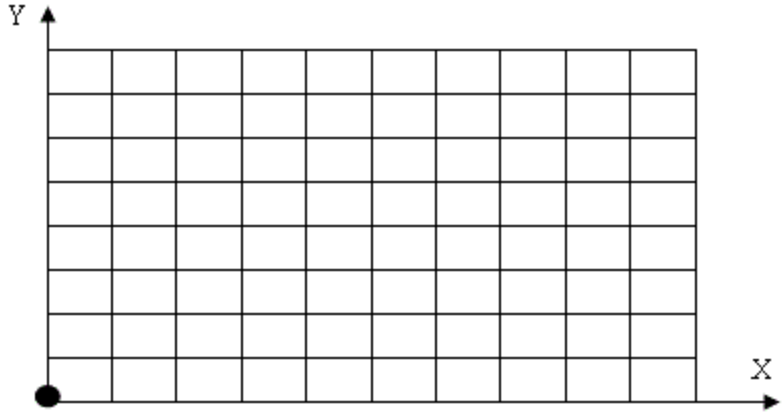
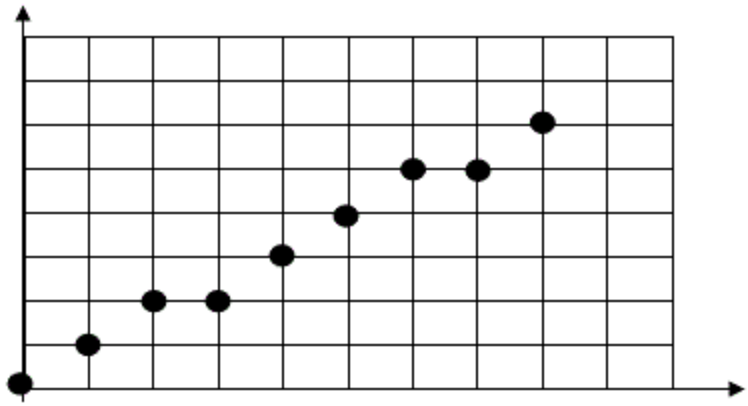
1、已知一直线段起点（0，0），终点（8，6），利用 Bresenham 算法生成此直线段，写出生成过程中坐标点及决策变量 d 的变化情况，并在二维坐标系中，标出直线上各点。



评分标准：按如下答案所写可得全分。如给出 Bresenham 的基本思想，可得 2 分，给出程序得 3 分，给出 e 得计算公式可得 2 分，给出图示得 3 分。思路或步骤正确，中间座标点算错，酌情处理。



$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $e=m-0.5=0.75-0.5=0.25>0$

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ $e=0.25+0.75-1=0>=0$

$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ $e=0+0.75-1=-0.25<=0$

$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ $e=-0.25+0.75=0.5>=0$

$\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ $e=0.5+0.75-1=0.25>=0$

$\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$ $e=0.25+0.75-1=0>=0$

$\begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}$ $e=0+0.75-1=-0.25<=0$

$\begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$ $e=-0.25+0.75=0.5>=0$

