习题 13.3　幂级数

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n5^n}$；

【解析】（1）

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}}{\frac{(x-2)^n}{n\cdot 5^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{5}(x-2)\right|=\frac{1}{5}|(x-2)|<1\Rightarrow|x-2|<5\ ,$$

$R=5$；

（2）解得收敛区间为$(-3,7)$；

（3）当$x=-3$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛；当$x=7$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散；

（4）收敛域为$[-3,7)$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\bullet 2^n\bullet x^{2n}$.

【解析】（1） $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\cdot 2^{n+1}\cdot x^{2n+2}}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot 2^n\cdot x^{2n}}\right|=2|x|^2<1\Rightarrow|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$R=\frac{1}{\sqrt{2}}$；

（2）收敛区间为$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$；

（3）$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot 2^n\cdot\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$发散（因为部分和极限不存在）；

（4）收敛域为$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. 求下列幂级数的和函数.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n\quad\left(|x|<1\right)$；

【解析】（1）计算得收敛域为$(-1,1)$；

（2）$\forall x\in(-1,1)$，$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+1\right)x^{n}=1\cdot 2x+2\cdot 3x^{2}+3\cdot 4x^{3}+\cdots$，

$$S(x)=x(1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^{2}+\cdots)=x(x^{2}+x^{3}+x^{4}+\cdots)''=x\cdot\left(\frac{x^{2}}{1-x}\right)''=\frac{2x}{(1-x)^{3}}.$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\bullet\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\quad\left(|x|<1\right)$，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$的和.

【解析】（1）计算得收敛域为$[-1,1]$；

（2）$\forall x\in(-1,1)$，令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{1}{3}x^{3}+\frac{1}{5}x^{5}-\frac{1}{7}x^{7}+\cdots$，$S(0)=0$；

$S'(x)=1-x^{2}+x^{4}-x^{6}+\cdots=\frac{1}{1+x^{2}}$；

（3）$\int_{0}^{x}S'(t)dt=\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^{2}}dt=\arctan x$，$S(x)-S(0)=\arctan x\Rightarrow S(x)=\arctan x$，

$x\in[-1,1]$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2n+1\right)x^{2n}}{n!}$，并求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!2^{n}}$的和.

【解析】（1）计算得收敛域为R

（2）$\forall x\in R$，$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2n+1\right)x^{2n}}{n!}$，则$\int_{0}^{x}S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^{2}\right)^{n}}{n!}=xe^{x^{2}}$；

两边求导，得

$S(x)=(1+2x^{2})e^{x^{2}}$，$\forall x\in R$

（3）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!2^{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=S_{1}'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left[1+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right]e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}}=2e^{\frac{1}{2}}$.

3. 将函数$f\left(x\right)=\left(1+x\right)\ln\left(1+x\right)$展开成$x$的幂级数.

【解析】（1）$f'\left(x\right)=1+\ln\left(1+x\right),f''\left(x\right)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n}$，$x\in(-1,1)$；

（2）逐项积分得：

$$f'(x)-f'(0)=\int_0^x f''(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

又 $f'(0)=1$，则 $f'(x)=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$；

（3）逐项积分得：

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]dt=x+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}dt$$

$$=x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)(n+2)}x^{n+2},$$

又 $f(0)=0$，则 $f(x)=x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}$， $x\in(-1,1)$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n-1)}x^n,\qquad x\in(-1,1);$$

（4）$x=1$ 时，收敛；$x=-1$ 时，收敛，所以 $f(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n-1)}x^n$， $x\in[-1,1]$.

4. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

【解析】（1） $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2+(x-1)}-\frac{1}{4+(x-1)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{4}\right)^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)\cdot(x-1)^n;$$

（2） $\begin{cases}\left|-\frac{x-1}{2}\right|<1\Rightarrow|x-1|<2\\ \left|-\frac{x-1}{4}\right|<1\Rightarrow|x-1|<4\end{cases}\Rightarrow|x-1|<2$；

（3） $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{2n+1}}\right)\cdot(x-1)^n \qquad (|x-1|<2)$.