安徽大学 2012—2013 学年第一学期
《高等数学 A（一）、B（一）》考试试卷（A 卷）
考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、 $\lambda=1$　　2、 偶函数　　3、 $y=2x$　　4、 $\frac{\pi}{2}$　　5、 $\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$

二、选择题（每小题 **2** 分，共 **10** 分）

6、 A　　7、 D　　8、 C　　9、B　　10、 C

三、计算题（每小题 8 分，共 56 分）

11、(1)【证明】因为 $a_0>0$，由递推公式可知：$a_n>0$

而 $a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{1}{a_n^2}\right)=\frac{1}{3}\left(a_n+a_n+\frac{1}{a_n^2}\right)\ge\sqrt[3]{a_n\cdot a_n\cdot\frac{1}{a_n^2}}=1$，所以 $\{a_n\}$ 有下界为 1；

又 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{a_n^3}\right)\le\frac{1}{3}(2+1)=1\Rightarrow a_{n+1}\le a_n$，所以 $\{a_n\}$ 单调递减；

由单调有界必有极限可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.　　（5 分）

（2）【解】令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，对 $a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{1}{a_n^2}\right)$ 两边取 $n\to\infty$ 的极限，即得：

$$A=\frac{1}{3}\left(2A+\frac{1}{A^2}\right)=0\Rightarrow \mathrm{A}=1$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$　　（8 分）

12、【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2^{\frac{3}{x}}-2^{\frac{1}{x+1}}\right)\overset{0\cdot\infty型}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{\frac{3}{x}}-2^{\frac{1}{x+1}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{x+1}}\left(2^{\frac{3}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)}{\frac{1}{x}}$

$$\overset{a^t-1\sim t\ln a}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{x+1}}\cdot\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\ln 2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}2^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{2x+3}{x+1}\cdot\ln 2=2\ln 2. \qquad （8 分）$$

13、【解】$e^y+xy=e$ 两边对 y 求导，

$$e^y\cdot y'+y+xy'=0,$$

得
$$y'=-\frac{y}{e^y+x} \qquad （3 分）$$

再对 $e^y\cdot y'+y+xy'=0$ 两边求 y 导数，

$$e^y\cdot(y')^2+e^y\cdot y''+2y'+x\cdot y''=0$$

得：
$$y''=-\frac{e^y\cdot(y')^2+2y'}{e^y+x}$$

将 $y'=-\dfrac{y}{e^y+x}$ 带入上式，即

$$y''=-\frac{(y^2-2y)e^y-2xy}{(e^y+x)^3}. \qquad （8 分）$$

14、【解】

当 $-1\le x<0$ 时，$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{x}(-1)dt=-(1+x)$；

当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{0}(-1)dt+\int_{0}^{x}1dt=x-1$；

所以 $F(x)=\begin{cases}-x-1, & -1\le x<0\\ x-1, & 0\le x<1\end{cases}$ （4 分）

则 $F'(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$,

因为 $f'_+(0)=1, f'_-(0)=-1$，所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。 （8 分）

15、【解】

方法一：令 $u=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$，则 $\sin^2u=\dfrac{x}{1+x}$，即 $x=\tan^2u$ （3 分）

则 $\int_0^3\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}ud(\tan^2u)=u\cdot\tan^2u\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2u\,du$

$$=\pi-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2 u}{\cos^2 u}du=\pi-\left(\tan u\,|_0^{\frac{\pi}{3}}-u\,|_0^{\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$ （8 分）

方法二：$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx \overset{\sqrt{\frac{x}{1+x}}=t}{=} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin t\cdot\frac{2t}{(1-t^2)^2}dt$ （3 分）

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arcsin t d\frac{1}{1-t^2}=\arcsin t\cdot\frac{1}{1-t^2}\,|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}dt=\frac{4\pi}{3}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}dt$$

又 $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}dt \overset{t=\sin u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(1-\cos^2 u)^{3/2}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^2 u d=\tan u\,|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$ （7 分）

所以 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$ （8 分）

16、【解】注意到 $\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=\sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}=\sqrt{\sin^3 x}\cdot|\cos x|$， （4 分）

故
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos xdx$$

$$=\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\,|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\,|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{5}.$$ （8 分）

17、【解】原方程对应的齐次方程为 $y''+y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，

特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$，故齐次方程的通解为：$\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$ （4 分）

设非齐次方程 $y''+y=x+\cos x$ 的特解形式为：

$$y^*=Ax+B+x(C\cos x+D\sin x)$$

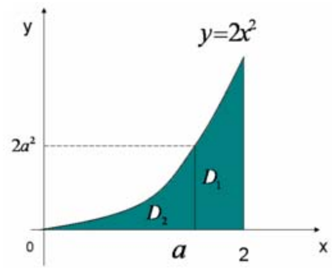
带入非齐次方程解得：$A=1,B=0,C=0,D=\frac{1}{2}$，

则非齐次方程的特解为：$y^*=x+\frac{1}{2}x\sin x$ （7 分）

所以非齐次方程通解为：$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x$ （8 分）

四、综合题（每小题 14 分，共 14 分）

18、（1）作出图形如下图



$V_x=\pi\int_a^2 (2x^2)^2dx=\dfrac{4\pi}{5}(32-a^5)$；

$V_y=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_a^{2a^2}\dfrac{y}{2}dy=\pi a^4$ （8 分）

（2）$V(a)=V_x+V_y=\dfrac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$

$V'(a)=4\pi a^3(1-a)=0\Rightarrow a=1(0<a<2)$，

因为在定义范围内驻点只有一个，则该驻点即为最值点，所以 $a=1$ 为最大值点，且最大值为 $\dfrac{129}{5}\pi$. （14 分）

（没求出最大值扣 1 分）

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

19、【证明】构造辅助函数 $F(x)=f(x)-x$， （1 分）

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=0,F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2},F(1)=-1$ 。

①$\because F(x)$在$[\frac{1}{2},1]$上连续,$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0,F(1)=-1<0$，

$\therefore$ 由零点定理可知：存在点 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $F(\eta)=0$； （3 分）

②$\because F(x)$在$[0,\eta]$上连续,$F(x)$在$(0,\eta)$内可导,且$F(0)=F(\eta)$，

$\therefore$ 由罗尔定理可知：存在点 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，

即 $f'(\xi)=1$. （5 分）

20、【证明】令 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt \quad x\in[-1,1]$ （1 分）

$F'(x)=f(x),F''(x)=f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，且 $F(-1)=0$

$f(-1)=\int_{-1}^{1}xf'(x)dx=xf(x)|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}f(x)dx=f(1)+f(-1)-\int_{-1}^{1}f(x)dx$，

则 $f(1)=\int_{-1}^{1}f(x)dx$，即 $F(1)=F'(1)$，

对 $F(x)$ 在 $x_0=1$ 点处应用泰勒公式，得：

$$F(x)=F(1)+F'(1)(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}F''(\xi)\qquad \xi\text{介于}x\text{和 1 之间.}$$

令上式中 $x=-1$，即

$$F(-1)=F(1)-2F'(1)+2F''(\xi)\Rightarrow 0=F(1)-2F(1)+2f'(\xi)\text{，即：}$$

$$f'(\xi)=\frac{1}{2}F(1)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(t)dt=\frac{1}{2}f(1).$$ （5 分）