安徽大学 2017—2018 学年第一学期《高等数学 A（一）》

期中考试试题参考答案及评分标准

温馨提示：

1. 考试考务中心告知，安大本学期选用教材《高等数学》（理工类，上册，第 3 版，安徽大学出版社）。根据教学进度安排，期中考试命题范围应不超过教材第 4 章第 1 节。

2. 安大新生进校仅仅 9 个星期，其中还遇国庆、中秋放假，实际教学时间不满 8 周，期中考试不预留复习时间，新生同学继续赶新课（一元微分学），命题时应考虑此实情。

3. 下文中的答案及评分标准仅供参考，允许学生有其它解法，允许学生合理简略相关过程，允许学生使用自学的理论及知识解答本试题。

4. 阅卷时，阅卷人员应该严格按照分工和要求，坚持公平、公正的原则，做到给分理、扣分有据,确保评卷准确无误。

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. $\frac{1}{2}$；　2. 0；　3. $2017!$；　4. $y-1=-2x$；　5. $[1+f(x)]f'(x)e^{f(x)}dx$

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. C；　7. D；　8. B；　9. A；　10. C

三、计算题（每小题 8 分，共 64 分）

11. 根据“当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$”、$\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0$ 以及 $\lim\limits_{x\to 0^-}[x]=-1$，……………………1 分

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\right)+2=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}+2=\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}+2=2 \quad \text{………………4 分}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(e^{\frac{2}{x}}(1+e^{-\frac{2}{x}}))}{\ln(e^{\frac{1}{x}}(1+e^{-\frac{1}{x}}))}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{2}{x}+\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{\frac{1}{x}+\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+x\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{1+x\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}\right)=2 \quad \text{………………7 分}$$

由极限存在定理，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)=2$ ………………………………………………………8 分

12. 由递推公式，有 $a_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n}$，$n$为正整数……………………2 分

显然有 $a_n>0,n\in N$. 另外，

$$
\begin{aligned}
0<a_n^3&=(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3})\cdot(\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6})\cdot(\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9})\cdot\cdots\cdot(\frac{3n-1}{3n}\cdot\frac{3n-1}{3n}\cdot\frac{3n-1}{3n})\\
&<(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5})\cdot(\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8})\cdot(\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{11})\cdot\cdots\cdot(\frac{3n-1}{3n}\cdot\frac{3n}{3n+1}\cdot\frac{3n+1}{3n+2})\\
&=\frac{2}{3n+2}
\end{aligned}
$$

所以 $0<a_n<\sqrt[3]{\frac{2}{3n+2}}$ …………………………………………………………….6 分

根据夹逼原理易知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ …………………………………………………….8 分

13. 由极限与无穷小量的等价关系，$\frac{f(x)}{x^2}=2+\alpha(x)$，$x\neq 0$，其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$ ……2 分

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2x^2+x^2\alpha(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\left(2x+x\alpha(x)\right)\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\left(2x+x\alpha(x)\right)\right)^{\frac{1}{2x+x\alpha(x)}\cdot\frac{2x+x\alpha(x)}{x}}$$ ……………………………6 分

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\left(2x+x\alpha(x)\right)\right)^{\frac{1}{2x+x\alpha(x)}\cdot(2+\alpha(x))}=e^2$$ ……………………….8 分

14. $\ln f(x)=\frac{1}{2}\left(x\ln 2016+2017\ln\arcsin x-2018\ln\ln x-\ln\sin(2019x)\right)$ ……………..3 分

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\left(\ln 2016+\frac{2017}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}-\frac{2018}{x\ln x}-\frac{2019\cos(2019x)}{\sin(2019x)}\right)$$ …………………………7 分

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\ln 2016+\frac{2017}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}-\frac{2018}{x\ln x}-\frac{2019\cos(2019x)}{\sin(2019x)}\right)f(x)$$ …………………..8 分

$$=\frac{1}{2}\left(\ln 2016+\frac{2017}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}-\frac{2018}{x\ln x}-\frac{2019\cos(2019x)}{\sin(2019x)}\right)\sqrt{\frac{2016^x(\arcsin x)^{2017}}{(\ln x)^{2018}\sin(2019x)}}$$

15. $f(x)=[x]$ 在 $(-1,1)$ 上的表达式为 $f(x)\begin{cases}0,0\le x\le 1,\\-1,-1<x<0.\end{cases}$ ………………………………1 分

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{0-0}{x}=0$ ……………………………………………..2 分

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1-0}{x}=+\infty$ ………………………………………….3 分

所以 $f'(0)$ 不存在…………………………………………………………………………….4 分

$f^{'}\left(x\right)=0, x\in\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right)$ ……………………………………………………………5 分

$f^{'}\left(0^{+}\right)=\lim\limits_{x\to 0^{+}} f^{'}\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^{+}} 0=0$ ……………………………………………………6 分

$f^{'}\left(0^{-}\right)=\lim\limits_{x\to 0^{-}} f^{'}\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^{-}} 0=0$ ………………………………………………………7 分

