安徽大学 2008—2009 学年第一学期《高等数学 A（一）、B（一）》考试试卷(A 卷)参考答案及评分标准

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1. 1，-1　　　2. $\dfrac{y\cos xy}{1-x\cos xy}$　　　3. 偶

4. 2 或 -4　　　5. $\dfrac{3}{2}-\ln 2$

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1. A　　2. C　　3. D　　4. B　　5. C

三、计算题（本题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin x)^{\frac{1}{x}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin x)^{\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{\arcsin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}}=e.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x^2}-1}{\cos(2x)-1}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x^2}-1}{\cos(2x)-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{-\frac{1}{2}(2x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-\frac{1}{2}(2x)^2}=-\dfrac{1}{2}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\sin\frac{1}{4}+\cdots+\sin\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$

解：$(\sin\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}\le(\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\sin\frac{1}{4}+\cdots+\sin\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}\le n^{\frac{1}{n}}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$，由夹逼定理知:

$$\lim_{n\to\infty}(\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\sin\frac{1}{4}+\cdots+\sin\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}=1.$$

5. $\int\frac{x^2}{1-x^4}\mathrm{d}x$

解：$\int\frac{x^2}{1-x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

6. $\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+4e^{-x}}$

解：$\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+4e^{-x}}=\int\frac{\mathrm{d}e^x}{e^{2x}+4}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\frac{e^x}{2})}{(\frac{e^x}{2})^2+1}=\frac{1}{2}\arctan\frac{e^x}{2}+C.$

7. $\int_0^a\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x \qquad (a>0)$

解：令 $x=a\tan t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{4}$，当 $x=0$ 时 $t=0$，当 $x=a$ 时 $t=\frac{\pi}{4}$，

由换元公式，$\int_0^a\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^3\sec^3 t}a\sec^2 t\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\sin t\,\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{2a^2}.$$

8. $\int_1^e\sin(\ln x)\mathrm{d}x$

解：$\int_1^e\sin(\ln x)\mathrm{d}x=x\bullet\sin(\ln x)\Big|_1^e-\int_1^e x\bullet(\cos(\ln x))\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$=e\sin1-\int_1^e\cos(\ln x)\mathrm{d}x$$

$$=e\sin1-x\cos(\ln x)\Big|_1^e+\int_1^e x\bullet(-\sin(\ln x))\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=e\sin1-e\cos1+1-\int_1^e\sin(\ln x)\mathrm{d}x$$

故 $\int_1^e\sin(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(e\sin1-e\cos1+1).$

四、综合分析题(本题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分)

1. 设函数 $y=y(x)$ 可由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定，求 $y=y(x)$ 的一阶和二阶导数.

解：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{t}{1+t}$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3t^2+2t,$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3t^2+2t}{\frac{t}{1+t}}=3t^2+5t+2,\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{6t+5}{\frac{t}{1+t}}=\frac{6t^2+11t+5}{t}.$$

2. 设曲线 $y=x^3+3ax^2+3bx+c$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，点 $(0,3)$ 是拐点，求 a,b,c.

解：函数 $y=x^3+3ax^2+3bx+c$ 在定义域内可二阶可导.
由于曲线在 $x=-1$ 处取到极值，由 Fermat 定理， $y'(-1)=0$. 即 $3-6a+3b=0$
由于 $(0,3)$ 是曲线的拐点，则

$$y''(0)=0,\ y(0)=3,$$

即 $a=0,\ c=3,$ 带入得到 $b=-1$.

3. 由曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成的一个平面图形, 求此平面图形绕 y 轴一周所围成的旋转体的体积.

解：由题意知抛物线 $y=(x-1)(x-2)$ 的顶点坐标为 $(\frac{3}{2},-\frac{1}{4})$, 且

$$y=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}$$

故

$$V=\pi\int_{-\frac{1}{4}}^{0}[(\frac{3}{2}+\sqrt{y+\frac{1}{4}})^2-(\frac{3}{2}-\sqrt{y+\frac{1}{4}})^2]\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}$$

五、证明题（本题共 2 小题, 第 1 小题 5 分, 第 2 小题 6 分, 共 11 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调减少, 证明: $\forall a\in[0,1]$，成立

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \ge a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证：（证法一）问题等价于证明 $\forall a\in[0,1]$，成立 $(1-a)\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\ge a\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x.$

对不等式的两边应用积分第一中值定理，则存在 $\forall x_1\in[0,a],\quad x_2\in[a,1]$，

使得

$$(1-a)\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=a(1-a)f(x_1),$$

$$a\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x = a(1-a)f(x_2).$$

由于 $f(x_1)\ge f(x_2)$， 故 $(1-a)\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \ge a\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x.$

（证法二）当 $a=0$ 时不等式显然成立.

当 $a\in(0,1]$ 时，令 $x=at$，由于 $f(x)$ 单调减少，则

$$\int_0^a f(x)dx = a\int_0^1 f(at)\mathrm{d}t = a\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}x \ge a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=\dfrac{1}{2},\ f(\dfrac{1}{2})=1,\ f(1)=0$，

证明: （1） $\exists\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\zeta)=0.$

（2） $\exists\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)(1-\eta)-2f'(\eta)=0$.

证：由题意 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 由介值定理，$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\ f(\xi)=\dfrac{1}{2}.$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=\dfrac{1}{2},\ f(\xi)=\dfrac{1}{2}.$ 由 Rolle 定理，$\exists\zeta\in(0,\xi)\subset(0,1)$，使得 $f'(\zeta)=0.$

令 $F(x)=f'(x)(1-x)^2$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $F(1)=0,\ F(\zeta)=0$.

由 Rolle 定理， $\exists\eta\in(\zeta,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\eta)=0$，即 $f''(\eta)(1-\eta)-2f'(\eta)=0$