

### 习题 9.4 几种常见的二次曲面

1. 求以点  $A(3, 2, 1)$  为球心, 且与平面  $x + 2y - 3z = 18$  相切的球面方程.

【解析】考查点到平面的距离公式及球面方程.

$$\textcircled{1} R = \frac{|3 + 2 \times 2 - 3 \times 1 - 18|}{\sqrt{1 + 2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{14};$$

$$\textcircled{2} \text{ 所求球面方程为: } (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 14.$$

2. 求下列旋转面的方程, 并指出它的名称.

$$(1) \text{ 曲线 } \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases} \text{ 绕 } y \text{ 轴旋转一周; } \quad \text{【解】 } y^2 = 4(x^2 + z^2) \quad \text{锥面.}$$

$$(2) \text{ 曲线 } \begin{cases} z^2 = 5x \\ y = 0 \end{cases} \text{ 绕 } x \text{ 轴旋转一周; } \quad \text{【解】 } 5x = y^2 + z^2 \quad \text{抛物面.}$$

$$(3) \text{ 曲线 } \begin{cases} x^2 + z^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 绕 } z \text{ 轴旋转一周. } \quad \text{【解】 } x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \text{球面.}$$

4. 求两曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  和  $z^2 = x^2 + y^2$  的交线在  $xOy$  坐标面的投影曲线的方程, 并作图.

【解析】投影曲面的计算

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow 2(x^2 + y^2) = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1,$$

$$\textcircled{2} \text{ 投影曲线方程为 } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$