院系　　　　　　班级　　　　　　　姓 名　　　　　　　学号

# 第九章　空间解析几何

## 习题 9.2　向量代数

1. 已知两点 $A\left(4,\sqrt{2},1\right)$ 和 $B\left(3,0,2\right)$.(1)求 $\overrightarrow{AB}$ 的模；(2)求与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量；

(3)求 $\overrightarrow{AB}$ 的方向角.

2. 已知 $\vec{\alpha}=\left(a,5,1\right)$ 与 $\vec{\beta}=\left(3,1,b\right)$ 共线，求 $a$ 与 $b$ 的值.

3.设 $\vec{\alpha}=\left(3,-1,-2\right)$,$\vec{\beta}=\left(1,2,-1\right)$，求 $\left(1\right)\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ 及 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$；$\left(2\right)\left(-2\vec{\alpha}\right)\cdot\left(3\vec{\beta}\right)$ 及 $\vec{\alpha}\times2\vec{\beta}$；

$\left(3\right)\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的夹角余弦；$\left(4\right)$ 以 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 为邻边的平行四边形面积；$\left(5\right)$ 既垂直于 $\vec{\alpha}$ 又垂直于 $\vec{\beta}$ 的一个向量；$\left(6\right)\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}\right)$.

4. 已知$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$垂直，且$\left|\vec{\alpha}\right|=3$，$\left|\vec{\beta}\right|=4$，求$\left|\left(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\times\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)\right|$.

5. 已知$\left|\vec{\alpha}\right|=10$，$\left|\vec{\beta}\right|=2$.(1)若$\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}=12$，求$\left|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right|$；(2)若$\left|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right|=16$，求$\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}$.

6. 设$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$均为单位向量，且满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，求$\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{c}+\vec{c}\bullet\vec{a}$.

# 习题 9.3　空间的平面与直线

1. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面间夹角的余弦.

2. 求过点 $M_1\left(4,1,2\right)$ 和 $M_2\left(-3,5,-1\right)$ 且垂直于平面 $\pi$：$6x-2y+3z+7=0$ 的平面方程.

3. 求通过点 $\left(2,1,1\right)$ 且垂直于直线 $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ 的平面方程.

4. 一直线过点 $(-1,2,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$，求该直线的方程.

5.一直线过点 $(1,2,1)$，又与直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=-z$ 相交且垂直于直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$，求该直线方程.

6. 求直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

# 习题 9.4　几种常见的二次曲面

1. 求以点 $A(3,2,1)$ 为球心，且与平面 $x+2y-3z=18$ 相切的球面方程.

2. 求下列旋转面的方程，并指出它的名称.

(1) 曲线 $\begin{cases} y=2x \\ z=0 \end{cases}$ 绕 $y$ 轴旋转一周；

(2) 曲线 $\begin{cases} z^2=5x \\ y=0 \end{cases}$ 绕 $x$ 轴旋转一周；

(3) 曲线 $\begin{cases} x^2+z^2=9 \\ y=0 \end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转一周.

4. 求两曲面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和 $z^2=x^2+y^2$ 的交线在 $xoy$ 坐标面的投影曲线的方程，并作图.

# 自 测 题

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）.

1. 设 $\overrightarrow{AB}=\{-3,0,4\},\overrightarrow{AC}=\{5,-2,-14\}$，则 $\angle BAC$ 的平分线上的单位向量是______.

2. 已知 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=5,\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3},\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b},\vec{d}=\lambda\vec{a}+17\vec{b}$，若 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 垂直，则 $\lambda=$___.

3. 直线 $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ 与平面 $2x+y-z-3=0$ 的夹角是______.

4. 过直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$ 且平行于直线 $L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ 的平面方程为______________.

5. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=0\end{cases}$ 在 $xoy$ 坐标面上的投影曲线为___________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.

6. 下列方程表示的直线中与直线 $L:\begin{cases}x+y+z=1\\x-y-2z=1\end{cases}$ 平行的是（　　）.

$(A)\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-2}$　　$(B)\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{-2}$

$(C)\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{2}$　　$(D)\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{2}$

7. 两直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$ 的夹角为（　　）.

