安徽大学 2015—2016 学年第一学期

《高等数学 A（三）》（概率论与数理统计）考试试卷（A 卷）

试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、 0.6　2、 0.2　3、 11　4、 1　5、(39.51, 40.49)

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6、 D　7、 D　8、 B　9、A　10、D

三、计算题（每小题 12 分，共 60 分）

11、【解】（1）设 A:第一次取出的是新球； B:第二次取出的两只都是新球，则有

$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{2}{3}\times\frac{3}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{6}{15}=\frac{4}{15}$　6 分

（2）$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\frac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{6}{15}}{\frac{4}{15}}=\frac{1}{2}$　12 分

12、【解】（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{100}^{+\infty}\frac{A}{x^2}dx=-\frac{A}{x}\Big|_{100}^{+\infty}=\frac{A}{100}\Rightarrow A=100$　3 分

（2）$P(X>1000)=\int_{1000}^{+\infty}\frac{100}{x^2}dx=\frac{1}{10}$　6 分

（3）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0 & x\le 100,\\ \int_{100}^{x}\frac{100}{t^2}dt, & x>100\end{cases}=\begin{cases}0 & x\le 100,\\ 1-\frac{100}{x}, & x>100\end{cases}$　9 分

（4）由题意可知 Y 服从 $B(5,p)$，其中 $p=P(X>1000)=\frac{1}{10}$，故 Y 的分布律为

$$P(Y=k)=C_5^k\left(\frac{1}{10}\right)^k\left(\frac{9}{10}\right)^{5-k},k=0,1,2,\cdots 5$$　12 分

13【解】(1) 由题设条件 $P(XY=0)=1$ 可知 $P(XY\ne 0)=0$，结合边缘与联合关系得 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0

3 分

（2）利用同一表格法得 Z 的分布律为：

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

6 分

（3）$P(XZ=-1)=P(X=-1,Z=1)=P(X=-1,\max(X,Y)=1)=P(X=-1,Y=1)=0$ ，

$P(XZ=1)=P(X=1,Z=1)=P(X=1,\max(X,Y)=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=\frac{1}{4}$

$P(XZ=0)=\frac{3}{4}$；则 XZ 的分布律为：

XZ	-1	0	1
P	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

9 分

$Cov(X,Z)=EXZ-EXEZ=\frac{1}{4}-0\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ 12 分

14、【解】 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$ 4 分

（1） $EX=\iint\limits_D x\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$ ， $EY=\iint\limits_D y\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$ ， $EXY=\iint\limits_D xy\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$ ，

所以 $Cov(X,Y)=EXY-EXEY=0$ ，即 $\rho_{XY}=0$ ，则 X，Y 不相关； 6 分

（2） $f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy & |x|<1\\ 0 & |x|\ge 1\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & |x|<1\\ 0 & |x|\ge 1\end{cases}$,

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx & |y|<1\\ 0 & |y|\ge 1\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & |y|<1\\ 0 & |y|\ge 1\end{cases}$,

显然 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$ ，则 X ，Y 不独立. 12 分

15、【解】（1） $E(X)=\int_\theta^{+\infty}x\cdot 2e^{-2(x-\theta)}dx=\frac{1}{2}+\theta$ ，

令 $E(X)=\overline{X}\Rightarrow\frac{1}{2}+\theta=\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}=\overline{X}-\frac{1}{2}$ 6 分

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本观测值，则似然函数：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^n(x_i-\theta)}, & x_i\ge\theta\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

当 $x_i\ge\theta(i=1,2,\cdots n)$ 时， $\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^n(x_i-\theta)$ ，从而 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2n>0$ ，

所以 $L(\theta)$ 关于 θ 单调增加，所以 $\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ ，

则对应的极大似然估计量为$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$. 12 分

四、应用题（每小题 5 分，共 5 分）

16、【解】设 $H_0:\mu=70,\ H_1:\mu\neq 70$

令
$$T=\frac{\overline{X}-70}{S/\sqrt{36}}\sim t(35)$$

因 $n=36$，$\overline{x}=66.5$，$S=15$，$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(35)=2.03$，计算得：

$$T=-1.4>-2.03，$$

因此接受假设 H_0，即可以认为这次考生全体考生的平均成绩为 70 分. 5 分

五、证明题（每小题 5 分，共 5 分）

17、【证明】

$E(X+Y)=0$，

$D(X+Y)=DX+DY+2\rho\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=3$

$P(|X+Y|\geq 6)\leq\frac{3}{6^2}=\frac{1}{12}$ 5 分