安徽大学 2019--2020 学年第二学期《线性代数 B》
模拟试卷参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 相；2. 6；3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$；4. 2；5 . $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6. A；7. B；8. C；9. B；10. A.

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11. 解:

$$A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 9 & 27 \\ 4 & 1 & 16 & 64 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}=-12.$$

12. 解: 作矩阵 A

$$A=\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T\right)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5\right)=B$$

$$r\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\right)=3$$

易知 β_1,β_2,β_4 为 B 的列向量组的一个极大无关组，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为 A 的列向量组的一个极大无关组.

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组.

13 . 解 ： 因 为 $A^{-1}BA=6A+BA,$ ， 所 以 $(A^{-1}-I)BA=6A$ ， 故

$$B=6(A^{-1}-I)^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&0\\0&0&5\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{8}&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&\frac{3}{4}&0\\0&0&\frac{6}{5}\end{pmatrix}.$$

14. 解：特征多项式为$(\lambda-2)(\lambda+1)^2$

对应于特征值$\lambda=2$的特征向量为$k(1,1,1)$，$k\neq 0$，将$(1,1,1)$单位化为$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

对应于特征值$\lambda=-1$的特征向量为$k_1(-1,1,0)+k_2(-1,0,1)$，

将$(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$正交化

$$\beta_1=(-1,1,0),\ \beta_2=(-1,0,1)-\frac{1}{2}(-1,1,0)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$$

再单位化为$\eta_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),\ \eta_2=(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$，令

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

则，$Q^{-1}AQ=diag\{2,-1,-1\}$

15. 解：该二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&6\end{bmatrix}$$

A的各阶顺序主子式为

$$\det A_1=1>0,\det A_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1>0,\det A_3=1>0.$$

故 $f(x_1,x_2x_3)$ 是正定二次型.

四、分析计算题（本题 10 分）

16. 解： $A^2-A-2I=(A+2I)(A-3I)+4I=0$，

即
$$(A+2I)\left[-\frac{1}{4}(A-3I)\right]=I$$

故 $A+2I$ 可逆，且 $(A+2I)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3I)$..

五、证明题（本题 10 分）

17. 证明: 设 $k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha)=0$

于是

$$(k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma=0$$

因为 α,β,γ 线性无关，所以有

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

解得 $k_1=k_2=k_3=0$

故 $\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha$ 也线性无关.