习题 13.2　数项级数的收敛判别法

1. 用比较判别法收敛或其极限形式判别下列级数敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{2}{n}\right)$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$.

【解析】（1） $n\to\infty,\ 1-\cos\dfrac{2}{n}\sim\dfrac{2}{n^2}$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以原级数收敛；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln(n+1)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n}=0$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，则原级数发散；

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，则原级数发散；

（4）① $0<a<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^n}=1\neq 0$，发散；

② $a=1$ 时，$\dfrac{1}{1+a^n}=\dfrac{1}{2}$，通项极限不区域零，则发散；

③ $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{1+a^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a^n}+1\right)=1$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n}$ 收敛，所以原级数收敛.

2. 用比值判别法或根值判别法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{2^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}$.

【解析】（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\dfrac{(2n)!}{[2(n+1)]!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2(2n+1)}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=0<1$，原级数收敛；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\dfrac{1}{2}<1$，原级数收敛；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3+(-1)^n}{2^n}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+(-1)^n}=\dfrac{1}{2}<1$，原级数收敛；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}=2>1$，原级数发散

3. 判别下列级数敛散性，若收敛，说明是条件收敛还是绝对收敛.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-n}}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

【解析】（1）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-n}}\right|=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}$，而$\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}>\dfrac{1}{n}$，又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以由比较判别法可知$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}$发散；而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-n}}$中$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}=0$，且$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}$随$n$的增大而减小，由莱布尼兹判别法得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-n}}$收敛；综上所述原级数条件收敛.

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n-1}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3}\cdot\dfrac{3^{n-1}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n}=\dfrac{1}{3}<1$，原级数绝对收敛.

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{2^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n+1}}{n+1}\to\infty$，原级数发散.

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln(n+1)}}=0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$发散；

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$中中$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}=0$，且$u_n=\dfrac{1}{\ln(n+1)}$随$n$的增大而减小，由莱布尼兹判别法得

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$收敛；综上所述原级数条件收敛.

4. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，且$a_n\neq-1(n=1,2,\cdots)$，试证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{1+a_n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{{a_n}^2}{1+{a_n}^2}$都收敛，

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$发

散.

【证明】（1）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$都收敛且$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

（2）$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)=1$，$\exists\varepsilon=\frac{1}{2},\exists N\in \mathrm{N},\forall n>N,1+a_n>\frac{1}{2}$，$\left|\frac{1}{1+a_n}\right|\le 2,\left|\frac{a_n}{1+a_n}\right|\le 2|a_n|$,

而$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，由比较判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{1+a_n}\right|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$必收敛；

（3）$\left|\frac{{a_n}^2}{1+{a_n}^2}\right|\le|a_n|^2$，而$\lim_{n\to\infty}a_n=0\Rightarrow\exists M>0$，$|a_n|\le M\Rightarrow|a_n|^2\le M|a_n|$，由比较判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{{a_n}^2}{1+{a_n}^2}$绝对收敛，则原级数比收敛；

（4）（反证法）假设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$收敛，则$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n}=0$，进而$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$与已知$\lim_{n\to\infty}a_n=0$矛盾，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$

发散.