$(A)\frac{\pi}{6}$　　$(B)\frac{\pi}{4}$　　$(C)\frac{\pi}{3}$　　$(D)\frac{\pi}{2}$

8. 设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线 $L$（　　）.

$(A)$ 平行于 $\pi$　　$(B)$ 在 $\pi$ 上　　$(C)$ 垂直于 $\pi$　　$(D)$ 与 $\pi$ 斜交

9. 直线 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$ 与直线 $\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$ 的位置关系是（　　）.

$(A)$ 平行　　$(B)$ 相交于一点　　$(C)$ 异面　　$(D)$ 重合

10. $xoz$ 坐标面上曲线 $z=e^x\ (x>0)$ 绕 $z$ 轴旋转所得的旋转面方程为（　　）.

$(A)\sqrt{y^2+z^2}=e^x$　　$(B)y^2+z^2=e^x$　　$(C)z=e^{x^2+y^2}$　　$(D)z=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）.

11. 设 $\vec{a}=\{3,0,4\},\vec{b}=\{-1,2,-2\}$，求与向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 均垂直的单位向量.

12. 设一平面经过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

13. 过平面 $\pi_1: x+28y-2z+17=0$ 和 $\pi_2: 5x+8y-z+1=0$ 的交线，作球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的切平面，求该切平面方程.

14. 求过点 $M_0\left(2,1,3\right)$ 且与直线 $l:\begin{cases}2x+y+2z=0\\x+y-3=0\end{cases}$ 垂直相交的直线方程.

15. 设 $l_1,l_2$ 为两条共面直线，$l_1$ 的方程为 $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-5}{2}$；$l_2$ 通过点 $\left(2,-3,-1\right)$，且与 $x$ 轴正向夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，与 $z$ 轴正向夹角为锐角，求 $l_2$ 的方程.

16. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $y+z=1$ 的交线在 $xoy$ 坐标面上的投影方程，并确定交线类型.

# 第十章　多元函数微分学

## 习题 10.1　多元函数的基本概念

1. 已知 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

2. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3. 证明下列极限不存在.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$

# 习题 10.2　偏导数与全微分

1. 求下列函数的一阶偏导数.

$(1)\ z=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$；

$(2)\ z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$；

$(3)\ u=x^{\frac{y}{z}}$；

$(4)\ u=\arctan(x-y)^2$.

2. 设 $f(x,y,z)=(z-a^{xy})\sin\ln x$，求 $f(x,y,z)$ 在点 $(1,0,2)$ 处的3个一阶偏导数.

3. 设$u=e^{\frac{x}{y^2}}$，证明$2x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$ .

4. 设$z=x\ln(xy)$，求$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$与$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

5. 设$z=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$， 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

6. 求下列函数的全微分.

$(1)\ z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$

$(2)\ u=\ln\left(x^2-y^2+e^z\right)$

7. 设$u=\left(\dfrac{y}{z}\right)^{\frac{1}{x}}$，求$du(1,1,1)$.

# 习题 10.3　多元复合函数微分法

1. 求下列复合函数的偏导数.

$(1)\ z=\sin(2u+3v), u=xy, v=x^2+y^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$(2)\ z=u^2\ln v$，其中 $u=\dfrac{x}{y}, v=3x-2y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+g(\dfrac{y}{x})$，其中 $f$ 具有 二阶连续偏导数，$g$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 设$z=\dfrac{y}{f(u)}$，其中$u=x^2-y^2$，$f(u)$为可导函数，求$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设$f(u,v,w)$具有二阶连续偏导数，求函数$z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$的二阶连续偏导数

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$及$dz$.

5. 设$u=f(r),r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，若$u$满足调和方程$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，试求函数

$u$.

# 习题 10.4　隐函数求导法则

1. 设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $e^{z}-xyz=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3. 设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 是由方程组 $\begin{cases}u^2-v+x=0\\ u+v^2-y=0\end{cases}$ 确定的 $x,y$ 的隐函数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

4. 设$\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

5. 设$u = f(x,y,z)$有连续偏导数，$y = y(x), z = z(x)$分别由方程$e^{xy} - y = 0$和$e^z - xz = 0$所确定，求$\dfrac{du}{dx}$.