$\lim\limits_{x\to 0} f^{'}\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$ ………………………………………………………………………..8 分

16. $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dy}=\dfrac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\dfrac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=\left(t-1\right)^2$ ……………………………………………..4 分

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dy}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dy}{dt}}=\frac{d\left(\left(t-1\right)^2\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{d\arctan t}{dt}}$$

$=\dfrac{2\left(t-1\right)}{\frac{1}{1+t^2}}=2\left(t-1\right)\left(1+t^2\right)$ ……………………………………………………………8 分

17. $\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right), n\in N,$

$\left(x^2\right)^{'}=2x, \left(x^2\right)^{''}=2, \left(x^2\right)^{(k)}=0$, k 为$\geq 3$的整数………………………………………4 分

由 Leibniz.公式，有

$f^{(2017)}\left(x\right)=C_{2017}^{0}x^2\sin^{(2017)}x+C_{2017}^{1}2x\sin^{(2016)}x+C_{2017}^{2}2\sin^{(2015)}x$ …………………6 分

$f^{(2017)}\left(0\right)=C_{2017}^{2}2\sin^{(2015)}x\,|_{x=0}=2017\cdot 2016\cdot\sin\left(0+\dfrac{2015\pi}{2}\right)=-2017\cdot 2016$ ……..8 分

18. 因为$f\left(x\right)$在$x=0, n\pi, n\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(n\in Z\right)$处无定义，

所以$x=0, n\pi, n\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(n\in Z\right)$均为$f\left(x\right)$的间断点。…………………………………....2 分

因为$\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cos x=1$

所以$x=0$是$f\left(x\right)$的可去间断点。……………………………………………………………4 分

因为$\lim\limits_{x\to n\pi} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=\infty, \left(n\in Z, n\neq 0\right)$

所以$x=n\pi\left(n\in Z, n\neq 0\right)$是$f\left(x\right)$的无穷间断点。……………………………………6 分

因为$\lim\limits_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=0,$

所以 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(n\in Z\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的可去间断点。……………………………………8 分

四、应用题（本题共 6 分）

19. 两抛物线方程联立，得交点坐标为 $(\dfrac{a}{5},1+\sqrt{1+\dfrac{a}{5}}),(\dfrac{a}{5},1-\sqrt{1+\dfrac{a}{5}})$ …………………2 分

由对称性，不妨证明两曲线在点 $(\dfrac{a}{5},1+\sqrt{1+\dfrac{a}{5}})$ 处的切线相互垂直。

对 C_1 的方程求导，得 $y^{'}=\dfrac{1}{2\left(y-1\right)}$, 对 C_2 的方程求导，得 $y^{'}=\dfrac{-2}{y-1}$。

C_1、C_2 上点 $(\dfrac{a}{5},1+\sqrt{1+\dfrac{a}{5}})$ 处的切线斜率分别为 $\dfrac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{a}{5}}}$, $\dfrac{-2}{\sqrt{1+\dfrac{a}{5}}}$ ……………4 分

故由 $\dfrac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{a}{5}}}\cdot\dfrac{-2}{\sqrt{1+\dfrac{a}{5}}}=-1$ 得 $a=0$ ……………………………………………6 分

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

20. (1)因为 $\left|f\left(x\right)\right|\le 1$，所以 $f\left(x\right)$ 为有界函数。……………………………………………1 分

（2）当 x 为有理数时，$-x$ 也是有理数，所以 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)=1$

当 x 为无理数时，$-x$ 也是无理数，所以 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)=0$

因此对任意实数 x，$f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，所以函数 $f\left(x\right)$ 为偶函数。…………………..3 分

(3) 设 T 为任意有理数，那么有：

当 x 为有理数时，$x+T$ 也是有理数，所以 $f\left(x+T\right)=f\left(x\right)=1$

当 x 为无理数时，$x+T$ 也是无理数，所以 $f\left(x+T\right)=f\left(x\right)=0$

因此对任意实数 x，$f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$。

所以，函数 $f\left(x\right)$ 为偶函数，并且任意有理数均是 $f\left(x\right)$ 的周期。

由于没有最小的正有理数，故 $f\left(x\right)$ 无最小正周期。………………………………..5 分

21. 令 $F\left(x\right)=\left[f\left(b\right)-f\left(x\right)\right]\left(x-a\right),x\in\left[a,b\right]$

则 $F\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可导，且有

$F^{'}\left(x\right)=-f^{'}\left(x\right)\left(x-a\right)+f\left(b\right)-f\left(x\right),x\in\left(a,b\right)$，另外，$F\left(a\right)=F\left(b\right)=0$ ……..3 分

对 $F(x)$ 运用 Rolle 定理，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $F^{'}(\xi)=0$，也即：

$$-f^{'}(\xi)(\xi-a)+f(b)-f(\xi)=0$$

化简得 $\dfrac{f(b)-f(\xi)}{\xi-a}=f^{'}(\xi)$ …………………………………………………………...5 分