



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Koshelev, On Erdős–Szekeres problem for empty hexagons in the plane, *Model. Anal. Inform. Sist.*, 2009, Volume 16, Number 2, 22–74

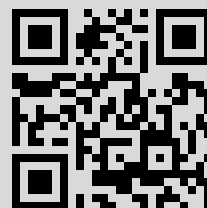
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 87.240.233.85

July 6, 2020, 04:13:00



УДК 519+513

Задача Эрдеша – Секереша о пустых шестиугольниках на плоскости

Кошелев В.А.¹

Математический Институт имени В.А. Стеклова РАН

e-mail: koshelev@mccme.ru

получена 22 марта 2009

Ключевые слова: общее положение, выпуклые многоугольники, теория Рамсея

В настоящей работе исследуется один из вариантов классической задачи комбинаторной геометрии, поставленной П. Эрдешем и Д. Секерешем в 30-е годы XX века. Речь идет об отыскании минимального числа $h(n)$, такого, что среди любых $h(n)$ точек на плоскости, находящихся в общем положении, можно найти n точек, являющихся вершинами выпуклого и пустого n -угольника. Лишь совсем недавно Т. Геркен показал, что $h(6) < \infty$, а именно, он установил неравенство $h(6) \leq 1717$. Нам удастся значительно уточнить результат Геркена: $h(6) \leq 463$.

1. Введение и формулировка основного результата

В 1935 году П. Эрдеш и Д. Секереш сформулировали следующую проблему (см. [2], [3]).

Первая проблема Эрдеша – Секереша. Для каждого целого $n \geq 3$ найти минимальное положительное число $g(n)$, такое, что из любого множества точек на плоскости, находящегося в общем положении и содержащего по крайней мере $g(n)$ точек, можно выбрать подмножество мощности n , элементы которого являются вершинами выпуклого n -угольника.

В 1978 году Эрдеш предложил следующую модификацию первой проблемы (см. [4]).

Вторая проблема Эрдеша – Секереша. Для каждого целого $n \geq 3$ найти минимальное положительное число $h(n)$, такое, что из любого множества точек \mathcal{X} на плоскости, находящегося в общем положении и содержащего по крайней мере $h(n)$ точек, можно выбрать подмножество мощности n , элементы которого являются вершинами выпуклого и пустого n -угольника, то есть этот n -угольник не содержит внутри себя других точек из \mathcal{X} .

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №09-01-00294

Напомним, что множество точек на плоскости находится в *общем положении*, если никакие три его элемента не лежат на одной прямой.

Обе проблемы являются классическими в комбинаторной геометрии и теории Рамсея (см. [5], [6], [7], [1]).

Первую проблему Эрдеш и Секереш рассмотрели в статье [2]. Они доказали существование $g(n)$ для произвольного n , обосновав верхнюю оценку $g(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1$, а также высказали следующую гипотезу: $g(n) = 2^{n-2} + 1$. Эта гипотеза подтверждена для $n \leq 6$. Здесь случай $g(3) = 3$ очевиден; равенство $g(4) = 5$ было доказано Э. Кляйн в 1935 году (см. рис. 1, на котором изображены все три принципиально различных способа расположения пяти точек на плоскости); выражение $g(5) = 9$ получил Э. Макаи (см. [2], [3], [5]); факт $g(6) = 17$ был установлен сравнительно недавно Д. Секерешом и Л. Питерсом в [8]. Кроме того, в 1961 году Эрдеш и Секереш доказали и нижнюю оценку $g(n) \geq 2^{n-2} + 1$ (см. [3]).

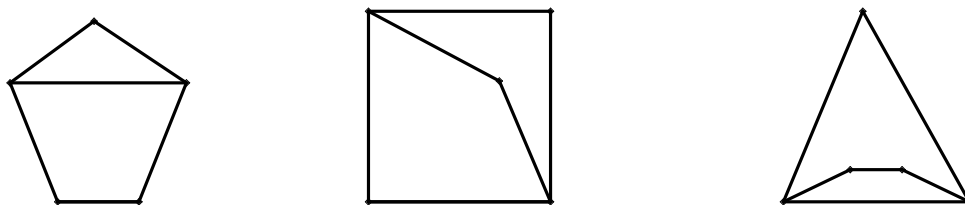


Рис. 1. Любое множество из пяти точек содержит выпуклый четырехугольник

Неравенство $g(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1$ неоднократно улучшалось. Так, в 1998 году было получено сразу три последовательных улучшения. Первое из них принадлежит Ф. Чанг и Р. Грэхему: $g(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}$ (см. [9]). Второе улучшение получили Д. Клейтман и Л. Пахтер: $g(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 7 - 2n$ (см. [10]). Наконец, третье улучшение принадлежит Г. Тоту и П. Вальтру: $g(n) \leq \binom{2n-5}{n-3} + 2$ (см. [11]). В 2005 году Тот и Вальтр слегка усилили последнее неравенство, заменив его оценкой $g(n) \leq \binom{2n-5}{n-3} + 1$ (здесь $n \geq 5$; см. [12]), и это наиболее точный на данный момент результат. Тем самым, гипотеза Эрдеша–Секереша до сих пор не доказана и не опровергнута.

Вторая проблема изучена более глубоко. Так, равенства $h(3) = 3$ и $h(4) = 5$ для нее очевидны (ср. рис. 1). Выражение $h(5) = 10$ получил Х. Харборт в 1978 году (см. [13]). А в 1983 году Дж. Хортон доказал, что $h(n)$ не существует при $n \geq 7$ (см. [14]). Вопрос о существовании и значении величины $h(6)$ долгое время оставался открытым. Лишь в 2006 году Т. Геркен доказал существование $h(6)$, обосновав верхнюю оценку $h(6) \leq g(9) \leq \binom{13}{6} + 1 = 1717$ (см. [15]). В свою очередь, все нижние оценки для $h(6)$ были получены компьютерным перебором. Первая из них принадлежит М. Овермарсу, Б. Шолтен и И. Винсент и относится к 1988 году: $h(6) \geq 27$ (см. [16]). Следующая оценка была получена в 2001 году Овермарсом, и она является самой лучшей на данный момент: $h(6) \geq 30$ (см. [17]). Зазор между нижней и верхней оценками в неравенстве $30 \leq h(6) \leq 1717$ крайне велик, и уменьшение его – важная и нетривиальная задача. Нам удалось доказать следующую теорему.

Теорема. *Имеет место неравенство*

$$h(6) \leq \max\{g(8), 400\} \leq 463.$$

Таким образом, получается, что на сегодняшний день доказаны оценки $30 \leq h(6) \leq 463$.

Заметим, что с более полной и подробной историей проблем Эрдеша–Секереша можно ознакомиться, например, по обзору [5].

2. Схема доказательства теоремы и формулировка более специального результата

Скажем, что (конечное) множество точек на плоскости *содержит* данный k -угольник, если из него можно выбрать подмножество, элементы которого являются вершинами этого k -угольника.

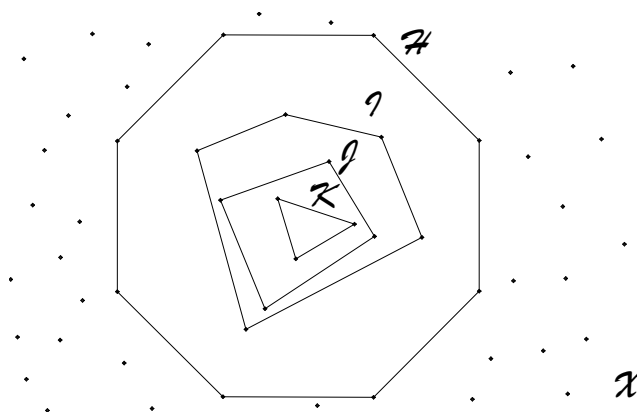


Рис. 2. Определение множеств \mathcal{H} , \mathcal{I} , \mathcal{J} и \mathcal{K}

Для доказательства теоремы необходимо убедиться в том, что любое множество точек на плоскости в общем положении, мощности 463 или более содержит выпуклый и пустой шестиугольник. Зафиксируем произвольное такое множество \mathcal{X} . Заметим, что \mathcal{X} содержит по крайней мере один выпуклый восьмиугольник. Отношение вложенности на множестве всех выпуклых восьмиугольников, образованных точками из \mathcal{X} , есть отношение строгого порядка. Поэтому всегда можно говорить о минимальных восьмиугольниках в \mathcal{X} . Выберем один из них и обозначим множество его вершин через \mathcal{H} . Положим $\mathcal{I}' = (\text{conv}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{H}) \cap \mathcal{X}$ – множество точек из \mathcal{X} , лежащих внутри выпуклой оболочки \mathcal{H} . Либо \mathcal{I}' пусто (но тогда, впрочем, и обсуждать нечего), либо множество $\text{conv}(\mathcal{I}')$ является выпуклым многоугольником, отрезком ("2-угольником") или точкой ("1-угольником"); обозначим через \mathcal{I} множество его вершин ($\mathcal{I} = \partial(\text{conv}(\mathcal{I}')) \cap \mathcal{X}$). Если $|\mathcal{I}| > 2$, то можно определить $\mathcal{J}' = (\text{conv}(\mathcal{I}) \setminus \mathcal{I}) \cap \mathcal{X}$ как множество точек из \mathcal{X} , находящихся внутри выпуклой

оболочки \mathcal{I} . Заметим, что если \mathcal{J}' непусто, то $\text{conv}(\mathcal{J}')$ также является выпуклым многоугольником (в частности, 1- или 2-угольником), поэтому можно определить \mathcal{J} как множество его вершин. Аналогичным образом строятся множества \mathcal{K} , \mathcal{L} и так далее, причем процесс в какой-то момент оборвется (см. рис. 2).

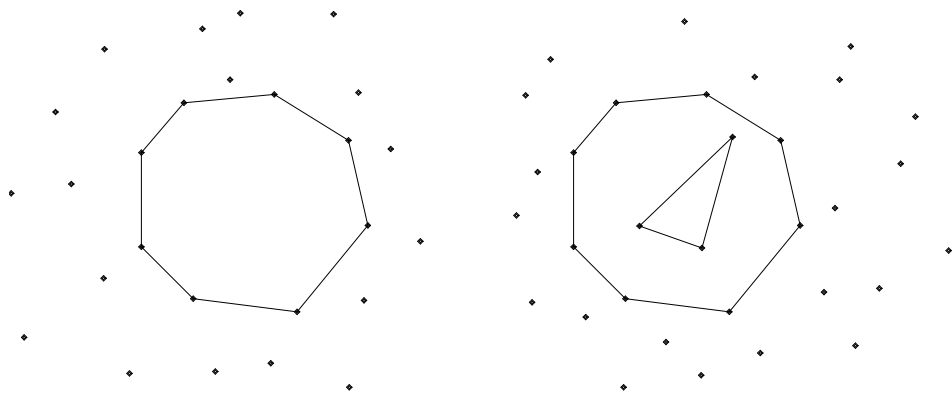


Рис. 3. Множества типа $(8, 0, 0, \dots)$ и $(8, 3, 0, \dots)$

Положим $i = |\mathcal{I}|$, $j = |\mathcal{J}|$, ... Скажем, что множество \mathcal{X} имеет $\text{min}(8, i, j, \dots)$. В частности, в "вырожденных" случаях возникают типы $(8, 0, 0, \dots)$, $(8, i, 0, \dots)$ и пр. (см. рис. 3).

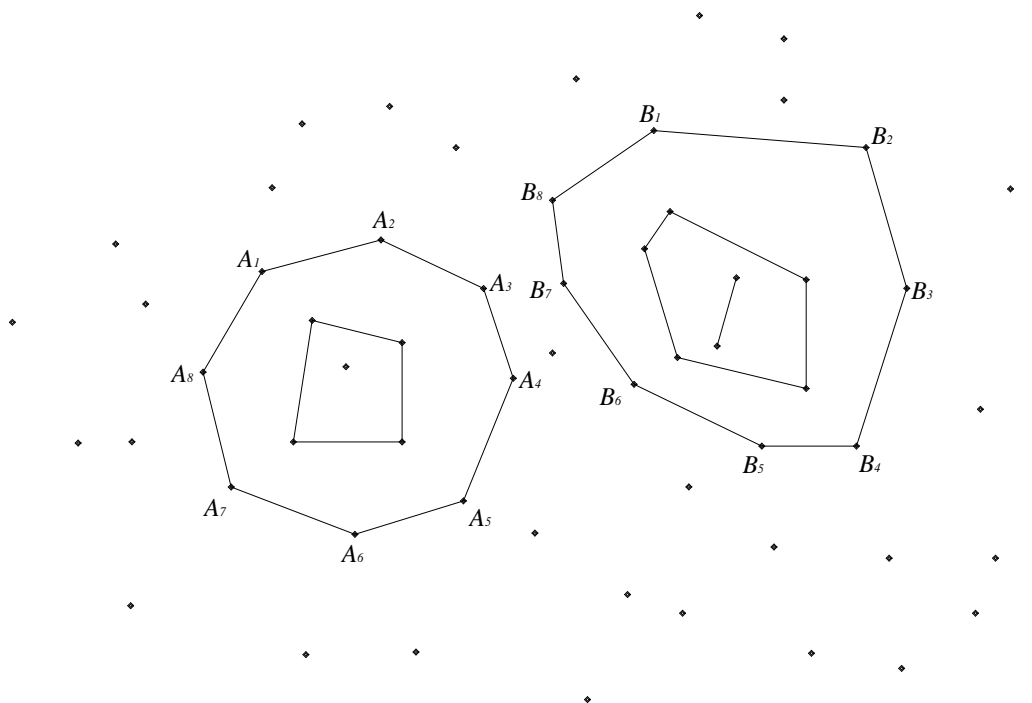


Рис. 4. Неоднозначность определения типа

Заметим, что тип определен неоднозначно. Например, множество, изображенное

на рисунке 4, имеет тип $(8, 4, 1, \dots)$, если в качестве минимального выпуклого восьмиугольника в нем взять $A_1 A_2 \dots A_8$; оно же имеет тип $(8, 5, 2, \dots)$, если рассмотреть восьмиугольник $B_1 B_2 \dots B_8$. В дальнейшем мы не станем пользоваться возможным многообразием выпуклых восьмиугольников в \mathcal{X} . Говоря о типе множества \mathcal{X} , мы будем лишь подразумевать, что в \mathcal{X} есть выпуклый восьмиугольник, относительно которого \mathcal{X} имеет данный тип.

Для доказательства наличия выпуклого и пустого шестиугольника в множестве \mathcal{X} вначале удобно рассмотреть только подмножество $\mathcal{H}' = \text{conv}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{X}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма (Вальтер [?]). Пусть \mathcal{X} , \mathcal{H} , \mathcal{I} , \mathcal{J} и \mathcal{K} такие же, как в определении, приведенном выше. Если $|\mathcal{H}| \geq 7$ и в \mathcal{X} нет выпуклых и пустых шестиугольников, то $\mathcal{K} = \emptyset$.

Выражение "такие же" из формулировки леммы, строго говоря, не вполне корректно, ведь до сих пор мы полагали $|\mathcal{H}| = 8$. Однако ясно, что определение вложенных друг в друга выпуклых оболочек (ср. рис. 2) можно дать и для случаев, когда $|\mathcal{H}| \neq 8$.

Из леммы сразу следует наличие выпуклого и пустого шестиугольника в любом множестве типа $(8, i, j, k, \dots)$, где $k > 0$. Поэтому далее остается рассмотреть лишь множества типа $(8, i, j, 0, 0, \dots)$. Соответственно для краткости мы будем говорить только о случаях (конфигурациях) "вида" $(8, i, j)$. Всего таких случаев будет 43, поскольку i и j могут меняться в следующих пределах: $0 \leq i \leq 2$, а также $3 \leq i \leq 7$ и $0 \leq j \leq 7$.

По идее, каждый из упомянутых 43-х случаев следует рассматривать отдельно, однако нам удастся разбить множество всех случаев на семь классов с тем, чтобы внутри каждого класса применить свой подход к обоснованию необходимого утверждения. При этом для первых шести классов мы тем или иным способом установим наличие выпуклого и пустого шестиугольника в множестве \mathcal{H}' ; для седьмого класса придется использовать большую информацию о множестве \mathcal{X} . Случаи, относящиеся к седьмому классу, будем называть *исключительными*. К ним принадлежат конфигурации вида

$$(8, 7, 3), (8, 6, 2), (8, 6, 1), (8, 5, 1).$$

Имеет место

Теорема'. Пусть $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ находится в общем положении и $|\mathcal{X}| \geq g(8)$. Тогда в каждом из тридцати девяти случаев, которые не являются исключительными, соответствующее множество \mathcal{H}' содержит выпуклый и пустой шестиугольник. В то же время, в каждом из четырех исключительных случаев можно привести пример ситуации, в рамках которой в \mathcal{H}' нет выпуклых и пустых шестиугольников.

Допустим, мы доказали теорему'. Тогда мы имеем исчерпывающую классификацию интересующих нас конфигураций на плоскости. Более того, мы сразу устанавливаем справедливость основной теоремы для "почти всех" случаев в этой классификации. Что же до исключительных случаев, то в них мы должны будем использовать элементы множества $\mathcal{X} \setminus \mathcal{H}'$, коль скоро \mathcal{H}' удовлетворяет здесь теореме', то

есть само не содержит выпуклых и пустых шестиугольников или, как мы еще будем иногда говорить, *реализует контрпример*. Разумеется, мы сможем сделать это лишь при условии, что мы получим весьма жесткие ограничения на расположения точек в контрпримерах.

В связи со всем сказанным выше дальнейшая структура статьи такова: в третьем разделе мы введем ряд вспомогательных определений и обозначений; в четвертом разделе мы разберемся с первыми шестью классами случаев, каждому из которых посвятим отдельный параграф; в пятом разделе мы изучим оставшийся седьмой класс случаев.

