安徽大学 2019-2020 学年第一学期

《线性代数 A》试卷答案（B 卷）

一．填空题（每小题 2 分）

1. $\dfrac{n(n+1)}{2}$

2. 1

3. $k(1,1,\cdots,1)^T, k \in R$

4. $-\dfrac{1}{48}$

5. $p = r = n$

二．选择题（每小题 2 分）

6. A

7. D

8. C

9. B

10. A

三．计算题（每小题 12 分）

11.解：

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= n!\left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right).$$

…………………（12 分）

12.解：

由 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$ ，

得 $(A-B)X(A-B)=E$ . . . . (6 分)

因 $|A-B|\neq 0$, 得 $X=\left((A-B)^{-1}\right)^2$.

$$(A-B|E)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

得

$$X=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$ . . . . (12 分)

13.解：

将 α_1，α_2，α_3，β_1，β_2，β_3 按列排列成矩阵并进行初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\1&1&0&0&1&2\\1&1&1&1&-1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&1&1\\0&0&1&1&-2&-2\end{pmatrix}$$

故 由基底 α_1，α_2，α_3 到基底 β_1，β_2，β_3 的过渡矩阵 是

$$A=\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{vmatrix}$$ . . . . (6 分)

（2）设所求向量 $\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3$

即 $x_1(\alpha_1-\beta_1)+x_2(\alpha_2-\beta_2)+x_3(\alpha_3-\beta_3)=0$

得

$x_1=x_2=x_3=0$，即 $\gamma=0$

. . . . (12 分)

14. 解：$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&-8&7&-1\\1&-1&-6&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4&1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

......................(6 分)

原方程组与下列方程组同解

$\begin{cases}x_1-4x_3+x_4=-1\\x_2+2x_3+2x_4=1\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=-1+4x_3-x_4\\x_2=1-2x_3-2x_4\end{cases}$，令 $x_3=x_4=0,$ 得特解 $\gamma=\left(-1,1,0,0\right)$，其导出组的基础解系为 $\eta_1=\left(4,-2,1,0\right),\eta_2=\left(-1,-2,0,1\right)$

故通解为 $\left(-1,1,0,0\right)+k_1\left(4,-2,1,0\right)+k_2\left(-1,-2,0,1\right),k_1,k_2$ 为任意常数.

......................(12 分)

15.解：$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}4&2&-2\\2&1&4\\-2&4&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，

$\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&2\\-2&\lambda-1&-4\\2&-4&\lambda+8\end{vmatrix}=(\lambda-5)\left(\lambda-2\right)\left(\lambda+10\right)=0$，于是，

$\lambda_1=5$，$\lambda_2=2$，　$\lambda_3=-10$。..............(4 分)

对 $\lambda_1=5$，解 $(5E-A)X=0$ 的基础解系是 $\alpha_1=\left(2,1,0\right)^T$

对 $\lambda_2=2$，解 $\left(2E-A\right)X=0$ 得基础解系 $\alpha_2=\left(-1,2,1\right)^T$，

对 $\lambda_3=-10$，解 $\left(-10E-A\right)X=0$ 得基础解系 $\alpha_3=\left(1,-2,5\right)^T$

将 α_1，α_2，α_3 化为标准正交向量组：$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2,1,0\right)^T$，

$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-1,2,1\right)^T$，$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{30}}\left(1,-2,5\right)^T$。.................(10 分)

令 $Q=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$，作 $X=QY$ 得 $5y_1^2+2y_2^2-10y_3^2=1$.

其为一单叶双曲面。 ....(12 分)

16.解：（1） A 与 B 相似，故 $|A|=|B|, tr(A)=tr(B)$.

即 $\begin{cases} 6(a-1)=4b \\ 5+a=4+b \end{cases}$，得 $a=5, b=6$. ....(4 分)

（2）特征值为 $\lambda=2$(二重)，$\lambda=6$.

对 $\lambda=2$，解 $(2E-A)X=0$ 得基础解系 $\alpha_1=(1,-1,0)^T \quad \alpha_2=(1,0,1)^T$，

对 $\lambda=6$，解 $(6E-A)X=0$ 得基础解系 $\alpha_3=(1,-2,3)^T$。

令 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，有 $P^{-1}AP=B$.

......................(12 分)

四． 证明题（每小题 8 分）

17.证明：因 $A,B,A+B$ 均为 n 阶正交矩阵，有

$$A^{-1}=A^T, B^{-1}=B^T, (A+B)^{-1}=(A+B)^T$$

故 $(A+B)^{-1}=(A+B)^T=A^T+B^T=A^{-1}+B^{-1}$

......................(8 分)