

# 第十一章 重积分

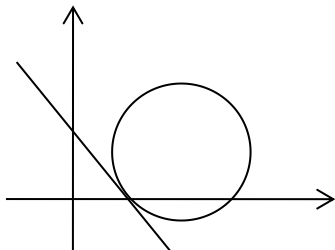
## 习题 11.1 二重积分的概念与性质

1. 利用二重积分的性质, 比较下列二重积分的大小.

(1)  $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$  与  $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ , 其中  $D$  是由圆周  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$  所围成.

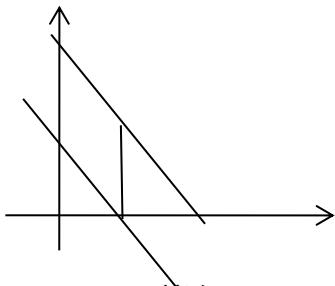
【解析】由题意及图像可知  $x+y=1$  为切线,  $x+y \geq 1$ , 则  $(x+y)^2 \leq (x+y)^3$ , 由保号性可知

$$\iint_D (x+y)^2 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$



(2)  $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$  与  $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ , 其中  $D$  是由三角形闭区域, 三顶点分别为  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(2,0)$ .

【解析】



由图像可知  $1 \leq x+y \leq 2 < e$ , 则  $0 \leq \ln(x+y) < 1$ , 所以  $\ln(x+y) \geq [\ln(x+y)]^2$ ,

则

$$\iint_D \ln(x+y) d\sigma \geq \iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$$

2. 利用二重积分的性质估计下列积分的值.

(1)  $I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$ , 其中  $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ .

【解析】(1)  $S_D = \pi^2$ ;

(2)  $f(x,y) = \sin^2 x \sin^2 y$ ,  $0 \leq f(x,y) \leq 1$ , 则  $I \in [0, \pi^2]$ .

(2)  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

【解析】(1)  $S_D = 4\pi$ ;

(2)  $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 9$  在  $D$  上最值问题, 计算最大值为 25, 最小值为 9;

(3)  $I \in [36\pi, 100\pi]$ .