Таким образом, мы докажем теорему' и полностью конкретизируем те контрпримеры, существование которых в ней утверждается. Завершение доказательства теоремы, основанное на накопленной информации, мы дадим в следующей публикации.

3. Вспомогательные определения и обозначения

В этом разделе мы введем некоторые дополнительные геометрические объекты, которые будут существенно использованы в дальнейшем доказательстве.

3.1. Сектора и запрещенные зоны

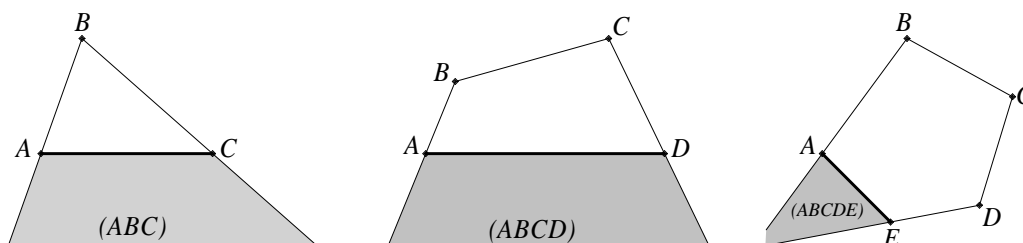


Рис. 5. Определение секторов

Для произвольных трех точек X, Y и Z на плоскости в общем положении определим $P_{XY}(Z)$ как открытую полуплоскость относительно прямой XY , содержащую точку Z . *Выпуклой цепью* назовем множество последовательных вершин выпуклого многоугольника. Для данной выпуклой цепи ABC определим *3-сектор* (см. рис. 5 слева)

$$(ABC) = (P_{AB}(C) \cap P_{BC}(A)) \setminus \text{conv}(\{A, B, C\}).$$

Для выпуклой цепи $ABCD$ определим *4-сектор* (см. рис. 5 посередине)

$$(ABCD) = ((ABC) \cap (BCD)) \setminus \text{conv}(\{A, B, C, D\}).$$

Для выпуклой цепи $ABCDE$ определим *5-сектор* или *запрещенную зону* пятиугольника (см. рис. 5 справа)

$$(ABCDE) = ((ABCD) \cap (BCDE)) \setminus \text{conv}(\{A, B, C, D, E\}).$$

Скажем, что точка *отделяется* от данного выпуклого многоугольника какой-то прямой, содержащей его сторону, если она расположена в другой полуплоскости относительно этой прямой, нежели сам многоугольник. Отметим, что любая запрещенная зона пятиугольника представляет собой множество точек, которые отделяются от него *ровно одной* прямой (см. рис. 5, где роль такой прямой играет прямая AE).

Множество точек, которые отделяются от многоугольника *какой-то одной* конкретной прямой, скажем, прямой PQ , будем называть *2-сектором* и обозначать (PQ) .

Будем говорить, что точка *отделяется* от многоугольника двумя прямыми, содержащими его стороны, *одновременно*, если она отделяется от многоугольника и той, и другой прямой, то есть лежит в пересечении соответствующих 2-секторов. Напротив, точка *отделяется* от многоугольника двумя прямыми, содержащими его стороны, *в совокупности*, если она отделяется от многоугольника хотя бы одной из этих двух прямых, то есть лежит в объединении соответствующих 2-секторов.

Пусть фиксирована некоторая конфигурация вида $(8, i, j)$, $i \geq 3$.

Утверждение 1. В дальнейшем можно предполагать, что выполнены следующие свойства:

- (a) Любая прямая, содержащая сторону i -угольника, отделяет от него ровно три вершины восьмиугольника.
- (b) Две прямые, содержащие смежные стороны i -угольника, отделяют от него в совокупности не менее четырех вершин восьмиугольника.
- (c) Две прямые, содержащие смежные стороны i -угольника, отделяют от него одновременно не более двух вершин восьмиугольника.

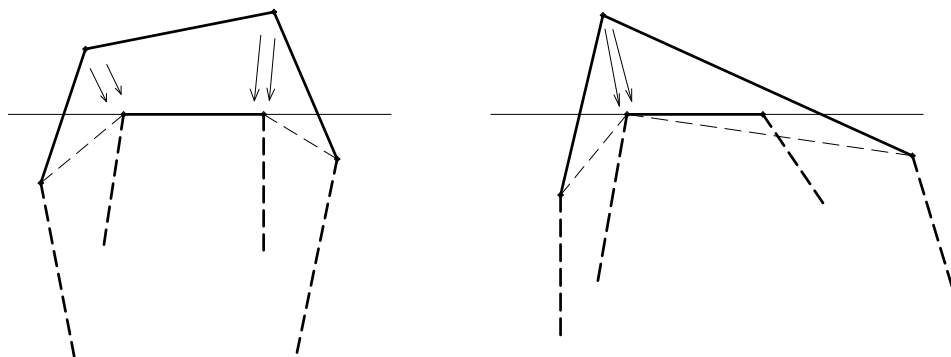


Рис. 6. Невозможный случай расположения вершин в пункте (a) утверждения 1

Доказательство утверждения 1. Вначале рассмотрим пункт (а). Предположим, что некоторая прямая отделяет от i -угольника больше трех вершин восьмиугольника, тогда, используя их, а также ту пару вершин i -угольника, через которые эта прямая проходит, можно построить выпуклый и пустой шестиугольник в нашей конфигурации, и все в порядке. Если же предположить, что прямая отделяет от i -угольника меньше трех вершин восьмиугольника, то, заменяя "их" (возможно, речь идет всего об одной вершине) теми вершинами i -угольника (какой-либо из тех его вершин), через которые проведена прямая, получим меньший восьмиугольник (см. рис. 6), что невозможно.

В пункте (b) работают те же соображения минимальности, что и в пункте (а).

Рассмотрим теперь пункт (с). Предположим, что две прямые, содержащие смежные стороны i -угольника, отделяют от него одновременно три вершины восьмиугольника (больше трех вершин отделено быть не может в соответствии с пунктом (а)). Тогда, опять-таки ввиду пункта (а), эти две прямые отделяют от i -угольника в совокупности только те же три вершины, что невозможно за счет пункта (b).

Утверждение 1 доказано.

3.2. Расстановки

Пусть дана конфигурация произвольного вида $(8, i, j)$. Выделим в ней конструкцию, состоящую из промежуточного i -угольника и внутреннего j -угольника. Такая конструкция нам будет часто нужна в дальнейшем, поэтому рассмотрим ее подробнее. Нам необходимо дать некоторую классификацию взаимных расположений множеств вершин i - и j -угольника. Будем для простоты считать, что $j = 3$ или $j = 4$, поскольку иные случаи нам не понадобятся.

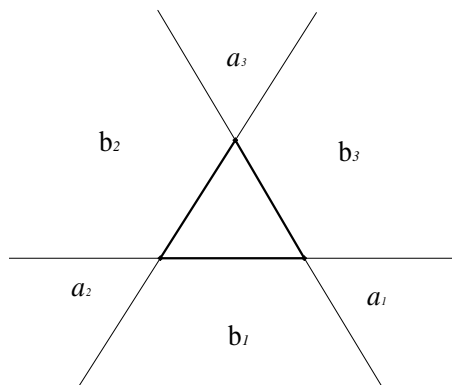


Рис. 7. $(i, 3)$ -расстановка вида $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3]$

Пусть сперва $j = 3$. Три прямые, проходящие через стороны треугольника, разбивают плоскость вне треугольника на шесть частей. Три из них имеют "треугольную" форму, а другие три – "четырёхугольную". Скажем, что конструкция, состоящая из i -угольника и треугольника, является $(i, 3)$ -расстановкой вида $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3]$, если количества вершин i -угольника, расположенных в треугольных частях, суть a_1, a_2, a_3 , а количества вершин i -угольника, расположенных в четырёх-

угольных частях, суть b_1, b_2, b_3 (см. рис. 7). Вообще говоря, обозначение $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3]$ определено неоднозначно. Например, с таким же успехом мы могли бы говорить о той же расстановке и как об $(i, 3)$ -расстановке вида $[a_2, b_2, a_3, b_3, a_1, b_1]$, и как об $(i, 3)$ -расстановке вида $[a_1, b_3, a_3, b_2, a_2, b_1]$. Однако для нас не принципиально, какую именно из перечисленных (и прочих возможных) записей рассматривать. Эти записи с нашей точки зрения эквивалентны, и мы в дальнейшем будем использовать любую из них. Здесь только важно подчеркнуть, что всякий раз фиксированная нами запись будет начинаться с величины вида a_i , то есть с количества вершин i -угольника в некоторой треугольной части плоскости; величины вида a_i и b_j будут в этой записи чередоваться и следовать друг за другом в порядке расположения соответствующих частей плоскости.

Пусть теперь $j = 4$. Как и при $j = 3$, определим вид расстановки. Здесь это будет немного сложнее.

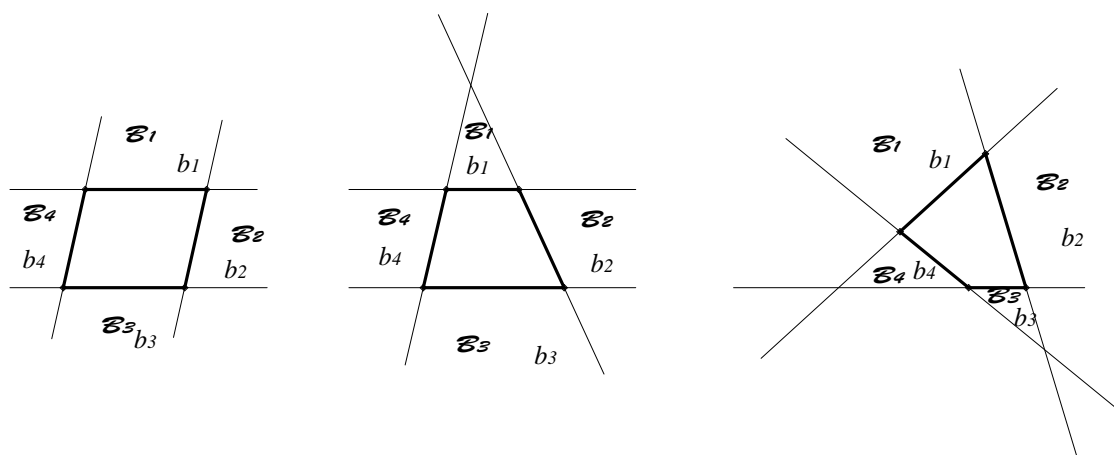
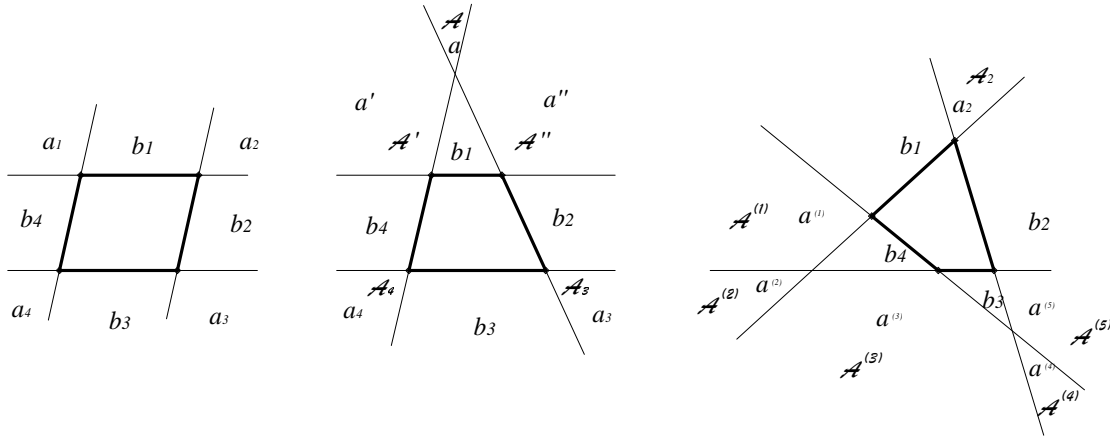


Рис. 8. Разбиения плоскости и определения множеств B_i и чисел b_i

Четыре прямые, проходящие через стороны четырехугольника, разбивают плоскость вокруг него на несколько частей. Возможны три принципиально различных вида указанного разбиения. Все они изображены на рисунке 8. В первом случае четырехугольник представляет собой параллелограмм, во втором – трапецию, а в третьем случае, напротив, четырехугольник не является ни параллелограммом, ни трапецией. В каждом из трех случаев выделяем те области в разбиении плоскости вокруг четырехугольника, которые условно обозначены на рисунке 8 B_1, \dots, B_4 . Для данной конструкции, состоящей из i -угольника и четырехугольника, положим b_k равным числу вершин i -угольника, расположенных в области B_k , $k = 1, \dots, 4$. В каждом из трех случаев величины b_1, \dots, b_4 определены однозначно, с точностью до того, в какой последовательности мы изначально вводим обозначения B_1, \dots, B_4 . Разумеется, как области, так и количества вершин в них мы упорядочиваем (например, по часовой стрелке).

Коль скоро расстановка величин b_1, \dots, b_4 для данной конструкции зафиксирована, расставим величины a_1, \dots, a_4 следующим образом.

Рис. 9. Разбиения плоскости и определения множеств \mathcal{A}_i и чисел a_i

В случае, когда четырехугольник является параллелограммом, все тривиально (см. рис. 9 слева): числа a_1, \dots, a_4 суть количества вершин i -угольника, попавших в соответствующие области.

Пусть четырехугольник – это трапеция. Тогда без ограничения общности числа b_1, \dots, b_4 можно считать расставленными так, как это сделано на рисунках 8 и 9. Рассмотрим "дополнительные" области \mathcal{A}' , \mathcal{A} , \mathcal{A}'' , \mathcal{A}_3 , \mathcal{A}_4 (см. рис. 9 посередине). Обозначим через a' , a , a'' , a_3 , a_4 количества вершин i -угольника в соответствующих областях. Возьмем произвольные неотрицательные целые a_1, a_2 с условиями

$$a_1 + a_2 = a' + a + a'', \quad a_1 \leq a' + a, \quad a_2 \leq a + a''$$

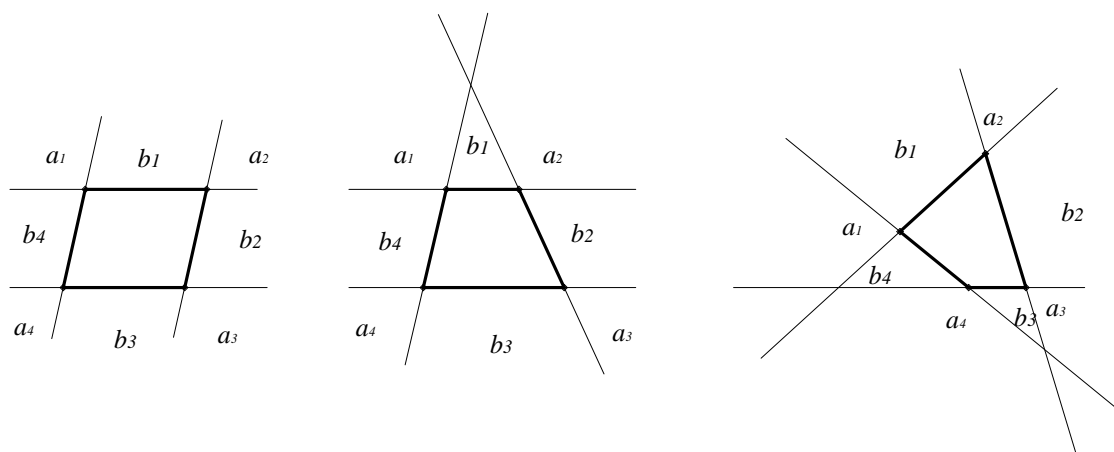
и расставим их так, как это показано на рисунке 10 посередине. Иными словами, мы некоторые a_1 вершин i -угольника из множества $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{A}''$ относим к области $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}$, а оставшиеся a_2 вершины "сопоставляем" области $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}''$. Таким образом, при определении вида расстановки мы пренебрегаем количеством вершин i -угольника в \mathcal{A} и лишь для пущей определенности разносим его вершины по областям $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}''$. При этом, как именно мы осуществляем указанную операцию, значения не имеет.

Пусть, наконец, четырехугольник не является ни параллелограммом, ни трапецией. Эта ситуация изображена на рисунке 9 справа. Здесь, опять-таки без ограничения общности, возникают дополнительные области $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}^{(1)}, \dots, \mathcal{A}^{(5)}$, в которых лежит $a_2, a^{(1)}, \dots, a^{(5)}$ вершин i -угольника соответственно. Выберем произвольные неотрицательные целые a_1, a_4, a_3 , обладающие свойствами

$$a_1 + a_4 + a_3 = a^{(1)} + \dots + a^{(5)}, \quad a_1 \leq a^{(1)} + a^{(2)},$$

$$a_4 \leq a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)}, \quad a_3 \leq a^{(4)} + a^{(5)},$$

и расставим их так, как это показано на рисунке 10 справа. Иными словами, мы некоторые a_1 вершин i -угольника из множества $\mathcal{A}^{(1)} \cup \dots \cup \mathcal{A}^{(5)}$ относим к области $\mathcal{A}^{(1)} \cup \mathcal{A}^{(2)}$; некоторые другие a_4 его вершины сопоставляем области $\mathcal{A}^{(2)} \cup \mathcal{A}^{(3)} \cup \mathcal{A}^{(4)}$;

Рис. 10. Окончательное определение чисел a_i и b_i

оставшиеся a_3 его вершины ассоциируем с областью $\mathcal{A}^{(4)} \cup \mathcal{A}^{(5)}$. Таким образом, на сей раз мы фактически не обращаем внимание на количества вершин i -угольника в пересечениях множеств $\mathcal{A}^{(1)} \cup \mathcal{A}^{(2)}$, $\mathcal{A}^{(2)} \cup \mathcal{A}^{(3)} \cup \mathcal{A}^{(4)}$ и $\mathcal{A}^{(4)} \cup \mathcal{A}^{(5)}$, но для удобства распределяем его вершины по этим множествам. Как и в случае с трапецией, способ упомянутого распределения нас не волнует.

