⑥ Линейное дифференциальное уравнения I порядка.

Опр Дифференциальное уравнение I порядка называется линейным, если его можно записать в виде:

$$y' + p(x) \cdot y = g(x) \quad (1)$$

Рассмотрим 2 метода решения (1)

1) Метод Бернулли.

Замена: $y = u \cdot v$

$$\Downarrow$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Подставим в (1): $u' \cdot v + \underline{u \cdot v'} + p(x) \cdot \underline{u \cdot v} = g(x)$

Группируем: $u'v + u(v' + p(x) \cdot v) = g(x)$

Положим: $\begin{cases} v' + p(x) \cdot v = 0 & (2) \text{ — ур-е с разделяющимися переменными} \\ u'v = g(x) & (3) \end{cases}$

Из (2) найдем v и подставим в (3), и тоже получим уравнение с разделяющимися переменными.

Пример: $x^2 y' + y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ — линейное I порядка

$y = u \cdot v$

$y' = u'v + uv'$ — замена

$$\Downarrow$$

$$x^2(u'v + uv') + u \cdot v = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

$$x^2 u'v + \underline{x^2 uv'} + \underline{uv} = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

$$x^2 u'v + u(x^2 v' + v) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

Тогда: $\begin{cases} x^2 v' + v = 0 \\ x^2 u'v = x^2 e^{\frac{1}{x}} \end{cases}$

Решим $x^2 v' + v = 0$

$$x^2 \frac{dv}{dx} + v = 0$$

$$x^2 dv = -v\,dx$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|v| = \frac{1}{x} + C$$

$$v = e^{\frac{1}{x} + C}$$

Пусть $C = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = e^{\frac{1}{x}} \longrightarrow \text{частное} \\ x^2 \cdot u' \cdot e^{\frac{1}{x}} = x^2 e^{\frac{1}{x}} \quad \Big| : e^{\frac{1}{x}} \end{cases}$

$$x^2 \frac{du}{dx} = x^2 \quad \Big| : x^2$$

$$du = dx$$

$$\int du = \int dx$$

$u = x + C_1$ – общее

Тогда: $y = u \cdot v$
v – частное, u – общее $\Bigg| \Rightarrow y = (x + C_1) e^{\frac{1}{x}}$ – общее решение лин. диф. ур. I порядка.

2) Метод Лагранжа.

Рассмотрим $y' + p(x)y = g(x)$ (1)

1. $y' + p(x) \cdot y = 0$ – однородное линейное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x) \cdot y \quad \Big| (\cdot dx) \text{ и } (: y)$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx$$

$$\ln|y| = C - \int p(x)\,dx$$

$$|y| = e^{C - \int p(x)dx}$$

$$|y| = e^C \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Пусть $\pm e^c = C_1 \Rightarrow y = C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx}$

2. Заменим $C_1 = u(x)$ – функция от x

Тогда $y = u(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$

$$y' = u'(x)e^{-\int p(x)dx} + u(x)\cdot\left(e^{-\int p(x)dx}\right)' = u'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} -$$

$$- u(x)\cdot p(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$$ (вспомнить производную от e^x)

Подставим в (1):

$$u'(x)e^{-\int p(x)dx} \cancel{- u(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}} \cancel{+ p(x)\cdot u(x)e^{-\int p(x)dx}} = g(x)$$

$$u'(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x)$$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Находим u, возвращаемся к замене.

