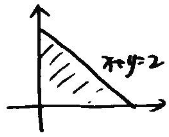
习题 11.2　二重积分的计算

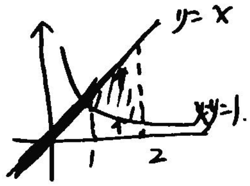
1. 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D (3x+2y)d\sigma$，其中 D 是由 $x=0, y=0$ 及直线 $x+y=2$ 所围成的区域.



【解析】原式$=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(3x+2y)\,dy=\dfrac{20}{3}$

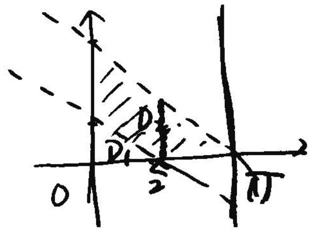
(2) $\iint\limits_D \dfrac{y^2}{x^2}dxdy$，其中 D 是由直线 $x=2, y=x$ 及双曲线 $xy=1$ 所围成的区域.



【解析】原式$=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\dfrac{y^2}{x^2}dy$

$$=\int_1^2 \frac{1}{x^2}\cdot\left[\frac{1}{3}y^3\right]\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=\int_1^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{3}\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)dx=\frac{27}{64}$$

(3) $\iint\limits_D \left|\cos(x+y)\right|dxdy$，其中 D 是由 $0\le x\le\pi, 0\le y\le \pi-x$ 确定的区域.



【解析】D 被 $x+y=\dfrac{\pi}{2}$ 划分为 D_1, D_2，如图所示

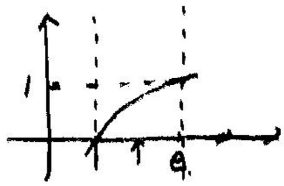
原式$=\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)dxdy+\iint\limits_{D_2}\left[-\cos(x+y)\right]dxdy$

=

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\,dy+\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi-x}\left[-\cos(x+y)\ \right]dy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_0^{\pi-x}\left[-\cos(x+y)\ \right]dy=\pi$$

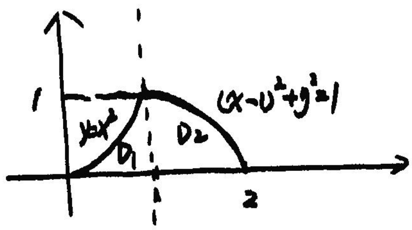
2. 画出下列二次积分所表示的二重积分的积分区域，并交换积分次序.

(1) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$；



【解析】原式$=\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx$

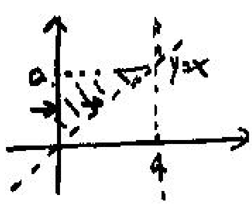
(2) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)dy$.



【解析】原式$=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$

3. 计算下列二重积分，必要时交换积分次序.

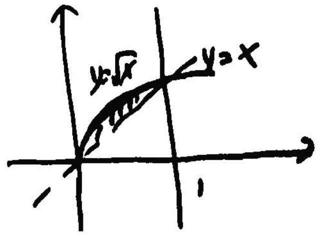
(1) $\int_0^a dx\int_x^a e^{y^2}dy$；



【解析】$\int_0^a dx\int_x^a e^{y^2}dy=\int_0^a dy\int_0^y e^{y^2}dx=\int_0^a ye^{y^2}dy$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a e^{y^2}dy^2=\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^a=\frac{1}{2}\left(e^{a^2}-1\right)$$

(2) $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\sin y}{y}dy$.



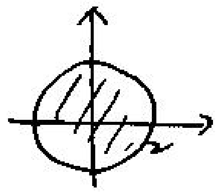
【解析】$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\sin y}{y}dy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\dfrac{\sin y}{y}dy$

$$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy=\int_0^1(\sin y-y\sin y)dy$$

$$=\int_0^1 \sin y dy-\int_0^1 y\sin y dy=\sin 1-1$$

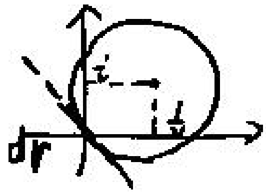
4. 选择适当的坐标系计算下列积分：

(1) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的区域.



【解析】 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^{r^2}\cdot rdr=2\pi\cdot\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^2=\pi\left(e^4-1\right)$

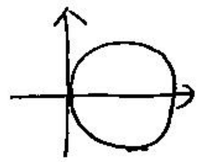
(2) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le x+y\right\}$.



【解析】 $\iint\limits_D (x+y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sin\theta+\cos\theta}(r\cos\theta+r\sin\theta)\cdot rdr$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_0^{\sin\theta+\cos\theta}r^2dr=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^4d\theta=\frac{\pi}{2}$$

(3) $\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le x\right\}$.



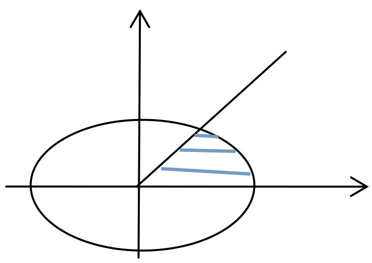
【解析】 $\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2}\cdot rdr$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta\int_0^{\cos\theta}rdr=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$$

(4) $\iint\limits_D\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy$，其中 D 是由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4$ 和直线 $y=0,y=x$ 所围成的第一象限部分.

【解析】利用广义极坐标：$x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta$，其中 $0\le\theta\le\arctan\frac{a}{b},0\le r\le 2$；

则
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr，\quad dxdy=rdrd\theta；$$



$$\iint\limits_D\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy=\int_0^{\arctan\frac{a}{b}}d\theta\int_0^2\sqrt{\frac{(ar\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(br\sin\theta)^2}{b^2}}\cdot abrdr$$

$$=\arctan\frac{a}{b}\int_0^2 abr^2dr=\frac{8}{3}ab\cdot\arctan\frac{a}{b}$$

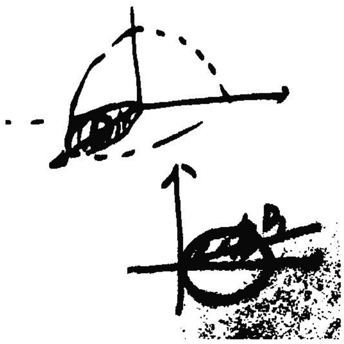
(5) $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 由 $xy=a,xy=b,y^2=cx,y^2=dx$ 所围成的第一象限部分 $(0<a<b,0<c<d)$.

【解析】利用任意坐标变换：令 $xy=u,\frac{y^2}{x}=v\Rightarrow x=\left(\frac{u^2}{v}\right)^{\frac{1}{3}},y=(uv)^{\frac{1}{3}}$，则

$$D_1:a\le u\le b,c\le v\le d\ 且\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{3v},$$

$$\iint\limits_D xydxdy=\iint\limits_{D_1}u\cdot\frac{1}{3v}dudv=\frac{1}{3}\int_a^b udu\int_c^d\frac{1}{v}dv=\frac{1}{6}\left(b^2-a^2\right)\ln\frac{d}{c}$$

5. 求由柱面 $x^2+y^2=2ax$ 围成的柱体被球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 所截得部的体积.



【解析】所求体积以 $D:(x-a)^2+y^2\le a^2$ 为底，以 $z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$ 围成体积的 2 倍，则

$$V=2\iint\limits_{D}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}dxdy=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\cdot rdr=-\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta-1)d\theta=\frac{32a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$