第九章　空间解析几何

习题 9.2　向量代数

1. 已知两点 $A\left(4,\sqrt{2},1\right)$ 和 $B\left(3,0,2\right)$.(1)求 $\overrightarrow{AB}$ 的模；(2)求与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量；

(3)求 $\overrightarrow{AB}$ 的方向角.

【解析】本题考查向量的坐标形式，向量的模计算，单位向量的计算以及方向角计算公式的应用.

（1）$\overrightarrow{AB}=(-1,-\sqrt{2},1)$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2$；

（2）$\overrightarrow{AB}^o=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}(-1,-\sqrt{2},1)$；与其平行的单位向量为 $\pm\dfrac{1}{2}(-1,-\sqrt{2},1)$.

（3）$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2},\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$，则 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3},\beta=\dfrac{3\pi}{4},\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

2. 已知 $\vec{\alpha}=\left(a,5,1\right)$ 与 $\vec{\beta}=\left(3,1,b\right)$ 共线，求 a 与 b 的值.

【解析】本题考查两个向量平行的坐标关系.

$\vec{\alpha}=\left(a,5,1\right)$ 与 $\vec{\beta}=\left(3,1,b\right)$ 共线，则对应分量成比例，即 $\dfrac{a}{3}=\dfrac{5}{1}=\dfrac{1}{b}$，则 $a=15,b=\dfrac{1}{5}$.

3.设 $\vec{\alpha}=\left(3,-1,-2\right),\vec{\beta}=\left(1,2,-1\right)$，求 $(1)\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}$ 及 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$；$(2)\left(-2\vec{\alpha}\right)\bullet\left(3\vec{\beta}\right)$ 及 $\vec{\alpha}\times2\vec{\beta}$；$(3)\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的夹角余弦；(4) 以 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 为邻边的平行四边形面积；(5) 既垂直于 $\vec{\alpha}$ 又垂直于 $\vec{\beta}$ 的一个向量；$(6)\vec{\alpha}\bullet\left(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}\right)$.

【解析】本题考查向量的数量积、向量积、混合积在坐标形式下的计算公式；向量夹角的计算；向量积的概念和向量积模的几何意义.

（1）$\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3$，$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=(5,1,7)$；

（2）$\left(-2\vec{\alpha}\right)\bullet3\vec{\beta}=-6\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}=-18$，$\vec{\alpha}\times2\vec{\beta}=2\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=(10,2,14)$；

（3）$\cos\angle(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$；

（4）$S=\left|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right|=\left\|\begin{matrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{matrix}\right\|=\left|(5,1,7)\right|=5\sqrt{3}$；

（5）既垂直于 $\vec{\alpha}$ 又垂直于 $\vec{\beta}$ 的一个向量是 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=(5,1,7)$；

（6）$\vec{\alpha}\bullet\left(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}\right)=\begin{vmatrix}3&-1&-2\\1&2&-1\\3&-1&-2\end{vmatrix}=0$.

4. 已知 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 垂直，且 $\left|\vec{\alpha}\right|=3$，$\left|\vec{\beta}\right|=4$，求 $\left|\left(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\times\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)\right|$.

【解析】考查抽象的向量的性质、运算了的计算.

① $\left(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\times\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)=3\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}-6\vec{\alpha}\times\vec{\beta}-\vec{\beta}\times\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\times\vec{\beta}=-5\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$；

② $\left|\left(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\times\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)\right|=\left|-5\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right|=5\left|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right|=5\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sin\angle(\vec{\alpha},\vec{\beta})$；

③ 因为$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$垂直，所以$\angle(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{\pi}{2}$，原式$=5\times3\times4\times\sin\dfrac{\pi}{2}=60$.

5. 已知$\left|\vec{\alpha}\right|=10$，$\left|\vec{\beta}\right|=2$.(1)若$\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}=12$，求$\left|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right|$；(2)若$\left|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right|=16$，求$\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}$.

【解析】考查抽象向量的数量积，向量积的运算性质计算.

（1）① $\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\cos\theta=20\cos\theta=12\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，

② $\left|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sin\theta=20\times\dfrac{4}{5}=16$；

（2）① $\left|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sin\theta=16\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\cos\theta=\pm\dfrac{3}{5}$，

② $\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\cos\theta=20\times\left(\pm\dfrac{3}{5}\right)=\pm12$.

6. 设$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$均为单位向量，且满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，求$\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{c}+\vec{c}\bullet\vec{a}$.

【解析】考查单位向量概念，数量积的应用.

① $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$均为单位向量，则$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$；

② $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$两边右乘$\vec{b}$得，$\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{b}+\vec{c}\bullet\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{c}\bullet\vec{b}=-1$，
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$两边右乘$\vec{c}$得，$\vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{b}\bullet\vec{c}+\vec{c}\bullet\vec{c}=0\Rightarrow\vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{b}\bullet\vec{c}=-1$，
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$两边右乘$\vec{a}$得，$\vec{a}\bullet\vec{a}+\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{c}\bullet\vec{a}=0\Rightarrow\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{c}\bullet\vec{a}=-1$，

上面三式相加，得$\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{c}+\vec{c}\bullet\vec{a}=-\dfrac{3}{2}$