$\begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$

2、试用中点画圆算法原理推导第一象限中 y=0 到 x=y 半径为 R 的圆弧段的扫描转换算法。（要求写清原理、误差函数和递推公式，并进行优化）

评分标准：

(1) 圆的中点 Bresenham 的原理是在第一象限中 y=0 到 x=y：每次在主位移方向 x 上走

一步，y 方向上退不退步取决于中点偏差判别式的 值。

（2）偏差判别式：

$$d = F(x_M, y_M) = F(x_i + 1, y_i - 0.5) = (x_i + 1)^2 + (y_i - 0.5)^2 - R^2$$

y 方向的变化情况：

$$y_{i+1} = \begin{cases} y_i & (d < 0) \\ y_i - 1 & (d \geq 0) \end{cases}$$

(3)递推公式：

当 d<0 时，下一步的中点坐标为：M（x_i+2，y_i−0.5）。所以下一步中点偏差判别式为：

$$d_{i+1} = F(x_i + 2, y_i - 0.5) = (x_i + 2)^2 + (y_i - 0.5)^2 - R^2$$

$$= (x_i + 1)^2 + (y_i - 0.5)^2 - R^2 + 2x_i + 3 = d_i + 2x_i + 3$$

当 d≥0 时，下一步的中点坐标为：M（x_i+2，y_i−1.5）。所以下一步中点偏差判别式为：

$$d_{i+1} = F(x_i + 2, y_i - 1.5) = (x_i + 2)^2 + (y_i - 1.5)^2 - R^2$$

$$= (x_i + 1)^2 + (y_i - 0.5)^2 - R^2 + 2x_i + 3 + (-2y_i + 2)$$

$$= d_i + 2(x_i - y_i) + 5$$

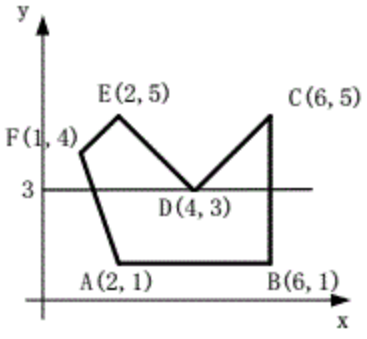
（4）中点偏差判别式的初值：

$$d_0 = F(1, R - 0.5) = 1 + (R - 0.5)^2 - R^2 = 1.25 - R$$

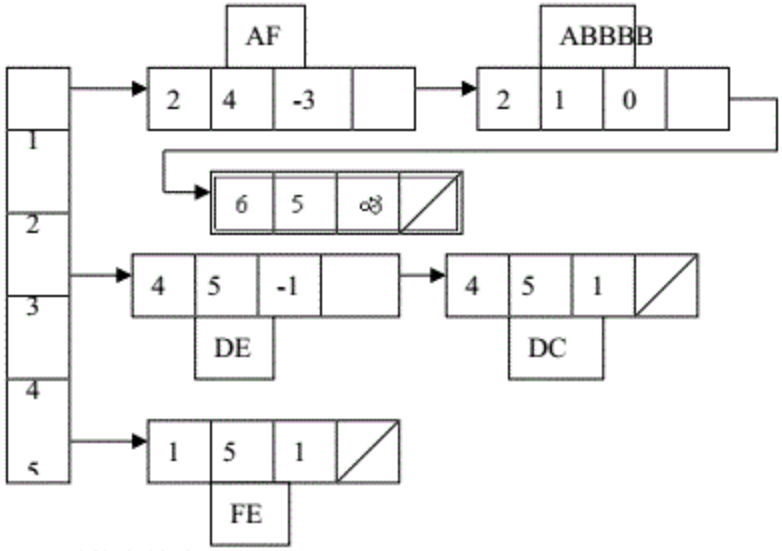
（5）算法设计：

1) 输入圆的半径 R。
2) 定义圆当前点坐标 x，y、定义中点偏差判别式 d、定义像素点颜色 rgb。
3) 计算 $d = 1.25 - R$，x=0，y=R，rgb＝RGB(0,0,255)。
4) 判断 d 的符号。若 d<0，则（x，y）更新为（x＋1，y），d 更新为 d+2x＋3；否则（x，y）更新为（x＋1，y−1），d 更新为 d＋2（x−y）＋5。
5) 当 x 小于等于 y，重复步骤(4)，否则结束。