6. 设$y = g(x,z)$，而$z$是由方程$f(x-z,xy)=0$所确定的$x,y$的函数，其中$g,f$具有一阶偏导连续，$f_1^{'} - xf_2^{'}g_2^{'} \neq 0$，求$\dfrac{dz}{dx}$.

# 习题 10.5　偏导数在几何上的应用

1. 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中，求与平面 $x+2y+z+4=0$ 平行的切线方程.

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在 $M\left(1,1,1\right)$ 处的切线与法平面方程.

3. 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使得曲面在该点的法线垂直于平面 $x+3y+z=0$，并求法线方程.

4. 设直线 $l_1:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 $\pi$ 上，而平面 $\pi$ 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求 $a,b$ 之值.

# 习题 10.7 多元函数的极值

1. 求函数 $z = e^{2x}\left(x + y^2 + 2y\right)$ 的极值.

2. 求函数 $z = x^2 y\left(4 - x - y\right)$ 在 $x = 0, y = 0$ 及 $x + y = 6$ 围成的区域上的最大值及最小值.

3. 求内接于半径为 $R$ 的球且有最大体积的长方体.

4. 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y + z = 1$ 的交线为一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.

# 自 测 题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$______.

2. 设 $z=e^{\sin xy}$，则 $dz=$______.

3. 设 $z=z(x,y)$ 可微，且满足 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$，且 $z\left(x,x^2\right)=1$，则 $z(x,y)=$______.

4. 设 $f(x,y,z)=e^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则 $f_x'(0,1,-1)=$______.

5. 函数 $z=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值是______.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.

6. 设 $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则函数 $z$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）.

$(A)$ 不连续

$(B)$ 连续，但偏导数 $z_x'(0,0)$ 和 $z_y'(0,0)$ 不存在

$(C)$ 连续且偏导数 $z_x'(0,0)$ 和 $z_y'(0,0)$ 都存在，但不可微

$(D)$ 可微

7. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 下面 4 条性质：

① $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处连续　　② $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数连续

③ $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处可微　　④ $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数存在

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 $P$ 推出性质 $Q$，则有（　　）.

$(A)$ ②⇒③⇒①　　　　$(B)$ ③⇒②⇒①

$(C)$ ③⇒④⇒①　　　　$(D)$ ③⇒①⇒④

8. 已知函数 $f\left(x+y,x-y\right)=x^2-y^2$ 对任何 $x$ 与 $y$ 成立，则 $\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}+\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}$ 等于（　　）.

$(A)\ 2x-2y$　　　$(B)\ 2x+2y$　　　$(C)\ x+y$　　　$(D)\ x-y$

9. 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{1}{4}\left(x^2+y^2\right) \\ y=4 \end{cases}$ 在 $P_0\left(2,4,5\right)$ 点的法平面方程为（　　）.

$(A)\ x+y-7=0$　　$(B)\ x+z-7=0$　　$(C)\ x-y+7=0$　　$(D)\ x-z-7=0$

10. 函数 $f\left(x,y\right)=x^2-ay^2\left(a>0\right)$ 在 $\left(0,0\right)$ 处（　　）.

$(A)$ 不取极值　　　　$(B)$ 取极小值

$(C)$ 取极大值　　　　$(D)$ 是否取极值依赖于 $a$

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）.

11. 设 $z=\left(x^2+y^2\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$，求 $dz,\dfrac{\partial z^2}{\partial x\partial y}$.

12. 设 $u=xy,v=\dfrac{x}{y},z=z\left(u,v\right)$ 对每个变量有二阶连续偏导数，计算 $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

13. 设 $z=f\left(2x-y\right)+g\left(x,xy\right)$，其中 $f\left(t\right)$ 二阶可导，$g\left(u,v\right)$ 具有连续二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z^2}{\partial x\partial y}$.