В результате можно сказать, что каждая конструкция, состоящая из i -угольника и четырехугольника, есть $(i, 4)$ -расстановка вида $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4]$. Понятно, что, как и в случае $(i, 3)$ -расстановок, вид здесь определен неоднозначно. Во-первых, имеется произвол в выборе порядка нумерации величин a_i, b_i ; во-вторых, числа a_i могут принимать различные значения в рамках известных ограничений. Впрочем, как и прежде, мы будем чередовать a_i и b_i , всякий раз начиная запись расстановки с некоторого a_1 .

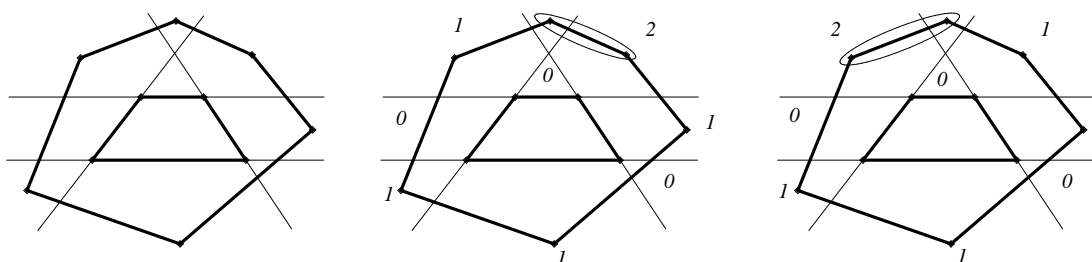


Рис. 11. Пример с неоднозначным определением вида расстановки

На рисунке 11 слева изображена конструкция, состоящая из шестиугольника и четырехугольника. Ее можно интерпретировать, например, как $(6, 4)$ -расстановку вида $[2, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1]$ (см. рис. 11 посередине). Можно ее представлять себе и как $(6, 4)$ -расстановку вида $[1, 0, 2, 0, 1, 1, 0, 1]$ (см. рис. 11 справа). Существует, конечно, ряд других интерпретаций, но каждая из них в равной мере адекватно отражает ту информацию о взаимном расположении вершин шестиугольника и четырехуголь-

ника, которая нам понадобится в дальнейшем.

4. Основная часть доказательства: неисключительные случаи

В этом разделе мы рассмотрим первые шесть классов случаев (см. раздел 2). Каждому классу мы посвятим отдельный параграф, а каждому случаю – пункт соответствующего параграфа. При этом всякий раз мы будем доказывать существование выпуклого и пустого шестиугольника в множестве $\mathcal{H}' \subset \mathcal{X}$.

4.1. "Тривиальные" случаи

В этом параграфе мы рассмотрим конфигурации следующего вида:

$$(8, 0, 0), (8, 6, 0), (8, 7, 0), (8, i, 6), (8, i, 7) \quad (3 \leq i \leq 7).$$

Очевидно, что в каждой такой конфигурации выпуклый и пустой шестиугольник есть. Всякий раз он просто является частью какого-то одного конкретного множества – \mathcal{H} , \mathcal{I} или \mathcal{J} .

Также к этому параграфу разумно отнести случай $(8, 7, 2)$, поскольку в любой конфигурации данного вида конструкция, состоящая из двух точек, вложенных в семиугольник, содержит выпуклый и пустой шестиугольник: достаточно провести прямую через две внутренние точки X и Y , тогда в одной из соответствующих полуплоскостей будут лежать по крайней мере четыре вершины семиугольника, которые вместе с X и Y образуют выпуклый и пустой шестиугольник.

4.2. Случаи с $j = 0$ ($1 \leq i \leq 5$)

Здесь речь пойдет о конфигурациях вида

$$(8, 1, 0), (8, 2, 0), (8, 3, 0), (8, 4, 0), (8, 5, 0).$$

Каждую из них мы рассмотрим в отдельном пункте.

4.2.1. Конфигурации вида $(8, 1, 0)$

Проведем прямую через внутреннюю точку X и одну из вершин A восьмиугольника. Поскольку у нас точки в общем положении, то никакая другая вершина восьмиугольника не лежит на прямой AX . Значит, в какой-то полуплоскости относительно этой прямой расположены четыре вершины восьмиугольника, которые вместе с A и X как раз образуют пустой шестиугольник.

4.2.2. Конфигурации вида $(8, 2, 0)$

Проведем прямую через две внутренние точки. По крайней мере в одной полуплоскости относительно нее расположены четыре вершины восьмиугольника, которые и образуют пустой шестиугольник вместе с двумя внутренними точками.

4.2.3. Конфигурации вида (8,3,0)

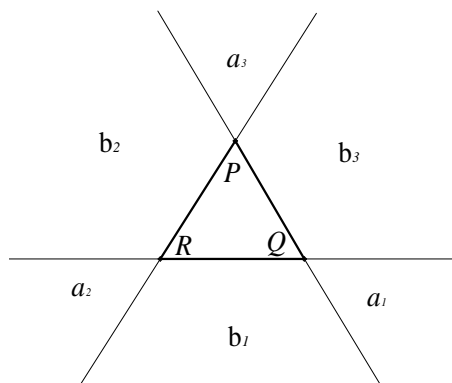


Рис. 12. Конфигурация вида (8,3,0)

В этом случае проведем три прямые, каждая из которых содержит сторону внутреннего треугольника PQR , и обозначим через $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ количества вершин восьмиугольника, лежащих в соответствующих областях (ср. §3.2 и см. рис. 12), так что

$$a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 8.$$

Для того, чтобы в конфигурации не появился выпуклый и пустой шестиугольник, должны выполняться следующие неравенства:

$$1 \leq a_1 + b_1 + a_2 \leq 3, \quad 1 \leq a_2 + b_2 + a_3 \leq 3, \quad 1 \leq a_3 + b_3 + a_1 \leq 3,$$

$$0 \leq b_i \leq 2 \quad (1 \leq i \leq 3).$$

Складывая их, получаем $2 \sum_{i=1}^3 (a_i + b_i) \leq 15$, а это означает, что

$$a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 \leq 7.$$

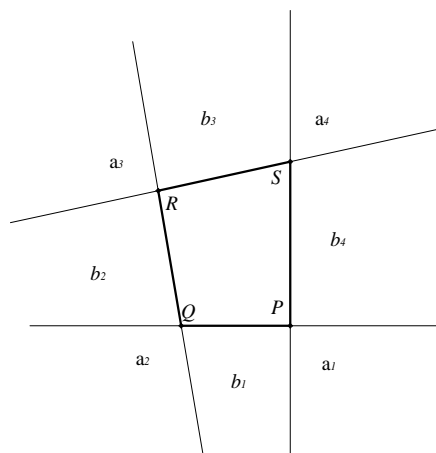
Противоречие.

4.2.4. Конфигурации вида (8,4,0)

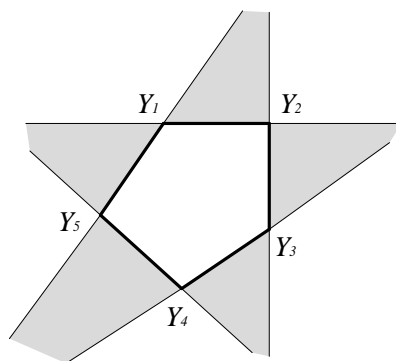
Здесь поступаем так же, как и в предыдущем пункте. А именно, проводим четыре прямые, каждая из которых содержит сторону внутреннего четырехугольника $PQRS$, и обозначаем через $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ количества вершин восьмиугольника, попавших в соответствующую область (ср. §3.2 и см. рис. 13). На сей раз, в предположении отсутствия выпуклого и пустого шестиугольника в конфигурации, должны выполняться следующие неравенства:

$$1 \leq a_1 + b_4 + a_4 \leq 3, \quad 1 \leq a_2 + b_2 + a_3 \leq 3, \quad 0 \leq b_1 + b_3 \leq 1.$$

Складывая их, получаем $\sum_{i=1}^4 (a_i + b_i) \leq 7$. Противоречие.

Рис. 13. Конфигурация вида $(8,4,0)$

4.2.5. Конфигурации вида $(8,5,0)$

Рис. 14. Конфигурация вида $(8,5,0)$

Допустим, в множестве \mathcal{H}' выпуклых и пустых шестиугольников нет. Тогда пятиугольник $\text{conv}(\mathcal{I})$ порождает запрещенные зоны, в которых вершины восьмиугольника располагаться не могут (см. рис. 14, на котором упомянутые зоны закрашены). Отсюда следует, что каждая вершина восьмиугольника отделена от $\text{conv}(\mathcal{I})$ по крайней мере двумя прямыми, содержащими стороны этого пятиугольника, одновременно. Поскольку у нас $h = 8$ есть число вершин восьмиугольника, то некоторая прямая $Y_i Y_{i+1}$ ($Y_1 = Y_6$) отделяет от $\text{conv}(\mathcal{I})$ как минимум

$$\left\lceil \frac{2h}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{2 \cdot 8}{5} \right\rceil = 4$$

точки, которые вместе с вершинами Y_i и Y_{i+1} образуют выпуклый и пустой шестиугольник.

Исходное допущение неверно, и мы в любом случае имеем выпуклый и пустой шестиугольник в множестве \mathcal{H}' .

4.3. Случаи с одной внутренней точкой

Здесь речь пойдет о конфигурациях вида

$$(8, 3, 1), (8, 4, 1), (8, 7, 1).$$

Каждую из них мы рассмотрим в отдельном пункте.

4.3.1. Конфигурации вида (8,3,1)

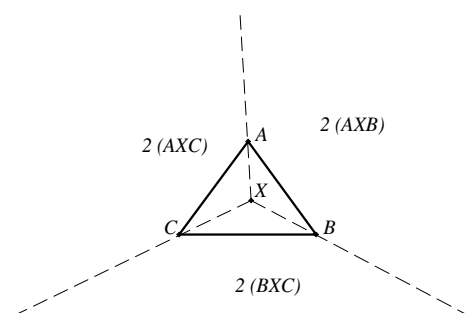


Рис. 15. Конфигурация вида (8,3,1)

В этом случае все пространство вокруг треугольника ABC разбивается на три области (AXB) , (BXC) и (AXC) , каждая из которых является 3-сектором (X – внутренняя точка треугольника) (см. рис. 15). Либо в одной из этих областей больше двух вершин восьмиугольника, и тогда выпуклый и пустой шестиугольник в конфигурации есть. Либо в каждой из областей (AXB) , (BXC) и (AXC) не более двух вершин восьмиугольника, что невозможно.

4.3.2. Конфигурации вида (8,4,1)

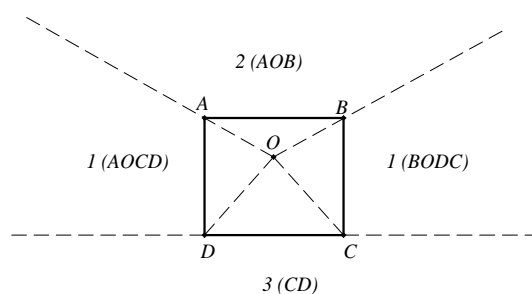


Рис. 16. Конфигурация вида (8,4,1)

Здесь первым делом нужно провести диагонали в четырехугольнике $ABCD$ и зафиксировать, в какой из четырех частей находится внутренняя точка O (см. рис. 16). На самом деле все части равноправны, и мы без ограничения общности можем

считать, что O лежит в части, содержащей сторону AB . Далее, все пространство вокруг четырехугольника разбивается на четыре области: 3-сектор (AOB) , 4-сектора $(BODC)$ и $(A OCD)$ и 2-сектор (CD) . Либо в какой-то области больше вершин восьмиугольника, чем указано на рисунке, и тогда выпуклый и пустой шестиугольник в конфигурации есть. Либо в каждой области количество вершин не превосходит соответствующей величины, но это невозможно, так как $2 + 1 + 1 + 3 = 7 < 8$.

Далее будут часто использоваться аналогичные рассуждения, и в таких случаях будет предъявляться рисунок с указанием областей, на которые разбивается плоскость или которыми она покрывается. В каждой области будет указано максимальное количество вершин восьмиугольника $conv(\mathcal{H})$, которые смогут располагаться внутри нее без появления в рамках конструкции выпуклого и пустого шестиугольника. Всякий раз сумма таких количеств окажется меньше восьми.

4.3.3. Конфигурации вида $(8,7,1)$

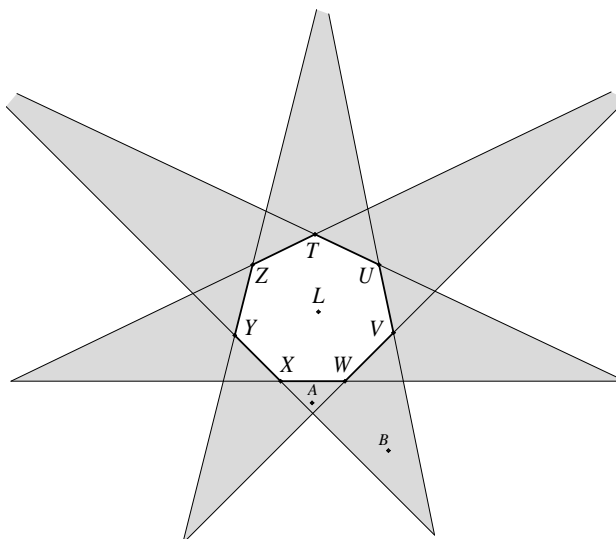


Рис. 17. Конфигурация вида $(8,7,1)$

Предположим, что выпуклого и пустого шестиугольника в данной конфигурации нет. Покажем, что тогда любая вершина восьмиугольника отделяется от семиугольника одновременно тремя или более прямыми, содержащими его стороны.

Допустим, некоторая вершина A восьмиугольника отделена от семиугольника $TUVWXYZ$ ровно одной прямой. Тогда, без ограничения общности, возникает конструкция, состоящая из выпуклого восьмиугольника $TUVWAXYZ$ с одной точкой L внутри (см. рис. 17), которая была рассмотрена в пункте 4.2.1. Иными словами, выпуклый и пустой шестиугольник в конфигурации найдется, и мы имеем противоречие с исходным предположением.

Пусть теперь некоторая вершина B восьмиугольника отделена от семиугольника ровно двумя прямыми. Это, без ограничения общности, означает появление конструкции из выпуклого семиугольника $TUVBXYZ$ с двумя точками W, L внутри

(см. рис. 17), которая фактически была рассмотрена в параграфе 4.1. Снова противоречие.

Итак, каждая вершина восьмиугольника отделяется от семиугольника тремя или более прямыми, содержащими его стороны. Отсюда следует, что по крайней мере одна из этих прямых (скажем, UV) отделяет от семиугольника

$$\left\lceil \frac{3 \cdot 8}{7} \right\rceil = 4$$

вершины восьмиугольника. Эти четыре вершины вместе с точками U и V опять-таки образуют выпуклый и пустой шестиугольник.

Исходное предположение неверно, и мы в любом случае имеем выпуклый и пустой шестиугольник в данной конфигурации.

4.4. Случай, в которых применяется минимальность восьмиугольника

В этом параграфе мы рассмотрим конфигурации вида

$$(8, 3, \geq 2), (8, 4, \geq 2), (8, 5, \geq 3), (8, 6, 5).$$

Всякий раз, доказывая наличие выпуклого и пустого шестиугольника в данной конфигурации, мы будем использовать следующие утверждения, фактически полученные в работе [15].

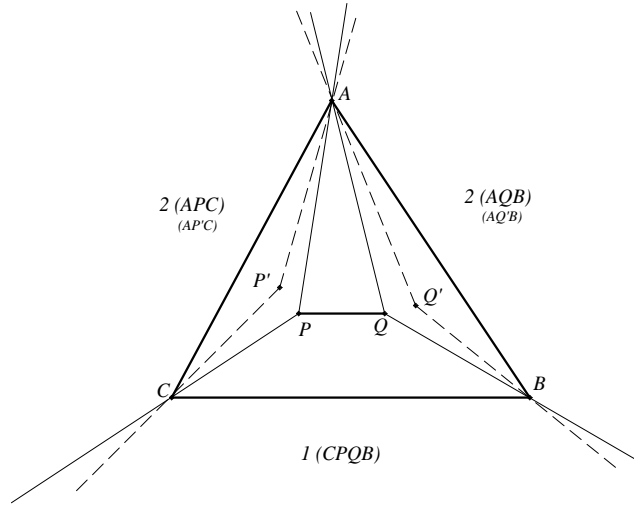
Утверждение 2. *Предположим, что в какой-либо конфигурации вида $(8, i, j)$ выполнено $j \geq 2$, и пусть $2 \leq t \leq \min\{i - 1, j\}$. Рассмотрим t последовательных вершин V_1, \dots, V_t многоугольника $\text{conv}(\mathcal{J})$. Обозначим через \mathcal{T}_n множество вершин i -угольника $\text{conv}(\mathcal{I})$, лежащих в той полуплоскости относительно прямой $V_n V_{n+1}$, которая не содержит других точек из $\text{conv}(\mathcal{J})$ (при $j = 2$ берем любую из двух полуплоскостей). Если $\left| \bigcup_{n=1}^{t-1} \mathcal{T}_n \right| < t$, то в конфигурации есть выпуклый и пустой шестиугольник.*

Утверждение 2'. *Предположим, что в какой-либо конфигурации вида $(8, i, j)$ выполнено $j \geq 2$, и пусть $2 \leq t \leq \min\{i - 1, j\}$. Рассмотрим t последовательных вершин V_1, \dots, V_t многоугольника $\text{conv}(\mathcal{J})$. Обозначим через \mathcal{T}'_n множество сторон i -угольника $\text{conv}(\mathcal{I})$, лежащих в той полуплоскости относительно прямой $V_n V_{n+1}$, которая не содержит других точек из $\text{conv}(\mathcal{J})$ (при $j = 2$ берем любую из двух полуплоскостей). Если $\left| \bigcup_{n=1}^{t-1} \mathcal{T}'_n \right| < t - 1$, то в конфигурации есть выпуклый и пустой шестиугольник.*

Доказательства утверждений в существенной мере опираются на минимальность восьмиугольника в конфигурации вида $(8, i, j)$.