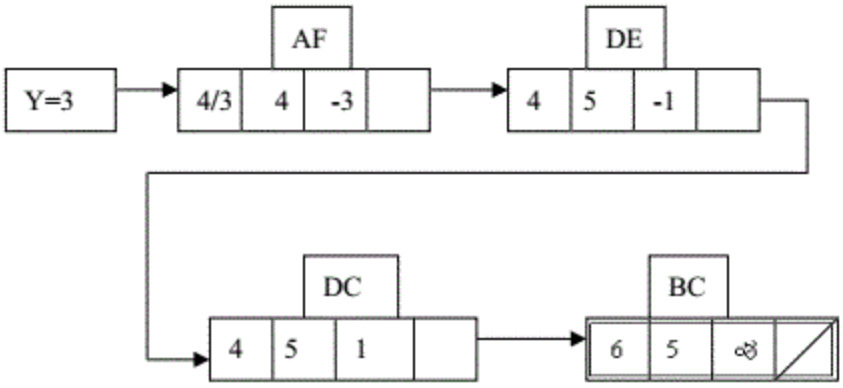
3、如下图所示多边形，若采用扫描线算法进行填充，试写出该多边形的 ET 表和当扫描线 Y=3 时的有效边表（AET 表）。



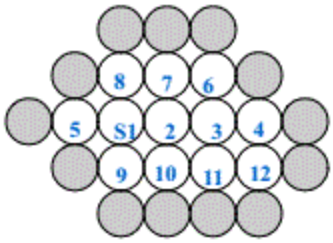
解：边表：



Y=3 时的有效边表：

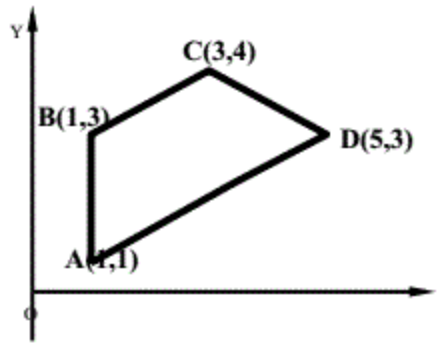


4、试按左下右上顺序用四向算法，分析当S1 为种子时，下图区域的填充过程。



答案：S1→8→7→6→3→4→12→11→10→2→9→5

5、将下图中的多边形 ABCD 先关于点 C(3,4)整体放大 2 倍，再绕点 D（5，3）顺时针旋转 90°，试推导其变换矩阵、计算变换后的图形各顶点的坐标，并画出变换后的图形。



（1） 关于点 C（3，4）整体放大 2 倍

$$T = T_1T_2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

（2） 绕点 D（5，3）顺时针旋转 90 度

$$T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(-90°) & \sin(-90°) & 0 \\ -\sin(-90°) & \cos(-90°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 变换矩阵 $T_{总}$=T*T'=$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 11 & 1 \end{bmatrix}$ (4)$\begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

6、已知三角形 ABC 各顶点的坐标 A(3,2)、B(5,5)、C(4,5)，相对直线 P_1P_2(线段的坐标分别为：P_1 (-3,-2) 、P_2 (8,3))做对称变换后到达 A'、B'、C'。

试计算 A'、B'、C'的坐标值。（要求用齐次坐标进行变换，列出变换矩阵，列出计算式子，不要求计算结果）

解：（1）将坐标系平移至 P_1 (-3，-2)点：$T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

（2）线段 P_1P_2 与 X 轴夹角为 $\theta = arctg\frac{5}{11}$

(3) 顺时针方向旋转 θ 角：$T_B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（4）关于 X 轴对称：$T_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（5）逆时针转回：$T_D = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$T_E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -3 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

（3）将坐标系平移回原处

（4） 变换矩阵：$T=T_A*T_B*T_C*T_D*T_E$

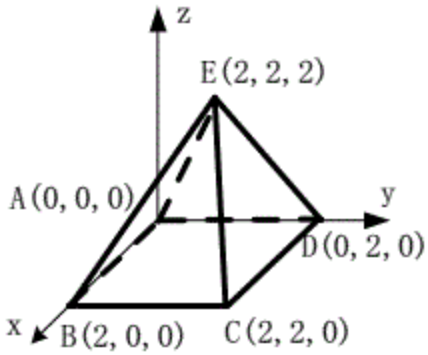
（5） 求变换后的三角形 ABC 各顶点的坐标 A’、B’、C’

