自 测 题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则

$$\int_L \left(x^2+y-z\right)ds = \underline{\qquad\qquad}.$$

【解析】$\int_L \left(x^2+y-z\right)ds=\int_L x^2ds+\int_L yds-\int_L zds$

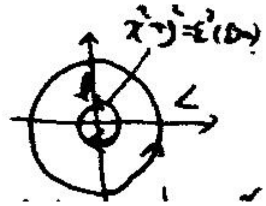
$$=\frac{1}{3}\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)ds+\frac{1}{3}\int_L(x+y+z)ds-\frac{1}{3}\int_L(x+y+z)ds$$

$$=\frac{1}{3}\int_L a^2ds=\frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a=\frac{2\pi a^3}{3}$$

2. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 按逆时针方向绕行，则

$$\oint_L \frac{(2xy-3y)dx+\left(x^2-5x\right)dy}{x^2+y^2}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【解析】添加辅助曲线 $l: x^2+y^2\le \varepsilon^2(\varepsilon>0)$，方向逆时针方向；



$$\oint_L=\oint_{L+l}-\oint_l=0-\oint_l=\oint_{l^-}\frac{(2xy-3y)dx+\left(x^2-5x\right)dy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{l^-}(2xy-3y)dx+\left(x^2-5x\right)dy=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D'}(-2)dxdy=-2\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\pi\varepsilon^2=-2\pi$$

3. 设 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=2$ 所割下的有限部分，则

$$\iint_S\left(xy+yz+z^2\right)dS=\underline{\qquad\qquad}.$$

【解析】由对称性可知

$$\iint_S\left(xy+yz+z^2\right)dS=\iint_S z^2dS=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\cdot rdr=8\sqrt{2}\pi$$

4. 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，则 $\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=\underline{\qquad\qquad}$.

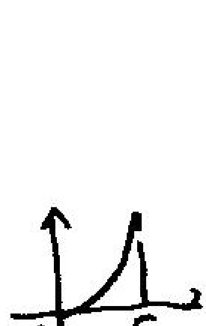
【解析】利用高斯公式得 $\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dV\overset{\text{球坐标}}{=}\frac{12}{5}\pi$

5. 设 $\overrightarrow{F}(x,y,z)=\left\{e^x\sin y, 2xy^2+z, xzy^2\right\}$，则 $div\overrightarrow{F}\Big|_{(1,0,1)}=\underline{\qquad\qquad}$，

$$rot\overrightarrow{F}\Big|_{(1,0,1)}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【解析】利用公式计算得 $div\overrightarrow{F}\Big|_{(1,0,1)}=0$，$rot\overrightarrow{F}\Big|_{(1,0,1)}=(-1,0,-e)$

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.



6. 已知曲线$L: y=x^2\left(0\le x\le \sqrt{2}\right)$，则$\int_L xds=$（　　）.

$(A)\ 2$　　　　$(B)\ 0$　　　　$(C)\ \frac{13}{6}$　　　　$(D)\ \frac{5}{6}$

【解析】$\int_L xds=\int_0^{\sqrt{2}} x\cdot\sqrt{4x^2+1}dx=\frac{13}{6}$

7. 设L是柱面方程$x^2+y^2=1$与平面$z=x+y$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，则曲线

积分$\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$（　　）.

$(A)\ \pi$　　　　$(B)\ 2\pi$　　　　$(C)\ 0$　　　　$(D)\ 1$

【解析】$\sum: z=x+y;\quad D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，方向向上

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \frac{y^2}{2}\end{vmatrix}dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(-y-x+1)dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}(-y-x+1)\cdot\sqrt{3}dxdy=\pi$$

8.设曲线积分$\oint_L\left[f(x)-e^x\right]\sin ydx-f(x)\cos ydy$与路径无关，其中$f(x)$具有一阶连续导数，且

$f(0)=0$，则$f(x)$等于（　　）.

$(A)\ \frac{1}{2}\left(e^{-x}-e^x\right)$　　$(B)\ \frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$　　$(C)\ \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)-1$　　$(D)\ 1-\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

【解析】$P=\left(f(x)-e^x\right)\sin y, Q=-f(x)\cos y$，因为积分与路径无关，则

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow f'(x)+f(x)=e^x$，

解一阶非齐次线性微分方程得：$f(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C\right)$；又$f(0)=0\Rightarrow C=-\frac{1}{2}$，则选 B

9. 设S为曲面$x^2+2y^2+z^2=1$，在下面积分中，积分值均为 0 的是（　　）.

