第十章　多元函数微分学

习题 10.1　多元函数的基本概念

1. 已知 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

【解析】 $\begin{cases} x+y=u \\ \frac{y}{x}=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{u}{1+v} \\ y=\frac{uv}{1+v} \end{cases} \Rightarrow f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{(1+v)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$，则

$f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}$.

2. 求下列函数的极限.

$(1)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y=1\cdot a=a$；

$(2)\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\left(\sqrt{xy+4}+2\right)}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\sqrt{xy+4}+2\right)=4;$

$(3)\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

【解析】因为 $0\le\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{xy}{\sqrt{2xy}}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{xy}$，由夹边定理可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

3. 证明下列极限不存在.

$(1)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

【解析】①沿 $y=x$ 的路径趋于 $(0,0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1;$

② 沿 y 轴趋于 $(0,0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0;$

③ 沿两条不同路径趋于 $(0,0)$ 点，所得极限存在但不相等，所以原式极限不存在.

$(2)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$

【解析】$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{\substack{y=kx^2\\ x\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx^4}{(1+k^2)x^4}=\frac{k}{1+k^2}$，沿不同路径极限存在不唯一，所以原式极限不存在.