院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

安徽大学 2017—2018 学年第一学期
《高等数学 A（一）》期中考试试卷

（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

得 分	

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\frac{3}{n^2+n+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ____________________。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=$ ____________________。

3. 已知 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2017)$，$x\in R$，则 $f'(0)=$ ____________________。

4. 设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为____________________。

5. 设函数 $f(x)$ 可微，$y=f(x)e^{f(x)}$，则 $dy=$ ____________________。

得 分	

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，则（　）。

(A) $a=1,\ b=1$　　(B) $a=-1,\ b=1$

(C) $a=1,\ b=-1$　　(D) $a=-1,\ b=-1$

7. 当 $x\to 2$ 时，函数 $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}e^{\frac{1}{x-2}}$ 的极限（　）。

(A) 等于 4　　(B) 等于 0

(C) 为 ∞　　(D) 不存在但也不为 ∞

8. 设当$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小，而$x\sin x^n$是比$(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小，则正整数n等于（　）。

(A) 1　　　(B) 2　　　(C) 3　　　(D) 4

9. 已知函数$f(x)$具有任意阶导数，且$f'(x)=[f(x)]^3$，则当n为正整数时，$f(x)$的n阶导数$f^{(n)}(x)=$（　）。

(A) $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)[f(x)]^{2n+1}$　　(B) $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)[f(x)]^{2n+1}$

(C) $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)[f(x)]^{2n-1}$　　(D) $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)[f(x)]^{2n-1}$

10. 设函数$f(x)$有连续的导函数，$f(0)=0$且$f'(0)=b$，若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处连续，则常数$A=$（　）。

(A) a　　　(B) b　　　(C) $a+b$　　　(D) 0

三、计算题（每小题 8 分，共 64 分）

得 分	

11. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数。

12. 设数列$\{a_n\}$满足$a_0=1$，$a_n=\dfrac{3n-1}{3n}a_{n-1}$，$n$为正整数。求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

13. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$。

14. 设$f(x)=\sqrt{\dfrac{2016^x(\arcsin x)^{2017}}{(\ln x)^{2018}\sin(2019x)}}$，求$f'(x)$。

15. 设 $f(x)=[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。试分别求下列各项的值：

$f'_+(0)$、$f'_-(0)$、$f'(0)$、$f'(0^+)$、$f'(0^-)$、$\lim\limits_{x\to 0} f'(0)$。

16. 设 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t^2), \\ y=\arctan t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dx}{dy}$，$\dfrac{d^2x}{dy^2}$。

17. 设 $f(x)=x^2\sin x$，求 $f^{(2017)}(0)$。

18. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$，试求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型。

四、应用题（本题共 6 分）

得 分	

19. 试确定 a 的值，使得两抛物线 $C_1:(y-1)^2=x+1$ 和 $C_2:(y-1)^2=-4x+a+1$ 在交点处各自切线互相垂直。

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

得 分	

20. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数,}\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数。}\end{cases}$ 试证明：

(1) 函数 $f(x)$ 为有界函数；(2) 函数 $f(x)$ 为偶函数；(3) 函数 $f(x)$ 是周期函数，但无最小正周期。

21. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 (a,b) 内可导。试证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(\xi)}{\xi-a}=f'(\xi)。$$