4.4.1. Конфигурации вида $(8, 3, \geq 2)$

Применим утверждение 2 с $t = 2 \leq \min\{i - 1, j\}$. Зафиксируем две последовательные вершины j -угольника $P = V_1$ и $Q = V_2$. Обозначим через \mathcal{T}_{PQ} множество \mathcal{T}_1 .

Рис. 18. Конфигурации вида $(8, 3, \geq 2)$

Согласно утверждению 2, если $|\mathcal{T}_{PQ}| < 2$, то в конфигурации есть выпуклый и пустой шестиугольник, и все в порядке. Таким образом, остается рассмотреть случай $|\mathcal{T}_{PQ}| \geq 2$.

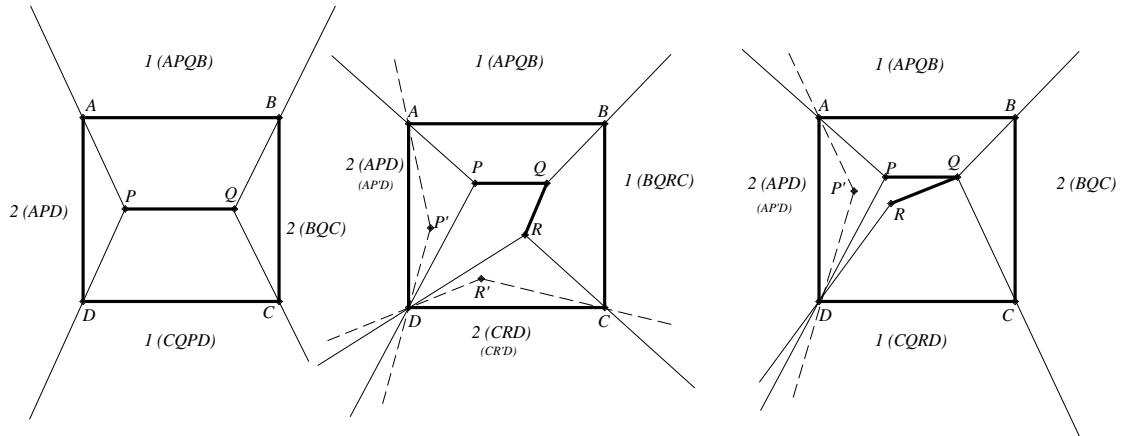
В упомянутом случае выберем две последовательные вершины треугольника ABC (скажем, B и C) из множества \mathcal{T}_{PQ} . Рассмотрим сектора $(CPQB)$, (APC) , (AQB) , покрывающие плоскость вокруг треугольника ABC (см. рис. 18). Внутри четырехугольника $CPQB$ точек из \mathcal{J} нет. Однако внутри треугольников AQB и APC такие точки находиться могут. Пусть, например, $P' \in APC$. Тогда заменим сектор (APC) сектором $(AP'C) \supset (APC)$. Аналогично поступим, если $Q' \in AQB$, $P'' \in AP'C$ и т.д. В результате получим покрытие плоскости вокруг треугольника ABC одним 4-сектором и двумя 3-секторами. При этом в каждом из этих секторов возникнет ограничение числа вершин восьмиугольника, изображенное на рисунке 18. В соответствии с логикой пункта 4.3.2 выпуклый и пустой шестиугольник в конфигурации опять-таки есть.

4.4.2. Конфигурации вида $(8, 4, \geq 2)$

Применим утверждение 2 с $t = 2 \leq \min\{i - 1, j\}$. Зафиксируем три последовательные вершины j -угольника $P = V_1$, $Q = V_2$ и $R = V_3$ (здесь $P = R$, если $j = 2$). Обозначим через \mathcal{T}_{PQ} множество \mathcal{T}_1 , а через \mathcal{T}_{QR} множество \mathcal{T}_2 . Согласно утверждению 2, если $|\mathcal{T}_{PQ}| < 2$ или $|\mathcal{T}_{QR}| < 2$, то в конфигурации есть выпуклый и пустой шестиугольник, и все в порядке. Таким образом, остается рассмотреть случай $|\mathcal{T}_{PQ}| \geq 2$, $|\mathcal{T}_{QR}| \geq 2$.

Заметим, что при $P = R$ ($j = 2$) условия $|\mathcal{T}_{PQ}| \geq 2$, $|\mathcal{T}_{QR}| \geq 2$ означают, что имеет место ситуация, изображенная на рисунке 19 слева, и снова все в порядке (пункт 4.3.2).

Теперь применим утверждение 2 с $t = 3 \leq \min\{i - 1, j\}$, $j \geq 3$. В соответствии с ним, если $|\mathcal{T}_{PQ} \cup \mathcal{T}_{QR}| < 3$, то в конфигурации есть выпуклый и пустой шестиуголь-

Рис. 19. Конфигурации вида $(8, 4, \geq 2)$

ник. Предположим, стало быть, что $|\mathcal{T}_{PQ} \cup \mathcal{T}_{QR}| \geq 3$.

Упомянутые выше условия означают, что с точки зрения расположения вершин четырехугольника $ABCD$ без ограничения общности возможны две ситуации: либо $\{A, B\} \subset \mathcal{T}_{PQ}$ и $\{B, C\} \subset \mathcal{T}_{QR}$ (см. рис. 19 посередине), либо $\{A, B\} \subset \mathcal{T}_{PQ}$ и $\{C, D\} \subset \mathcal{T}_{QR}$ (см. рис. 19 справа).

В первой ситуации нужно рассмотреть сектора

$$(APQB), (BQRC), (CRD), (APD),$$

покрывающие плоскость вокруг четырехугольника $ABCD$. Далее, при необходимости два последних сектора можно заменить на $(CR'D)$ и $(AP'D)$ в соответствии с логикой из предыдущего пункта (см. рис. 19). При этом вполне может стать так, что $R' = P$ или что $P' = R$. Таким образом, при любом раскладе получается покрытие плоскости вокруг четырехугольника $ABCD$ двумя 3-секторами и двумя 4-секторами с надлежащими ограничениями числа вершин восьмиугольника в каждом из них (см. рис. 19).

Во второй ситуации имеем другой набор секторов:

$$(APQB), (BQC), (CQRD), (APD).$$

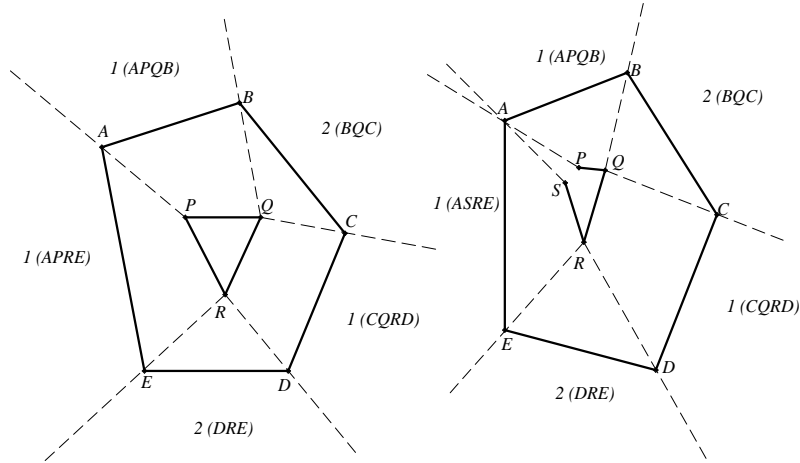
Как и прежде, можно при необходимости заменить сектор (APD) сектором $(AP'D)$ (или сектором (ARD) , если $R \in APD$) и снова получить нужное покрытие.

В обеих ситуациях применяем логику из пункта 4.3.2 и находим выпуклый и пустой шестиугольник в данной конфигурации.

Заметим, что в обеих ситуациях, которые мы только что рассмотрели, используется одинаковое количество 3- и 4-секторов. Аналогичная картина будет наблюдаться и в дальнейшем.

4.4.3. Конфигурации вида $(8, 5, \geq 3)$

Зафиксируем четыре последовательные вершины j -угольника $P = V_1, Q = V_2, R = V_3$ и $S = V_4$ (здесь $P = S$, если $j = 3$). Обозначим через \mathcal{T}'_{PQ} множество \mathcal{T}'_1 , через

Рис. 20. Конфигурации вида $(8, 5, \geq 3)$

T'_{QR} множество T'_2 , а через T'_{RS} множество T'_3 .

Согласно утверждению 2' при $t = 2$, если $|T'_{PQ}| < 1$, $|T'_{QR}| < 1$ или $|T'_{RS}| < 1$, то в конфигурации есть выпуклый и пустой шестиугольник, и все в порядке. Таким образом, остается рассмотреть случай $|T'_{PQ}| \geq 1$, $|T'_{QR}| \geq 1$, $|T'_{RS}| \geq 1$.

Сперва обсудим ситуацию, когда $P = S$. Согласно утверждению 2' при $t = 3$, имеем $|T'_{PQ} \cup T'_{QR}| \geq 2$, $|T'_{QR} \cup T'_{RP}| \geq 2$ и $|T'_{RP} \cup T'_{PQ}| \geq 2$. Более того, нетрудно видеть, что $|T'_{PQ} \cup T'_{QR} \cup T'_{RP}| \geq 3$ (хотя это и не следует из утверждения 2'). В результате у нас есть совокупность, состоящая из трех непустых множеств, причем мощность объединения любых двух таких множеств не меньше двойки, а мощность объединения всех этих множеств не меньше тройки. Значит, по теореме Холла (см. [1]) существует система различных представителей, состоящая из сторон $\mathcal{L}_1 \in T'_{PQ}$, $\mathcal{L}_2 \in T'_{QR}$, $\mathcal{L}_3 \in T'_{RP}$ пятиугольника $ABCDE$. На рисунке 20 (слева), без ограничения общности, роли сторон \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 играют отрезки AB , CD , EA соответственно. Понятно, что \mathcal{L}_1 вместе с точками P и Q , \mathcal{L}_2 вместе с Q и R и, наконец, \mathcal{L}_3 вместе с R и P порождают 4-сектора, которые покрывают часть плоскости вне пятиугольника. На рисунке 20 (слева) эти сектора суть $(APQB)$, $(CQRD)$ и $(APRE)$. Часть плоскости, точки которой не попали в указанные 4-сектора, покрывается двумя 3-секторами (это сектора (BQC) и (DRE) с рисунка 20). На количество вершин восьмиугольника в каждом из перечисленных 3- и 4-секторов имеются свои ограничения (см. рис. 20 слева). В соответствии с логикой из пункта 4.3.2 выпуклый и пустой шестиугольник в конфигурации есть.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $P \neq S$. Применим утверждение 2' с $t = 3$ и $t = 4$. Получается, что $|T'_{PQ} \cup T'_{QR}| \geq 2$, $|T'_{QR} \cup T'_{RS}| \geq 2$, $|T'_{PQ} \cup T'_{QR} \cup T'_{RS}| \geq 3$. Более того, разумеется, $|T'_{RS} \cup T'_{PQ}| \geq 2$. Опять-таки по теореме Холла найдутся различные стороны $\mathcal{L}_1 \in T'_{PQ}$, $\mathcal{L}_2 \in T'_{QR}$, $\mathcal{L}_3 \in T'_{RS}$. Как и прежде, образуются три 4-сектора и два 3-сектора, покрывающие плоскость вне пятиугольника. При необходимости каждый из 3-секторов можно будет заменить новым 3-сектором так же, как это было сделано в пунктах 4.4.1 и 4.4.2. В конечном счете возникнет картина типа той, что изображена на рисунке 20 справа. Используя логику пункта 4.3.2, убеждаемся

в наличии выпуклого и пустого шестиугольника в нашей конфигурации.

4.4.4. Конфигурации вида (8,6,5)

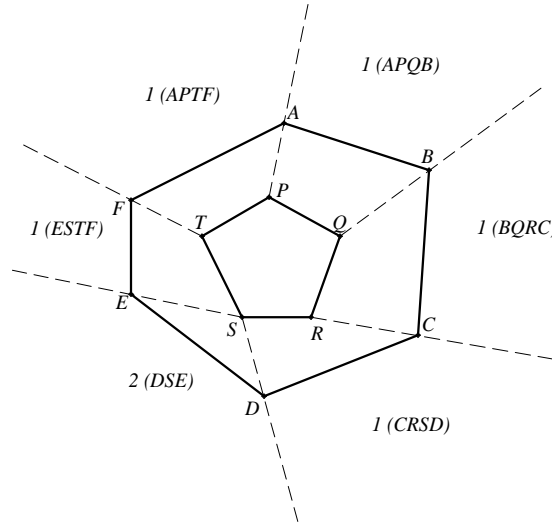


Рис. 21. Конфигурация вида (8,6,5)

По аналогии с предыдущим пунктом, вначале применим утверждение 2' с $t = 2, 3, 4, 5$ и выпишем соответствующие неравенства. Далее, покажем, что (ср. рис. 21)

$$|T'_{PQ} \cup T'_{QR} \cup T'_{RS} \cup T'_{ST} \cup T'_{TP}| \geq 5.$$

Предположим противное. Тогда, ввиду утверждения 2',

$$|T'_{PQ} \cup T'_{QR} \cup T'_{RS} \cup T'_{ST} \cup T'_{TP}| = 4.$$

Обозначим последовательные стороны шестиугольника $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_6$ (например, $\mathcal{L}_1 = AB$, и нумерация идет по часовой стрелке). Аналогично упорядочим стороны пятиугольника, полагая $\mathcal{M}_1 = PQ$ и так далее вплоть до \mathcal{M}_5 (двигаемся по часовой стрелке).

Снова апеллируем к утверждению 2' и замечаем, что объединение любых четырех множеств типа T'_{PQ} имеет мощность 4, а значит, все такие объединения совпадают между собой. Без ограничения общности можно считать, что они имеют один из следующих трех видов:

$$\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_5\}, \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5\}, \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4\}.$$

Ясно, что каждое множество типа T'_{PQ} содержит последовательные стороны шестиугольника. Это наблюдение вкупе с утверждением 2' немедленно приводит нас к противоречию в каждой из первых двух ситуаций, рассмотренных выше. Например, в первой ситуации любое T' является либо подмножеством в $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3\}$, либо подмножеством в $\{\mathcal{L}_5\}$. За счет утверждения 2' такое возможно лишь тогда, когда

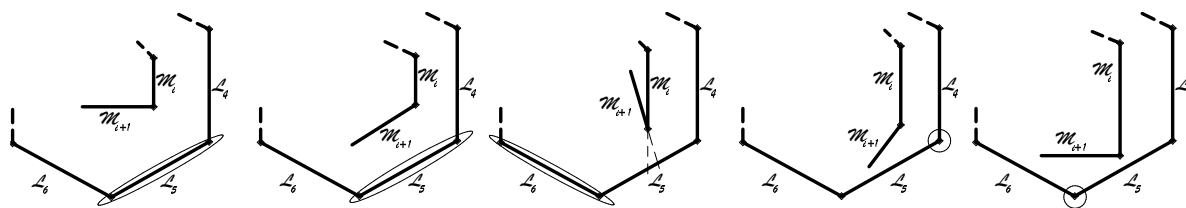


Рис. 22. Пять различных ситуаций расположения сторон

$\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3\}$ содержит не более трех, а $\{\mathcal{L}_5\}$ не более одного множества \mathcal{T}' . Противоречие.

Остается изучить третью ситуацию. Обозначим через \mathcal{M}_i последнюю (по нумерации) сторону пятиугольника, такую, что в отвечающем ей множестве \mathcal{T}' лежит сторона \mathcal{L}_4 . Тогда возможны пять различных ситуаций расположения сторон $\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_{i+1}$ ($i+1$ берем по модулю 5, если необходимо), и все они изображены на рисунке 22. Здесь в первом случае прямая, проходящая через \mathcal{M}_{i+1} , пересекает только сторону \mathcal{L}_4 , во втором – стороны $\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_6$, и т.д. В первых трех случаях имеем противоречие с предположением о том, что $\mathcal{L}_5, \mathcal{L}_6$ не принадлежат никакому \mathcal{T}' . В последних двух случаях получаем противоречие с утверждением 2.

Применим теперь теорему Холла для того, чтобы найти пять 4-секторов и один 3-сектор, покрывающие плоскость вокруг шестиугольника, подобно тому, как это показано на рисунке 21. Ввиду пункта 4.3.2 выпуклый и пустой шестиугольник в конфигурации заведомо есть.

Заметим, что для всех конфигураций, которые мы рассмотрели в этом параграфе, выполнено условие $2i - j < 8$. Грубо говоря, появление величины $(2i - j)$ связано с тем, что во многих ситуациях мы применяли логику из пункта 4.3.2 к покрытию плоскости j 4-секторами и $(i - j)$ 3-секторами: $2i - j = 1 \cdot j + 2 \cdot (i - j)$ (ср., например, рис. 21).

4.5. Случаи с предельным применением минимальности восьмиугольника

В этом параграфе будут рассмотрены случаи, которые близки к случаям из предыдущего параграфа, но для которых аналогичные рассуждения не применимы. А именно, речь пойдет о тех случаях, когда $2i - j = 8$. Это случаи вида $(8, 6, 4)$ и $(8, 5, 2)$. Дополнительно здесь же будет рассмотрен случай вида $(8, 7, 5)$.