14. 设 $u=u\left(x,y\right),v=v\left(x,y\right)$，由方程组 $\begin{cases} u^2-v=3x+y \\ u^2-2v^2=x-2y \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

15. 设曲面$F\left(x,y,z\right)=0$在点$P\left(1,1,1\right)$处法向量为$\vec{n}=\left\{1,2,3\right\}$，求曲面$F\left(x,y^2,z^3\right)=0$在点$P\left(1,1,1\right)$处的法线与切平面方程.

16. 在第一卦限内作椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的切平面，使该切平面与三个坐标平面围成四面体体积最小，求切点坐标.

# 第十一章　重积分

## 习题 11.1 二重积分的概念与性质

1. 利用二重积分的性质，比较下列二重积分的大小.

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，其中 $D$ 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成.

(2) $\iint\limits_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint\limits_D \left[\ln(x+y)\right]^2 d\sigma$，其中 $D$ 是由三角形闭区域，三顶点分别为 $(1,0)$，$(1,1)$，$(2,0)$.

2. 利用二重积分的性质估计下列积分的值.

(1) $I=\iint\limits_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$ .

(2) $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9) d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$ .

# 习题 11.2　二重积分的计算

1. 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D (3x+2y)d\sigma$，其中 $D$ 是由 $x=0, y=0$ 及直线 $x+y=2$ 所围成的区域.

(2) $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=2, y=x$ 及双曲线 $xy=1$ 所围成的区域.

(3) $\iint\limits_D |\cos(x+y)|dxdy$，其中 $D$ 是由 $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi - x$ 确定的区域.

2. 画出下列二次积分所表示的二重积分的积分区域，并交换积分次序.

$(1)\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$；

$(2)\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)dy$ .

3. 计算下列二重积分，必要时交换积分次序.

$(1)\int_0^a dx\int_x^a e^{y^2}dy$；

$(2)\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}dy$ .

4. 选择适当的坐标系计算下列积分：

(1) $\iint\limits_{D} e^{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D$ 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的区域.

(2) $\iint\limits_{D}(x+y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le x+y\right\}$.

(3) $\iint\limits_{D}\frac{x^2}{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le x\right\}$.

(4) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy$，其中$D$是由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4$和直线$y=0, y=x$所围成的第一象限部分.

(5) $\iint\limits_D xydxdy$，其中$D$由$xy=a, xy=b, y^2=cx, y^2=dx$所围成的第一象限部分$\left(0<a<b, 0<c<d\right)$.

5. 求由柱面$x^2+y^2=2ax$围成的柱体被球面$x^2+y^2+z^2=4a^2$所截得部分的体积.

# 习题 11.3　三重积分

1. 计算下列三重积分:

$(1)\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$，其中$V$ 由 $z=xy, y=x, x=1$ 和 $z=0$ 所围成.

$(2)\iiint\limits_V zdxdydz$，其中$V$ 由 $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h\ (R>0, h>0)$ 所围成.

$(3)\iiint\limits_V zdxdydz$，其中$V$ 由球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与抛物面 $z=\dfrac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)$ 所围成.

(4) $\iiint\limits_V z\,dxdydz$，其中 $V$ 由 $x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$ 及 $x^2+y^2\le z^2$ 所围成.

(5) $\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz$，其中 $V$ 为椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

2. 设物体占有的空间区域为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面在第一卦限内的部分，点 $(x,y,z)$ 处的体密度为 $\rho(x,y,z)=xyz$，求物体的质量.

# 习题 11.4　重积分的应用

1. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

2. 求由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}, z=x^2+y^2$ 所围立体的表面积.

3. 球体 $x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$ 内，各点处的密度大小等于该点到坐标原点的距离的平方，试求该球体的质心.

4. 求由 $y^2=\frac{9}{2}x$ 和 $x=2$ 围成的均匀薄板对 $x$ 轴及 $y$ 轴的转动惯量（设面密度为 $\rho$ ）.

# 自　测　题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 交换二次积分次序：$\int_0^1 dx\int_{1-x^2}^1 f(x,y)dy+\int_1^e dx\int_{\ln x}^1 f(x,y)dy=$____________.

2. 计算 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy=$____________.

3. 设 $f(x)$ 连续，$f(1)=1,F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x^2+y^2)dxdy,(t\ge 0)$，则 $F'(1)=$______.

