安徽大学 2008-2009 学年第二学期

《高等数学 A （二）、B（二）》考试试卷 （A 卷） 参考答案及评分细则

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$ 2. 2 3. $\int_0^4 dy\int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$ 4. πa^3 5. $-\frac{\pi}{2}$

二、 单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6．D 7. C 8. B 9. A 10. D

三、计算题（每小题 8 分，共 64 分）

11. 解：设直线的方向向量为$\vec{l}$：

则$\vec{l}=(3,0,-4)$，平面Σ的法向量$\vec{n}=(1,2,2)$，$\cos(\vec{l},\overrightarrow{n})=\frac{\vec{l}\cdot\vec{n}}{|\vec{l}|\cdot|\vec{n}|}=-\frac{1}{3}$.

故直线L_1与平面Σ的夹角为$\theta=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{3}$（或$\theta=\arcsin\frac{1}{3}$）.

12 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2}=\frac{y}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2}=\frac{-x}{x^2+y^2}$

故 $dz=z_x dx+z_y dy=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$

13. 解：齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 对应的特征方程为：$\lambda^2-3\lambda+2=0$，则 $\lambda_{1,2}=1,2$.

因此齐次方程对应的通解为：$y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$，其中C_1,C_2为任意常数。

令非齐次方程的特解为：$y^*(x)=A\cdot e^{-2x}$

代入原式得：$A=\frac{1}{12}$，故$y^*(x)=\frac{1}{12}\cdot e^{-2x}$

因此非齐次方程的通解为：$Y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{-2x}$

14. 解：

$$\iint_D e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-\frac{y^2}{2}}dx \quad =\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}ydy \ =1-e^{-\frac{1}{2}}$$

15. 解

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2)dxdydz+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}xzdxdydz$$（对称性）

$$=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2)dxdydz \ =\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R r^4\sin^3\varphi dr$$

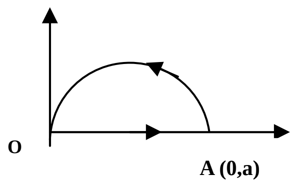
$$=\frac{8}{15}\pi R^5$$

提示：本题可以化为：

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2)dxdydz+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}xzdxdydz$$（对称性）

$$=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2)dxdydz \ =\frac{2}{3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2+z^2)dxdydz \quad =\frac{8}{15}\pi R^5$$

16. 解 如图所示：



C 为上半圆周，方向为逆时针。添加 $\overline{OA}$ 线段，方向如图所示. 这时 C 与 $\overline{OA}$ 构成一个平面区域 D.然后再 D 上应用 Green 公式：

$$I=(\int_C+\int_{\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}})(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$$

$$=\iint_D[\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y-2)-\frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y-2y)]dxdy-\int_0^1 0dx$$

$$=\iint_D 2dxdy=\frac{\pi a^2}{4}$$

17. 解：补充平面 $\Sigma_0: z=0(x^2+y^2\le 1)$ 取下侧，则 Σ_0 与 Σ 围成空间区域 Ω 于是

$$I=\oiint\limits_{\Sigma_0+\Sigma}\ -\iint\limits_{\Sigma_0}$$

$$=6\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv+2\pi$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{1-r^2}r^3dz+2\pi$$

$$=12\pi\int_0^1(r^3-r^5)dr+2\pi$$

$$=3\pi$$

18. 解 $\dfrac{1}{1+2x}=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{2(x+2)}{3}}$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2(x+2)}{3}\right]^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}(x+2)^n$$

解出得收敛域为: $(-\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{1}{2})$

四、 应用题（本大题共 8 分）

19. 设 (x,y) 为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上任一点，则该点到直线 $2x+3y-12=0$ 的距离为

$$d=\frac{|12-2x-3y|}{\sqrt{13}}$$

令 $L=(12-2x-3y)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$，

于是由：

$$\begin{cases}L_x=-4(12-2x-3y)+2\lambda x=0\\ L_y=-6(12-2x-3y)+8\lambda y=0\\ L_\lambda=x^2+4y^2-4=0\end{cases}$$

得条件驻点：$M_1(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}),M_2(-\dfrac{8}{5},-\dfrac{3}{5})$

$$d|_{M_1}=\frac{|12-2x-3y|}{\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{13}}{13}\qquad d\Big|_{M_2}=\frac{|12-2x-3y|}{\sqrt{13}}=\frac{17\sqrt{13}}{13}$$

因此 $M_1(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5})$ 为到直线距离最小值点.

提示，本题可以直接在椭圆上求一点的切线平行于直线。

对椭圆两边关于 x 求导得：$2x+8yy'=0\Rightarrow y'=-\dfrac{x}{4y}$

令 $y' = -\dfrac{x}{4y} = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow y = \dfrac{3}{8}x$

代入椭圆得：$M_1(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}), M_2(-\dfrac{8}{5},-\dfrac{3}{5})$

$d\,|_{M_1} = \dfrac{|12-2x-3y|}{\sqrt{13}} = \dfrac{7\sqrt{13}}{13}$　　　　$d\,\Big|_{M_2} = \dfrac{|12-2x-3y|}{\sqrt{13}} = \dfrac{17\sqrt{13}}{13}$

因此 $M_1(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5})$ 为到直线距离最小值点.

五、证明题（本大题共 8 分）

20. 证明：因为 $\{a_n\}$ 单调减小，且 $a_n \geq 0$，即单调减小有下界，故 $\{a_n\}$ 收敛。

设其极限为 a，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，所以 $a > 0$（否则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛）。

于是对于任意的 n 有 $\dfrac{1}{1+a_n} < \dfrac{1}{1+a} < 1$，

而等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{1}{1+a})^n$ 收敛。由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{1}{1+a_n})^n$ 收敛。