安徽大学 2016—2017 学年第一学期
《高等数学 A（三）》（概率论与数理统计）考试试卷（A 卷）
试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、 0.7　　2、$1-2e^{-1}$　　3、 20　　4、-1　　5、0.954

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6、 C　　7、A　8、 D　　9、B　　10、A

三、计算题（每小题 12 分，共 60 分）

11、【解】设 A：考生对相关知识完全掌握；B：考生对相关知识部分掌握；C：考生对相关知识完全不掌握；D：考生选对答案；

则由题意可知：$P(D\mid A)=1, P(D\mid B)=0.5, P(D\mid C)=0.25$　　4 分

（1）$P(D)=P(A)P(D\mid A)+P(B)P(D\mid B)+P(C)P(D\mid C)$

$=0.6\times1+0.2\times0.5+0.2\times0.25=0.75$　　8 分

（2）$P(A\mid D)=\dfrac{P(AD)}{P(D)}=\dfrac{P(A)P(D\mid A)}{P(D)}=\dfrac{0.6\times1}{0.75}=0.8$　　12 分

12、【解】（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}Axe^{-x^2}dx=\dfrac{A}{2}\Rightarrow A=2$　　4 分

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-x^2}, & x\ge 0\end{cases}$　　8 分

（3）$P(-1\le X<2)=\int_0^2 2xe^{-x^2}dx=1-e^{-4}$　　12 分

13、【解】（1）由题设条件 $P(X^2=Y^2)=1$ 可知 $P(X^2\ne Y^2)=0$，结合边缘与联合关系得 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1	$P(X=x_i)$
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P(Y=y_j)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

4 分

（2）利用同一表格法得 Z 的分布律为：

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

8 分

（3）$EX=\dfrac{2}{3}$，$EY=0$，$EXY=EZ=0$，

$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=0$，则 $\rho_{XY}=0$　　12 分

14、【解】$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{1}1dy=1+x, & -1<x\le 0,\\ \int_{x}^{1}1dy=1-x, & 0<x\le 1,\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\ge 1.\end{cases}$ 5 分

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{y}1\,dx, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$， 10 分

显然 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，则 X，Y 不独立. 12 分

15、【解】（1）$E(X)=\int_{\theta}^{1}x\cdot(\theta+1)x^{\theta}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$，

令 $E(X)=\overline{X}\Rightarrow\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$ 6 分

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本观测值，则似然函数：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta}, & 0<x_i<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $0<x_i<1(i=1,2,\cdots n)$ 时，$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，

两边对 θ 求导，得 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，

解得 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，

则对应的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$ 12 分

四、应用题（每小题 5 分，共 5 分）

16、【解】设 X 为需要赔偿的车主人数，得 $X\sim B(10000,0.006)$，$EX=60,DX=59.64$，则保险公司在一年获利不少于 60000 元的概率为：

$$P(120000-1000X>60000)，$$

利用中心极限定理可知

$P(120000-1000X>60000)=P(X<60)=P\left(\dfrac{X-60}{\sqrt{59.64}}<\dfrac{60-60}{\sqrt{59.64}}\right)\approx\Phi(0)=\dfrac{1}{2}.$ 5 分

五、证明题（每小题 5 分，共 5 分）

17、【证明】取 $U=X_1-X_2$，则 $EU=0$，$DU=1$，则 $U\sim N(0,1)$； 1 分

又因为 $X_i\sim N\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，则 $\dfrac{X_i-0}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{2}X_i\sim N(0,1)$，

进而 $V=\left(\sqrt{2}X_3\right)^2+\left(\sqrt{2}X_4\right)^2\sim\chi^2(2)$ 3 分

U,V 相互独立，则 $Y=\dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{2}}}\sim t(2)$