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz=$________，其中 $\Omega$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域.

5. 设立体 $\Omega$ 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 围成，则其体积为_________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.

6. 设 $f(u,v)$ 连续，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 等于（　　）.

$(A)\ \int_0^{\frac{1}{2}} dy\int_0^1 f(x,y)dx$　　　　$(B)\ \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$

$(C)\ \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$　　　　$(D)\ \int_0^{\frac{1}{2}} dy\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x,y)dx$

7. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid -a\le x\le a,x\le y\le a\}$，$D_1$ 表示 $D$ 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy=$（　　）

$(A)\ 2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y dxdy$　　　　$(B)\ 2\iint\limits_{D_1} xydxdy$

$(C)\ 4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　　　　$(D)\ 0$

8. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，且 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le t^2\}$，则 $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{1}{\pi t^2}\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$（　　）

$(A)\ f(0,0)$　　$(B)\ -f(0,0)$　　$(C)\ f'(0,0)$　　$(D)$ 不存在

9. 设有空间区域

$$\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le R^2,z\ge 0\},\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le R^2,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\},$$

则有（　　）

$(A)\ \iiint\limits_{\Omega_1} xdxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2} xdxdydz$　　　　$(B)\ \iiint\limits_{\Omega_1} ydxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2} ydxdydz$

$(C)\ \iiint\limits_{\Omega_1} z dxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z dxdydz$　　　　$(D)\ \iiint\limits_{\Omega_1} xyz dxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz dxdydz$

10. 已知空间区域$\Omega$由$x^2+y^2\le z, 1\le z\le 2$确定，$f(z)$连续，则$\iiint\limits_{\Omega} f(z)dv =$（　　）

$(A)\ \pi\int_1^2 z^2 f(z)dz$　　　　$(B)\ 2\pi\int_1^2 f(z)dz$

$(C)\ 2\pi\int_1^2 zf(z)dz$　　　　$(D)\ \pi\int_1^2 zf(z)dz$

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）.

11. 计算二重积分$\iint\limits_D \left|y-x^2\right| dxdy$，其中$D$由$|x|\le 1, 0\le y\le 2$所围成.

12. 计算二重积分$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le y\le x, x^2+y^2\le 2x\right\}$.

13. 计算三重积分 $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 $V$ 由 $x=0, y=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成.

14. 计算三重积分 $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z)dxdydz$，其中 $V$ 是由曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转一周而成的旋转曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体.

15. 计算三重积分 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$，其中 $V$ 由曲面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成.

16. 求由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}, z=x^2+y^2$ 所围成立体的表面积.

# 第十二章　曲线积分与曲面积分

## 习题 12.1　第一类曲线积分

1. 计算$\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$，其中$L: x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, t\in[0,2\pi]$.

2. 计算$\oint_L \cos\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$，直线$y=x$与$y$轴在第一象限内围成的图形的边界.

3. 计算$\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds$，其中$L: x^2+y^2=ax(a>0)$.

## 习题 12.2　第二类曲线积分

1. 计算 $\int_L y^2dx + x^2dy$，其中 $L$ 为

$(1)$ 圆周 $x^2+y^2=R^2$ 的上半部分，方向为逆时针方向；

$(2)$ 从点 $M(R,0)$ 到点 $N(-R,0)$ 的直线段.

2. 计算 $\int_L xdy - ydx, L$：从 $A(-1,0)$ 经过 $x^2+y^2=1$ 上半圆到 $B(0,1)$，再经过 $y=1-x^2$ 到 $C(1,0)$.

3. 计算第二类曲线积分$\oint \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$，方向为逆时针方向.

4. 计算$\int_L (x+y)dx+(x-y)dy$，其中$L$为

$(1)$椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的上半部分，从$(a,0)$到$(-a,0)$；

$(2)$从点$(a,0)$到点$(-a,0)$的直线段.

5. 设$\overrightarrow{F}=\{y,z,x\}$，$L$为依参数增加方向进行的纽形螺线

$$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt \quad t\in[0,2\pi]$$

计算$\int_L \overrightarrow{F}\cdot d\vec{r}$.

