安徽大学 2019--2020 学年第二学期《线性代数 B》
模拟试卷参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 5；2. 8；3. $x_1^2+3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3-2x_2x_3$；4. $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$；5 .18.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6. C；7. C；8. C；9. C；10. A.

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11. 解: 将各行都加到第一行，提取公因子得

$$D_n=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

右边行列式将各行加上第一行的 $-b$ 倍

$$D_n=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)^{n-1}\left[a+(n-1)b\right].$$

12. 解: 对增广矩阵原式 $\overline{A}$ 进行初等行变换

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

故得同解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=-x_3-x_4-x_5\\ -x_2=2x_3+2x_4+6x_5\end{cases}$$

取自由未知量

$$\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

分别得方程组的解为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}5\\ -6\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

则η_1,η_2,η_3即为所给方程组的一个基础解系.

13. 解：由于A为对称矩阵，故$M_{21}=M_{12}=1,\quad M_{23}=M_{32}=1,$由于
$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=a_{11}(-M_{21})+a_{12}M_{22}+a_{13}(-M_{23})=0$，

即 $-1+2t-t^2=0$， 解得$t=1$.

14. 解：$\begin{cases}|A|=|B|\\ tr(A)=tr(B)\end{cases}$,

即$\begin{cases}-2=-2y\\ 2+x=2+y-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$,

15. 解：该二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

A的各阶顺序主子式

$$\det A_1=1>0,\det A_2=4-t^2>0,\det A_3=4-2t^2>0.$$

$\Rightarrow -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.

四、分析计算题（本题 10 分）

16. 解：构造矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 0 & t & 0\\ 0 & -4 & 5 & -2\end{pmatrix}$，

因为 $r(A)=2$

故 A 的任意一个三阶子式均为零，$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & t\\ 0 & -4 & 5\end{vmatrix}=0 \Rightarrow t=3$..

五、证明题（本题 10 分）

17. 证明: 设 $k_0\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+\cdots+k_s(\beta+\alpha_s)=0$

于是

$$(k_0+\cdots+k_s)\beta+k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0 \quad （1）$$

故有 $(k_0+\cdots+k_s)A\beta+A(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=0$.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，所以有 $A(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=0$.

所以有 $(k_0+\cdots+k_s)A\beta=0$，又因为 $A\beta\neq 0$, 故 $k_0+\cdots+k_s=0$ (2)

由（1）知：$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$.

又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性无关，所以 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$.

由（2）知：$k_0=0$.

所以向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_s$ 线性无关.