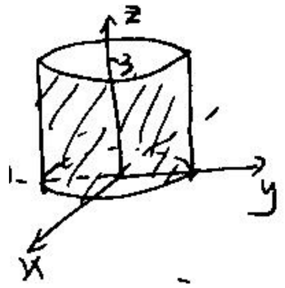
习题 12.5　第二类曲面积分

1. 计算下面第二类曲面积分：

(1) $\iint\limits_S x^2zdydz+y^2dzdx+zdxdy$，其中 S 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 的前半个柱面界于 $z=0$ 与 $z=3$ 之间的部分，取前侧.



【解析】(1) 由于曲面 S 垂直于 xoy 面，所以 $\iint\limits_S zdxdy=0$；

(2) $S_{右}:y=\sqrt{1-x^2}$，方向向右，$S_{左}:y=-\sqrt{1-x^2}$，方向向左，

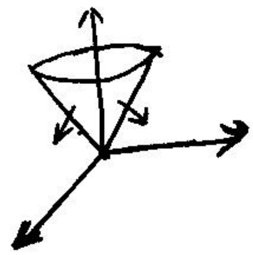
$D_{xz}:0\le x\le 1,0\le z\le 3$，则

$$\iint\limits_S y^2dzdx=\iint\limits_{左}+\iint\limits_{右}=\iint\limits_{D_{xz}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2dxdz+\left[-\iint\limits_{D_{xz}}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)^2dxdz\right]=0\text{；}$$

(3) $S_{前}:x=\sqrt{1-y^2}$，方向向前，$D_{yz}:-1\le y\le 1,0\le z\le 3$，则

$$\iint\limits_S x^2zdydz=\iint\limits_{D_{yz}}\left(1-y^2\right)z\,dydz=\int_0^3 zdz\int_{-1}^1\left(1-y^2\right)dy=6$$

(2) $\iint\limits_S\left(x^2+y^2\right)dzdx+zdxdy$，其中 S：$z=\sqrt{x^2+y^2}\ \left(0\le z\le 1\right)$ 的下侧.



【解析】(1) $D_{xy}:x^2+y^2\le 1$；

(2) $\iint\limits_S\left(x^2+y^2\right)dzdx+zdxdy=\iint\limits_S\left[\left(x^2+y^2\right)\cos\beta+z\cos\gamma\right]dS$

$$=\iint\limits_S\left[\left(x^2+y^2\right)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+z\right]\cos\gamma dS$$

又 $\vec{n}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$，则 $\vec{n}^0=\frac{1}{\left|\vec{n}\right|}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$，

$$则原式=\iint\limits_S\left[\left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy$$

$$=\iint\limits_S\left[\left(1-y\right)\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}\left[\left(1-y\right)\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\left(y-1\right)\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r\sin\theta-1)\cdot r\cdot rdr=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\sin\theta-\frac{1}{3}\right)d\theta=-\frac{2\pi}{3}$$

(3) $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

【解析】(1) 由轮换对称性可知 $\iint\limits_S xdydz=\iint\limits_S ydzdx=\iint\limits_S zdxdy$，所以

$$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = 3\iint_S zdxdy;$$

（2）计算 $\iint_S zdxdy$

$\sum_1: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 上侧；$\sum_2: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，下侧；$D_{xy}: x^2+y^2\le R^2$；

则 $\iint_S zdxdy = \iint_{\sum_1} zdxdy + \iint_{\sum_2} zdxdy$

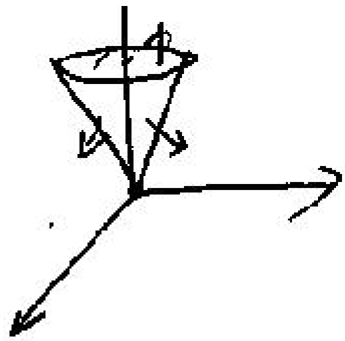
$$= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy - \iint_{D_{xy}} \left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{a^2-r^2}\cdot rdr = \frac{4}{3}\pi R^3$$

（3）$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = 3\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$.

2. 已知速度场 $\vec{v}(x,y,z)=\{x,y,z\}$，求流体在单位时间内通过上半锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的
锥体表面向外流出的流量.（利用两类曲面积分关系计算）

【解析】（1）$\Phi = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$；



（2）$S_1: z=\sqrt{x^2+y^2}$，$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，方向向下，

$S_2: z=1$，$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，方向向上，

则 $\Phi = \iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$

（3）$\iint_{S_1} = \iint_{S_1} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS = \iint_{S_1}\left(x\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + y\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + z\right)\cos\gamma dS$

又 $\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$，则 $\vec{n}^0 = \frac{1}{|\vec{n}|}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$，则

$$\iint_{S_1} = = \iint_{S_1}\left(x\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + y\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + z\right)\cos\gamma dS$$

$$= \iint_{S_1}\left[x\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + y\cdot\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy$$

$$= -\iint_{D_{xy}}\left[-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy = \iint_{D_{xy}}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy = 0;$$

（4）$\iint_{S_2} \overset{\text{垂直性}}{=} \iint_{S_2} zdxdy = \iint_{D_{xy}} 1dxdy = \pi$；

（5）原式=π