自 测 题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$___ $\sqrt{3}$ ___.

【解析】$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{(-3)^{n+1}+2^{n+1}}x^{2n+1}}{\frac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{(-3)^n+2^n}{(-3)^{n+1}+2^{n+1}}\cdot x^2\right|=\frac{1}{3}|x|<1\Rightarrow|x|<\sqrt{3}$

2. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为___ $(-2,4)$ ____.

【解析】逐项求导和逐项求积分不改变级数的收敛半径和收敛区间，由 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，可得数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径也为 3，即数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛半径也为 3，则 $-3<x-1<3$，解得 $(-2,4)$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$__ 4___.

【解析】考查幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，在收敛区间内，记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，

则 $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=S\left(\frac{1}{2}\right)=4$.

4. 函数 $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x\le 0\\ 1+x^2 & 0<x\le\pi\end{cases}$，以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于__ $\frac{\pi^2}{2}$ __.

【解析】函数在点 $x=\pi$ 处是间断点，由狄里克莱收敛定理可知在点 $x=\pi$ 处收敛于

$$\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{1+\pi^2+(-1)}{2}=\frac{\pi^2}{2}.$$

5. $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式中系数 $b_3=$__ $\frac{2}{3}\pi$ __.

【解析】$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,dx=\frac{2}{3}\pi$.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.

6. 下列选项正确的是（A）.

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^2$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛； (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^2$ 都收敛；

(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $a_n \geq \frac{1}{n}$； (D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $a_n \geq \frac{1}{n}$.

【解析】A 正确，$(a_n+b_n)^2 = a_n^2+b_n^2+2a_nb_n$，又 $a_nb_n \leq \frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$，由比较判别法可得级数收敛；

B 错误，反例取 $a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, b_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$；

C 错误，正项级数的比较判别法只是充分而非充要条件；

D 错误，反例 $a_n = \frac{0.5}{n}$

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$（$a$ 为常数）（C）.

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 收敛性与 a 有关

【解析】$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^2}$：$\left|\frac{\sin na}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$，由比较判别法，该级数绝对收敛；

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$：由 $p-$ 级数可知该级数发散；再由级数的性质，可知原级数发散.

8. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \bullet \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}}(\alpha>0)$（A）.

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 收敛性与 α 有关

【解析】$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \bullet \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}}$，而 $\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}} \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\alpha}\right)$，由级数的性质、$p-$ 级数以及比较判别法可知原级数绝对收敛.

9. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，该幂级数在 $x=2$ 处（B）.

(A) 条件收敛 (B) 绝对收敛 (C) 发散 (D) 敛散性不定

【解析】由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n$ 在 $t=-2$ 处收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n$ 在 $(-2,2)$ 的开区间内绝对收敛，则当 $x=2$ 处 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 绝对收敛.

10. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{2n \bullet 2^n}$ 的收敛域为（C）.

(A) $(1,5)$ (B) $[1,5)$ (C) $(1,5]$ (D) $[1,5]$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}\dfrac{(x-3)^{n+1}}{2(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{(-1)^n\dfrac{(x-3)^n}{2n\cdot 2^n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2n}{2(n+1)}\cdot\dfrac{2^n}{2^{n+1}}\cdot(x-3)\right|=\dfrac{1}{2}|x-3|<1\Rightarrow|x-3|<2$

则收敛半径为 2，收敛区间为$(1,5)$；验证可知在$x=1$点处$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(-2)^n}{2n\cdot 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$发散，而在$x=5$点处

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2)^n}{2n\cdot 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n}$，由交错级数的判别法可知收敛，所以收敛域为$\left(1,5\right]$

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）.

11. 判别下列级数敛散性:

$(1)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$ ；

【解析】该级数是正项级数，利用根值判别法进行判别：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^2}}{n+\dfrac{1}{n}}=0<1$，级数收敛.

$(2)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$.

