习题 9.3　空间的平面与直线

1. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面间夹角的余弦.

【解析】考查平面夹角的计算

① 平面法向量 $\vec{n}=(2,-2,1)$；

② xoy 面 $\overrightarrow{n_1}=(0,0,1)$，则 $\cos\theta_1=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_1}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{n_1}|}=\dfrac{1}{3}$；

xoz 面 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)$，则 $\cos\theta_2=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{2}{3}$；

yoz 面 $\overrightarrow{n_3}=(1,0,0)$，则 $\cos\theta_3=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_3}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{n_3}|}=\dfrac{2}{3}$.

2. 求过点 $M_1(4,1,2)$ 和 $M_2(-3,5,-1)$ 且垂直于平面 π：$6x-2y+3z+7=0$ 的平面方程.

【解析】考查点法式方法构建平面方程

① $\overrightarrow{M_1M_2}=(-7,4,-3)$，$\vec{n}=(6,-2,3)$；

② 所求平面法向量 $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -7 & 4 & -3\\ 6 & -2 & 3\end{vmatrix}=(6,3,-10)$；

③ 所求平面方程为：$6(x-4)+3(y-1)-10(z-2)=0$，即 $6x+3y-10z-7=0$.

3. 求通过点 $(2,1,1)$ 且垂直于直线 $\begin{cases}x+2y-z+1=0\\ 2x+y-z=0\end{cases}$ 的平面方程.

【解析】考查点法式方法构建平面方程

① $\overrightarrow{n_1}=(1,2,-1)$，$\overrightarrow{n_2}=(2,1,-1)$；

② 所求平面法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-1,-1,-3)=-(1,1,3)$；

③ 所求平面方程为：$(x-2)+(y-1)+3(z-1)=0$，即 $x+y+3z-6=0$.

4. 一直线过点 $(-1,2,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases}x+y-2z-1=0\\ x+2y-z+1=0\end{cases}$，求该直线的方程.

【解析】考查点向式方法构建直线方程

① $\overrightarrow{n_1}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,2,-1)$；

② $\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=(3,-1,1)$；

③ 所求直线方程为 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$.

5.一直线过点 $(1,2,1)$，又与直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=-z$ 相交且垂直于直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$，求该直

线

方程.

【解析】直线方程的计算

① $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=-z$，$P_1(0,0,0)$，$\overrightarrow{s_1}=(2,1,-1)$；

② $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$，$P_2(1,0,-1)$，$\overrightarrow{s_2}=(3,2,1)$；

③ 设所求直线$\vec{s}=(a,b,c)$，因为$\vec{s}\perp\overrightarrow{s_2}\Rightarrow\vec{s}\cdot\overrightarrow{s_2}=0$，即$3a+2b+c=0$ （*1）

④ 记$P(1,2,1)$,所求直线与$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=-z$相交$\Leftrightarrow(\overrightarrow{PP_1},\vec{s},\overrightarrow{s_1})=0$，而$\overrightarrow{PP_1}=(-1,-2,-1)$，即

$\begin{vmatrix}-1 & -2 & -1\\ a & b & c\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$，即 $a-b+c=0$ （*2）

⑤ （*1）与（*2）联立，得$a=-\dfrac{3}{2}b,c=\dfrac{5}{2}b$，则$a:b:c=-3:2:5$；

⑥ $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{5}$为所求直线方程.

6. 求直线$\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$在平面$4x-y+z=1$上的投影直线的方程.

【解析】考查平面束方程的应用

① 设过直线的平面束方程为Π_1：$(2x-4y+z)+\lambda(3x-y-2z-9)=0$，化简得

$(2+3\lambda)x-(4+\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$，则$\overrightarrow{n_1}=(2+3\lambda,-4-\lambda,1-2\lambda)$；

② 设已知平面方程$4x-y+z=1$为Π，因为$\Pi\perp\Pi_1$，则$\vec{n}\perp\overrightarrow{n_1}$，即

$4(2+3\lambda)+4+\lambda+(1-2\lambda)=0\Rightarrow\lambda=-\dfrac{13}{11}$，所以$\Pi_1$：$17x+31y-37z-117=0$；

③ 投影方程为：$\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\4x-y+z=1\end{cases}$