安徽大学 2015—2016 学年第一学期

《高等数学 B（三）》（概率论与数理统计）考试试卷（A 卷）

试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、 0.4　　2、 $\dfrac{1}{b+1}$　　3、 1　　4、 0.6　　5、$(39.51,40.49)$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6、 D　7、 D　8、 A　9、 B　10、C

三、计算题（每小题 12 分，共 60 分）

11、【解】（1）设 A_i：第 i 次取到正品；$\overline{A}_i$：第 i 次取到次品，$i=1,2$，则有

$$P(\overline{A}_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid \overline{A}_1)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{5}$$ 6 分

（2）$P(\overline{A}_1\mid\overline{A}_2)=\dfrac{P(\overline{A}_1\overline{A}_2)}{P(\overline{A}_2)}=\dfrac{\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}}{\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{9}$ 12 分

12、【解】（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{100}^{+\infty}\dfrac{A}{x^2}dx=-\dfrac{A}{x}\Big|_{100}^{+\infty}=\dfrac{A}{100}\Rightarrow A=100$ 3 分

（2）$P(X>1000)=\int_{1000}^{+\infty}\dfrac{100}{x^2}dx=\dfrac{1}{10}$ 6 分

（3）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0 & x\le 100,\\ \int_{100}^{x}\dfrac{100}{t^2}dt, & x>100\end{cases}=\begin{cases}0 & x\le 100,\\ 1-\dfrac{100}{x}, & x>100\end{cases}$ 9 分

（4）由题意可知 Y 服从 $B(5,p)$，其中 $p=P(X>1000)=\dfrac{1}{10}$，故 Y 的分布律为

$$P(Y=k)=C_5^k\left(\frac{1}{10}\right)^k\left(\frac{9}{10}\right)^{5-k},k=0,1,2,\cdots 5$$ 12 分

13【解】（1）由题设条件 $P(X^2=Y^2)=1$ 可知 $P(X^2\neq Y^2)=1$，结合边缘与联合关系得 (X,Y) 的联合分布律为

Y \ X	0	1
-1	0	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	0
1	0	$\frac{1}{3}$

4 分

（2）利用同一表格法得 Z 的分布律为：

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

8 分

（3）$EX=\frac{2}{3}$，$EY=0$，$EXY=0$，则$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=0$ 12 分

14、【解】 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$ 4 分

（1） $EX=\iint_D x\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$， $EY=\iint_D y\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$， $EXY=\iint_D xy\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$，

所以$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=0$，即 $\rho_{XY}=0$，则 X，Y 不相关； 8 分

（2） $f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy & |x|<1\\ 0 & |x|\ge 1\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & |x|<1\\ 0 & |x|\ge 1\end{cases}$，

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx & |y|<1\\ 0 & |y|\ge 1\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & |y|<1\\ 0 & |y|\ge 1\end{cases}$，

显然 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，则 X，Y 不独立. 12 分

15、【解】（1） $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^{\theta}dx=\frac{1+\theta}{2+\theta}$，

令 $E(X)=\overline{X}\Rightarrow\frac{1+\theta}{2+\theta}=\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$ 6 分

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本观测值，则似然函数：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta}, & 0<x_i<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

当$0<x_i<1$时，$\ln L(\theta)=n\ln(1+\theta)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，则

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{1+\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

从而解得：$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$，则估计量为$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$ 12 分

四、应用题（每小题 5 分，共 5 分）

16、【解】因 $X_i\sim U(0,1)$，$EX_i=0.5,DX_i=\frac{1}{12}$； $E\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)=50,D\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)=\frac{25}{3}$； 3 分

所以$P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i>45\right)=1-P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\le 45\right)=1-\Phi\left(\frac{45-50}{\sqrt{25/3}}\right)=\Phi\left(\sqrt{3}\right)\approx 0.9582$ 5 分

五、证明题（每小题 5 分，共 5 分）

17、【证明】

“$\Leftarrow$”

$P(B|A)=P(B|\overline{A})\Rightarrow\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$；所以 A,B 独立;

“$\Rightarrow$”

因为A,B独立，$P(B|A)=P(B)$，$P(B|\overline{A})=P(B)$，所以$P(B|A)=P(B|\overline{A})$ 5 分