Пример: $x^2y' + y = x^2e^{\frac{1}{x}}$

1) $x^2y' + y = 0$

$$x^2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$x^2dy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{x} + C$$

$$y = e^{\frac{1}{x}+C}$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}\cdot e^C$$

2) Положим $e^C = u(x)$

$$y = e^{\frac{1}{x}}\cdot u(x)$$

$$y' = u'(x)e^{\frac{1}{x}} + u(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Подставим в исходное уравнение:

$$x^2\left(u'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}+u(x)e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)+e^{\frac{1}{x}}\cdot u(x)=x^2e^{\frac{1}{x}} \,\Big|:e^{\frac{1}{x}}$$

$$x^2u'(x)+x^2\cdot(u(x))\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+u(x)=x^2$$

$$x^2\cdot u' - \cancel{u}+\cancel{u}=x^2 \,\Big|:x^2,\ x\neq 0$$

$$u'=1$$

$$du=dx$$

$$\int du=\int dx,\ \Rightarrow\ u=x+C_1$$

Возвращаемся к замене: $y=u\cdot e^{\frac{1}{x}}$

$$\underline{y=(x+C_1)e^{\frac{1}{x}}}$$

3) Определение. Уравнение вида $y'+p(x)\cdot y=g(x)\cdot y^m$, (4) $m\neq 0,1$, $m\in R$, — называется уравнением Бернулли.

Если $m=0$, $\Rightarrow$ получаем линейное уравнение I порядка.

Если $m=1$, $\Rightarrow$ получаем уравнение с разделяющимися переменными.

В общем случае делим (4) на y^m:

$$\frac{y'}{y^m}+p(x)\cdot\frac{y}{y^m}=g(x)$$

$$y^{-m}\cdot y'+p(x)\cdot y^{1-m}=g(x) \quad (5)$$

Заменим: $y^{1-m}=z$, $\Rightarrow z'=(1-m)\cdot y^{-m}\cdot y'$

$$y^{-m}\cdot y'=\frac{z'}{1-m}$$

Подставим замену в уравнение (5):

$$\frac{z'}{1-m}+p(x)\cdot z=g(x) \quad (6)$$ — это линейное уравнение I порядка относительно z. Решаем либо

методом Бернулли, либо методом Лагранжа.

Пример:

$$y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y} \quad \Big| : \sqrt{y}$$ – ур-е Бернулли

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{4xy}{\sqrt{y}} = 2xe^{-x^2}$$

$$y' \cdot y^{-\frac{1}{2}} + 4x \cdot y^{\frac{1}{2}} = 2xe^{-x^2}$$

$y^{\frac{1}{2}} = z$ – замена

$$z' = \frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' \Rightarrow y' \cdot y^{-\frac{1}{2}} = 2z'$$

Тогда: $2z' + 4x \cdot z = 2xe^{-x^2}$ – линейное

Решим методом Лагранжа:

$$2z' + 4x \cdot z = 0$$

$$\frac{2dz}{dx} = -4xz$$

$$\frac{2dz}{z} = -4x\,dx$$

$$2\int \frac{dz}{z} = -4\int x\,dx$$

$$2\ln|z| = -4\frac{x^2}{2} + C \quad \Big| : 2$$

$$\ln|z| = -x^2 + \frac{C}{2}$$

$$z = e^{-x^2} \cdot e^{\frac{C}{2}}$$

Пусть $e^{\frac{C}{2}} = C_1$, $\Rightarrow z = e^{-x^2} \cdot C_1$

Замена: $C_1 = u(x)$

$$z = u(x) \cdot e^{-x^2}$$

$$z' = u' \cdot e^{-x^2} + u \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2}$$

Подставим в линейное: $2u'e^{-x^2} - 2ue^{-x^2} \cdot 2x + 4x \cdot u \cdot e^{-x^2} = 2xe^{-x^2} \quad \Big| : e^{-x^2}$

$$2u' - \cancel{4ux} + \cancel{4xu} = 2x$$

$2u' = 2x$

$\frac{du}{dx} = x$

$du = x\,dx$

$\int du = \int x\,dx$

$u = \frac{x^2}{2} + C_2$

$z = u \cdot e^{-x^2}, \Rightarrow z = \left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) e^{-x^2}$

Тогда $z = y^{\frac{1}{2}}, \Rightarrow y^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) e^{-x^2}$

$y = \left(\frac{x^2}{2} + C_2\right)^2 e^{-2x^2}.$