4.5.1. Конфигурации вида $(8, 6, 4)$

Прежде всего, заметим, что конструкция, состоящая из шестиугольника и четырехугольника, при условии отсутствия в ней выпуклого и пустого шестиугольника, может представлять собой $(6, 4)$ -расстановку только одного из следующих двенадцати видов с точностью до эквивалентности записи (см. §3.2):

$$[3, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0], [3, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 0], [3, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0],$$

$[2, 1, 0, 1, 2, 0, 0, 0], [2, 1, 0, 0, 2, 0, 1, 0], [2, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1], [2, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0],$
 $[2, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0], [2, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0], [2, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0], [2, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0].$

Доказательство этого факта сводится к простому перебору случаев, который мы здесь не осуществляем. Для пущей наглядности мы лишь указываем на рисунке 23 схемы каждой из $(6, 4)$ -расстановок, перечисленных выше (ср. §3.2): здесь a_1 есть количество точек в правом верхнем углу схемы, и запись $[a_1, b_1, \dots]$ производится против часовой стрелки. Заметим также, что конкретная конструкция вполне может иметь несколько упомянутых видов; однако численные записи этих видов принципиально различны (см. §3.2), и потому мы будем работать в дальнейшем с каждой из них.

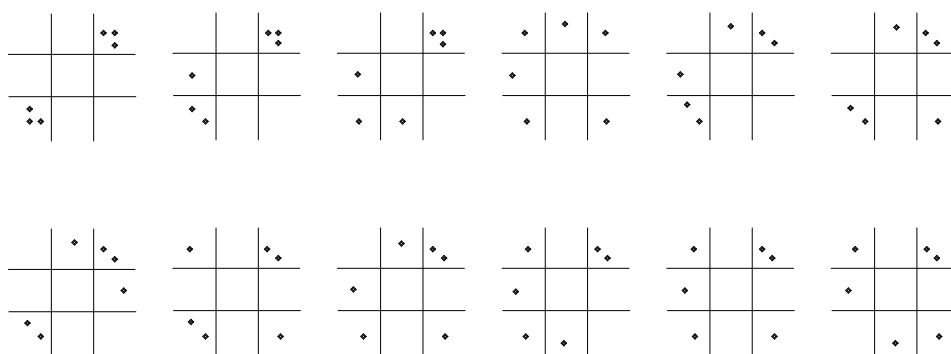


Рис. 23. Схемы всех возможных расстановок для конфигураций вида $(8, 6, 4)$

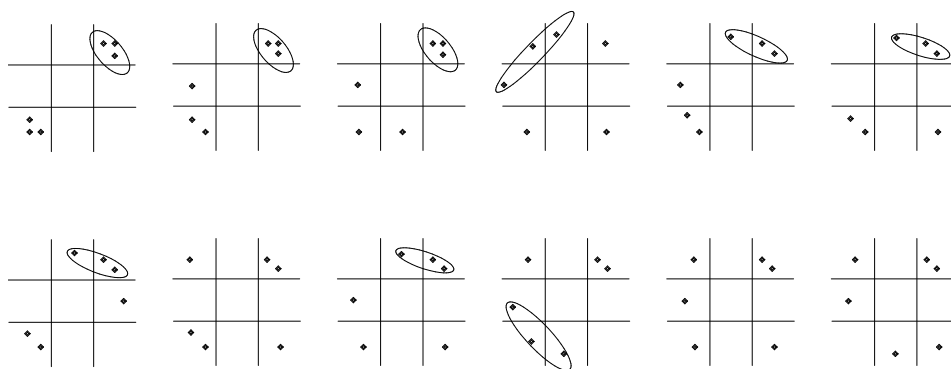


Рис. 24. Уточненные схемы расстановок для конфигураций вида $(8, 6, 4)$

Дабы сократить перебор, мы рассмотрим отдельно две ситуации. К первой из них мы отнесем расстановки вида

$[2, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0], [2, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0], [2, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0].$

Ко второй ситуации мы отнесем остальные расстановки. Заметим, что в каждой из этих расстановок существует вершина четырехугольника, к которой примыкают три области (см. рис. 24), содержащие в общей сложности не менее трех вершин шестиугольника.

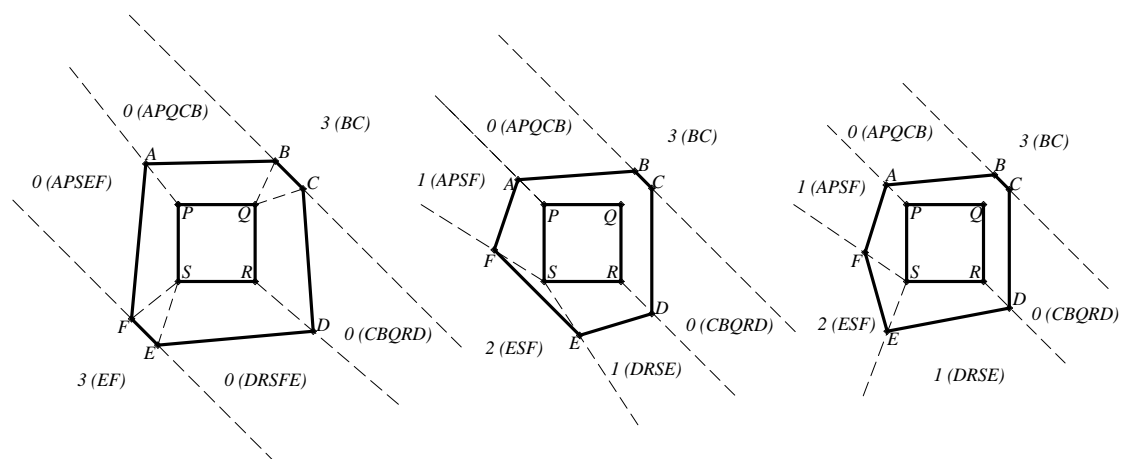


Рис. 25. Разбор первой ситуации для конфигураций вида (8,6,4)

Первая ситуация. На рисунке 25 без ограничения общности изображены расстановки тех трех видов, которые мы отнесли к текущей ситуации. Из очевидных свойств этих расстановок вытекает корректность определения областей, которые явно указаны на рисунке ((BC), (APQCB) и т.д.). Соответствующие ограничения (числа вершин восьмиугольника) стандартны. В каждой из трех расстановок сумма этих ограничений не превосходит семи. Применима логика из пункта 4.3.2, и, стало быть, выпуклый и пустой шестиугольник в конфигурации есть.

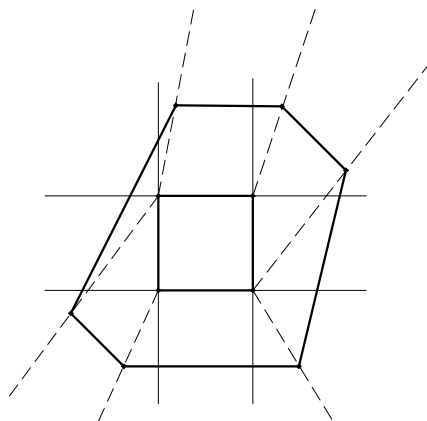


Рис. 26. Стандартное разбиение за счет минимальности восьмиугольника

Вторая ситуация. Зафиксируем расстановку какого-нибудь из тех видов, которые относятся к настоящей ситуации. Как и в параграфе 4.4, можно построить разбиение плоскости вокруг шестиугольника из этой расстановки на четыре 4-сектора и два 3-сектора (ср., например, п. 4.4.4; см. также рис. 26). Этот факт мы не доказываем, поскольку он уже стал для нас стандартным; подчеркнем лишь, что именно его справедливость, по существу, основана на минимальности восьмиугольника, использование которой анонсировано в названии данного параграфа. Заметим, что,

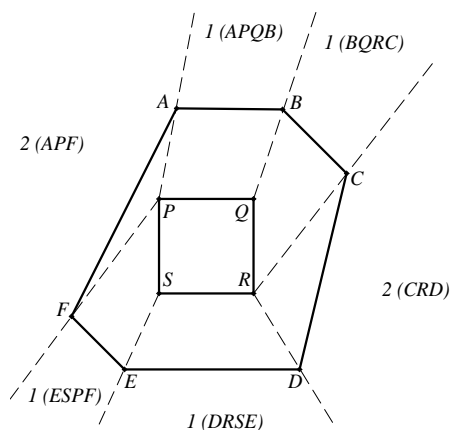


Рис. 27. Разбиение с соответствующими ограничениями для секторов

как обычно, рисунок 26 можно уточнить (см. рис. 27). К сожалению, воспользоваться логикой из пункта 4.3.2 сразу не удастся, ведь сумма чисел, стоящих в секторах на рисунке 27, равна восьми. Сейчас мы еще немного подправим рисунок (вернее, то разбиение, которое на нем изображено), так, чтобы в конечном счете все же вернуться к логике из пункта 4.3.2.

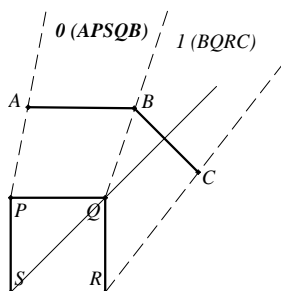


Рис. 28. Возможность уточнения разбиения

Как мы уже отметили в начале текущего пункта, в рассматриваемой нами расстановке есть вершина четырехугольника, к которой примыкают три области, содержащие в общей сложности не менее трех вершин шестиугольника. Соответствующая часть разбиения с рисунка 26 выглядит без ограничения общности так, как показано на рисунке 28. Это два 4-сектора, в которых на рисунке 27 мы указывали ограничения вида $1(APQB)$ и $1(BQRC)$. Теперь заметим, что вершина B лежит либо "ниже", либо "выше" прямой QS . В любом случае объединение двух 4-секторов можно заменить объединением одного 5-сектора и одного 4-сектора. Например, если B лежит "выше" QS , то речь идет о 5-секторе $(APSQB)$ и 4-секторе $(BQRC)$. Тогда разбиение с рисунка 27 преобразуется в разбиение, изображенное на рисунке 29. Применима логика из пункта 4.3.2, и все в порядке.

Заметим, что, конечно, мы и в первой ситуации могли построить разбиение плоскости вокруг шестиугольника на четыре 4-сектора и два 3-сектора. Однако уточнить

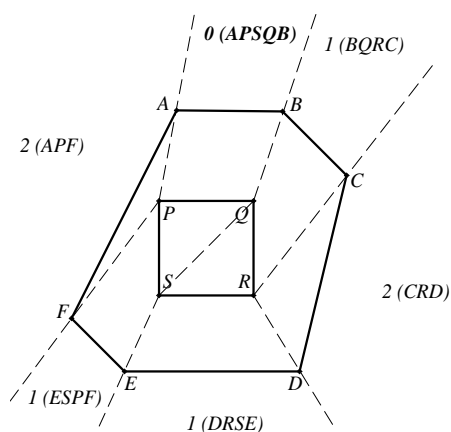


Рис. 29. Правильное разбиение плоскости

это разбиение, подобно тому, как мы сделали это в рамках второй ситуации, нам бы не удалось: возможность уточнения проистекает именно из того наблюдения, что некоторые три последовательные области с рисунка 24 (вторая из них непременно "угловая") в совокупности содержат не менее трех вершин шестиугольника.

4.5.2. Конфигурации вида (8,5,2)

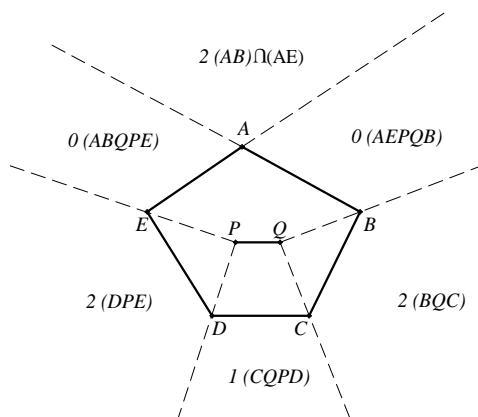


Рис. 30. Конфигурация вида (8,5,2)

Вначале заметим, что прямая, проведенная через две внутренние точки P и Q , (разумеется) пересекает пятиугольник $ABCDE$ и что в одной полуплоскости относительно нее должны оказаться две, а в другой – три вершины пятиугольника (случай с одной и четырьмя вершинами тривиален, и о нем можно сразу забыть). Без ограничения общности будем, стало быть, считать, что в нашем пятиугольнике вершины разделены прямой PQ на множества $\{C, D\}$ и $\{A, B, E\}$ (см. рис. 30). Также будем предполагать, что точка P расположена "ближе" к точке D , а точка Q – "ближе" к точке C (то есть что четырехугольник $DPQC$ выпуклый).

Ввиду сделанных предположений, вся плоскость разбивается на части так, как это изображено на рисунке 30. В каждой части указано ограничение числа вершин восьмиугольника в соответствии с логикой из пункта 4.3.2 (см. рис. 30). Ограничение 2 $(AB) \cap (AE)$ обусловлено пунктом (с) утверждения 1, а остальные ограничения тривиально следуют из свойств 3-, 4- и 5-секторов.

Стало быть, в нашей конфигурации есть выпуклый и пустой шестиугольник, и на этом рассмотрение случая вида $(8, 5, 2)$ завершено.

4.5.3. Конфигурации вида $(8, 7, 5)$

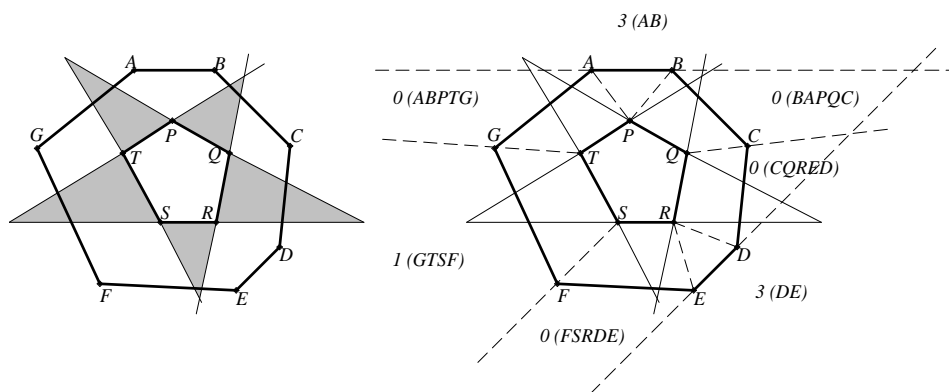


Рис. 31. Конфигурация вида $(8, 7, 5)$

Вначале мы, как обычно, рассмотрим только часть конфигурации, а именно конструкцию, состоящую из семиугольника $ABCDEFG$ и вложенного в него пятиугольника $PQRST$; внешний восьмиугольник мы добавим к рассмотрению позднее. Заметим, что в такой конструкции имеется пять запрещенных зон пятиугольника (см. рис. 31 слева, на котором эти зоны выделены цветом). Если какая-то вершина семиугольника попадает в одну из этих зон, то выпуклый и пустой шестиугольник в конструкции, очевидно, есть, и нет необходимости в дальнейшем исследовании этой ситуации. В противном случае все вершины семиугольника лежат вне упомянутых запрещенных зон (ср. рис. 31 слева). Более того, каждая из прямых, содержащих ту или иную сторону пятиугольника, отделяет от пятиугольника не более трех вершин семиугольника, коль скоро в конструкции выпуклых и пустых шестиугольников нет (ср. пункт 4.2.5). На самом деле в работе [15] было установлено, что в предположении отсутствия выпуклого и пустого шестиугольника в описанной конструкции вершины семиугольника обязаны располагаться так же, как это показано на рисунке 31 слева (т.е. без ограничения общности прямые TP и PQ одновременно отделяют от пятиугольника вершины A, B , прямые PQ и QR отделяют от него вершину C и т.д.).

Теперь вспомним о том, что в исходной конфигурации есть еще и внешний восьмиугольник. Воспользуемся логикой из пункта 4.3.2. На рисунке 31 справа изображено надлежащее покрытие плоскости, и в каждой из частей указано соответствующее ограничение числа вершин восьмиугольника. Сумма ограничений равна семи,

и, стало быть, в рассматриваемой конфигурации выпуклый и пустой шестиугольник есть.

4.6. Индивидуальные случаи

В нижеследующих случаях не применима техника, приведенная выше. Здесь к каждому случаю требуется свой индивидуальный подход, а также необходимо применить подробный перебор нескольких возможностей. В этом параграфе будут рассмотрены случаи вида $(8, 6, 3)$ и $(8, 7, 4)$.

4.6.1. Конфигурации вида $(8, 6, 3)$

Зафиксируем некоторую конфигурацию вида $(8, 6, 3)$ и посмотрим на конструкцию, состоящую из промежуточного шестиугольника и внутреннего треугольника, как на $(6, 3)$ -расстановку (см. §3.2). В статье [15] доказано, что такая $(6, 3)$ -расстановка имеет один из следующих четырех видов (с точностью до эквивалентности записи):

$$[2, 0, 1, 2, 0, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 2, 0, 1], [1, 0, 1, 2, 0, 2].$$

Рассмотрим отдельно каждую из четырех указанных ситуаций.