# 习题 12.3　Green 公式

1. 计算曲线积分 $\oint_{L^+} xy^2dy - x^2ydx$，其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=R^2$.

2. 计算曲线积分 $\int_L \left(e^x \sin y - ay\right)dx + \left(e^x \cos y - bx\right)dy$，其中 $L$ 为从 $A\left(a,0\right)$ 到 $O\left(0,0\right)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$.

3. 计算曲线积分 $\oint_{L^+} \frac{xdy - ydx}{4x^2+y^2}$，其中 $L$ 是以点 $\left(1,0\right)$ 为中心，$R$ 为半径的圆周 $\left(R>1\right)$，取顺时针方向.(提示：挖去一个小椭圆)

4. 曲线积分 $\int_L \left(e^x + 2f(x)\right) y dx - f(x) dy$ 与路径无关，且 $f(1) = 1$，求

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \left(e^x + 2f(x)\right) y dx - f(x) dy .$$

5. 计算 $I = \int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$，其中 $L$ 是从 $A(-1,0)$ 沿抛物线 $y = x^2 - 1$ 到点 $B(2,3)$ 的曲线弧.

6. 选择常数 $a, b$ 使得 $\left(2ax^3y^3 - 3y^2 + 5\right)dx + \left(3x^4y^2 - 2bxy - 4\right)dy$ 是某个二元函数 $U(x, y)$ 在全平面内的全微分，并求 $U(x, y)$.

# 习题 12.4　第一类曲面积分

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_{S}\frac{dS}{\left(1+x+y\right)^{2}}$，其中 $S$ 为四面体 $x+y+z\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ 的边界.

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_{S}\left(xy+yz+zx\right)dS$，其中 $S$ 为锥面 $z=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ 被曲面 $x^{2}+y^{2}=2ax$ 所割下的部分.

3. 计算曲面积分$\oiint\limits_{S} x^2 dS$，其中$S$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$所围成区域的全部界面.

4. 求抛物面壳子$z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\left(0\le z\le 1\right)$的质量，此壳的密度按规律$\rho = z$而变更.

# 习题 12.5　第二类曲面积分

1. 计算下面第二类曲面积分：

$(1)$ $\iint\limits_{S} x^2 z dydz + y^2 dzdx + zdxdy$，其中 $S$ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 的前半个柱面界于 $z=0$ 与 $z=3$ 之间的部分，取前侧.

$(2)$ $\iint\limits_{S} \left(x^2+y^2\right) dzdx + zdxdy$，其中 $S$： $z=\sqrt{x^2+y^2}\ \left(0\le z\le 1\right)$ 的下侧.

(3) $\iint\limits_{S} xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中 $S$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧.

2. 已知速度场 $\vec{v}(x, y, z) = \{x, y, z\}$，求流体在单位时间内通过上半锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 1$ 所围成的锥体表面向外流出的流量.（利用两类曲面积分关系计算）

# 习题 12.6　Gauss 公式

1. 计算曲面积分：$I=\oiint\limits_{S} 2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$，其中 $S$ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成立体的表面外侧.

2. 计算 $\iint\limits_{S} xzdxdz+yzdzdx+x^2dxdy$，其中 $S$ 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的内侧.

3. 计算 $\iint\limits_{S} \dfrac{xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中 $S$ 表示上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧.

4. 已知流体的流速 $\vec{v}(x,y,z)=\{xy,yz,zx\}$，求由平面 $z=1,x=0,y=0$ 和锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体 $\Omega$ 向外流出的流量.（设流体密度为 1）

# 习题 12.7　Stokes 公式

1. 利用 Stokes 公式计算$\oint_L ydx+zdy+xdz$，其中$L$为圆周

$$L: x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$$

从$z$轴正向看去沿逆时针方向.

2. 计算　$I=\oint_L xydx+z^2dy+zxdz$，其中$L$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与柱面$x^2+y^2=2ax\left(a>0\right)$的交线，从$z$轴正向看去沿逆时针方向.

# 习题 12.8　　场论初步

1. 求函数 $u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿 $A$ 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数和梯度.

