安徽大学 2010—2011 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

得 分	

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1．设向量 $\boldsymbol{a}=(2,0,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,3,4)$，则与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直的单位向量为______________．

2．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=$________________．

3．交换积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=$____________________．

4. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi<x\le 0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则

$f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=4\pi$ 处收敛于____________________．

5．设 $f(x,y)=xy^2$ 在点 $(2,1)$ 处沿方向 $(4,-3)$ 的方向导数等于 __________________．

得 分	

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1． 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，在点 $(0,0)$ 处 （ ）

A．不连续
B．可微
C．不可微，且偏导数不存在
D．不可微，但偏导数存在．

2．设 $f(t)$ 为连续奇函数，S^+ 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧．则下列第二类曲面积分值**不一定**等于零的是 （　　）

A． $\iint\limits_{S^+} f^2(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　　　B． $\iint\limits_{S^+} xf^2(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

C． $\iint\limits_{S^+} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　　　D． $\iint\limits_{S^+}(x+2y+3z)f(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3．直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 与直线 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{1}$ 的位置关系是 （　　）

A．平行　　B．相交与一点　　C．异面　　D．　重合.

4．设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\rho$，则下列说法正确的是 （　　）

A．当 $\rho<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛　　B．　当 $\rho>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

C．当 $\rho\le 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛　　D．　当 $\rho\ge 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

5．设函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿单位向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向增加最快，则 $\boldsymbol{v}=$ (　　)

A． $\dfrac{1}{3}(2,2,-1)$　　　　B． $\dfrac{1}{3}(-2,-2,1)$

C． $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$　　　　D． $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$.

得　分	

三、计算题（第 1、2、3 小题每小题 10 分，第 4、5 小题每小题 12 分，共 54 分）

1．设空间曲面 Σ 的方程为 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求其在点 $(1,1,\dfrac{\pi}{4})$ 处的切平面与法线方程.

2．计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的空间有界闭区域.

3．计算第一类曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为圆柱面$x^2+y^2=1$介于平面$z=0$与$z=1$之间的部分.

4．（1）将函数$f(x)=\ln x$展开为$(x-2)$的幂级数，并确定所求幂级数的收敛域.

（2）求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$的和.

5.（1）设$\begin{cases} x = uv \\ y = \sin u + \cos v \end{cases}$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$.

（2）设$\sin z - xyz = 0$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

得　分	

1. 求函数$f(x,y,z) = x + 2y + 3z$在柱面$x^2 + y^2 = 2$和平面$y + z = 1$交线上的最大值与最小值.

2． 已知一条非均匀金属线 L 的方程为 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t, t\in[0,1]$．它在点 (x,y,z) 处的线密度 $\rho(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$，求该金属丝的质量．

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

得 分	

1．证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+2011}$ 条件收敛．

2．设 L 为空间某封闭光滑曲线， $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中具有一阶连续偏导数的函数．证明：

$$\left|\oint_{L^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|\le \max_{(x,y,z)\in\Sigma}\sqrt{\left(Q_x-P_y\right)^2+\left(R_y-Q_z\right)^2+\left(P_z-R_x\right)^2}\cdot S$$

其中 Σ 为以 L 为边界的某曲面， S 为曲面 Σ 的面积.