A’: $\begin{bmatrix}X'_A & Y'_A & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}\times T$

B’: $\begin{bmatrix}X'_B & Y'_B & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 5 & 1\end{bmatrix}\times T$

C′: $\begin{bmatrix}X'_C & Y'_C & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\end{bmatrix}\times T$

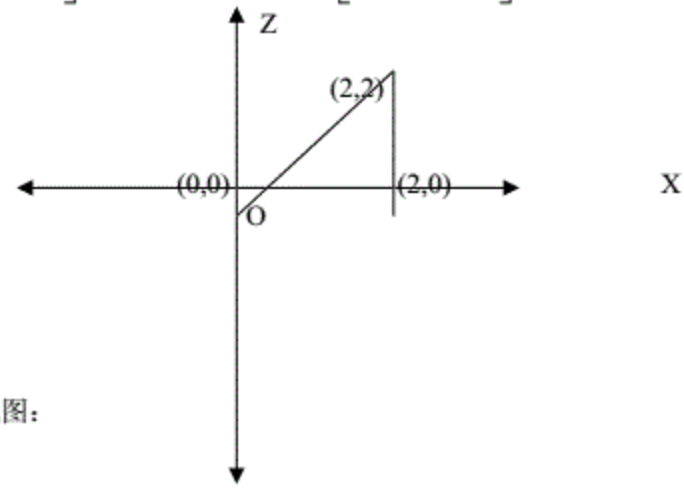
7、试作出下图中三维形体 ABCDE 的三视图。要求写清变换过程，并画出生成的三视图。



解：

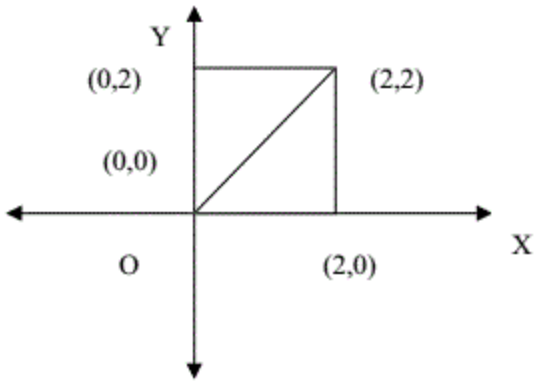
(1) 主视图:

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$



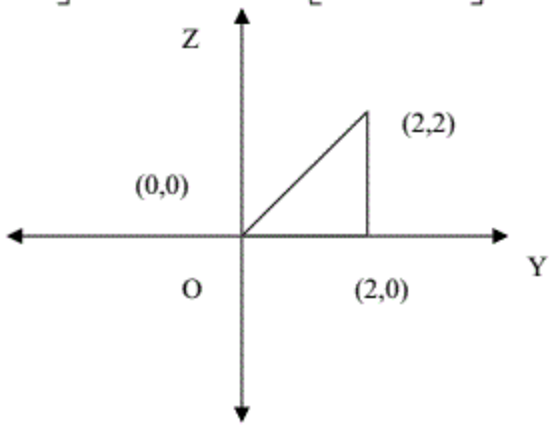
(2) 俯视图：

$$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\2&0&0&1\\2&2&0&1\\0&2&0&1\\2&2&2&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\2&0&0&1\\2&2&0&1\\0&2&0&1\\2&2&0&1\end{bmatrix}$$



(3) 侧视图：

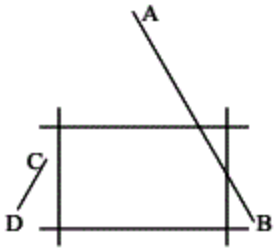
$$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\2&0&0&1\\2&2&0&1\\0&2&0&1\\2&2&2&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&2&0&1\\0&2&0&1\\0&2&2&1\end{bmatrix}$$



