# 安徽大学 2015—2016 学年第二学期

# 《高等数学 A（二）、B（二）》考试试卷（A 卷）

# 参考答案及评分标准

## 一．填空题（每空 2 分，共 10 分）

1．16；　2．$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$；　3．0；　4．$(y\ln x+1)x^{y-1}$；　5．$\dfrac{p^2}{2}$

## 二．选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6．（D）；　7．（C）；　8．（A）；　9．（B）；　10．（A）

## 三．计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11.解：两边对 $x$ 求导有 $\begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}-3=0 \\ 2-3\dfrac{dy}{dx}+5\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$ ……3 分

解得 $\vec{T}_M=(16,9,-1)$， ……5 分

切线：$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$， ……7 分

法平面 ： $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$，即 $16x+9y-z-24=0$ . ……9 分

12.解：对方程 $x=y+j(y)$ 两边关于 $x$ 求导，有 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+j'(y)}$， ……3 分

进一步有 $\dfrac{dz}{dx}=f_1'+f_2'\,g\,\dfrac{1}{1+j'(y)}$， ……5 分

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f_{11}''+f_{12}''\frac{dy}{dx}+\left(f_{21}''+f_{22}''\,g\,\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{1+j'(y)}+f_2'\frac{-j''(y)}{\left(1+j'(y)\right)^2}\,g\,\frac{dy}{dx}$$

$$=f_{11}''+\frac{2f_{12}''}{1+j'(y)}+\frac{f_{22}''}{\left(1+j'(y)\right)^2}-\frac{f_2'\cdot j''(y)}{\left(1+j'(y)\right)^3}$$ ……9 分

13.解：计算 $I=\iint\limits_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|dxdy=\iint\limits_{D_1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy+\iint\limits_{D_2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)dxdy$，

其中 $D_1=\left\{x^2+y^2\le 1\right\},D_2=\left\{1\le x^2+y^2\le 4\right\}$. ……6 分

所以有 $I=\int_0^{2p}dq\int_0^1(1-r)rdr+\int_0^{2p}dq\int_1^2(r-1)rdr=2p$ . ……9 分

14. 解：依题意有

$\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^4y^2-2bxy-4\right)=12x^3y^2-2by=\frac{\partial}{\partial y}\left(2ax^3y^3-3y^2+5\right)=6ax^3y^2-6y$，所以

$a=2,b=3$. ……6 分

这样有 $U(x,y)=x^4y^3-3xy^2+5x-4y+c$，其中 $c$ 为任意常数. ……9 分

15. 解：由可加性知 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\iint\limits_{\Sigma_1}x^2dS+\iint\limits_{\Sigma_2}x^2dS=I_1+I_2$， ……3 分

计算

$$I_1=\iint\limits_{\Sigma_1}x^2dS=\iint\limits_{D}x^2\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\iint\limits_{D}x^2\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\frac{\sqrt{2}p}{4};$$

$$I_2=\iint\limits_{\Sigma_2}x^2dS=\iint\limits_{D}x^2\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint\limits_{D}x^2dxdy=\frac{p}{4}.$$

所以，有 $I=\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{p}{4}$. ……9 分

16. 解：加适当圆面 $S_1$： $z=0\left(x^2+y^2\le R^2\right)$ 的下侧，这样与它构成封闭曲面，其方向构成正侧，利用高斯公式有

$$\iint\limits_{S(\text{上侧})}xdydz+ydzdx+zdxdy+\iint\limits_{S_1(\text{下侧})}xdydz+ydzdx+zdxdy=I+I_1$$

$$=\iiint\limits_{V}3dxdydz=2pR^3$$ ……7 分

而 $I_1=\iint\limits_{S_1}0dxdy=0$ .所以有 $I=2pR^3$ . ……9 分

17. 解：计算

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{(x-2)+4}+\frac{1}{(x-2)+1}$$ ……5 分

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-2}{4}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+1\right)(x-2)^n,\qquad |x-2|<1$$ .……9 分

四.应用题 （每小题 6 分，共 12 分）

18.解：$z=x^2y(4-x-y)$ 在 $\bar{D}$ 上连续，所以有最大值和最小值.首先在 $D$ 内求驻点.计算 $\begin{cases} z_x'=xy(8-3x-2y)=0 \\ z_y'=x^2(4-x-2y)=0 \end{cases}$，解得唯一驻点 $P_1(2,1)$ . ……3 分

其次在 $\partial D$ 上计算驻点，在 $x=0$ 或 $y=0$ 上均有 $z=0$；在 $x+y=6$ 上，构造拉格朗日函数 $F(x,y,l)=x^2y(4-x-y)+l(x+y-6)$，计算驻点，有

$$\begin{cases} F_x'=xy(8-3x-2y)+l=0 \\ F_y'=x^2(4-x-2y)+l=0 \\ F_l'=x+y-6=0 \end{cases}$$ ，解得 $x=0,4$ .

所以有 $M=\max\{z(2,1),z(0,6),z(4,2)\}=4,$

$$m=\min\{z(2,1),z(0,6),z(4,2)\}=-64 .$$ ……6 分

19.解：依题意有，

$$m=\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_{L_1}\sqrt{x^2+y^2}ds+\int_{L_2}\sqrt{x^2+y^2}ds+\int_{L_3}\sqrt{x^2+y^2}ds=m_1+m_2+m_3$$

其中 $L_1,L_2,$和$L_3$ 的参数方程分别为

$$L_1:\begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases},x\in[0,1];L_2:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases},t\in\left[0,\frac{p}{4}\right];L_3:\begin{cases} x=x \\ y=x \end{cases},x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$ ……4 分

所以 $m_1=\int_{L_1}\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},,$

$$m_2=\int_{L_2}\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_{L_2}ds=\frac{p}{4},$$

$$m_3=\int_{L_3}\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{2}x g\sqrt{2}dx=\frac{1}{2},$$

故 $m=1+\frac{p}{4}$ . ……6 分

**五.证明题（每小题 5 分，共 5 分）**

20.证明：依题意，有 $\dfrac{1}{2n} < u_n < \dfrac{1}{n}$， ……4 分

易知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛. ……5 分