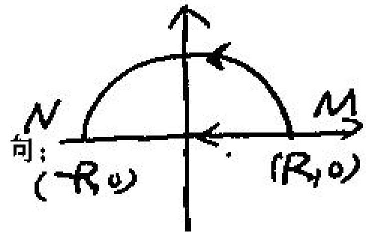
习题 12.2　第二类曲线积分

1. 计算$\int_L y^2dx+x^2dy$，其中L为



(1)圆周$x^2+y^2=R^2$的上半部分，方向为逆时针方向；

(2)从点$M(R,0)$到点$N(-R,0)$的直线段.

【解析】（1）利用极坐标$x=R\cos\theta, y=R\sin\theta; \theta:0\to\pi$；

$$\int_L y^2dx+x^2dy=\int_0^{\pi}\left[R^2\sin^2\theta\cdot R(-\sin\theta)+R^2\cos^2\theta\cdot R\cos\theta\right]d\theta$$

$$=R^3\int_0^{\pi}(\cos^3\theta-\sin^3\theta)\,d\theta=R^3\left[\int_0^{\pi}\cos^3\theta\,d\theta-\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\right]$$

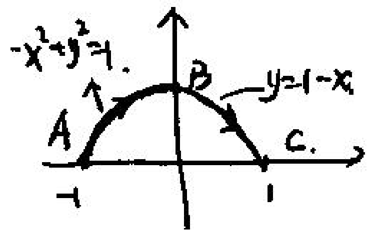
$$=R^3\left[\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\sin\theta+\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\cos\theta\right]$$

$$=R^3\left[(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta)\Big|_0^{\pi}+(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta)\Big|_0^{\pi}\right]=-\frac{4}{3}R^3$$

（2）$\begin{cases}y=0\\x=x\end{cases}$　$x:R\to-R$，则$\int_L y^2dx+x^2dy=\int_R^{-R}0\,dx=0$

2. 计算$\int_L xdy-ydx, L$：从$A(-1,0)$经过$x^2+y^2=1$上半圆到$B(0,1)$，再经过$y=1-x^2$到$C(1,0)$.

【解析】



（1）$\int_L=\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}$　；

（2）$\overline{AB}:\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$　$\theta:\pi\to\frac{\pi}{2}$，则

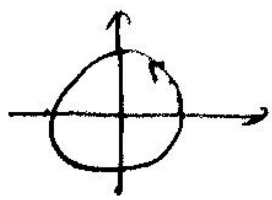
$$\int_{\overline{AB}}=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\cdot\sin\theta+\sin\theta\cdot\sin\theta)\,d\theta=-\frac{\pi}{2};$$

（3）$\overline{BC}:\begin{cases}y=1-x^2\\x=x\end{cases}$　$x:0\to1$，则

$$\int_{\overline{BC}}=\int_0^1\left[x\cdot(-2x)-(1-x^2)\right]dx=\int_0^1(-x^2-1)\,dx=-\frac{4}{3};$$

（4）$\int_L=\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}=-\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$

3. 计算第二类曲线积分$\oint_L\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$，



方向为逆时针方向.

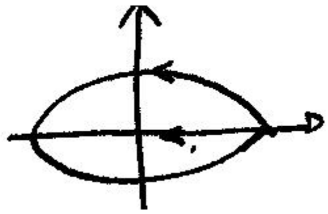
【解析】（1） $\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2} = \oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{a^2}$ ；

（2） $L: x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, \quad \theta: 0 \to 2\pi$ ；

（3） $\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{a^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[a^2(\cos\theta+\sin\theta)(-\sin\theta)-a^2(\cos\theta-\sin\theta)\cdot\cos\theta]d\theta$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi$$

4. 计算 $\int_L (x+y)dx+(x-y)dy$ ，其中 L 为



(1) 椭圆周 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的上半部分，从 $(a,0)$ 到 $(-a,0)$；

(2) 从点 $(a,0)$ 到点 $(-a,0)$ 的直线段.

【解析】（1） $L: x = a\cos\theta, y = b\sin\theta, \quad \theta: 0 \to \pi$ ；

$$\int_L (x+y)dx+(x-y)dy = \int_0^{\pi}[(a\cos\theta+b\sin\theta)\cdot(-a\sin\theta)+(a\cos\theta-b\sin\theta)\cdot b\cos\theta]d\theta$$

$$= -\int_0^{\pi}(a^2+b^2)\sin\theta\cos\theta\, d\theta + ab\int_0^{\pi}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)d\theta = 0$$

（2） $\begin{cases} y=0 \\ x=x \end{cases} \quad x: a \to -a$ ，则 $\int_L = \int_a^{-a}[(x+0)+(x-0)\cdot 0]dx = \int_a^{-a} x\,dx = 0$

5. 设 $\overrightarrow{F} = \{y, z, x\}$ ， L 为依参数增加方向进行的纽形螺线

$$x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt \quad t \in [0, 2\pi]$$

计算 $\int_L \overrightarrow{F}\cdot d\vec{r}$.

【解析】

$$\int_L \overrightarrow{F}\cdot d\vec{r} = \int_L ydx+zdy+xdz = \int_0^{2\pi}[a\sin t\cdot a(-\cos t)+bt\cdot a\cos t+ab\cos t]dt = -\pi a^2$$