8、试采用 **Sutherland－Cohen** 裁剪算法，叙述裁剪如下图所示的直线 AB 和 CD 的步骤：

① 写出端点 A、B、C、D 的编码；

② 写出裁剪原理和直线 AB、CD 的裁剪过程。



解：由图可知，两直线端点的编码分别为“：A（1000），B（0010），C（0001），D（0001）

（1）由 A&B=1,C&D=0,可知，CD 显然不可见，AB 为可见性不定。

（2）求 AB 落在窗口内的始点坐标。由 A 点不在窗口内，且 $x_A \in [x_{w0}, x_{w1}]$,取 AB 与 $y=y_{w1}$ 的交点 E，且 $x_E = x_0 + (x_B - x_A)(y_{W1} - y_A)/(y_B - y_A)$

$y_E = y_{w1}$

显然，E 满足 $x_{W0} \leqq x \leqq x_{W1}$,故 E 点为所求的新始点。

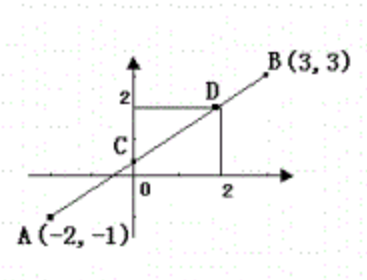
（3）求 AB 落在窗口内的终点坐标。B 点不在窗口内，且 $x_B > x_{W1}$，则取 AB 与 $x=x_{W1}$ 的交点 P，且 x=xW1

yE=yA+(xW1-xA) (yB-yA)/(xB-xA)

显然，P 满足 yW0≦y≦yW1,故 P 点为所求的新始点

(4) EP 即为所求线段

9、用梁友栋算法裁减如下图线段 AB，A、B 点的坐标分别为（3,3）、(-2,-1) 裁剪窗口为 wxl=0，wxr=2，wyb=0，wyt=2。



解：以 A（3，3）为起点，B(-2，-1)为终点

所以有 x1=3，y1=3，x2=-2，y2=-1，wxl=0，wxr=2，wyb=0，wyt=2

构造直线参数方程：

x=x1+u(x2-x1) (0<=u<=1)

y=y1+u(y2-y1)

把 x1=3，y1=3，x2=-2，y2=-1 代入得

x=3-5u

y=3-4u

计算各个 p 和 q 值有：

p1=x1-x2=5　q1=x1-wxl=3

p2=x2-x1=-5　q2=wxr-x1=-1

p3=y1-y2=4　q3=y1-wyb=3

p4=y2-y1=-4　q4=wyt-y1=-1

根据，uk=qk/pk 算出

pk<0 时：u2=1/5 u4=1/4

pk>0 时：u1=3/5 u3=3/4

umax=MAX(0,u2,u4)=MAX(0,1/5,1/4)=1/4　（取最大值）

umin=MIN(u1,u3,1)=MIN(3/5,3/4,1)=3/5　（取最小值）

由于 umax<umin ，故此直线 AB 有一部分在裁减窗口内，

pk<0 时，将 umax=1/4 代入直线参数方程

x=x1+u(x2-x1)

x=3+1/4*(-5)=3-5/4=7/4

y=y1+u(y2-y1)

y=3+1/4*(-4)=2

求出直线在窗口内部分的端点 C(7/4,2)

pk>0 时，将 umin=3/5 代入直线参数方程

x=x1+u(x2-x1)

x=3+3/5*(-5)=0

y=y1+u(y2-y1)

