安徽大学 2019—2020 学年第一学期

《高等数学 A(一)》期末考试试卷(B 卷)参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 **2** 分，共 **10** 分）

1. D　**2.A**　**3. B**　**4.** A　**5.** C

二、填空题（每小题 **2** 分，共 **10** 分）

6. $y = 2x + \frac{\pi}{2}$　**7.** $y = x + e^{\frac{\pi}{2}}$　**8.** $x+e^x+C$　**9.** $\frac{\pi}{4}$　**10.** $2\sqrt{3}$

三、计算题（每题 9 分，共 **54** 分）

11. 解:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}\int_0^x e^{2t}f(t)dt}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{2t}f(t)dt}{e^{2x}x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}f(x)}{e^{2x}(2x^2+2x)}$$ 6 分

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2+2x} = \frac{1}{2}$$ 9 分

12. 解:
$$y' = \frac{-2x^2-2x(1-2x)}{x^4} = \frac{2x(x-1)}{x^4} = \frac{2(x-1)}{x^3}$$ 3 分

令 y'=0，得唯一驻点 x=1.

$$y'' = \frac{2x^3-6x^2(x-1)}{x^6} = \frac{-2x^2(2x-3)}{x^6} = \frac{-2(2x-3)}{x^4}$$ 6 分

令 y''=0，得 $x=\frac{3}{2}$.则由 $y''(1)=2>0$，知 y 在 x=1 处取得极小值，$y(1)=0$.

当 $0<x<\frac{3}{2}$时，$y''>0$，当 $x>\frac{3}{2}$时，$y''<0$，

∴　y 的拐点为$(\frac{3}{2},\frac{1}{9})$. 9 分

13. 解:由于 $f(x)$ 到处都有连续的曲率，则 $f'(x)$，$f''(x)$处处连续. 只要考察 x=1 处情况即可.

这时

$$y'_-(1) = \lim_{x\to1^-}\frac{x^3-1}{x-1} = 3,\quad y''_-(1) = \lim_{x\to1^-}\frac{3x^2-3}{x-1} = 6,$$ 3 分

则

$$y'_+(1) = \lim_{x\to1^+}\frac{ax^2+bx+c-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}(2ax+b) = 2a+b = 3,$$

$$y''_+(1) = \lim_{x\to1^+}\frac{2ax+b-3}{x-1} = \lim_{x\to1^+}2a = 6,\quad \therefore a = 3,$$ 6 分

$b=3-2a=-3$，

又 $\lim\limits_{x\to 1}(ax^2+bx+c-1)=a+b+c-1=0,\quad \therefore c=1.$ 9 分

14. (1)解： $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x}=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C.$$ 4 分

(2)解： $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx+\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx,$

$$\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx\overset{x-1=t^2}{=\!=\!=}\int_0^1\frac{2t}{(t^2+1)t}dt=2\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx\overset{x-1=t^2}{=\!=\!=}\int_1^{+\infty}\frac{2}{t^2+1}dt=2\arctan t\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\quad\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=\pi.$$ 5 分

15. 解:利用被积函数的奇偶性，有

$$\mathrm{I}=0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}max\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\cos x\right\}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}max\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\cos x\right\}dx$$ 5 分

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}dx=2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\sqrt{2}x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

$$=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}$$ 9 分

16. 证明：令 $x=\pi-t$，$0\le t\le\pi$，故

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)dt-\int_0^{\pi}tf(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx,$$

移项后得 $\displaystyle\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx.$ 5 分

由此结论，有

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}=-\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}.$$ 9 分

四、应用题（12 分）

17. 解:

(1) $$V_1 = \pi\int_a^2 (2x^2)^2\,dx = \frac{4}{5}\pi(32-a^5),$$

$$V_2 = \pi a^2\cdot 2a^2 - \pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}dy = \pi a^4.$$ 6 分

(2) $$V(a) = V_1 + V_2 = \frac{4}{5}\pi(32-a^5)+\pi a^4,$$

$$V'(a) = 4\pi a^3(1-a) = 0 \quad\Rightarrow\quad a = 1,$$

这是唯一驻点, 则该驻点即为最值点, 所以 a=1 为最大值点,且最大值为$\frac{129}{5}\pi$.

12 分

五、证明题（每题 7 分，共 14 分）

18. 证明：令 $f(x) = e^x - x^2 + 2ax - 1$，有 $f'(x) = e^x - 2x + 2a$，$f''(x) = e^x - 2$.

当 $0 < x < \ln 2$ 时，$f''(x) < 0$，故 $f'(x)\searrow$，

$x \geq \ln 2$ 时，$f''(x) \geq 0$，故 $f'(x)\nearrow$，

$\therefore \quad f'(x) > f'(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 + 2a > 0.$

综上，当 $x > 0$ 时，$f'(x) > 0$，$\therefore$ $f(x)\nearrow$，从而

$$f(x) > f(0) = 0,$$

即 $$e^x > x^2 - 2ax + 1.$$ 7 分

19. 证明：令 $G(x)=(x-a)\int_x^b f(t)dt,$ 4 分

则 $G(x)$在$[a,\ \mathrm{b}]$连续，且 $G(a)=G(b)=0$.

由 $f(x)$在$[a,\ \mathrm{b}]$连续，知 $G(x)$在$[a,\ \mathrm{b}]$可导.

$\therefore$ 由罗尔定理，存在$\xi\in(a,b)$使得 $G'(\xi)=0$，

即 $$G'(\xi) = \int_\xi^b f(x)dx - (\xi-a)f(\xi) = 0.$$

也即 $$(\xi-a)f(\xi) = \int_\xi^b f(x)dx.$$ 7 分