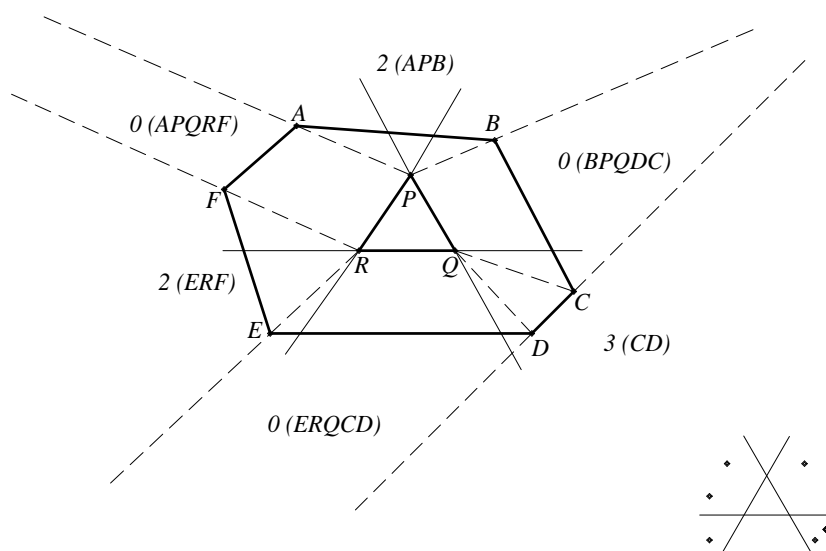


Рис. 32. Конфигурация вида $(8, 6, 3)$, ситуация 1

Ситуация 1: $(6, 3)$ -расстановка вида $[2, 0, 1, 2, 0, 1]$. Поскольку в рамках данной ситуации мы имеем дело с $(6, 3)$ -расстановкой указанного вида, то вершины шестиугольника $ABCDEF$ можно без ограничения общности считать расположенными относительно вершин треугольника PQR именно так, как это изображено на рисунке 32. Схема в правом нижнем углу рисунка показывает, что в "первой", треугольной, части плоскости находятся две вершины шестиугольника (у нас это C и D), в следующей, четырехугольной, части нет вершин шестиугольника, и так далее.

Описанное взаимное расположение вершин шестиугольника и треугольника позволяет осуществить покрытие плоскости вне шестиугольника шестью секторами, названия которых приведены на рисунке 32. В каждом из этих секторов лежит, очевидно, не более стольких вершин восьмиугольника из исходной конфигурации, сколько в нем указано на рисунке (пользуемся логикой из пункта 4.3.2). Значит, в нашей конфигурации есть выпуклый и пустой шестиугольник, и рассмотрение ситуации завершено.

Ситуация 2: (6,3)-расстановка вида $[1,1,1,1,1,1]$. Как и в предыдущей ситуации, соответствующий рисунок 33 прежде всего иллюстрирует взаимное расположение вершин шестиугольника $ABCDEF$ и треугольника PQR . Рассмотрим треугольник BDF . Если ни одна из точек P, Q, R ему не принадлежит, то, очевидно, образуется выпуклый и пустой шестиугольник $BQDRFP$, и все в порядке. Иначе, по крайней мере одна из перечисленных точек находится внутри BDF . (6,3)-расстановка вида $[1,1,1,1,1,1]$ симметрична в том смысле, что при любых ее "поворотах" возникает, по существу, она же. Стало быть, мы можем без ограничения общности предположить, что $R \in BDF$. А это значит, что корректно определен 4-сектор $(DRFE)$ (см. рис. 33). Что же касается существования остальных секторов (и прочих областей), явно указанных на рисунке 33, то оно немедленно следует из свойств расположения точек в (6,3)-расстановке данного вида.

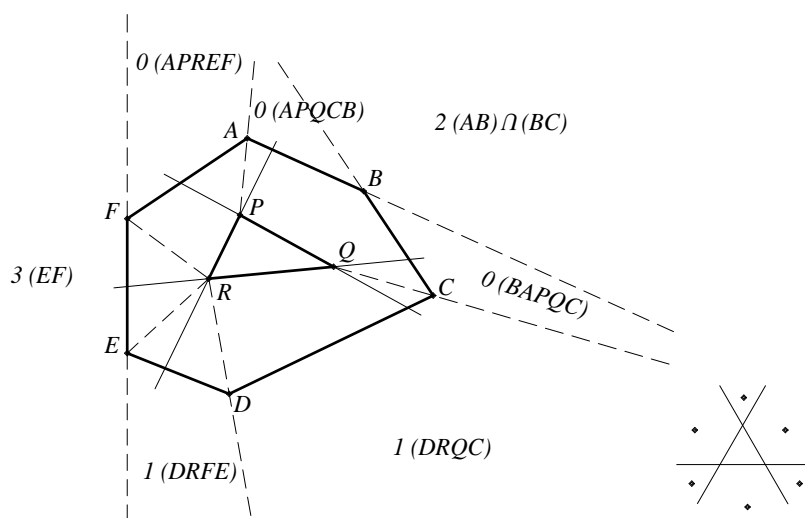
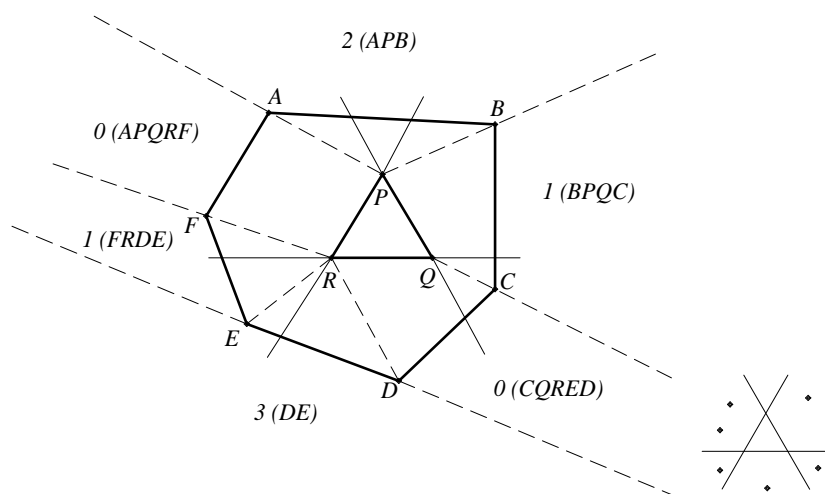


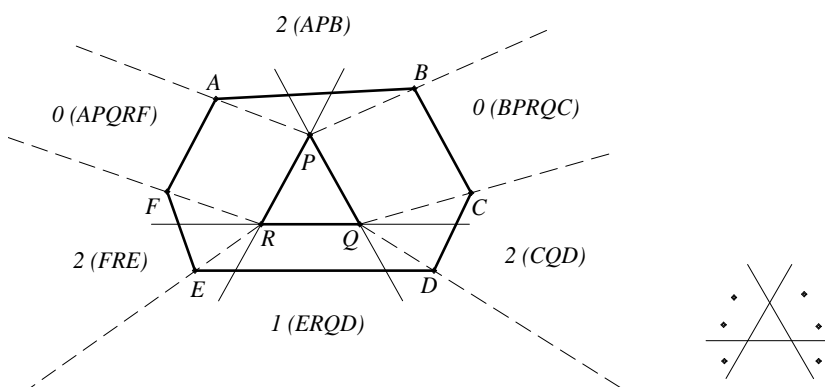
Рис. 33. Конфигурация вида (8,6,3), ситуация 2

Описанные выше области покрывают плоскость вне шестиугольника, и в каждой из них число вершин восьмиугольника из исходной конфигурации не превышает указанной на рисунке 33 величины. Запись $2(AB) \cap (BC)$ является следствием пункта (с) утверждения 1. Остальные записи очевидны. В результате стандартная логика из пункта 4.3.2 приводит нас к тому, что выпуклый и пустой шестиугольник в конфигурации есть.

Ситуация 3: $(6,3)$ -расстановка вида $[1,1,1,2,0,1]$. Действуем так же, как в ситуации 2. Ввиду свойств $(6,3)$ -расстановки данного вида вершины промежуточного шестиугольника можно считать расположенными относительно вершин внутреннего треугольника так, как это изображено на рисунке 34. Последовательности вершин A, B, C, D, E, F и P, Q, R фиксированы на рисунке произвольным (не ограничивающим общности) образом. Рассмотрим пятиугольник $APQDF$. Если вершина R ему не принадлежит, то образуется выпуклый и пустой шестиугольник $APQDRF$, и все в порядке. Иначе $R \in APQDF$, и, стало быть, корректно определен 4-сектор $(FRDE)$, указанный на рисунке 34. Корректность определения остальных секторов с рисунка очевидна.

Рис. 34. Конфигурация вида $(8,6,3)$, ситуация 3

Упомянутые выше сектора покрывают плоскость вне шестиугольника, и в каждом из них число вершин восьмиугольника из исходной конфигурации не превышает указанной на рисунке 34 величины. Применяем логику из пункта 4.3.2 и завершаем рассмотрение ситуации.

Рис. 35. Конфигурация вида $(8,6,3)$, ситуация 4

Ситуация 4: (6,3)-расстановка вида $[1,0,1,2,0,2]$. Здесь также имеется стандартный рисунок 35. Существование всех указанных на нем секторов очевидно, ввиду свойств (6,3)-расстановки данного вида. Эти сектора покрывают плоскость вне шестиугольника, и количества вершин восьмиугольника в них надлежащим образом ограничены. Логика пункта 4.3.2, как всегда, приводит нас к успеху.

4.6.2. Конфигурации вида (8,7,4)

Действуем так же, как и в пункте 4.6.1. Зафиксируем некоторую конфигурацию вида (8,7,4) и посмотрим на конструкцию, состоящую из промежуточного семиугольника и внутреннего четырехугольника, как на (7,4)-расстановку (см. §3.2). В статье [15] доказано, что такая (7,4)-расстановка имеет один из следующих трех видов (с точностью до эквивалентности записи):

$$[2, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 2, 0], [0, 1, 2, 1, 0, 0, 3, 0].$$

Рассмотрим отдельно каждую из трех указанных ситуаций.

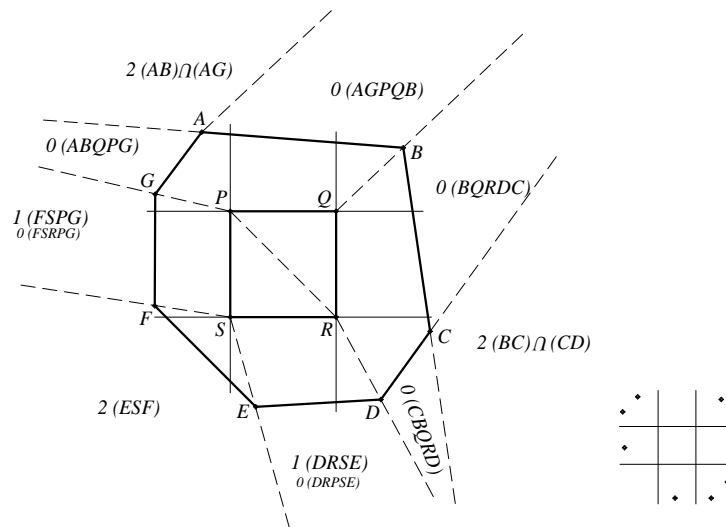


Рис. 36. Конфигурация вида (8,7,4), ситуация 1

Ситуация 1: (7,4)-расстановка вида $[2,1,0,1,2,0,1,0]$. Из свойств (7,4)-расстановки данного вида следует, что без ограничения общности вершины семиугольника $ABCDEFG$ и четырехугольника $PQRS$ можно расположить так, как это изображено на рисунке 36. Упомянутое расположение немедленно влечет корректность определения всех областей, явно указанных на рисунке 36, кроме, быть может, 5-секторов $(FSRPG)$ и $(DRPSE)$. Соответствующие ограничения для количеств вершин восьмиугольника в исходной конфигурации, которые могут располагаться в этих областях, также ясны, разве что для обоснования записей $2(AB) \cap (AG)$ и $2(BC) \cap (CD)$ стоит сослаться на пункт (с) утверждения 1. Очевидно, наконец, что

эти области покрывают плоскость вне семиугольника. К сожалению, сумма упомянутых ограничений равна восьми (мы пока не учитываем ограничения $0(FSRPG)$ и $0(DRPSE)$), и мы не можем сразу воспользоваться логикой из пункта 4.3.2.

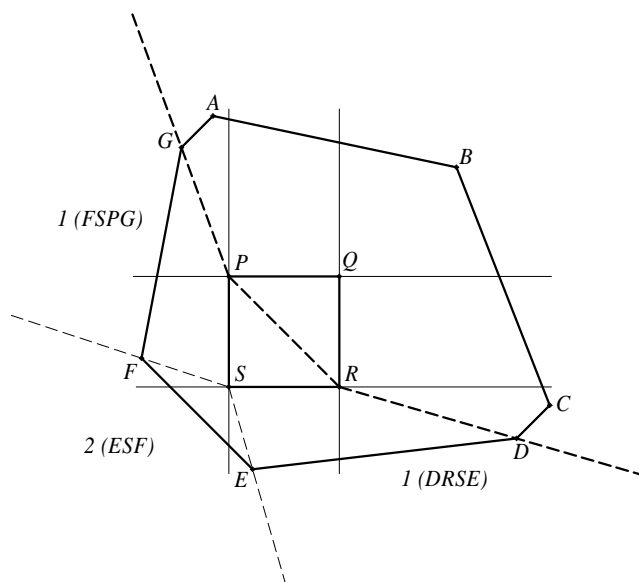


Рис. 37. Невозможный вариант расположения точек в первой ситуации

Теперь изучим более тщательно вопрос существования 5-секторов $(FSRPG)$ и $(DRPSE)$. Заметим, что если хотя бы один из этих секторов существует, то срабатывает одно из ограничений $0(FSRPG)$ или $0(DRPSE)$, указанных на рисунке 36, и логика из пункта 4.3.2 применима. Докажем, стало быть, что действительно либо существует $(FSRPG)$, либо существует $(DRPSE)$. Предположим противное. Тогда вершины G и F лежат по разные стороны от прямой PR , и то же самое верно для вершин D и E . Иными словами, имеет место вариант расположения точек, изображенный на рисунке 37. Совокупность стандартных ограничений, указанных в секторах $(FSPG)$, (ESF) и $(DRSE)$ (см. рис. 37), свидетельствует о том, что "справа" от жирной пунктирной линии расположено не менее четырех вершин восьмиугольника. Пусть некоторые четыре из них суть L, M, N, O (считаем, что они следуют друг за другом по часовой стрелке). Тогда возникает восьмиугольник $LMNODRPG$, который, очевидно, вложен в исходный, что невозможно.

Итак, логика пункта 4.3.2 в данной ситуации применима, и выпуклый и пустой шестиугольник в конфигурации есть.

Ситуация 2: (7,4)-расстановка вида $[1,1,1,1,1,0,2,0]$. В этой ситуации все значительно проще, нежели в предыдущей. На рисунке 38 изображено взаимное расположение семиугольника и четырехугольника, которое, безусловно, не ограничивает общности. Из свойств этого расположения, то есть из свойств (7,4)-расстановки данного вида, сразу вытекает корректность определения всех областей, которые явно указаны на рисунке 38 и которые покрывают плоскость вне семиугольника.

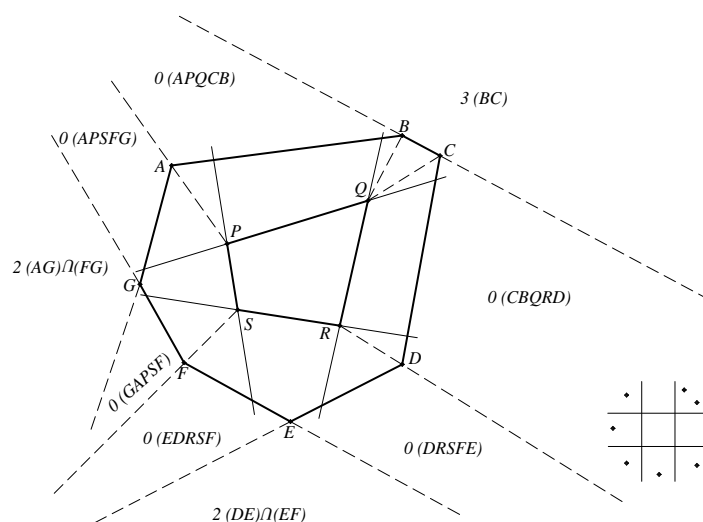


Рис. 38. Конфигурация вида (8,7,4), ситуация 2

Ограничения типа $2(AG) \cap (FG)$ (см. рис. 38) также очевидны. Остается только воспользоваться логикой из пункта 4.3.2.

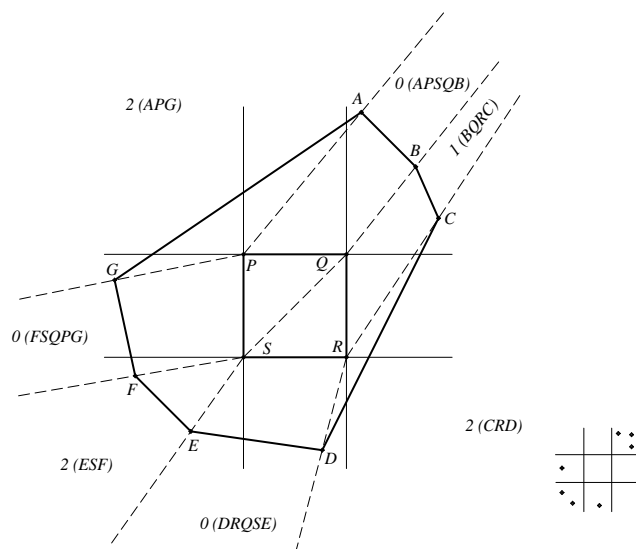


Рис. 39. Конфигурация вида (8,7,4), ситуация 3

Ситуация 3: (7,4)-расстановка вида $[0,1,2,1,0,0,3,0]$. Здесь, как всегда, свойства (7,4)-расстановки данного вида показывают, что принципиально расположение вершин семиугольника относительно вершин четырехугольника устроено так, как это изображено на рисунке 39. Из тех областей, которые явно на этом рисунке обозначены, сомнения могут вызывать только 5-сектора $(FSQPG)$, $(DRQSE)$, $(APSQB)$. Действительно, ничто не мешает, например, вершине F лежать "ниже"

прямой QS . Однако в таком случае возникает выпуклый и пустой шестиугольник $FEDRQS$ и нужный нам результат получается сразу. То же самое верно и в случае 5-сектора ($DRQSE$). Что касается сектора ($APSQB$), то тут мы без ограничения общности предположили, что вершина B лежит "выше" прямой QS (иначе возникла бы аналогичная пара секторов ($APQB$) и ($BQSRC$)). Ограничения, указанные в секторах на рисунке 39, очевидны. Пользуемся логикой из пункта 4.3.2 и окончательно получаем нужный результат.

