安徽大学 2012—2013 学年第一学期

《 高等数学 A（一）、B（一）》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线　　装　　订　　线

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1. 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+e^{1/x}}+\lambda[x]\right)$ 存在，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\lambda=$________ .

2. 设 $f(x)$ 是可导的偶函数，则 $\int_0^x t^2 f'(t)dt$ 为__________函数.（填“奇”或“偶”）

3. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2}du \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$ 所确定，则 $y=y(x)$ 在 $(0,0)$ 点处的切线方程为

________________.

4. $\int_{-1}^{1}(x^3\cos x+\sqrt{1-x^2})dx=$______________ .

5. 对数螺旋线 $r=e^{\theta}(0\le\theta\le\pi)$ 的弧长为 ____________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6. 已知当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+ax\sin x)$ 与 $\tan x^2$ 为等价无穷小，则 $a=$（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 无穷间断点有（　　）个.

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

8. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，下列命题中正确的个数是（　　）.

① 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

② 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

③ 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

④ 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

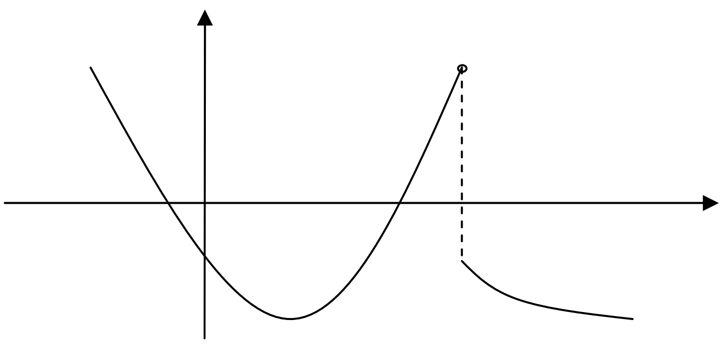
9. 设 $f(x)$ 连续，其导函数 $y'=f'(x)$ 的图形如下图，则关于 $y=f(x)$ 下列正确的是（　　）.

A. 有 2 个极大值点，1 个极小值点，1 个拐点

B. 有 2 个极大值点，1 个极小值点，2 个拐点

C. 有 1 个极大值点，2 个极小值点，1 个拐点

D. 有 1 个极大值点，2 个极小值点，2 个拐点



10. 下列广义积分中收敛的是（　　）.

A. $\int_0^1 \dfrac{1}{x(x+1)}dx$　　B. $\int_1^2 \dfrac{dx}{(x-1)^3}$　　C. $\int_e^{+\infty} \dfrac{dx}{x(\ln x)^2}$　　D. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x}{1+x^2}dx$

三、计算题（每小题 8 分，共 56 分）

得 分	

11. 设 $a_0>0$，$a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{1}{a_n^2}\right)$，（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2^{\frac{3}{x}}-2^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

13. 设 $y=y(x)$ 是由 $e^y+xy=e$ 所确定，求 y'' .

14. 已知 $f(x)=\begin{cases} -1, & -1\le x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & 0<x\le 1, \end{cases}$ 令 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$，求 $\dfrac{dF(x)}{dx}$.

15. $\int_{0}^{3} \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}dx$.

16. $\int_{0}^{\pi} \sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$.

17. 求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解.

得 分	

答　题　勿　超　装　订　线

线

订

装

四、综合题（每小题 14 分，共 14 分）

得 分	

18. 设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和 $x=a, x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和 $x=a$，$y=0$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

（1）试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1；D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

（2）问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？并求此最大值.

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

得 分	

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=1$，证明：存在点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有一阶连续导函数，且 $f(-1)=\int_{-1}^{1}x\,f'(x)\,dx$，证明：至少存在一点 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'(\xi)=\frac{1}{2}f(1)$.