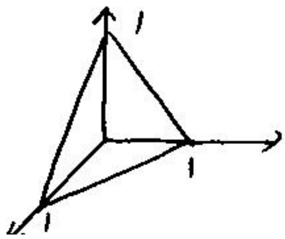
习题 12.4　　第一类曲面积分

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$，其中 S 为四面体 $x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 的边界.



【解析】（1）S 由四个面组成：

$S_1: x+y+z=1\ (x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$，$S_2: x=0\ (y+z\le 1, y\ge 0, z\ge 0)$，

$S_3: y=0\ (x+z\le 1, x\ge 0, z\ge 0)$，$S_4: z=0\ (x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0)$；

（2）对 S_1：$z=1-x-y$，向 xoy 面做投影，投影区域 $D_1: x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0$，且

$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{3}$，则

$$\iint\limits_{S_1} \frac{dS}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{D_1} \frac{\sqrt{3}}{(1+x+y)^2}dxdy=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2}=\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)；$$

（3）对 S_2：$x=0$，向 yoz 面做投影，投影区域 $D_2: y+z\le 1, y\ge 0, z\ge 0$，且 $\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}=1$

$$\iint\limits_{S_2} \frac{dS}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{S_2} \frac{dS}{(1+y)^2}=\iint\limits_{D_2} \frac{dydz}{(1+y)^2}=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} \frac{dz}{(1+y)^2}=1-\ln 2；$$

（4）对 S_3：$y=0$，向 xoz 面做投影，投影区域 $D_3: x+z\le 1, x\ge 0, z\ge 0$，且 $\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}=1$

$$\iint\limits_{S_3} \frac{dS}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{S_3} \frac{dS}{(1+x)^2}=\iint\limits_{D_3} \frac{dxdz}{(1+x)^2}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} \frac{dz}{(1+x)^2}=1-\ln 2；$$

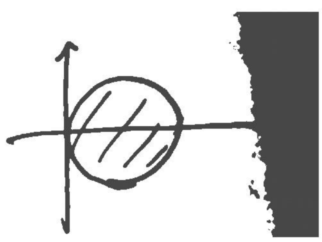
（5）对 S_4：$z=0$，向 xoy 面做投影，投影区域 $D_4: x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0$，且 $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=1$

$$\iint\limits_{S_4} \frac{dS}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{D_4} \frac{dxdy}{(1+x+y)^2}=\int_0^1 dx\int_0^{1-y} \frac{dz}{(1+x+y)^2}=\ln 2-\frac{1}{2}；$$

（6）原式$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_S (xy+yz+zx)dS$，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax$ 所割下的部分.

【解析】（1）S 向 xoy 面上投影，$D_{xy}: x^2+y^2\le 2ax$，如图所示



（2）$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$；

（3）原式$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(xy+y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\sqrt{2}dxdy$

$$\overset{\text{极坐标}}{=}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\left[r^2\cos\theta\sin\theta+r^2\sin\theta+r^2\cos\theta\right]\cdot rdr$$

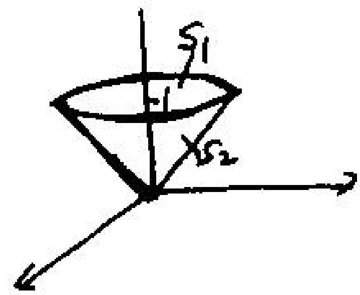
$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta\sin\theta+\sin\theta+\cos\theta\right)d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3dr$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta\sin\theta+\sin\theta+\cos\theta\right)\cdot\frac{1}{4}\left(2a\cos\theta\right)^4d\theta$$

$$\overset{\text{对称性化简}}{=}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\left(2a\cos\theta\right)^4\cdot\cos\theta d\theta=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta=8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$$

3. 计算曲面积分$\oiint\limits_S x^2dS$，其中S为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$所围成区域的全部界面.

【解析】（1）$\oiint\limits_S x^2dS=\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}$；



（2）$S_1:z=1\ (x^2+y^2\le 1)$，$\iint\limits_{S_1}=\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot rdr=\frac{\pi}{4}$；

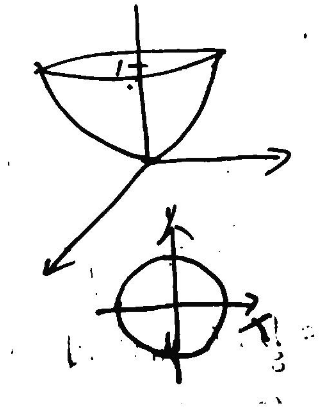
（3）$S_2:z=\sqrt{x^2+y^2}\ (x^2+y^2\le 1)$，

$$\iint\limits_{S_2}=\iint\limits_{D_{xy}}x^2\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}\ ;$$

（4）原式$=\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}+1\right)$

4. 求抛物面壳子$z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\left(0\le z\le 1\right)$的质量，此壳的密度按规律$\rho=z$而变更.

【解析】（1）$M=\iint\limits_S\rho dS=\iint\limits_S zdS$；



（2）$z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right),D_{xy}:x^2+y^2\le 2$；

（3）$M=\iint\limits_{D_{xy}}z\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}z\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cdot\sqrt{1+r^2}\cdot rdr$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\cdot\sqrt{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cdot\sqrt{1+r^2}d\left(r^2\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\sqrt{2}}\left(1+r^2\right)\cdot\sqrt{1+r^2}\,d\left(r^2\right)-\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+r^2}\,d\left(r^2\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{5}\left(1+r^2\right)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}\left(1+r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right]=\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$$