

安徽大学 2011—2012 学年第一学期

《高等数学 A (一)、B (一)》考试试卷 (A 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号_____

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

一、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

得分	
----	--

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____。

2. 已知 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt =$ _____。

3. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{f(1)-f(1-x)} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为_____。

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + \sin kx) = 3$, 则 $k =$ _____。

5. 方程 $y' = \frac{2xy}{1+x^2}$ 满足 $y|_{x=0} = 1$ 的特解为_____。

得分	
----	--

二、单项选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

6. 函数 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则()。

- A. $f(0)$ 是函数的极大值 B. $f(0)$ 是函数的极小值
C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点 D. 以上均不对

7. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且对任意的 x_1, x_2 , 当 $x_1 > x_2$ 时, $f(x_1) > f(x_2)$, 则()。

- A. 对任意的 x , 均有 $f'(x) > 0$ B. 对任意的 x , 均有 $f'(-x) < 0$

C. 对任意的 x , 均有 $f'(x) \geq 0$

D. 对任意的 x , 均有 $f'(-x) \leq 0$

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0, \\ x^2 g(x), & x \leq 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()。

A. 极限不存在

B. 极限存在, 但不连续

C. 连续, 但不可导

D. 可导

9. 若 $\int f(x)dx = x^2 + c$, 则 $\int xf(1-x^2)dx = ()$ 。

A. $2(1-x^2)^2 + c$

B. $-2(1-x^2)^2 + c$

C. $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + c$

D. $\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + c$

10. 曲线 $y = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)}$ 的渐近线有 ()。

A. 1 条

B. 2 条

C. 3 条

D. 4 条

三、计算题(每小题 7 分, 共 56 分)

得 分	
-----	--

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2\sin x} - 1) \arcsin x}{\cos x - 1}$

13. $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx$

14. 已知当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$, 求 $f(x)$ ($0 \leq x < 1$)。

15. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$

16. $\int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin^2 x + 1} dx$

17. 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$ 的通解。

18. 求由参数方程 $\begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$ 所确定的函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 与二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

四、综合分析题（每小题 7 分，共 14 分）

得 分	
-----	--

19. 由 $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ 及 $x = 1$ 所围平面图形被 $x = a$ ($0 < a < 1$) 分成两部分。左边部分 D_1 绕 y 轴旋转, 所得旋转体体积为 V_1 , 右边部分 D_2 绕 x 轴旋转, 所得旋转体体积为 V_2 , 问 a 取何值时, $V_1 + V_2$ 取得最小值, 并求出这个最小值。

20. 求 a, b 的值, 使得 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$ 同时有无穷间断点 $x = 0$ 及可去间断点 $x = 1$ 。

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

得 分	
-----	--

21. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，其二阶导数 $f''(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内存在且大于零，

$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x > a)$ ，证明： $F(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内是单调递增的。

22. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的导函数，证明： $\int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f'(x)| dx \geq |f(0)|$ 。