习题 12.8　　场论初步

1. 求函数 $u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数和梯度.

【解析】（1） $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$， $l=\overrightarrow{AB}^0=\frac{1}{3}(2,-2,1)$， 即 $\cos\alpha=\frac{2}{3},\cos\beta=-\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{1}{3}$；

（2） $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma\right)\right|_A$

$$=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\left[1\cdot\frac{2}{3}+\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{1}{3}\right]\right|_A=\frac{1}{2}；$$

（3） $gradu|_A=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_A=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\left(1,\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)\right|_A=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

2. 设 $u(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$， 问 $u(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处朝何方向的方向导数最大？

并求此时方向导数.

【解析】（1）由方向导数与梯度关系可知 $u(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处沿梯度方向的方向导数最大，且方向导数为

该梯度的模；

（2） $gradu=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)$， 则 $\frac{\partial u}{\partial l}=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$

3. 设数量导数 $u=u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数，求

$(1)\ \mathbf{grad}u$ ；　　　　$(2)\ div(\mathbf{grad}u)$ ；　　　　$(3)rot(\mathbf{grad}u)$.

【解析】（1） $gradu=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$；

（2） $div(gradu)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$；

（3） $rot(gradu)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=(0,0,0)=\vec{0}$