

学号
姓名
专业
年级
院/系

线
订
装
订
装

安徽大学 2017—2018 学年第一学期

《高等数学 A (一)》考试试卷 (B 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号_____

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|-----|---|---|---|---|---|----|
| 得 分 | | | | | | |
| 阅卷人 | | | | | | |

一、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

| | |
|-----|--|
| 得 分 | |
|-----|--|

1. 若函数 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{1}{x}$, 则 $x = 0$ 是其_____间断点. (填写类型)

2. 若连续函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{\sin x} = 1$, 则 $f'(0) =$ _____.

3. 已知 $f'(\ln x) = 1 + x$, 则 $f(x) =$ _____.

4. 曲线 $y = \ln \cos x$ 上从 $x = 0$ 到 $x = \frac{\pi}{4}$ 一段的弧长为_____.

5. 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且满足 $\int_0^{x^2(x+1)} f(t) dt = x$, 则 $f(2) =$ _____.

二、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

| | |
|-----|--|
| 得 分 | |
|-----|--|

6. 下列曲线中, 没有斜渐近线的是 ()

(A) $y = x \ln(e + \frac{1}{x})$

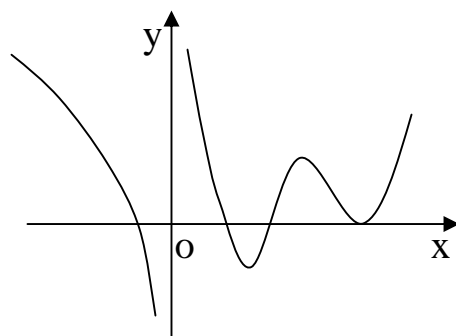
(B) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

(C) $y = x + \arctan x$

(D) $y = x + \sin x$

7. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内有二阶连续的导数, $f'(x)$ 的图形如图所示, 若 m 表示函数 $y = f(x)$ 的极值点个数, n 表示曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数, 则有 ()

- (A) $m = 4, n = 3$ (B) $m = 4, n = 4$
(C) $m = 5, n = 3$ (D) $m = 5, n = 4$



8. 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$, 且 $f(0) = -1$, 则 $f(x)$ 的一个原函数可能是 ()

- (A) $1 + \sin x$ (B) $1 - \sin x$ (C) $1 + \cos x$ (D) $1 - \cos x$

9. 设 $f(x)$, $g(x)$ 均在区间 $[0, 2]$ 上二阶可导, $f(0) = g(0) = 0, f(2) = g(2) = 1$, 且对任意 $x \in [0, 2]$, $f''(x) > 0, g''(x) < 0$, 记 $S_1 = \int_0^2 f(x) dx, S_2 = \int_0^2 g(x) dx$, 则 ()

- (A) $S_1 < S_2 < 1$ (B) $1 < S_2 < S_1$
(C) $S_1 < 1 < S_2$ (D) $S_2 < 1 < S_1$

10. 下列反常积分中, 收敛的是 ()

- (A) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ (B) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ (C) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (D) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

三、计算题 (每小题 8 分, 共 48 分)

| | |
|----|--|
| 得分 | |
|----|--|

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \frac{\arctan t^2}{t} dt}{x^2}$.

12. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$.

13. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - (mx^2 + nx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 求常数 m , n 的值.

14. 求积分 $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$.

15. 求积分 $I = \int_{-1}^1 \frac{2018 + x^{2017}}{\sqrt{4 - x^2}} dx$.

16. 求微分方程 $y'' + 2y' + y = xe^x$ 的通解.

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

| | |
|-----|--|
| 得 分 | |
|-----|--|

17. 过点 $(1, 0)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形，求此平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

18. 设 $f(x)$ 连续且满足 $\int_0^x tf(t) dt = x^2 + f(x)$ ，(1) 求 $f(0), f'(0)$ ；(2) 求 $f(x)$.

五、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

| | |
|-----|--|
| 得 分 | |
|-----|--|

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^p xf(\sin x)dx = p \int_0^{\frac{p}{2}} f(\sin x)dx .$$

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$.
证明: 至少存在一点 $x \in (0,1)$, 使得 $xf'(x) + f(x) = 0$.