习题 10.7 多元函数的极值

1. 求函数 $z=e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$ 的极值.

【解析】(1) $\begin{cases} z_x'=2e^{2x}(x+y^2+2y)+e^{2x}=e^{2x}[2x+2y^2+4y+1]=0 \\ z_y'=e^{2x}(2y+2)=0\Rightarrow y=-1 \end{cases}$，得驻点 $P\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$；

(2) $A=z_{xx}''=e^{2x}(2x+2y^2+4y+2)$，$B=z_{xy}''=4e^{2x}(y+1)$，$C=z_{yy}''=2e^{2x}$；

(3) $A\big|_P=2e$，$B\big|_P=0$，$C\big|_P=2e$；

(4) $B^2-AC=-4e^2<0$，$A\big|_P=2e>0$，则 $f_{极小值}(P)=-\dfrac{e}{2}$.

2. 求函数 $z=x^2y\left(4-x-y\right)$ 在 $x=0,y=0$ 及 $x+y=6$ 围成的区域上的最大值及最小值.

【解析】(1) 先求出函数在 D 内的所有驻点和偏导数不存在的点，解方程得：

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=xy(8-3x-2y)=0 \\ f_y'(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=x^2(4-x-2y)=0 \end{cases}$$

得到区域 D 内的唯一驻点(2,1)，且 $f(2,1)=4$；

(2) 再求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的极值.

① 在边界 x=0 和 y=0 上 $f(x,y)$ =0；

② 在边界 x+y=6 上，即 y=6－x $(0\le x\le 6)$，于是

$$f(x,y)=-2x^2(6-x)\ \ (0\le x\le 6)$$

$f_x'=4x(x-6)+2x^2=0\Rightarrow x_1=0,x_2=4$，则驻点为 $(0,6),(4,2)$，则 $f(0,6)=0$，$f(4,2)=-64$；又 $f(6,0)=0$

(3) 综上比较后得到 $f(2,1)=4$ 为最大值，$f(4,2)=-64$ 为最小值.

3. 求内接于半径为 R 的球且有最大体积的长方体.

【解析】设长方体的长、宽、高分别为 $2x,2y,2z$，则长方体体积 $V=8xyz\quad(x,y,z>0)$，而 x,y,z 应满 $x^2+y^2+z^2=R^2$；

构建拉格朗日辅助函数：$L(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$

$$\begin{cases} L_x'=8yz+2\lambda x=0 \\ L_y'=8xz+2\lambda y=0 \\ L_z'=8xy+2\lambda z=0 \\ L_\lambda'=x^2+y^2+z^2-R^2=0 \end{cases}$$

上述方程满足轮换对称式，则可知 $x=y=z$ 代入最后一个方程，解得 $x=y=z=\dfrac{R}{\sqrt{3}}$，且 $V_{\max}=\dfrac{8}{3\sqrt{3}}R^3$.

4. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线为一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.

【解析】设从原点到椭圆上任一点 (x,y,z) 的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

构建拉格朗日辅助函数：$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)$

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 & (1) \\ L'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 & (2) \\ L'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 & (3) \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 & (4) \\ L'_\mu = x + y + z - 1 = 0 & (5) \end{cases}$$

由（1）（2）推出 $x = y$ 代入（4）（5）得 $2y^2 - z = 0, 2y + z - 1 = 0$，联立解得

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, z = 2 \mp \sqrt{3}\text{，}$$

则 $d_{\min}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3}\right) = \sqrt{9-5\sqrt{3}}$， $d_{\max}\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3}\right) = \sqrt{9+5\sqrt{3}}$.