安徽大学 2010—2011 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》期末考试试卷（A 卷）

参考答案与评分标准

一、　填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1． $\pm\dfrac{1}{3}(-1,-2,2)$；　2． 0；　3． $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；4. $\dfrac{\pi}{2}$；　5. $-\dfrac{8}{5}$.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1．D；　2． C；　3．B；　4．B；　5． A．

三、计算题（其中第 1、2、3 小题每小题 10 分，第 4、5 小题每小题 12 分，共 54 分）

1． 解． 设 $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$，

则 $f_x(1,1)=\left.\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right|_{(1,1)}=-\dfrac{1}{2}$，　$f_y(1,1)=\left.\dfrac{x}{x^2+y^2}\right|_{(1,1)}=\dfrac{1}{2}$

故所求切平面方程为 $-\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}(y-1)+(-1)(z-\dfrac{\pi}{4})=0$，

整理得 $x-y+2z=\dfrac{\pi}{2}$.

法线方程为 $\dfrac{x-1}{-1/2}=\dfrac{y-1}{1/2}=\dfrac{z-\dfrac{\pi}{4}}{-1}$，

整理得 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-\dfrac{\pi}{4}}{-2}$.

2． 解． 空间区域 Ω 在 xoy 平面上的投影为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$.

则 原式 $=\iint\limits_D(\int_{x^2+y^2}^4 z\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\dfrac{1}{2}[16-(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=8\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=32\pi-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^4\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=32\pi-\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{3}\pi\ .$$

3． 解． 将曲面 Σ 向 zox 平面投影得 $D_{zx}=\{(x,y)\,|-1\le x\le 1,0\le z\le 1\}$.

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}+0}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x .$$

由对称性可得原式$=2\iint\limits_{D_{zx}}\frac{1}{1+z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi^2}{2}$.

4． 解． (1) $f(x)=\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$.

当$x\in(-1,1]$时，$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.

故当$\frac{x-2}{2}\in(-1,1]$时，即$x\in(0,4]$时，$\ln x=\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n$.

(2) 在(1)中，令$x=3$可得$\ln 3=\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$,

于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}=\ln 3-\ln 2$.

5． (1) 方程组两边同时对x求偏导数得$\begin{cases}1=\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x}\\ 0=\frac{\partial u}{\partial x}\cos u-\frac{\partial v}{\partial x}\sin v\end{cases}$

解方程可得$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{u\cos u+v\sin v},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos u}{u\cos u+v\sin v}$.

(2) 方程$\sin z-xyz=0$两边同时对y求偏导得$\cos z\frac{\partial z}{\partial y}-x(z+y\frac{\partial z}{\partial y})=0$, (*)

由此可知$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{\cos z-xy}$.

方程(*)两边再对y求偏导得$-\sin z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\cos z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-x(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})=0$

由此解得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{\cos z-xy}\left[\sin z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2x\frac{\partial z}{\partial y}\right]=\frac{x^2z^2\sin z+2x^2z\cos z-2x^3yz}{(\cos z-xy)^3} .$$

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

1． 解． 构造 Lagrange 函数

$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x+2y+3z+\lambda(x^2+y^2-2)+\mu(y+z-1)$.

求偏导得 $L_x=1+2\lambda x, L_y=2+2\lambda y+\mu, L_z=3+\mu$, $L_\lambda=x^2+y^2-2, L_\mu=y+z-1$,

联立解得 $x=-1,y=1,z=0$ 或 $x=1,y=-1,z=2$.

代入原函数得 $f(-1,1,0)=1, f(1,-1,2)=5$ ． 故所求最大值为 5, 最小值为1.

2． 解． 所求金属丝的质量为 $m=\int_L \rho \mathrm{d}s$.

弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t=\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t$.

故 $m=\int_0^1 \frac{1}{2e^{2t}}\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-1})$.

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

1．证明． 设 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+2011}$ ，则 $f'(x)=\frac{2011-x}{2\sqrt{x}(x+2011)}$ ，显然 $x\ge 2011$ 时，$f'(x)\le 0$ ，即 $f(x)$ 单调递减.从而当 $n\ge 2011$ 时，$f(n)$ 单调递减．又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2011}=0$，故由 Leibniz 判别法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+2011}$ 收敛.

另一方面，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{\sqrt{n}}{n+2011}=1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故由比较判别法极限形式可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2011}$ 发散．综上所述可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+2011}$ 条件收敛.

2．证明：由 Stokes 公式可得

$$\text{左}=\iint\limits_{\Sigma}[(R_y-Q_z)\cos\alpha+(P_z-R_x)\cos\beta+(Q_x-P_y)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$\le\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{\left[\left(Q_x-P_y\right)^2+\left(R_y-Q_z\right)^2+\left(P_z-R_x\right)^2\right](\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}\mathrm{d}S$$

$$\le\max_{(x,y,z)\in\Sigma}\sqrt{\left(Q_x-P_y\right)^2+\left(R_y-Q_z\right)^2+\left(P_z-R_x\right)^2}\cdot\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\text{右}$$

其中 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为曲面 Σ 单位法向量的方向余弦.