院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

装 订 线　答题勿超装订线

安徽大学 2017--2018 学年第一学期

《高等数学 A(一)》期末考试试卷（A 卷）

（ 闭卷　时间 120 分钟 ）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

得 分	

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 曲线 $y=x^2(x-1)^2$ 有____________个拐点。

2. 设 $f(x)=\int_{-1}^{x} te^{|t|}dt,\ t\in[-1,1]$，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值在点 $x=$______处达到。

3. 设常数 $a>0$，则定积分 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=$____________。

4. 广义积分 $\int_0^1 \ln x\,dx=$____________。

5. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x^2}=$____________。

得 分	

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 R 上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足（　）。

(A) $a<0, b<0$　　(B) $a>0, b>0$

(C) $a\le 0, b>0$　　(D) $a\ge 0, b<0$

7. 设积分曲线族 $y=\int f(x)\,dx$ 中有倾角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的直线，则曲线 $y=f(x)$ 的图形是（　）。

(A) 平行于 x 轴的直线　　(B) 平行于 y 轴的直线

(C) 直线 $y=\sqrt{3}x$　　(D) 直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

8. 设函数 $f(x)$ 满足微分方程 $f''(x)-f'(x)+5f(x)=0$，且 $f(x_0)>0,\ f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处（　）。

(A) 取极小值　　(B) 取极大值

(C) 附近单调减少　　(D) 附近单调增加

9. 曲线$y=\int_0^x \sqrt{\sin t}\,dt$ ($0\le x\le \pi$)的弧长为（ ）。

(A) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos x}dx$　　(B) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}dx$

(C) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin x}dx$　　(D) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sqrt{\sin x}}dx$

10. 设$y=y(x)$是二阶线性非齐次微分方程初值问题

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)=1,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$$

的解，其中$\alpha(x),\beta(x)$在R上连续。下列结果正确的是（ ）。

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2}$不存在　　(B) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2}=1$

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$　　(D) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2}=\frac{1}{4}$

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

得 分	

11. 常数$a>b>0$，曲线Γ的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$，P 为曲线$\Gamma$上对应于参数$t=\frac{\pi}{4}$的点。求曲线$\Gamma$在 P 点的曲率。

院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装……订……线

12. 计算不定积分 $I=\int e^{-x}\sin x dx$。

13. 计算定积分 $I=\int_{-1}^{1}\left[(x+|x|)^2+x^3e^{x^2}\right]dx$。

14. 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx$。

15. 设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt,\ x>0$，求 $f(x)+f(1/x),\ x>0$。

16. 函数 $y=y(x)$ 连续，满足 $y(x)=e^x+\int_0^x t\,y(t)dt-x\int_0^x y(t)dt$。（1）求 $y(0)$ 和 $y'(0)$ 的值；（2）验证 $y''(x)+y(x)=e^x$；（3）求 $y(x)$。

院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

得分	

17. 在平面曲线 $y=x^2\,(x\geq 0)$ 上某点 A 处作一切线，使之与该曲线以及 x 轴所围图形 S 的面积为 $1/12$。试求：（1）切点 A 的坐标；（2）过切点 A 的切线方程；（3）由上述平面图形 S 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。

18. 设 Y 种群生活在 V 区域，$y=y(t)$ 表示 t 时刻 Y 种群的个体数量，Y 种群的初始个体数量为 $y(0)=y_0>0$。假设 V 区域的总资源是 1 个单位，V 区域的 Y 种群饱和容纳量为 K(其中常数 $K>0$)，称 $\left[1-(y(t)/K)\right]$ 为 V 区域的剩余资源量，称 $y'(t)/y(t)$ 为 Y 种群的平均增长率。假设 Y 种群的平均增长率与 V 区域的剩余资源量成正比，比例系数为 r（常数 $r>0$）。试求 Y 种群个体数量 $y(t)$ 的表达式，并计算 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$。

五、证明题（每小题 8 分，共 16 分）

得 分	

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内二阶可导，且有 $f''(x)\ge 0,\ x\in(a,b)$。

设 $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$， $x_1,x_2\in(a,b)$，记 $x_0=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$。

（1）分别写出 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 在 x_0 点处的一阶具 Lagrange 型余项的 Taylor 公式；

（2）证明 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$。

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续， n 为正整数。试证明：（1）对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\int_{2(i-1)\pi/n}^{2i\pi/n}|\sin nx|dx=\frac{4}{n}$；（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)|\sin nx|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx$。