习题 10.5　偏导数在几何上的应用

1. 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中，求与平面 $x+2y+z+4=0$ 平行的切线方程.

【解析】切点 P 对应参数为 t_0，切向量 $\overrightarrow{T}=(1,-2t,3t^2)\big|_{t=t_0}=(1,-2t_0,3t_0^2)$ 与 $\vec{n}=(1,2,1)$ 垂直，即

$$1-4t_0+3t_0^2=0 \Rightarrow t_0=1 \text{ 或 } \frac{1}{3},$$

$\overrightarrow{T_1}=(1,-2,3)$ 或 $\overrightarrow{T_2}=\left(1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，则切线方程为：

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3} \text{ 或 } \frac{x-\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}}=\frac{z-\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}.$$

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在 $M(1,1,1)$ 处的切线与法平面方程.

【解析】方程组两边对 x 求导，得 $\begin{cases} 2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}-3=0 \\ 2-3\cdot\dfrac{dy}{dx}+5\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}=3-2x \\ 3\cdot\dfrac{dy}{dx}-5\cdot\dfrac{dz}{dx}=2 \end{cases}$

两式联立解得
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{15-10x+4z}{6z+10y} \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{9-6x-4y}{6z+10y} \end{cases}$$

则 $\overrightarrow{T}\big|_{(1,1,1)}=\left(1,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}\right)\Bigg|_{(1,1,1)}=\left(1,\dfrac{9}{16},-\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{1}{16}(16,9,-1)$，

即切线方程为：$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$；

法平面方程为：$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$，化简得 $16x+9y-z-24=0$.

3. 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使得曲面在该点的法线垂直于平面 $x+3y+z=0$，并求法线方程.

【解析】设该点坐标 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，该点的法向量为 $\vec{n}\big|_{P_0}=(-y_0,-x_0,1)$，

记平面 $x+3y+z=0$ 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,3,1)$，由题意可知 $\vec{n}\big|_{P_0}//\vec{n}$，则 $\dfrac{-y_0}{1}=\dfrac{-x_0}{3}=1$，解

$$x_0=-3, y_0=-1, z_0=x_0y_0=3,$$

所以 $P_0(-3,-1,3)$，$\vec{n}\big|_{P_0}=(1,,3,1)$，

则法线方程为：$\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

4. 设直线 $l_1:\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求 a,b 之值.

【解析】设 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$，则曲面 $S:z=x^2+y^2$ 在 $(1,,-2,5)$ 处的法向量为

$$\left(F_x',F_y',F_z'\right)\Big|_{(1,-2,5)}=\left(2x,2y,-1\right)\Big|_{(1,-2,5)}=(2,-4,-1),$$

由题意可知平面 π 的方程为：$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$，化简得 $2x-4y-z-5=0$；

由 l_1 的方程可知 $y=-b-x$，所以 $z=x+ay-3=x+a(-b-x)-3=(1-a)x-ab-3$ 代入平面 π 方程，得

$$2x-4(-b-x)-(1-a)x+ab+3-5=0,$$

化简得 $(5+a)x+4b+ab-2=0$，即 $\begin{cases}5+a=0\\4b+ab-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-5\\b=-2\end{cases}$.