2. 设 $u(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$，问 $u(x,y,z)$ 在点 $(x,y,z)$ 处朝何方向的方向导数最大？并求此时方向导数.

3. 设数量导数 $u=u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数，求

$(1)$ $\mathbf{grad}u$ ；　　　　$(2)$ $div(\mathbf{grad}u)$ ；　　　　$(3) rot(\mathbf{grad}u)$.

# 自　测　题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 设 $L$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\int_L\left(x^2+y-z\right)ds$

$=$____________.

2. 设 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 按逆时针方向绕行，则 $\oint_L\frac{\left(2xy-3y\right)dx+\left(x^2-5x\right)dy}{x^2+y^2}$

$=$____________.

3. 设 $S$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=2$ 所割下的有限部分，则

$\iint\limits_S\left(xy+yz+z^2\right)dS=$__________.

4. 设 $S$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，则 $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=$__________.

5. 设 $\overrightarrow{F}\left(x,y,z\right)=\left\{e^x\sin y,2xy^2+z,xzy^2\right\}$，则 $div\overrightarrow{F}\Big|_{(1,0,1)}=$____________，

$rot\overrightarrow{F}\Big|_{(1,0,1)}=$__________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.

6. 已知曲线 $L:y=x^2\left(0\le x\le\sqrt{2}\right)$，则 $\int_L xds=$（　　）.

$(A)\ 2$　　　　$(B)\ 0$　　　　$(C)\ \frac{13}{6}$　　　　$(D)\ \frac{5}{6}$

7. 设 $L$ 是柱面方程 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 $z$ 轴正向往 $z$ 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$（　　）.

$(A)\ \pi$　　　　$(B)\ 2\pi$　　　　$(C)\ 0$　　　　$(D)\ 1$

8.设曲线积分 $\oint_L\left[f\left(x\right)-e^x\right]\sin ydx-f\left(x\right)\cos ydy$ 与路径无关，其中 $f\left(x\right)$ 具有一阶连续导数，且 $f\left(0\right)=0$，则 $f\left(x\right)$ 等于（　　）.

$(A)\ \frac{1}{2}\left(e^{-x}-e^x\right)$　　$(B)\ \frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$　　$(C)\ \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)-1$　　$(D)\ 1-\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

9. 设 $S$ 为曲面 $x^2+2y^2+z^2=1$，在下面积分中，积分值均为 0 的是（　　）.

$(A)\ \iint\limits_S z^2dS$ 与 $\iint\limits_S z^2dxdy$　　　　$(B)\ \iint\limits_S zdS$ 与 $\iint\limits_S zdxdy$

$(C)\ \iint\limits_S zdS$ 与 $\iint\limits_S z^2dxdy$　　　　$(D)\ \iint\limits_S yzdS$ 与 $\iint\limits_S xdydz$

10. 设函数 $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2-z$ 在点 $P\left(1,1,1\right)$ 处沿单位向量 $\vec{v}$ 的方向增加最快，则 $\vec{v}=$（　　）.

$(A)\ \frac{1}{3}(2,2,-1)$　　$(B)\ \frac{1}{3}(-2,-2,1)$　　$(C)\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$　　$(D)\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）.

11.已知一非均匀金属丝 $L$ 的方程为 $L:x=a\left(t-\sin t\right),y=a\left(1-\cos t\right),0\le t\le 2\pi$，它在点 $\left(x,y\right)$ 处的线密度为 $\rho\left(x,y\right)=\left|y\right|$，求该金属丝的质量.

12. 计算曲线积分 $\int_L \sin 2xdx+2\left(x^2-1\right)ydy$，其中 $L$ 是曲线 $y=\sin x$ 从 $\left(0,0\right)$ 到 $\left(\pi,0\right)$ 的一段.

13.计算曲线积分$\int_L \frac{\left(xe^x+5y^3x^2+x-4\right)dx-\left(3x^5+\sin y\right)dy}{x^2+y^2}$，其中$L$为从点$A\left(-1,0\right)$沿曲线$y=\sqrt{1-x^2}$到点$B\left(1,0\right)$一段弧.

14. 计算曲面积分$\iint\limits_S zdS$，其中$S$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在柱面$x^2+y^2\le 2x$内部分.