y=3+3/5*(-4)=3/5

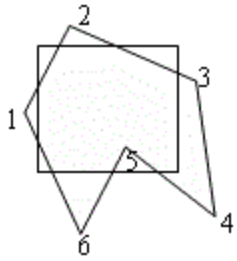
求出直线在窗口内部分的端点 D(0,3/5)。

所以，直线在窗口内部分的端点为 C(7/4,2)，D(0,3/5)。

10、试用 **Sutherland-Hodgman 算法裁剪下图所示多边形，要求：**

（1）简述裁剪原理；

（2）图示裁剪过程，绘出裁剪结果。



解：

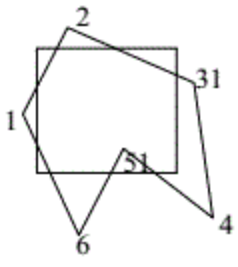
（1）只要对多边形用窗口的四条边依次裁剪四次便可得到裁剪后的多边形。

每次用窗口的一条边界(包括延长线)对要裁剪的多边形进行裁剪，裁剪时，顺序地测试多边形各顶点，保留边界内侧的顶点，删除外侧的顶点，同时，适时地插入新的顶点：即交点和窗口顶点，从而得到一个新的多边形顶点序列。

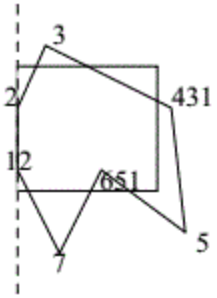
然后以此新的顶点序列作为输入，相对第二条窗边界线进行裁剪，又得到一个更新的多边形顶点序列。

依次下去，相对于第三条、第四条边界线进行裁剪，最后输出的多边形顶点序列即为所求的裁剪好了的多边形。如下图所示。

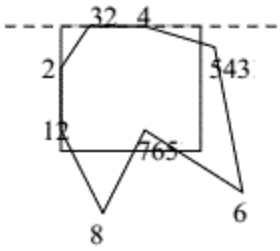
（2）裁剪过程



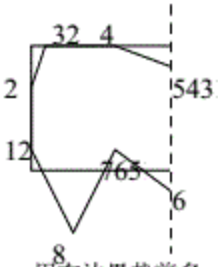
裁剪前多边形顶点序号



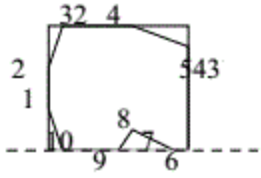
用左边界裁剪多边形后顶点序号



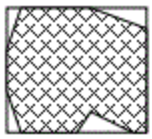
用上边界裁剪多边形后顶点序号



用右边界裁剪多边形后顶点序号



用下边界裁剪多边形后顶点序号



最终裁剪的多边形

11、简述深度缓存算法（Z-Buffer）的原理及基本工作流程。

解：Z-buffer 算法的原理：先将待处理的景物表面上的采样点变换到图像空间，即屏幕坐标系，计算其深度值，并根据采样点在屏幕上的投影位置，将其深度与已存储在 Z 缓存器中相应像素处的原可见点的深度值进行比较。如果新的采样点的深度（Z 值）大于原可见点的尝试表明新的采样点计划遮住了原来的可见点，则用该采样点处的颜色更新帧缓存器中相应像素的颜色，同时用其深度值更新 Z 缓存器中的深度值；否则不作更改。

基本工作流程：

（1）初始化：把 Z 缓存中各（x,y）单元置为 z 的最小值,而帧缓存各(x,y)单元置为背景色。

（2）在把物体表面相应的多边形扫描转换成帧缓存中的信息时，对多边形内的每一采样点（x,y）进行以下几步处理：

1）计算采样点(x,y)的深度 z(x,y);

2）如果 z(x,y)大于 z 缓存中在百忙之中(x,y)处的值，则把 z(x,y)存入 Z 缓存中的(x,y)处，再所多边形在 z(x,y)处的颜色值存入帧缓存的(x,y)地址中。

