена: $u = \frac{y}{x}, \Rightarrow y = u\cdot x, \Rightarrow y' = u'x + u$

Тогда:

$$u'x+u=\frac{x\cdot ux+u^2x^2e^{\frac{1}{u}}}{x^2}$$

$$u'x+u=\frac{x^2u+u^2x^2e^{\frac{1}{u}}}{x^2}$$

$$u'x+u=\frac{x^2u}{x^2}+\frac{x^2u^2e^{\frac{1}{u}}}{x^2}$$

$$u'x+u=u+u^2e^{\frac{1}{u}}$$

$u'x=u^2e^{\frac{1}{u}}$ – урав-е с разделяющ-ся перемен.

$$\frac{du}{dx}\cdot x=u^2e^{\frac{1}{u}}\ \Big|\cdot dx$$

$$du\cdot x=u^2e^{\frac{1}{u}}\cdot dx\ \Big|:x$$

$$du=u^2e^{\frac{1}{u}}\cdot\frac{dx}{x}\ \Big|:u^2e^{\frac{1}{u}}$$

$$\frac{du}{u^2e^{\frac{1}{u}}}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{du}{u^2e^{\frac{1}{u}}}=\int\frac{dx}{x}\qquad\left[\begin{array}{l}\frac{1}{u}=t\\ -\frac{1}{u^2}du=dt\\ du=-u^2dt\end{array}\right]$$

$$-\int\frac{u^2dt}{u^2e^t}=\int\frac{dx}{x}$$

$$-\int e^{-t}dt=\int\frac{dx}{x}$$

$$e^{-t}=\ln|x|+C$$

$$e^{-\frac{1}{u}}=\ln|x|+C$$

$e^{-\frac{x}{y}}=\ln|x|+C$ – общее решение.