第十二章　曲线积分与曲面积分

习题 12.1　第一类曲线积分

1. 计算$\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)ds$，其中$L:x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt,t\in\left[0,2\pi\right]$.

【解析】（1）$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=\sqrt{a^2+b^2}dt$

（2）$\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)ds=\int_0^{2\pi}[a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2t^2]\cdot\sqrt{a^2+b^2}dt=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+b^2}dt$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(a^2t+\frac{1}{3}b^2t^3\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{3}\left(3a^2+4\pi b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}$$

2. 计算$\oint_L\cos\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$，直线$y=x$与$y$轴在第一象限内围成的图形的边界.

【解析】（1）$I=\int_{\overline{OA}}+\int_{\widehat{AB}}+\int_{\overline{OB}}$

（2）$\overline{OA}:x=0,y\in[0,a]$，$\int_{\overline{OA}}=\int_0^a\cos y dx=\sin a$；

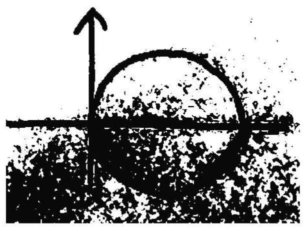
$\widehat{AB}$：$\int_{\widehat{AB}}=\int_{\widehat{AB}}\cos a ds=\cos a\cdot\frac{1}{8}\cdot 2\pi a=\frac{\pi}{4}a\cos a$；

$\overline{OB}:y=x,x\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2}a]$，$\int_{\overline{OB}}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\cos\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}dx=\sin a$；

（3）$I=2\sin a+\frac{\pi}{4}a\cos a$

3. 计算$\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中$L:x^2+y^2=ax\left(a>0\right)$.

【解析】解法一：直角坐标系做



（1）对上半圆周弧微分$ds=\sqrt{1+\left(\frac{a-2x}{2y}\right)^2}dx=\frac{a}{2y}dx=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx$ $(0\le x\le a)$；

（2）由对称性可知

$$\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds=a\sqrt{a}\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a-x}}dx=2a^2$$

解法二：极坐标系做

令$\begin{cases}x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\\ x=\frac{a}{2}\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$

$$\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left[\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\right]^2+\left[\frac{a}{2}\sin t\right]^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)^2+\left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2}dt$$

$$=\frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}\cdot\frac{a}{2}dt=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}dt=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=2a^2$$