12、试写出正轴测投影变换矩阵，并推导出等轴测图的条件。

解：

先将三维实体分别绕两个坐标轴旋转一定的角度，然后再向由这两个坐标轴所决定的坐标平面作正投影。下面以 XOZ 平面（V 面）作正投影为例：

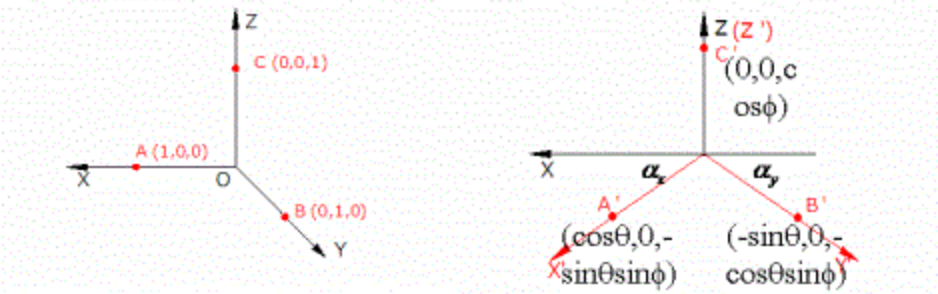
①将三维实体绕 Z 轴逆时针转 α 角；

②将三维实体绕 X 轴顺时针转 β 角；

③向 XOZ 平面（V 面）作正投影。

其变换矩阵为：

$$T=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0\\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha\sin\beta & 0\\ -\sin\alpha & 0 & -\cos\alpha\sin\beta & 0\\ 0 & 0 & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



轴向变形系数：

$$\eta x=OA'/OA=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

$$\eta y=OB'/OB=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta\sin^2\phi}$$

$$\eta z=OC'/OC=\cos\phi$$

正等轴测图的特点是：三轴上的变形系数均相等，即 ηx = ηy = ηz

当 α =45° β =35° 16′ 获得等轴测图

tgαx = tg45°sin35° = 0.5774

tgαy = ctg45°sin35° = 0.5774

∴ αx = αy = 30°

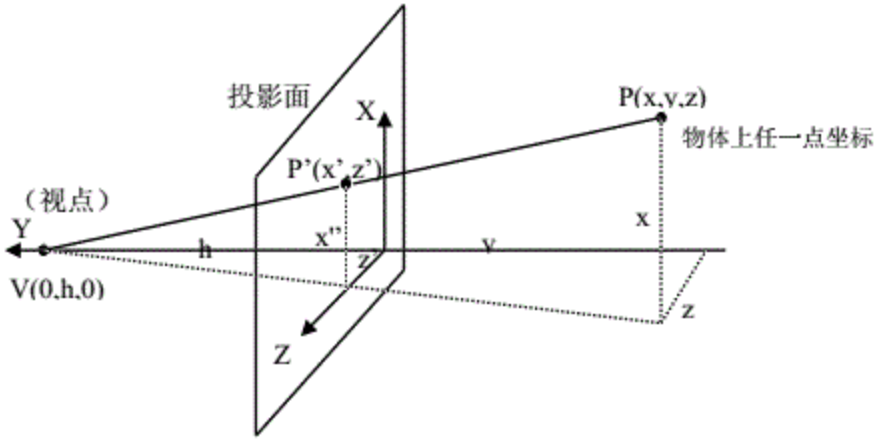
13、简述轴测投影与透视投影的区别。

①轴测投影不改变三维实体中平行线段的平行性，而透视投影则不然，它至少会改变某一个方向上平行线段的平行性；

②轴测投影的立体感比较强，而透视投影的真实感比较强；

③在工程设计上一般采用轴测投影，而在艺术方面：如艺术造型等，一般采用透视投影。

14、根据下图写出 P(x，y，z) 一点透视后 P'（x'，z'）的坐标运算式（设透视变换时的偏移量为（dx，dy，dz））



其中：x, y, z 为原始物体坐标。

x', z'为物体投影到 XOZ 平面后的坐标。

d_x ,$d_{y,dz}$ 为平移量。

h 为视点到投影面（屏幕）的距离。

解：

为了使透视投影后的图形有一个恰当的位置：

①平移：设平移量分别为 d_x、$d_{y、dz}$;

②透视变换：变换矩阵为 Tq（q=-1/h）;

③向 XOZ 平面投影。

其矩阵表示为：

$$T=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\dx&dy&dz&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1/h\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&-1/h\\0&0&1&0\\dx&0&dz&1-dy/h\end{bmatrix}$$

