第十三章　无穷级数

习题 13.1　数项级数的概念

1. 根据级数收敛与发散的定义判别下列级数敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$；

【解析】（1） $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$；

（2） $S_n=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$；

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$，则级数收敛

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$；

【解析】（1） $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$；

（2） $S_n=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{n+1}-1$；

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，则级数发散

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{9}{10}\right)^n$；

【解析】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{9}{10}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{9}{10}\right)^{n-1}$，

由于公比 $q=-\frac{9}{10}$， $|q|<1$，所以原级数收敛

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{6}\pi$

【解析】 $u_{12n+k}=\sin\left(\frac{12n+k}{6}\pi\right)=\sin\left(2n\pi+\frac{k}{6}\pi\right)=\sin\frac{k}{6}\pi=u_k$ ，所以

$$u_{12n}=u_{12}=0\text{，而 }u_{12n+1}=u_1=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\text{，}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{12n}=0\neq\lim\limits_{n\to\infty}u_{12n+1}=\frac{1}{2}$，极限不存在，所以原级数发散.

2. 判别下列级数敛散性.

$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3^n}{n^2\bullet 3^n}$；

【解析】（1） $\frac{n^2+3^n}{n^2\cdot 3^n}=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{n^2}$；

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$， $q=\frac{1}{3}<1$，该级数收敛；又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$， $p=2>1$，该级数收敛；

（3）由性质可知原级数收敛

$(2)\ \sum_{n=2}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{n}$.

【解析】 $\lim_{n\to\infty}n\tan\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{\pi}{n}=\pi\neq 0$

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_{n+1}-a_n)$ 收敛.

【解析】 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 部分和数列为 S_n， $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_{n+1}-a_n)$ 部分和数列为 σ_n；

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$，则 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$；

又因为 $\sigma_n=2(a_2-a_1)+3(a_3-a_2)+\cdots+(n+1)(a_{n+1}-a_n)=-a_1-S_n+(n+1)a_{n+1}$，则

$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=-a_1-S$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_{n+1}-a_n)$ 收敛