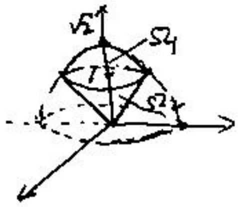
习题 12.6　Gauss 公式

1. 计算曲面积分：$I=\oiint\limits_S 2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$，其中 S 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成立体的表面外侧.



【解析】（1）$I\overset{\text{高斯公式}}{=}\iiint\limits_\Omega[2z+z+(-2z)]dV=\iiint\limits_\Omega zdV$；

（2）$\iiint\limits_\Omega zdV=\iiint\limits_{\Omega_1}zdV+\iiint\limits_{\Omega_2}zdV$，其中 Ω_1,Ω_2 如图所示

（3）$\iiint\limits_{\Omega_1}zdV=\int_1^{\sqrt2}\left[\iint\limits_{D_z}zdxdy\right]dz$　　$D_z:x^2+y^2\le 2-z^2$

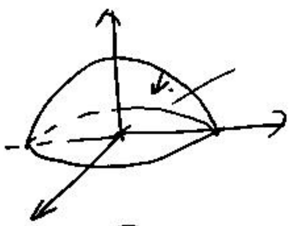
$$=\int_1^{\sqrt2}z\cdot\pi(2-z^2)dz=\pi\int_1^{\sqrt2}(2z-z^3)dz=\frac{\pi}{4}；$$

（4）$\iiint\limits_{\Omega_2}zdV=\int_0^1\left[\iint\limits_{D_z}zdxdy\right]dz$　　$D_z:x^2+y^2\le z^2$

$$=\int_1^{\sqrt2}z\cdot\pi z^2dz=\pi\int_1^{\sqrt2}z^3dz=\frac{\pi}{4}；$$

（5）$I=\dfrac{\pi}{2}$

2. 计算 $\iint\limits_S xzdxdz+yzdzdx+x^2dxdy$，其中 S 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的内侧.



【解析】（1）添加辅助曲面 $S_1:z=0$，方向向上，$D_{xy}:x^2+y^2\le a^2$；

（2）$\iint\limits_S xzdxdz+yzdzdx+x^2dxdy=\oiint\limits_{S+S_1}-\iint\limits_{S_1}$；

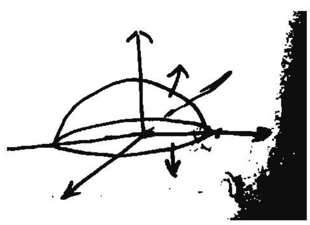
（3）$\oiint\limits_{S+S_1}=-\iiint\limits_\Omega(z+z+0)\,dV=-2\iiint\limits_\Omega z\,dV$

$$=-2\int_0^a\left[\iint\limits_{D_z}zdxdy\right]dz=-2\int_0^a z\cdot(a^2-z^2)dz=-\frac{\pi}{2}a^4；$$

（4）$\iint\limits_{S_1}\overset{\text{垂直性}}{=}\iint\limits_{S_1}x^2dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy\overset{\text{轮换对称}}{=}\dfrac12\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)dxdy\overset{\text{极坐标}}{=}\dfrac12\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot rdr=\dfrac{\pi}{4}a^4$

（5）$\iint\limits_S xzdxdz+yzdzdx+x^2dxdy=-\dfrac{\pi}{2}a^4-\dfrac{\pi}{4}a^4=-\dfrac{3\pi}{4}a^4$

3. 计算 $\iint\limits_S\dfrac{xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 表示上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧.



【解析】（1）$\iint\limits_S\dfrac{xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy}{x^2+y^2+z^2}$

$$=\frac{1}{a^2}\iint\limits_S xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy$$ ；

（2）添加辅助曲面 $S_1: z=0$ ，方向向下， $D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$ ；

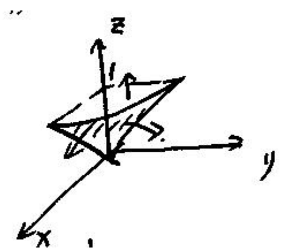
（3）$\iint\limits_S = \oiint\limits_{S+S_1} - \iint\limits_{S_1}$ ；

（4）$\oiint\limits_{S+S_1} = \iiint\limits_\Omega (z^2+x^2+y^2)\,dV \overset{\text{球坐标}}{=} \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{2}{5}\pi a^5$ ；

（5）$\iint\limits_{S_1} \overset{\text{垂直性}}{=} \iint\limits_{S_1}(2xy+y^2z)dxdy=-2\iint\limits_{D_{xy}}xydxdy \overset{\text{对称性}}{=} 0$ ；

（6）$\iint\limits_S \frac{xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2}{5}\pi a^5=\frac{2}{5}\pi a^3$

4. 已知流体的流速 $\vec{v}(x,y,z)=\{xy,yz,zx\}$ ，求由平面 $z=1,x=0,y=0$ 和锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体 Ω 向外流出的流量.（设流体密度为 1）



【解析】（1） $\Phi=\oiint\limits_S xydydz+yzdzdx+zxdxdy$ ；

（2）$\Phi \overset{\text{高斯公式}}{=} \iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dV \overset{\text{轮换对称性}}{=} 2\iiint\limits_\Omega xdV+\iiint\limits_\Omega zdV \qquad \left(\iiint\limits_\Omega xdV=\iiint\limits_\Omega ydV\right)$

（3）$\iiint\limits_\Omega xdV \overset{\text{柱坐标}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\cos\theta\cdot rdr\int_r^1 zdz=\int_0^1 r^2(1-r)dr=\frac{1}{12}$；

（4）$\iiint\limits_\Omega zdV \overset{\text{截面法}}{=} \int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^1 z\cdot\frac{\pi}{4}z^2dz=\frac{\pi}{16}$；

（5）$\Phi=\frac{1}{6}+\frac{\pi}{16}$