5. Основная часть доказательства: исключительные случаи

Остались четыре случая вида $(8, i, j)$, которые не были рассмотрены до сих пор. Это случаи вида

$$(8, 7, 3), (8, 6, 2), (8, 6, 1), (8, 5, 1).$$

Они в некотором смысле исключительны. Дело в том, что отвечающие им конфигурации не всегда содержат выпуклый и пустой шестиугольник. Напротив, в каждой из указанных ситуаций удастся построить какой-то контрпример (ср. главу 2). Таким образом, для завершения доказательства теоремы' необходимо тщательно проанализировать все возможные контрпримеры: в конечном счете мы наложим весьма жесткие ограничения на расположение точек в них. Фактически мы сделаем это в предложениях 1 (см. §5.1), 2, 2' (см. §5.2), 3, 3' (см. §5.3), 4 (см. §5.4).

5.1. Конфигурации вида $(8, 7, 3)$

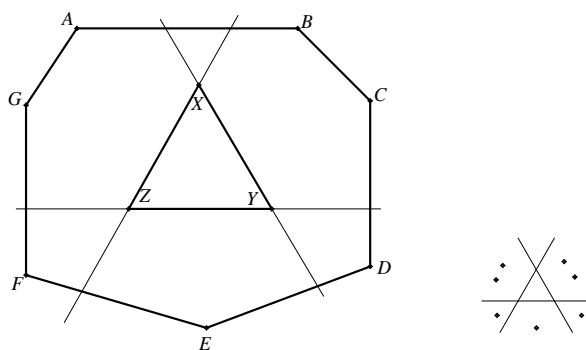


Рис. 40. Внутренний треугольник и промежуточный семиугольник

Как и во многих предыдущих случаях, вначале рассмотрим только часть конфигурации, а именно конструкцию, образованную, промежуточным семиугольником $ABCDEFG$ и внутренним треугольником XYZ . Если она содержит выпуклый и пустой шестиугольник, то говорить не о чем. Иначе на расположение вершин семиугольника есть достаточно жесткие ограничения, установленные в статье [15]. Эти ограничения проще всего описывать в терминах $(7, 3)$ -расстановок того или иного

вида, которые мы определили в параграфе 3.2 и уже не раз использовали. Из работы [15] следует, в частности, что рассматриваемая нами конструкция в предположении отсутствия выпуклого и пустого шестиугольника в ней является $(7, 3)$ -расстановкой вида $[1, 1, 1, 2, 0, 2]$ (с точностью до эквивалентности записи). Как раз она и изображена на рисунке 40.

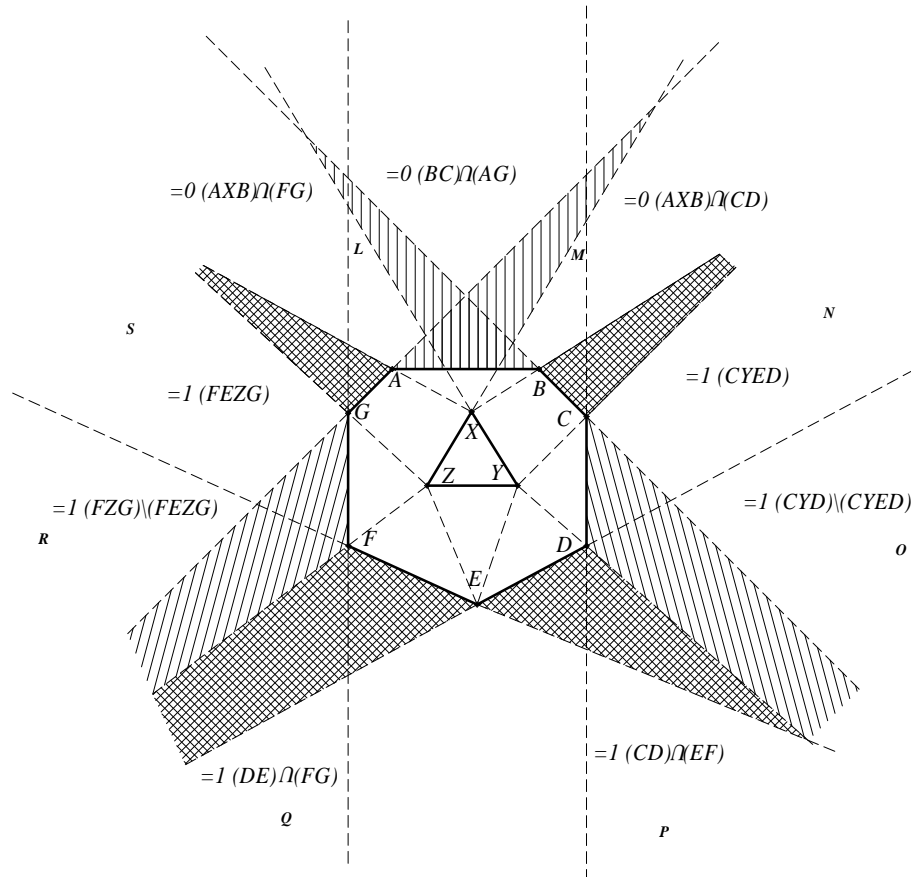


Рис. 41. Конфигурация вида $(8,7,3)$

Теперь вспоминаем про внешний восьмиугольник в конфигурации. Мы хотим определить, как могут быть расположены его вершины относительно внутренней конструкции (семиугольника с треугольником). При этом мы, естественно, будем следить за тем, чтобы восьмиугольник был минимальным и вся конфигурация не содержала выпуклых и пустых шестиугольников. Справедливо следующее предложение.

Предложение 1. Если в данной конфигурации вида $(8,7,3)$ конструкция, состоящая из семиугольника и треугольника, представляет собой $(7,3)$ -расстановку вида $[1, 1, 1, 2, 0, 2]$ и в этой конфигурации нет выпуклых и пустых шестиугольников, то вершины восьмиугольника обязаны располагаться так, как это показано на рисунке 41.

Перед тем, как доказывать предложение, прокомментируем обозначения с ри-

сунка 41 и его корректность. Прежде всего, на рисунке заштрихованы те области, в которых вершин восьмиугольника заведомо нет (почему "заведомо нет" – см. доказательство). Запись типа " $= 1(FEZG)$ " обозначает, что в 4-секторе $(FEZG)$ обязана лежать ровно одна вершина восьмиугольника. При этом лежит она, конечно, в незаштрихованной части 4-сектора.

Говоря о корректности рисунка, мы имеем в виду, что области, указанные на нем, корректно определены и расположены друг относительно друга в точности так, как это изображено на рисунке. Например, сам факт наличия 4-сектора $(FEZG)$, упомянутого выше, или факт наличия 4-сектора $(CYED)$ вытекает из следующего простого наблюдения. А именно, точки Y и Z можно считать не принадлежащими треугольникам CDE и EFG соответственно, за счет чего четырехугольники $CDEY$ и $EFGZ$ без ограничения общности выпуклые и пустые. Считать же мы так можем потому, что в противном случае возникают выпуклые и пустые шестиугольники $BCYEZX$, $EZGAXY$. Вообще, корректность рисунка в существенной мере обусловлена тем, что конструкция, состоящая из семиугольника и треугольника, является $(7, 3)$ -расстановкой вида $[1, 1, 1, 2, 0, 2]$. В частности, корректно определены заштрихованные области

$$(AXYZG), (BXZYC), (DYZFE), (FZYDE), \\ (CBXYD), (FZXAG), (AGFZX), (BCDYX)$$

(ср. рис. 40).

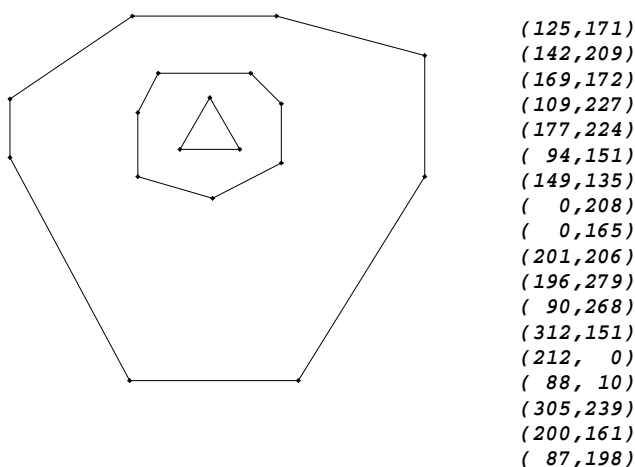


Рис. 42. Контрпример для случая вида $(8, 7, 3)$

Подчеркнем, далее, что ограничения, изображенные на рисунке, носят принципиально иной характер, нежели те ограничения, которые возникали у нас всякий раз, когда мы пользовались логикой из пункта 4.3.2. В каждой из областей, присутствующих на рисунке, должно быть расположено *ровно* столько вершин восьмиугольника, сколько указано. Более того, нетрудно видеть, что такое расположение действительно возможно, то есть и впрямь существуют контрпримеры (см. рис. 42); однако предложение 1 накладывает на них весьма жесткие ограничения. Ниже мы докажем предложение.

Доказательство предложения 1. Вначале рассмотрим 5-сектора

$$(AXYZG), (BXZYC), (DYZFE), (FZYDE).$$

Они являются запрещенными зонами и, очевидно, вершин восьмиугольника не содержат. Тем самым, обоснована "решетчатая" штриховка на рисунке 41.

Часть плоскости вне семиугольника, не покрытая решетчатой штриховкой, лежит в объединении четырех областей: первые три из этих областей являются 3-секторами (AXB) , (CYD) , (FZG) , а четвертая область состоит из точек, отделенных от семиугольника прямыми DE и EF одновременно (см. рис. 41). Изучим эти области подробнее. Каждая из них содержит не более двух вершин восьмиугольника: с 3-секторами все ясно, а для четвертой области применим пункт (с) утверждения 1. Понятно, стало быть, что каждая из рассматриваемых областей должна содержать ровно по две вершины восьмиугольника. Например, без ограничения общности будем считать, что в первой области расположены точки L и M , а в четвертой – точки P и Q (см. рис. 41). Почему на рисунке 41 указанные точки расположены именно так, а не иначе, нам еще предстоит выяснить.

Заметим, что область, образованная 3-сектором (CYD) , разбивается прямой DE на две части. Первая часть представляет собой 4-сектор $(CYED)$, а вторая – дополнение к нему, то есть множество $(CYD) \setminus (CYED)$. Ясно, что из двух вершин восьмиугольника, принадлежащих (CYD) , в первую часть попадает не более одной вершины. В то же время вторая часть отделена от семиугольника прямой DE , так что ввиду пункта (а) утверждения 1 в этой части лежит ровно одна вершина восьмиугольника (оставшиеся две вершины из формулировки утверждения 1 – это точки P и Q , которые заведомо множеству $(CYD) \setminus (CYED)$ не принадлежат). Таким образом, в каждой из рассмотренных частей расположена в точности одна вершина восьмиугольника, и это соответствует надписям " $= 1(CYED)$ " и " $= 1(CYD) \setminus (CYED)$ " на рисунке 41. Обозначим упомянутые вершины через N и O . Аналогичное рассуждение относительно 3-сектора (FZG) гарантирует нам появление вершин R и S (и только их) в частях $(FZG) \setminus (FEZG)$ и $(FEZG)$, и это снова полностью коррелирует с рисунком.

С "левой" и "правой" частями рисунка мы уже разобрались. Посмотрим теперь на его "верхнюю" часть. Для этого сразу же отметим наличие еще четырех 5-секторов

$$(CBXYD), (FZXAG), (AGFZX), (BCDYX),$$

которые мы прежде намеренно не упоминали и которым отвечает отдельная, "линейчатая", штриховка на рисунке 41.

Ввиду пункта (а) утверждения 1, каждая из прямых AG и BC отделяет от семиугольника ровно три вершины восьмиугольника. При этом, за счет наличия линейчатой штриховки на рисунке, указанные две прямые в совокупности отделяют от семиугольника в точности шесть вершин, каковые суть R, S, L, M, N, O . Значит, во-первых, в области $(BC) \cap (AG)$ вершин восьмиугольника действительно нет (ср. рис. 41), а во-вторых, вершины Q и P не отделяются от семиугольника прямыми AG и BC .

Далее, заметим, что прямая BC отделяет вершины M, N, O от семиугольника. Это сразу вытекает из пункта (а) утверждения 1 и из отсутствия вершин восьмиугольника в области $(BC) \cap (AG)$. В силу пункта (b) утверждения 1, прямая CD отделяет от семиугольника тройку вершин восьмиугольника, не совпадающую с тройкой $\{M, N, O\}$. Ясно тогда, что это тройка $\{N, O, P\}$. Отсюда мгновенно следует, что вершины M и P обязаны лежать именно в отведенных им частях рисунка 41 и что в области $(AXB) \cap (CD)$ вершин восьмиугольника действительно нет. Аналогично обосновывается расположение вершин L и Q (см. рис. 41), а также отсутствие вершин восьмиугольника в области $(AXB) \cap (FG)$.

Отметим еще раз, что области

$$\begin{aligned} & (BC) \cap (AG), (AXB) \cap (CD), (BXZYC), (CYED), (CYD) \setminus (CYED), \\ & (DYZFE), (CD) \cap (EF), (DE) \cap (FG), \\ & (FZYDE), (FZG) \setminus (FEZG), (FEZG), (AXYZG), (AXB) \cap (FG) \end{aligned}$$

определены корректно и действительно расположены вне семиугольника именно так, как это изображено на рисунке, благодаря тому факту, что конструкция, состоящая из семиугольника и треугольника, является $(7, 3)$ -расстановкой вида $[1, 1, 1, 2, 0, 2]$. Предложение доказано.

В завершение текущего параграфа, слегка уточним предложение 1. Мы знаем, что прямая AB должна отделять от семиугольника ровно три вершины восьмиугольника. Две из них – это L и M , а третьей, без ограничения общности, можно считать вершину N .

5.2. Конфигурации вида $(8, 6, 2)$

Вначале рассмотрим конструкцию, состоящую из промежуточного шестиугольника $ABCDEF$ с двумя внутренними точками X, Y . Если она содержит выпуклый и пустой шестиугольник, то все в порядке. Иначе, наша задача по-прежнему сводится к построению контрпримера.

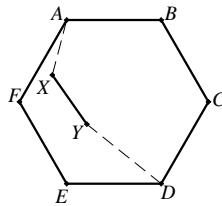
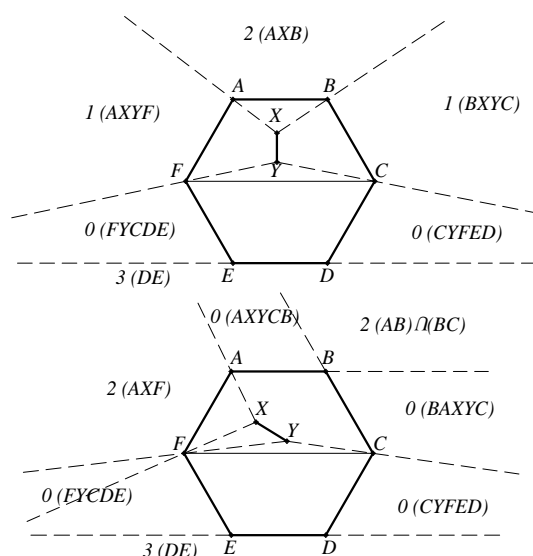


Рис. 43. Неправильное расположение двух внутренних точек

Прежде всего, заметим, что в предположении отсутствия выпуклого и пустого шестиугольника в конструкции прямая XY непременно пересекает противоположные стороны шестиугольника (например, AB и DE). В самом деле, если это не так, то без ограничения общности имеет место ситуация с рисунка 43, на котором образовался выпуклый и пустой шестиугольник $ABCDYX$.

Рис. 44. Ситуации, в которых XY не пересекает диагональ

Далее заметим, что в тех же предположениях точки X и Y лежат по разные стороны относительно любой из главных диагоналей шестиугольника $ABCDEF$. Действительно, рассмотрим, без ограничения общности, диагональ CF . Тогда возможны две ситуации: 1) прямая XY пересекает стороны AB и DE шестиугольника; 2) прямая XY пересекает стороны FA и CD шестиугольника. Ситуация, когда прямая XY пересекает стороны BC и EF шестиугольника, полностью аналогична второй. Обе описанные ситуации изображены на рисунке 44. Корректность определения областей, явно указанных на этом рисунке, вытекает из предположений, сделанных в рамках соответствующих ситуаций. Ограничения числа вершин восьмиугольника в данных областях совершенно стандартны. Суммируя их, приходим к противоречию в обеих ситуациях.

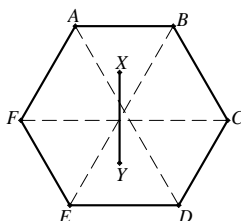


Рис. 45. Правильное расположение двух внутренних точек

Итак, конструкция, состоящая из шестиугольника с двумя внутренними точками, без ограничения общности, выглядит так, как показано на рисунке 45.

Теперь вспоминаем про восьмиугольник в исходной конфигурации. В следующем предложении мы укажем жесткие ограничения на расположение его вершин.