15. 计算曲面积分 $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中 $S$ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截得的在第一卦限内的部分前侧.

16.计算曲面积分 $\iint\limits_S \left(x^3 + az^2\right)dydz + \left(y^3 + ax^2\right)dzdx + \left(z^3 + ay^2\right)dxdy$，其中 $S$ 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

# 第十三章　无穷级数

## 习题 13.1　数项级数的概念

1. 根据级数收敛与发散的定义判别下列级数敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{9}{10}\right)^{n}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{6}\pi$ .

2. 判别下列级数敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3^n}{n^2 \bullet 3^n}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{\pi}{n}$.

3. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，证明$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_{n+1}-a_n)$收敛.

# 习题 13.2　数项级数的收敛判别法

1. 用比较判别法收敛或其极限形式判别下列级数敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^{n}}$.

2. 用比值判别法或根值判别法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{(2n)!}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^{n}}{2^{n}}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}$.

3. 判别下列级数敛散性，若收敛，说明是条件收敛还是绝对收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-n}}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n^2}}{n!}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

4. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，且 $a_n\neq-1\ (n=1,2,\cdots)$，试证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{{a_n}^2}{1+{a_n}^2}$ 都收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$ 发散.

# 习题 13.3　幂级数

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n5^n}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\bullet 2^n\bullet x^{2n}$ .

2. 求下列幂级数的和函数.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n \quad (|x|<1)$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\bullet\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\quad(|x|<1)$，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n$的和.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}\quad(|x|<1)$，并求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!2^n}$的和.

3. 将函数 $f\left(x\right)=\left(1+x\right)\ln\left(1+x\right)$ 展开成 $x$ 的幂级数.

4. 将函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

# 习题 13.4　Fourier 级数

1. 设 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，且

$$f(x)=\begin{cases} x & -\pi<x<0; \\ 0 & 0\le x\le \pi. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成以 $2\pi$ 为周期的 Fourier 级数.

2. 将函数 $f(x)=x-1(0\le x\le 2)$ 展开成以 4 为周期的余弦级数.

3. 将函数 $f\left(x\right)=x^2\left(0\le x\le\pi\right)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

# 自 测 题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$__________.

2. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为__________.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$__________.

4. 函数 $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x\le 0\\ 1+x^2 & 0<x\le\pi\end{cases}$ ，以 $2\pi$ 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于__________.

5. $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式中系数 $b_3=$__________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.

6. 下列选项正确的是（　　）.

$(A)$ 若 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^2$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛；

$(B)$ 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^2$ 都收敛；

$(C)$ 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $a_n\ge\frac{1}{n}$；

$(D)$ 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $a_n\ge\frac{1}{n}$.

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$（$a$ 为常数）（　　）.

$(A)$ 绝对收敛　　　　$(B)$ 条件收敛

$(C)$ 发散　　　　$(D)$ 收敛性与 $a$ 有关

8. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\bullet\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}}(\alpha>0)$（　　）.

$(A)$ 绝对收敛　　　　$(B)$ 条件收敛

$(C)$发散　　　　　　　　　　　　$(D)$收敛性与$\alpha$有关

9. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$在$x=-1$处收敛，该幂级数在$x=2$处（　　）.

$(A)$条件收敛　$(B)$绝对收敛　$(C)$发散　$(D)$敛散性不定

10. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n \bullet 2^n}$的收敛域为（　　）.

$(A)\ (1,5)$　　$(B)\ [1,5)$　　$(C)\ (1,5]$　　$(D)\ [1,5]$

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）.

11. 判别下列级数敛散性:

$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$；　　　　$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$.

12. 讨论下列级数是绝对收敛，还是条件收敛，或发散.

$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{n}\right)$；　　　　$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

13. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 在收敛区间内和函数 $S\left(x\right)$，并计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的值.

14. 将函数 $f\left(x\right)=\ln\left(4-3x-x^2\right)$ 展开成 $x$ 的幂级数.

15. 将函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

16. 将函数 $f\left(x\right)=x+2$ 在区间 $[0,4]$ 上展开成正弦级数.