安徽大学 2009—2010 学年第一学期《高等数学 A（一）、B（一）》考试试卷(A 卷)参考答案及评分标准

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1. 1，$-\dfrac{1}{2}$　　2. $\dfrac{(1+t^2)(y^2-e^t)}{2(1-ty)}$ 或 $\dfrac{\sec^2 x(y^2-e^{\tan x})}{2(1-y\tan x)}$　　3. $(1,+\infty)$

4. $(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(x-1)^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n}+(-1)^n\dfrac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)[1+\theta(x-1)]^{n+1}}$ $(0<\theta<1)$

(注：含有 ξ 的余项形式同样正确)

5. $C_1e^{-x}+C_2+\dfrac{1}{2}x^2-x$

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1. D　　2. C　　3. C　　4. A　　5. B

三、计算题（本题共 8 小题，每小题 7 分，共 56 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^2 n+n\cos^2 n}$

解：$1\le\sqrt[n]{\sin^2 n+n\cos^2 n}\le\sqrt[n]{\left(\sin^2 n+\cos^2 n\right)+\left(n-1\right)\cos^2 n}\le\sqrt[n]{n}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，由夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^2 n+n\cos^2 n}=1$

2. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=4$，求 $\lim\limits_{x\to0}(1+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$.

解：由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=4$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=4$，故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

因此，$\lim\limits_{x\to0}(1+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$

3. 设$a>0$, $a_1>0$, $a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+\frac{a}{a_{n-1}}), n=2,\cdots$. 求极限$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$.

解：不难发现$a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+\frac{a}{a_{n-1}})\ge\sqrt{a}\quad(n\ge 2)$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})-a_n=\frac{1}{2}(\frac{a}{a_n}-a_n)=\frac{1}{2}(\frac{a-a_n^2}{a_n})\le 0$$

因此，数列$\{a_n\}$从第二项后单调减少且有下界，由单调有界原理，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=x$. 对等式$a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+\frac{a}{a_{n-1}})$两边同时取极限，得$x=\frac{1}{2}(x+\frac{a}{x})$.

从而，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\sqrt{a}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^{\sin x}\frac{\arctan t^2}{t}\mathrm{d}t$.

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^{\sin x}\frac{\arctan t^2}{t}\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\arctan\sin^2 x}{\sin x}\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{x}}{2x}=\frac{1}{2}$$

5. $\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+\ln(1+x)}}\mathrm{d}x.\quad(x>0)$

解：$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+\ln(1+x)}}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\sqrt{1+\ln(1+x)}}\mathrm{d}(\ln(1+x))\\&=\int\frac{1}{\sqrt{1+\ln(1+x)}}\mathrm{d}(1+\ln(1+x))\\&=2\sqrt{1+\ln(1+x)}+C\end{aligned}$$

6. $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.(x>0)$

解：解法(一) 令$x=\frac{1}{t}$，则

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t})^2-1}}\mathrm{d}(\frac{1}{t})=-\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=\arccos t+C=\arccos\frac{1}{x}+C.$$

解法(二) 令$x=\sec t$, $t\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$t=\arccos\frac{1}{x}$. 所以，

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec t\bullet\tan t}{\sec t\bullet\tan t}\mathrm{d}t=t+C=\arccos\frac{1}{x}+C.$$

7. 设$\dfrac{\sin x}{x}$是$f(x)$的一个原函数，求$\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$.

解:
$$f(x)=(\frac{\sin x}{x})'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 x^3\mathrm{d}f(x)=x^3 f(x)|_0^1-3\int_0^1 f(x)x^2\mathrm{d}x\\&=x(x\cos x-\sin x)|_0^1-3\int_0^1 x^2\mathrm{d}\frac{\sin x}{x}\\&=\cos 1-\sin 1-3(x\sin x|_0^1-2\int_0^1\frac{\sin x}{x}x\mathrm{d}x)\\&=\cos 1-\sin 1-3\sin 1-6\cos 1+6\\&=-5\cos 1-4\sin 1+6\end{aligned}$$

8. 求曲线$\Gamma: y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\mathrm{d}t\ (x\in[0,\pi])$的长.

解: $y'=\sqrt{\sin x}$，由弧长公式,
$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin(\frac{\pi}{2}+t)}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos t}dt$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos t}dt=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{t}{2}dt=4.$$

四、综合分析题(本题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分)

1. 讨论函数$f(x)=(x+1)^2-3|x|$在$[-3,3)$上的最值.

解：$x=0$为该函数在区间$[-3,3)$上不可导的点，且$f(0)=1$.

在区间$[-3,\ 0)$上该函数的表达式为$y=(x+1)^2+3x$. 因此，函数在$[-3,\ 0)$上的驻点为$x=-\dfrac{5}{2}$.

在区间$(0,3)$上该函数的表达式为$y=(x+1)^2-3x$. 因此，函数在$(0,3)$上的驻点为$x=\dfrac{1}{2}$.

比较$f(0)=1$，$f(-\dfrac{5}{2})=-\dfrac{21}{4}$，$f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}$，$f(-3)=-5$，$\lim\limits_{x\to 3}f(x)=7$. 因此, 该函数在$[-3,3)$上的最小值为$-\dfrac{21}{4}$，取不到最大值.

2. 讨论广义积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x\ (n\ge 0)$的敛散性.

解：$x=0$可能是$f(x)=\dfrac{x^m}{1+x^n}$的奇点.

所以将$\int_0^{+\infty}\dfrac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$敛散性分成两个部分讨论，即讨论$\int_0^1\dfrac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$和$\int_1^{+\infty}\dfrac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$

敛散性.

对于无穷区间上广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$，考虑

$$\lim_{x\to+\infty}x^{n-m}\frac{x^m}{1+x^n}=1,$$

故$\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$与$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{n-m}}\mathrm{d}x$具有相同的敛散性．因此，当$n-m>1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$收敛.

对于可能的无界函数广义积分$\int_0^1\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$，由于$n\geq 0$，考虑

$$\lim_{x\to 0^+}x^{-m}\frac{x^m}{1+x^n}=1.$$

故$\int_0^1\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$与$\int_0^1\frac{1}{x^{-m}}\mathrm{d}x$具有相同的敛散性．因此，当$m>-1$时，$\int_0^1\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$收敛.

综上，$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x\ (n\geq 0)$收敛当且仅当$n-m>1$且$m>-1$.

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1．设$f(x)$在$[a,b]$上可积，证明：存在$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_\xi^b f(x)dx=\int_a^\xi f(x)dx.$$

证：令$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$．由于$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$F(x)$在$[a,b]$上连续.

注意到，$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=-F(a)$．若$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=0$，则结论显然成立．若$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\neq 0$，则$F(a),F(b)$反号．由零点定理，存在$\xi\in[a,b]$，使得$F(\xi)=0$．即$\int_\xi^b f(x)dx=\int_a^\xi f(x)dx$

2．设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且$f(a)=f(b)=0$，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

证：令 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导. 由题意显然，$F(a)=F(b)=0$． 由 Rolle 定理，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)e^{g(\xi)}+f(\xi)e^{g(\xi)}g'(\xi)=0,$$

即 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.