安徽大学 2011—2012 学年第一学期

《高等数学 A（一）、B（一）》（A 卷）考试试题

参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 6； 2. $xf(x^2)$； 3. -2； 4. 3； 5. x^2+1。

二、单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6．D； 7．C； 8．D； 9．C； 10．B。

三、计算题（每小题 7 分，共 56 分）

11． 解：由于 $\sqrt[n]{\cos^2 1} \le \sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots\cos^2 n} \le \sqrt[n]{n}$，

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$，

故利用夹逼准则得到 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n} = 1$。

12．解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+2\sin x}-1)\arcsin x}{\cos x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\arcsin x}{\cos x-1}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}} = -2\text{。}$$

13. 解：$\displaystyle\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx = -\int \ln\sin x d(\cot x)$

$$= -\cot x\ln\sin x + \int \cot^2 x dx$$

$$= -\cot x\ln\sin x + \int (\csc^2 x-1)dx$$

$$= -\cot x\ln\sin x - \cot x - x + C\text{。}$$

14. 解：由题意 $f'(\sin^2 x) = 1-2\sin^2 x + \dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$，故 $f'(u) = \dfrac{1}{1-u} - 2u$。

于是 $f(u) = \displaystyle\int(\frac{1}{1-u}-2u)du + c = -\ln|1-u| - u^2 + C$，

这样，当 $0\le x<1$ 时，$f(x) = -\ln|1-x| - x^2 + C$。

15．解：$x=0, x=1$ 均为瑕点，故

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\int_a^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx + \lim_{c\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^{c}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$=\lim_{a\to 0^+} 2\arcsin\sqrt{x}\Big|_a^{\frac{1}{2}}+\lim_{c\to 1^-} 2\arcsin\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{c}$$

$$=2\arcsin 1=\pi\text{。}$$

16.

解： $\int_0^{\pi}|\cos x|\sqrt{\sin^2 x+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin^2 x+1}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sqrt{\sin^2 x+1}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 x+1}d(\sin x)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin^2 x+1}d(\sin x)$$

$$\overset{t=\sin x}{=}\int_0^1\sqrt{t^2+1}dt-\int_1^0\sqrt{t^2+1}dt$$

$$=2\int_0^1\sqrt{t^2+1}dt=\left(\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+t\sqrt{t^2+1}\right)\Big|_0^1$$

$$=\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}\text{。}$$

17. 解：方程对应的齐次微分方程为 $y''-3y'+2y=0$，其特征方程为：

$\lambda^2-3\lambda+2=0$，解得特征根为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$。

于是对应的齐次微分方程的通解为 $C_1e^x+C_2e^{2x}$。

此外，设原方程的一个特解为 $y^*=Ce^{-x}$，代入原方程得

$Ce^{-x}+3Ce^{-x}+2Ce^{-x}=e^{-x}$，故有 $C=\frac{1}{6}$，即得 $y^*=\frac{1}{6}e^{-x}$。

综上，原方程的通解为： $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x}$。

18. 解：利用微分法，$dy=3a\sin^2\theta\cos\theta d\theta$

$dx=3a\cos^2\theta(-\sin\theta)d\theta$，

故 $\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta d\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)d\theta}=-\tan\theta$；

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d(-\tan\theta)}{d(a\cos^3\theta)}=\frac{-\sec^2\theta d\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta d\theta}=\frac{\sec^4\theta\csc\theta}{3a}\text{。}$$

四、综合分析题（每小题 7 分，共 14 分）

19. 解：$V=V_1+V_2=2\pi\int_0^a x\sqrt{x}dx+\int_a^1\pi(\sqrt{x})^2dx$

于是 $V'(a)=2\pi a^{3/2}-\pi a$，令 $V'(a)=0$，得 $a=\frac{1}{4}$。

由于在 $a=\frac{1}{4}$ 的左领域内 $V'<0$，在 $a=\frac{1}{4}$ 的右领域内，$V'>0$，故 $V(\frac{1}{4})$ 为极小值，又因为只有一个驻点，故 $V(\frac{1}{4})$ 为最小值，且

$$V_{\min}=V(\frac{1}{4})=2\pi\int_0^{1/4}x\sqrt{x}dx+\int_{1/4}^{1}\pi(\sqrt{x})^2dx=\frac{79}{160}\pi\text{。}$$

20. 解：$x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty$。

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{a}{1-b}=0$，

这样，当 $a=0$ 且 $b\neq 1$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点。

又 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 存在，故 $\lim\limits_{x\to 1}(e^x-b)=0$，即 $b=e$。

于是 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{(x-a)(x-1)}=\frac{e}{1-a}$，

这样，当 $b=e$ 且 $a\neq 1$ 时，$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点。

综上，$a=0,b=e$ 时，$f(x)=\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$。

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

21. 证明：由题意，只需证 $F'(x)>0\ (x\in(a,+\infty))$。

因为 $F'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2}$，

由 Lagrange 中值定理，$\exists\xi\in(a,x)$，使得 $f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$，

故 $F'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-f'(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-a}$

由于 $f''(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在且大于零，于是 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 是单调增的。这样，对 $\forall x\in(a,+\infty)$，则 $\xi\in(a,x)$，得到 $F'(x)>0$，

从而 $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内是单调增的。

22. 证明：由积分中值定理知，存在 $\xi\in[0,1]$，使得

$$\int_0^1|f(x)|dx=|f(\xi)|,$$

于是
$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)|dx+\int_0^1|f'(x)|dx&=|f(\xi)|+\int_0^1|f'(x)|dx\\&\geq|f(\xi)|+\int_0^{\xi}|f'(x)|dx\\&\geq|f(\xi)|+\left|\int_0^{\xi}f'(x)dx\right|=|f(\xi)|+|f(\xi)-f(0)|\\&\geq|f(0)|\text{。}\end{aligned}$$