安徽大学 2009-2010 学年第二学期《高等数学 A（二）、B（二）》

考试试卷（A 卷）参考答案与评分标准

一、填空题（本大题共五小题，每小题 2 分，共 10 分）

1、$\sqrt{3}$；　2、0；　3、$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi/2} f(x,y)\mathrm{d}x$；　4、$\dfrac{3}{2}$；　5、$\dfrac{5}{3}$

二、选择题（本大题共五小题，每小题 2 分，共 10 分）

6、 A；　7、D；　8、D；　9、A；　10、A.

三、计算题（本大题共五小题，其中第 11、12、13 题每小题 10 分，第 14、15 题每小题 12 分，共 54 分）

11. 解. 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$。则曲面 S 在点 $(1,1,2)$ 处的法向量为

$$(F_x,F_y,F_z)_{(1,1,2)}=(2x,2y,-1)_{(1,1,2)}=(2,2,-1)$$

由题设可知，平面 Π 通过法线 L，故

$$1+a-2+b=0,$$

$$(1,a,-1)\cdot(2,2,-1)=0$$

即 $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+3=0 \end{cases}$，由此解得 $a=-\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{5}{2}.$

12. 解：令 $P(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$，则 $I=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$。

取一小圆周 $C_\varepsilon: x^2+y^2=\varepsilon^2$，$\varepsilon>0$ 充分小，使得 C_ε 完全位于 L 所围成的区域内，

取逆时针方向。设 D_ε 为由 L 与 C_ε 所围成的区域，则由 Green 公式得

$$\int_{L+C_\varepsilon} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

所以 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\int_{C_\varepsilon} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

$$=-\int_0^{2\pi}\frac{(\varepsilon\sin\theta)(-\varepsilon\sin\theta)-(\varepsilon\cos\theta)(\varepsilon\cos\theta)}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi$$

13. 解：设 $x=R\cos u, y=R\sin u, z=v$，则 Σ 对应于 $D: 0\le u\le 2\pi, 0\le v\le h$。

$$x_u=-R\sin u, y_u=R\cos u, z_u=0\text{，}\quad x_v=0, y_v=0, z_v=1$$

故 $E=R^2, F=0, G=1$，$\sqrt{EG-F^2}=R$.

于是，原式 $=\iint\limits_D \dfrac{v}{R^2+v^2}R\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$=R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}u\int_0^h \frac{v}{R^2+v^2}\mathrm{d}v=R\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\ln(R^2+v^2)\big|_0^h$$

$$=\pi R[\ln(R^2+h^2)-2\ln R]=2\pi R\ln\frac{\sqrt{R^2+h^2}}{R}\text{。}$$

14. 解：由题设， $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ 。

所以 $f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$，

上述级数的收敛域为 $[-1,1]$，又因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故令 $x=1$，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=f(1)=\frac{\pi}{4}.$$

15. 解：（1） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y, \dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(u)e^x\cos y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y+f'(u)e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y-f'(u)e^x\sin y.$$

（2）将（1）中结果代人方程，得 $e^{2x}z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}$，即 $f''(u)-f(u)=0$

这是一个齐次线性常系数方程，相应的特征方程为 $\lambda^2-1=0$，特征根为 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$

故 $f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$，其中 C_1, C_2 为任意常数。

四、应用题（本大题共两小题，其中第 16 题 10 分，第 17 题 6 分，共 16 分）

16. 解：设所围成的圆的半径为 x，长方形的长、宽分别为 y, z 。

原问题转化为求函数 $S=\pi x^2+yz$ 在条件 $2\pi x+2(y+z)=l$ 下的最大值。

为此，构造 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=\pi x^2+yz-\lambda(2\pi x+2y+2z-l)$ 。

$L_x=2\pi x-2\pi\lambda=0, L_y=z-2\lambda=0$ ， $L_z=y-2\lambda=0$ ， $L_\lambda=2\pi x+2y+2z-l=0$ 。

得 $x=\lambda, y=z=2\lambda$ ，代入 $L_\lambda=0$ 得 $\lambda=\dfrac{l}{2\pi+8}$ 。

即 $x=\dfrac{l}{2\pi+8}, y=z=\dfrac{l}{\pi+4}.$

17. 解：由质量公式得

$$M=\int_L\rho(x,y)\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

五、证明题（本大题共两小题，其中第 18 题 6 分，第 19 题 4 分，共 10 分）

18. 证明：$\ln\dfrac{n+1}{n}=\ln(1+\dfrac{1}{n})$ 为 n 的单调递减，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n})=0$ 。

故由 Leibniz 判别法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$ 收敛。

但 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\dfrac{n+1}{n}=1$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故由比较判别法的可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}$ 发散。

综上所述，原级数条件收敛。

19. 证明：设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ，则 $F'(x)=f(x).$

左边 $=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)F(z)\Big|_{z=x}^{z=y}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)[F(y)-F(x)]\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 f(x)\frac{1}{2}[F(y)-F(x)]^2\Big|_{y=x}^{y=1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]^2\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{6}[F(x)-F(1)]^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}[F(1)]^3=\frac{1}{6}(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t)^3=\text{右边}。$$