$(A)\ \iint_S z^2dS$与$\iint_S z^2dxdy$　　　　$(B)\ \iint_S zdS$与$\iint_S zdxdy$

$(C)\ \iint_S zdS$与$\iint_S z^2dxdy$　　　　$(D)\ \iint_S yzdS$与$\iint_S xdydz$

【解析】由对称性可知 $\iint\limits_S zdS=\iint\limits_S yzdS=0$，$\iint\limits_S z^2dS\neq 0$，$\iint\limits_S zdxdy\neq 0,\iint\limits_S xdxdy\neq 0$，$\iint\limits_S z^2dxdy=0$，所以答案选 C

10. 设函数 $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2-z$ 在点 $P\left(1,1,1\right)$ 处沿单位向量 $\vec{v}$ 的方向增加最快，则 $\vec{v}=$（　　）.

$(A)\ \frac{1}{3}(2,2,-1)$　　$(B)\ \frac{1}{3}(-2,-2,1)$　　$(C)\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$　　$(D)\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$

【解析】(1) 该方向为梯度方向，梯度 $\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right|_P=(2,2,-1)$；

(2) $\vec{v}$ 为梯度的单位向量 $\frac{1}{3}\left(2,2,-1\right)$

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）.

11.已知一非均匀金属丝 L 的方程为 $L:x=a\left(t-\sin t\right),y=a\left(1-\cos t\right),0\le t\le 2\pi$，它在点 $\left(x,y\right)$ 处的线密度

为 $\rho\left(x,y\right)=\left|y\right|$，求该金属丝的质量.

【解析】(1) $M=\int_L\rho(x,y)ds=\int_L|y|ds$；

(2) $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+[a\sin t]^2}dt=2a\sin\frac{t}{2}dt$；

(3)

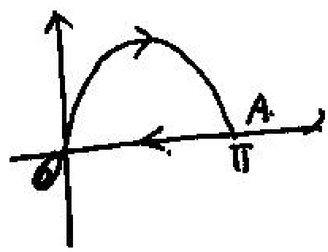
$$M=\int_0^{2\pi}|a(1-\cos t)|\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt=2a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=2a^2\int_0^{2\pi}\left[1-(1-2\sin^2\frac{t}{2})\right]\cdot\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=4a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt\overset{\frac{t}{2}=u}{=}8a^2\int_0^{\pi}\sin^3 udu=8a^2\int_0^{\pi}(1-\cos^2 u)d(-\cos u)=\frac{32}{3}a^2$$

12. 计算曲线积分 $\int_L\sin 2xdx+2\left(x^2-1\right)ydy$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 从 $\left(0,0\right)$ 到 $\left(\pi,0\right)$ 的一段.

【解析】(1) 添加 $\overline{AO}:y=0$，从 $A\to O$；



(2) $\int_L=\oint_{L+\overline{AO}}-\int_{\overline{AO}}$；

(3) $\oint_{L+\overline{AO}}\overset{\text{格林公式}}{=}-\iint\limits_D 4xydxdy=-4\int_0^{\pi}xdx\int_0^{\sin x}ydy$

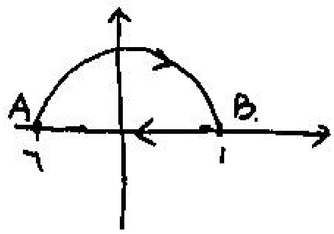
$$=-4\int_0^{\pi} x\cdot\frac{1}{2}\sin^2 x dx=-\frac{1}{2}\pi^2\text{；}$$

（4）$\int_{\overline{AO}}=\int_{\pi}^{0}\sin 2xdx=0$；

（5）$\int_L=\oint_{L+\overline{AO}}-\int_{\overline{AO}}=-\frac{1}{2}\pi^2$

13.计算曲线积分 $\int_L \frac{\left(xe^x+5y^3x^2+x-4\right)dx-\left(3x^5+\sin y\right)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 为从点 $A\left(-1,0\right)$ 沿

曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$



到点 $B\left(1,0\right)$ 一段弧.