其运算式为：

x'=(x+dx)/(1-y/h-dy/h)

z'=(z+dz)/(1-y/h-dy/h)

15、给定四点 P1（0，0）、P2（1，3）、P3（4，2）、P4（5，0），用特征多边形

① 构造一条 Bezier 曲线；

② 构造一条 3 次 B 样条曲线；

③ 计算参数 t 为 0，1/2，1 时它们的值，并分别画出两条曲线。

Bezier 曲线　　3 次 B 样条曲线

解：（1） 3 次 Bezier 曲线表达式：

$$p_0(t)=\begin{bmatrix}t^3&t^2&t&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3&-3&1\\3&-6&3&0\\-3&3&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\\P_4\end{bmatrix}\qquad(0\leqq t\leqq 1)$$

(2) 3 次 B-Spline 曲线表达式

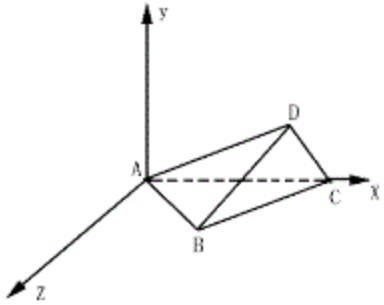
$$\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

$p_1(t)=1/6$ $(0 \leqq t \leqq 1)$

(3) 当 t=0, 0.5, 1 时，p_0（0）=（0，0）；$p_0(0.5)=(5/2, 15/8)$ $p_0(1)=(5, 0)$；

当 t=0, 0.5, 1 时，p_1（0）=（4/3，7/3）；$p_1(0.5)=(5/2, 115/48)$ $p_1(1)=(11/3, 11/6)$；

16、设空间有一个四面体，顶点 A，B，C，D 的坐标依次是（0，0，0），（2，0，1），（4，0，0），(3，2，1)，从 z 轴正向无穷远处观察，求各面的可见性（要求其运算过程）。



解：

观察方向向量是 k=(0,0,1),

三角面 DAB 的法向量是:

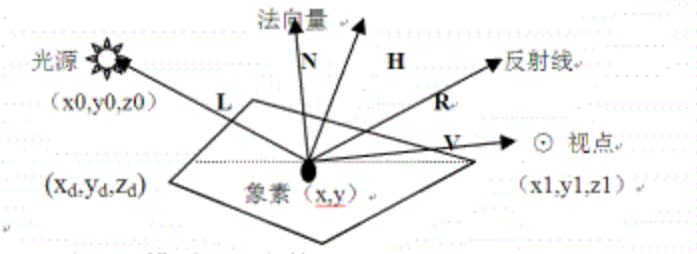
$$\mathbf{n}=\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{AB}$$

$$=(-3,-2,-1)\times(2,0,1)$$

$$=(-2,1,4)$$

因此，$\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}=4>0$ ，面 DAB 为可见面.类似计算可知，面 DBC 是可见面,面 ADC 是不可见面,面 ACB 退化为线。

17、写出简单光照明模型的方程表达式（设为一个光源），并转换为由 L、N 和 V 向量表示的模型方程表达式。（光源与视点在无穷远处）



光照明模型已知参数：

I_a：环境光的反射强度

K_a：环境光的反射系数

I_p：光源的强度

K_d：漫反射系数

K_s：镜面反射系数

n：与物体光滑度有关的常数

解：

$$I = I_{pa}k_a + I_p(k_d \cos i + k_s \cos^n \theta)$$

$$I=I_aK_a+I_pK_d(\mathbf{L}\bullet\mathbf{N})+I_pK_s(\mathbf{R}\bullet\mathbf{V})^n$$

$$\approx I_aK_a+I_pK_d(\mathbf{L}\bullet\mathbf{N})+I_pK_s(\mathbf{H}\bullet\mathbf{N})^n$$(光源与视点在无穷远时)

其中 **H=（L+V）/2**