习题 12.3　Green 公式

1. 计算曲线积分$\oint_{L^+} xy^2dy - x^2ydx$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=R^2$.

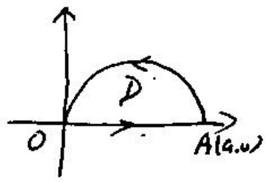
【解析】（1） $P=-x^2y$， $Q=xy^2$；

（2） $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^2+x^2$；

（3） $\oint_{L^+} xy^2dy - x^2ydx=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr=\frac{1}{2}\pi R^4$

2. 计算曲线积分$\int_L \left(e^x\sin y-ay\right)dx+\left(e^x\cos y-bx\right)dy$，其中 L 为从 $A\left(a,0\right)$ 到 $O\left(0,0\right)$ 的上半圆周

$x^2+y^2=ax$.



【解析】（1）添加$\overline{OA}: y=0$，从 $O\to A$；

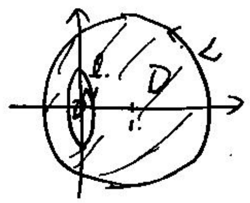
（2） $\int_L=\oint_{L+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}$ ；

（3） $\int_L=\oint_{L+\overline{OA}}=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\frac{\partial(e^x\cos y-bx)}{\partial x}-\frac{\partial(e^x\sin y-ay)}{\partial x}\right]dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(a-b)dxdy=\frac{\pi a^2}{8}(a-b)$；

（4） $\overline{OA}:\begin{cases}y=0\\x=x\end{cases}\quad x:0\to a,则\int_{\overline{OA}}=\int_0^a 0\,dx=0$；

（5） $\int_L=\frac{\pi a^2}{8}(a-b)$

3. 计算曲线积分$\oint_{L^+}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点$\left(1,0\right)$为中心，R 为半径的圆周$\left(R>1\right)$，取顺时针方向.(提示：挖去一个小椭圆)



【解析】（1）添加$l:4x^2+y^2=\varepsilon^2(\varepsilon>0)$，方向逆时针方向；

（2） $P=\frac{-y}{4x^2+y^2},Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$，且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$；

（3） $\int_{L^+}=\oint_{L^++l}-\oint_l$ ；

（4） $\oint_{L^++l}=\iint\limits_D 0dxdy=0$；

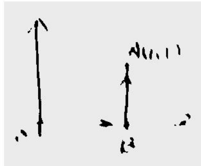
（5） $\oint_l\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_l xdy-ydx=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_D 2dxdy=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon=\pi$；

（6） $\int_{L^+}=-\pi$

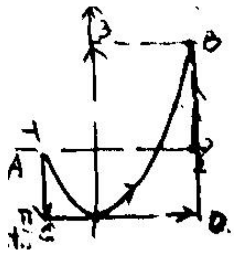
4. 曲线积分$\int_L\left(e^x+2f\left(x\right)\right)ydx-f\left(x\right)dy$与路径无关，且$f\left(1\right)=1$，求

$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left(e^x+2f\left(x\right)\right)ydx-f\left(x\right)dy$.

【解析】$I=\int_{\overline{OB}}+\int_{\overline{BA}}=\int_0^1(e^x+xf(x))\cdot 0dx-\int_0^1 f(1)dy=\int_0^1(-1)dy=-1$



5. 计算$I=\int_L\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中$L$是从$A\left(-1,0\right)$沿抛物线$y=x^2-1$到点$B\left(2,3\right)$的曲线弧.



【解析】（1）$P=\dfrac{-y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, 且$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以可知积分与路径无关；

（2）沿$A\to C\to D\to B$构造新的路径进行计算

$\overrightarrow{AC}:\begin{cases}x=-1\\y=y\end{cases}, y:0\to 1$，$\int_{\overrightarrow{AC}}=\int_0^1\dfrac{-1}{1+y^2}dy=-\arctan y\Big|_0^{-1}=\dfrac{\pi}{4}$；

$\overrightarrow{CD}:\begin{cases}x=x\\y=-1\end{cases}, x:-1\to 2$，$\int_{\overrightarrow{CD}}=\int_{-1}^2\dfrac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{-1}^2=\arctan 2+\dfrac{\pi}{4}$；

$\overrightarrow{BD}:\begin{cases}x=2\\y=y\end{cases}, y:-1\to 3$，$\int_{\overrightarrow{BD}}=\int_{-1}^3\dfrac{2}{4+y^2}dy=\arctan\dfrac{y}{2}\Big|_{-1}^3=\arctan\dfrac{3}{2}+\arctan\dfrac{1}{2}$；

（3）$I=\dfrac{\pi}{2}+\arctan 2+\arctan\dfrac{3}{2}+\arctan\dfrac{1}{2}=\pi+\arctan\dfrac{3}{2}$　$(\because \arctan 2+\arctan\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{2})$

6. 选择常数a,b使得$\left(2ax^3y^3-3y^2+5\right)dx+\left(3x^4y^2-2bxy-4\right)dy$是某个二元函数

$U\left(x,y\right)$在全平面内的

全微分，并求$U\left(x,y\right)$.

【解析】（1）$P=2ax^3y^3-3y^2+5,Q=3x^4y^2-2bxy-4$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=6ax^3y^2-6y,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=12x^3y^2-2by$，

因为$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow\begin{cases}6a=12\\-2b=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$

（2）$\left(4x^3y^3-3y^2+5\right)dx+\left(3x^4y^2-6xy-4\right)dy$

$=4x^3y^3dx-3y^2dx+5dx+3x^4y^2dy-6xydy-4dy$

$$= (y^3 dx^4 + x^4 dy^3) - 3(y^2 dx + x dy^2) + d(5x - 4y)$$

$$= d(x^4 y^3) - d(3xy^2) + d(5x - 4y) = d(x^4 y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y)$$

所以 $u(x, y) = x^4 y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C \quad (C \in R)$