【解析】（1）原式$=\int_L\left(xe^x+5y^3x^2+x-4\right)dx-\left(3x^5+\sin y\right)dy$；

（2）添加 $\overrightarrow{BA}:y=0$， $x:1\to -1$；

（3）$\int_L=\oint_{L+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}$ ；

（4）$\oint_{L+\overline{BA}}=-\iint\limits_D(-15x^4-15x^2y^2)dxdy=15\iint\limits_D(x^4+x^2y^2)dxdy$

$$=15\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1(r^4\cos^4\theta+r^4\cos^2\theta\sin^2\theta)\cdot rdr\ =15\int_0^{\pi}(\cos^4\theta+\cos^2\theta\sin^2\theta)\cdot\frac{1}{6}d\theta$$

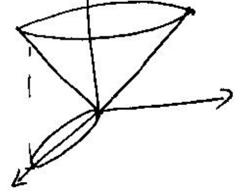
$$=\frac{5}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos^4\theta+\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)\right]d\theta\ =\frac{5}{2}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, d\theta=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta=\frac{5\pi}{4}\text{；}$$

（5）$\int_{\overline{BA}}=\int_1^{-1}(xe^2+x-4)dx=-2e^{-1}+8$；

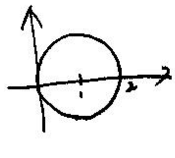
（6）原式$=\frac{5\pi}{4}-8+2e^{-1}$

14. 计算曲面积分 $\iint\limits_S zdS$，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱面 $x^2+y^2\le 2x$ 内部分.

【解析】（1）$\iint\limits_S z\,dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$



$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cdot rdr\ =\frac{8\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{32\sqrt{2}}{9}$$



15. 计算曲面积分 $\iint\limits_{S} xdydz+ydzdx+zdxdy$ ，其中 S 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分前侧.

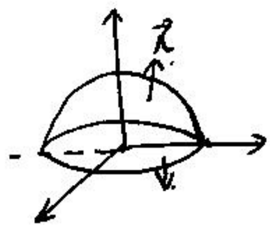
【解析】（1）由垂直线可知 $\iint\limits_{S} zdxdy=0$ ，则原式$=\iint\limits_{S} xdydz+ydzdx$ ；

（2）$\iint\limits_{S} xdydz=\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2}dydz=\int_0^1 dy\int_0^3 \sqrt{1-y^2}dz=3\int_0^3 \sqrt{1-y^2}dz=\dfrac{3\pi}{4}$ ；

（3）$\iint\limits_{S} ydzdx=\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1-x^2}dxdz=\int_0^1 dx\int_0^3 \sqrt{1-x^2}dz=3\int_0^3 \sqrt{1-x^2}dx=\dfrac{3\pi}{4}$ ；

（4）原式$=\dfrac{3\pi}{2}$

16.计算曲面积分 $\iint\limits_{S}\left(x^3+az^2\right)dydz+\left(y^3+ax^2\right)dzdx+\left(z^3+ay^2\right)dxdy$ ，其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.



【解析】（1）添加 $S_1: z=0$ ，方向向下；

（2）$\iint\limits_{S}=\oiint\limits_{S+S_1}-\iint\limits_{S_1}$ ；

（3）$\oiint\limits_{S+S_1}=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\,dV=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dV$

$=3\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\dfrac{6\pi}{5}a^5$ ；

（4）$\iint\limits_{S_1}\overset{\text{垂直性}}{=}\iint\limits_{S_1}(z^3+ay^2)\,dxdy=\iint\limits_{S_1} ay^2\,dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}} ay^2\,dxdy$　　　$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$

$=-a\iint\limits_{D_{xy}} y^2\,dxdy=-a\cdot\dfrac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)dxdy=-\dfrac{a}{2}\int_0^{2\pi} d\,\theta\int_0^a r\cdot r^2 dr=-\dfrac{\pi}{4}a^5$ ；

（5）$\iint\limits_{S}=\dfrac{6\pi}{5}a^5+\dfrac{\pi}{4}a^5=\dfrac{29}{20}\pi a^5$