【解析】该级数是正项级数，利用比较判别法的极限形式

$n\to\infty,2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}\sim 2^n\cdot\dfrac{\pi}{3^n}=\pi\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pi\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$收敛，所以原级数收敛.

12. 讨论下列级数是绝对收敛，还是条件收敛，或发散.

$(1)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)$；

【解析】$\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)=(-1)^n\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ ，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right|\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{n}$，发散；而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{n}$为交错级数，收敛，所以该级数条件收敛.

$(2)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

【解析】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$，

而 $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}=\dfrac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})n}\le\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$，由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ 收敛，则原级数绝对收敛.

13. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 在收敛区间内和函数 $S\left(x\right)$，并计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 的值.

【解析】（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\dfrac{1}{2}|x|^2<1\Rightarrow|x|<\sqrt{2}$，则 $R=2$，收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$；

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，$\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)$ 发散，则收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$；

（2）$\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\dfrac{1}{x^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$，

而 $f\left(x\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n+2}=x^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=x^2\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'$

$$=x^2\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=x^2\cdot\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$$

所以 $S(x)=\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{x^2}\cdot\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\dfrac{\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}{\left[1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^2}=\dfrac{x^2+2}{(2-x^2)^2}$

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}=S(1)=3$

14. 将函数 $f\left(x\right)=\ln\left(4-3x-x^2\right)$ 展开成 x 的幂级数.

【解析】（1）$f\left(x\right)=\ln\left(4-3x-x^2\right)=\ln[(4+x)(1-x)]=\ln(4+x)+\ln(1-x)$；

（2）$\ln(4+x)=\ln4+\ln\left(1+\dfrac{x}{4}\right)=2\ln2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{4}\right)^n$

$$=2\ln2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot4^n}x^n\qquad\left(-1<\frac{x}{4}\le1\Rightarrow-4<x\le4\right)$$

（3）$\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}(-x)^n=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n\qquad\left(-1<-x\le1\Rightarrow-1\le x<1\right)$

（4）$f\left(x\right)=\ln\left(4-3x-x^2\right)=2\ln2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot4^n}x^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n=2\ln2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{(-1)^n}{4^n}-1\right]x^n$

（5）$\begin{cases} -4 < x \le 4 \\ -1 \le x < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \le x < 1$

（6）$f(x) = 2\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{(-1)^n}{4^n} - 1\right] x^n \qquad (-1 \le x < 1)$.

15. 将函数 $f\left(x\right) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

【解析】$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{(x+2)+(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$

$$= \frac{1}{1+(x-2)} + \frac{1}{4+(x-2)} = \frac{1}{1+(x-2)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-2}{4}}$$

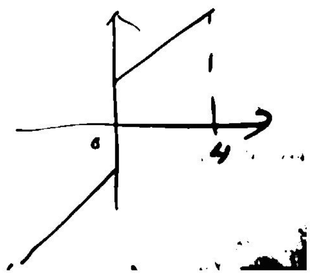
$$= \sum_{n=0}^{\infty} [-(x-2)]^n + \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{x-2}{4}\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (x-2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[1 + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right] (x-2)^n$$ ；

（2）$\begin{cases} \left|-(x-2)\right| < 1 \\ \left|-\frac{x-2}{4}\right| < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|x-2\right| < 1 \\ \left|x-2\right| < 4 \end{cases} \Rightarrow \left|x-2\right| < 1$；

（3）$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[1 + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right] (x-2)^n \qquad (\left|x-2\right| < 1)$

16. 将函数 $f\left(x\right) = x+2$ 在区间 $[0,4]$ 上展开成正弦级数.



【解析】$a_n = 0$；

$b_n = \frac{2}{4}\int_0^4 (x+2)\sin\frac{n\pi}{4}x\,dx = \frac{4}{n\pi}[1-3(-1)^n]$；

则 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{n\pi}[1-3(-1)^n]\sin\frac{n\pi x}{4} \qquad (0 < x < 4)$