Предложение 2. Если в данной конфигурации вида $(8, 6, 2)$ нет выпуклых и

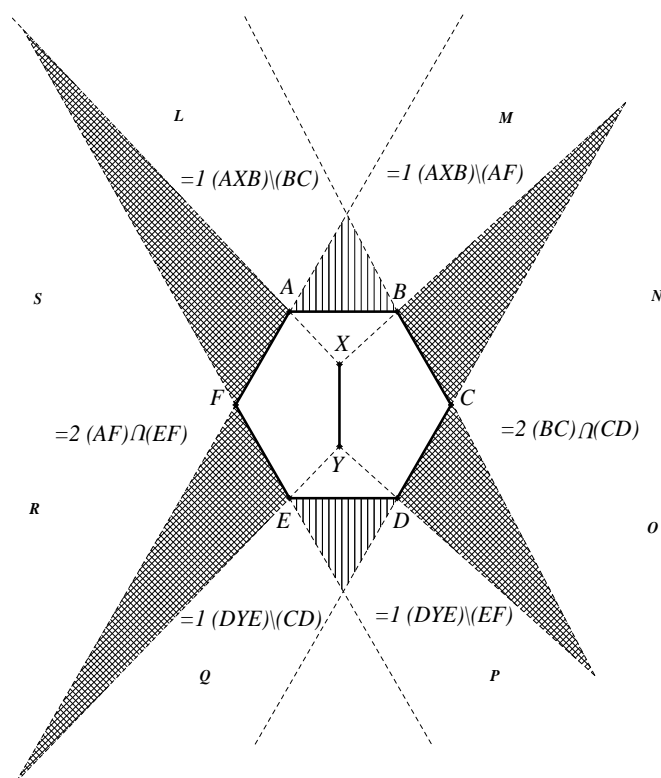


Рис. 46. Конфигурация вида (8,6,2)

пустых шестиугольников, то вершины восьмиугольника обязаны располагаться так, как это показано на рисунке 46.

В некотором смысле рисунок 46 сделан по тому же принципу, что и рисунок 41 из предыдущего параграфа. А именно, во-первых, заштрихованные области на нем вершин восьмиугольника не содержат. Во-вторых, запись типа " $= 2(AF) \cap (EF)$ " подразумевает наличие ровно одной вершины восьмиугольника в соответствующей области. Корректность самих этих областей в конечном счете будет следовать из того, что конструкция, состоящая из шестиугольника с двумя внутренними точками, изначально была существенно ограничена.

Доказательство предложения 2. Прежде всего, заметим, что области, отмеченные решетчатой штриховкой, представляют собой 5-сектора $(BXYDC)$, $(CBXYD)$, $(AXYEF)$, $(FAXYE)$, в которых вершин восьмиугольника, конечно, быть не может. В то же время, области, отмеченные линейчатой штриховкой, суть объединения запрещенных зон: $(BCDYX) \cup (AFEYX)$, $(DCBXY) \cup (EFAXY)$. Стало быть, и в них вершин восьмиугольника нет.

Незаштрихованная часть плоскости вокруг шестиугольника покрывается четырьмя областями. Из них две являются 3-секторами (AXB) и (DYE) , а две представляют собой пересечения 2-секторов $(BC) \cap (CD)$ и $(AF) \cap (EF)$. В каждом из 3-секторов лежит, разумеется, не более двух вершин восьмиугольника. То же самое

верно и для оставшихся двух областей ввиду пункта (b) утверждения 1. Поскольку в сумме должно получиться восемь вершин, то в каждой из четырех областей находятся ровно две вершины восьмиугольника. Пусть, например, $L, M \in (AXB)$, $N, O \in (BC) \cap (CD)$, $P, Q \in (DYE)$, $R, S \in (AF) \cap (EF)$ (ср. рис. 46).

Осталось пояснить, почему в 3-секторах найденные две вершины восьмиугольника расположены именно так, как показано на рисунке 46.

Рассмотрим прямые BC и AF . В силу утверждения 1 каждая из них отделяет от шестиугольника ровно три вершины восьмиугольника. В то же время в совокупности эти две прямые отделяют от шестиугольника шесть вершин восьмиугольника – точки R, S, L, M, N, O . Значит, прямой AF ничего не остается, как отделить от шестиугольника вершины R, S, L , а прямая BC вынуждена отделять от него вершины M, N, O . В итоге получаем справедливость записей " $= 1(AXB) \setminus (BC)$ " и " $= 1(AXB) \setminus (AF)$ ". Аналогично доказывается и утверждение относительно 3-сектора (DYE) .

Предложение доказано.

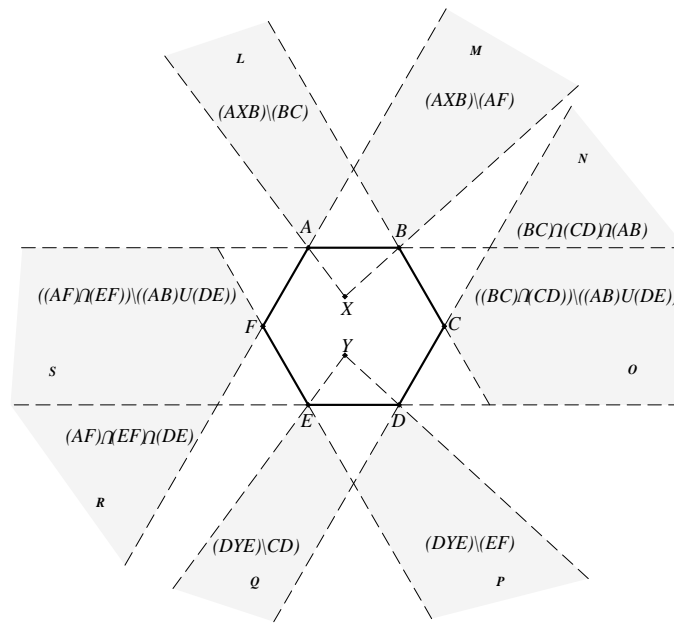


Рис. 47. Уточнение рисунка 46: первая ситуация

Предложение 2 допускает некоторое уточнение.

Предложение 2'. Если в данной конфигурации вида $(8, 6, 2)$ нет выпуклых и пустых шестиугольников, то вершины восьмиугольника обязаны располагаться либо так, как это показано на рисунке 47, либо так, как это показано на рисунке 48.

Предложение 2' следует из того факта, что ввиду утверждения 1, каждая из прямых AB и DE отделяет от шестиугольника ровно три вершины восьмиугольника. В самом деле, из четырех точек, лежащих в областях $(BC) \cap (CD)$ и $(AF) \cap (EF)$,

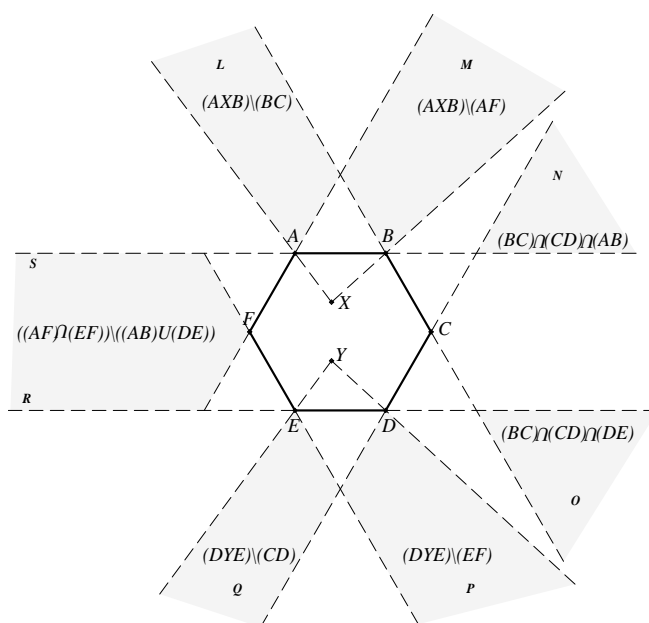
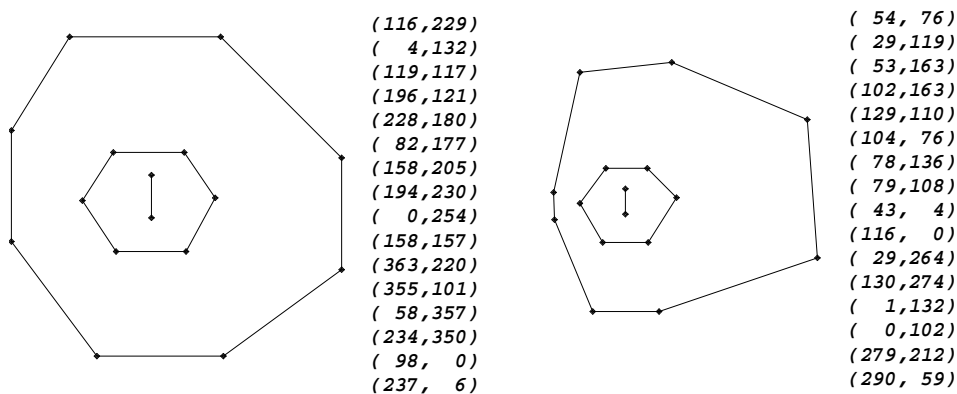


Рис. 48. Уточнение рисунка 46: вторая ситуация

ровно две отделены от шестиугольника прямыми AB и DE . Две принципиально различные ситуации возникают в зависимости от того, лежат ли эти две точки в одной области или в разных областях.

Рис. 49. Контрпримеры для случая вида $(8, 6, 2)$

На рисунке 49 изображены два искоемых контрпримера. Один из них соответствует ситуации с рисунка 47, а другой – ситуации с рисунка 48.

5.3. Конфигурации вида $(8, 6, 1)$

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим сперва конструкцию, состоящую из промежуточного шестиугольника $ABCDEF$ с одной точкой X внутри. Проведем

в шестиугольнике главные диагонали AD , BE и CF . Они разбивают этот шестиугольник, вообще говоря, на семь частей: шесть из них содержат стороны шестиугольника, одна – центральная (ее может не быть). Точка X лежит в одной из этих частей (см. рис. 50). Теперь можно описать жесткие ограничения на расстановку вершин восьмиугольника в исходной конфигурации.

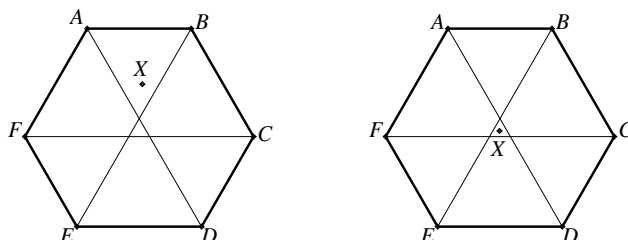


Рис. 50. Промежуточный шестиугольник с одной точкой внутри

Предложение 3. *Имеют место две принципиально различных ситуации.*

- (а) Если в данной конфигурации вида $(8, 6, 1)$ конструкция, состоящая из шестиугольника $ABCDEF$ и точки X , такова, что X находится в части, содержащей сторону AB (см. рис. 50 слева), и в этой конфигурации нет выпуклых и пустых шестиугольников, то вершины восьмиугольника обязаны располагаться так, как это показано на рисунке 51.
- (б) Если в данной конфигурации вида $(8, 6, 1)$ конструкция, состоящая из шестиугольника $ABCDEF$ и точки X , такова, что X находится в центральной части (см. рис. 50 справа), то при любом расположении вершин восьмиугольника конфигурация содержит выпуклый и пустой шестиугольник.

Прежде, чем доказывать предложение 3, прокомментируем его утверждение. На рисунке 51 закрашены шесть 4-секторов, в каждом из которых обязательно лежит ровно одна вершина восьмиугольника, коль скоро мы предполагаем выполненными соответствующие условия; названия этих 4-секторов указаны там же. Заметим, что 4-секторов $(BAXC)$, $(AXCB)$, $(ABXF)$ и $(AFXB)$ могло бы и не существовать. Например, $(BAXC)$ и $(AXCB)$ не существуют, если точка X находится внутри треугольника ABC . Однако в таком случае возникает выпуклый и пустой шестиугольник $AXCDEF$, что противоречит условиям предложения. Аналогичные рассуждения обосновывают корректность рассмотрения 4-секторов $(ABXF)$ и $(AFXB)$.

Итак, расстановка шести вершин восьмиугольника ясна. Утверждается далее, что две оставшиеся вершины восьмиугольника суть либо M и N , либо U и V , и что лежат они именно в тех треугольных зонах, которые изображены на рисунке 51.

Доказательство предложения 3. Докажем сперва пункт (а).

В силу пункта (а) утверждения 1, каждая из прямых AB и DE отделяет от шестиугольника ровно три вершины восьмиугольника. Значит, имеется не менее двух

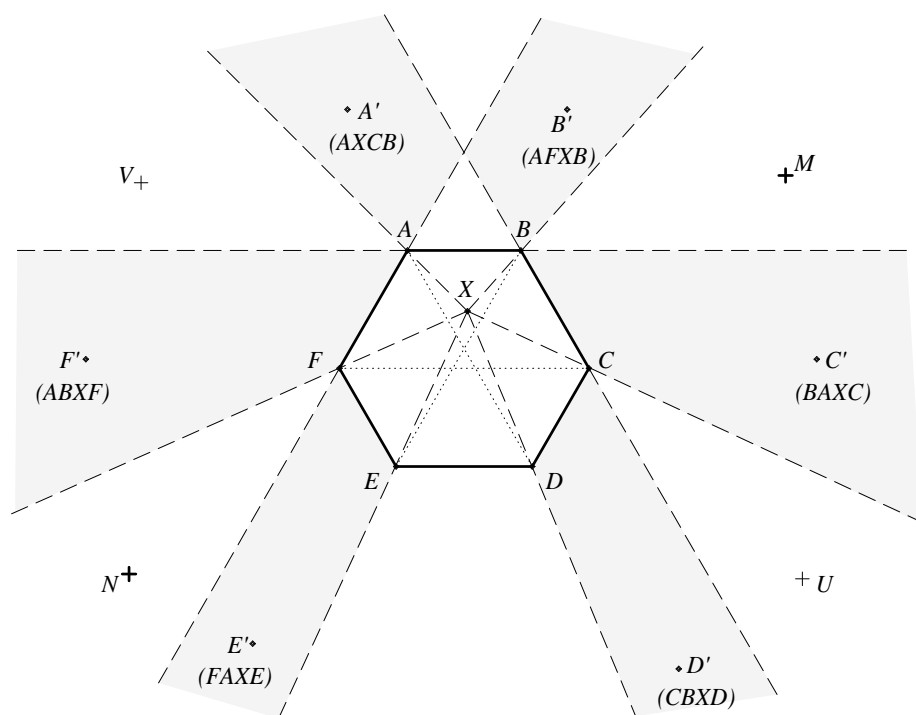


Рис. 51. Конфигурация вида (8,6,1)

вершин, которые не отделяются ни одной из указанных прямых, то есть лежат в области $\mathbb{R}^2 \setminus ((AB) \cup (DE))$. С учетом допущения, сделанного нами относительно расположения точки X , в рассматриваемой конструкции имеется выпуклый и пустой пятиугольник $CDEFX$, который порождает запрещенные зоны $(FXCDE)$ и $(CXFED)$. Область $\mathbb{R}^2 \setminus ((AB) \cup (DE))$ разбивается указанными зонами и 4-секторами $(ABXF)$ и $(BAXC)$ на четыре непересекающиеся части. При этом в частях, отвечающих запрещенным зонам, вершин восьмиугольника быть не может, а в каждом из 4-секторов лежит не более одной вершины восьмиугольника (см. рис. 52). Ввиду сказанного выше, ровно одна вершина восьмиугольника принадлежит 4-сектору $(ABXF)$, и ровно одна – 4-сектору $(BAXC)$.

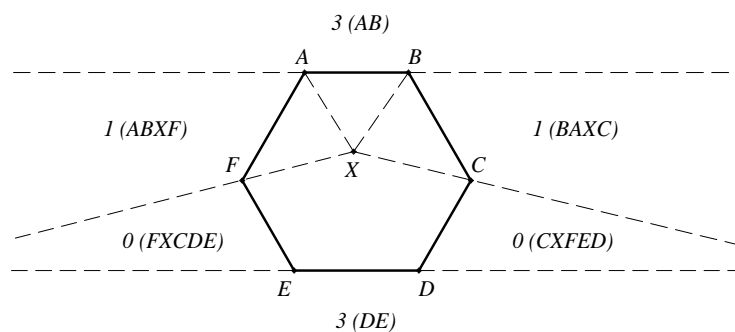


Рис. 52. Разбиение плоскости вокруг шестиугольника на сектора

Теперь на ту же картинку можно взглянуть и под другими углами, а именно, можно рассмотреть вместо пары прямых AB и DE пару прямых BC и EF , а также пару прямых CD и AF . Рассуждения, которые полностью аналогичны изложенным выше, приведут нас к тому, что ровно одна вершина восьмиугольника лежит в каждом из следующих 4-секторов: $(AXCB)$, $(CBXD)$, $(AFXB)$ и $(FAXE)$.

Справедливость пункта (а) предложения 3 в существенной степени установлена. Действительно, как это и показано на рисунке 51,

$$A' \in (AXCB), B' \in (AFXB), C' \in (BAXC),$$

$$D' \in (CBXD), E' \in (FAXE), F' \in (ABXF).$$

Остается доказать, что, во-первых, $A' \neq B'$ и что, во-вторых, оставшиеся две вершины восьмиугольника суть либо M и N , либо U и V .

Обоснуем сперва тот факт, что $A' \neq B'$. Предположим противное, то есть, что $A' = B' \in ABK$ (см. рис. 53). Заметим, что A' не может лежать в заштрихованных треугольниках, поскольку иначе эта вершина попадает в запрещенные зоны пятиугольников $AFEDX$ и $BCDEX$. Но в таком случае образуются 5-сектора $(CBA'XD)$ и $(FAA'XE)$, которые запрещают нам поставить вершину D' в 4-сектор $(CBXD)$, а вершину E' – в 4-сектор $(FAXE)$ (ср. рис. 51). Противоречие.

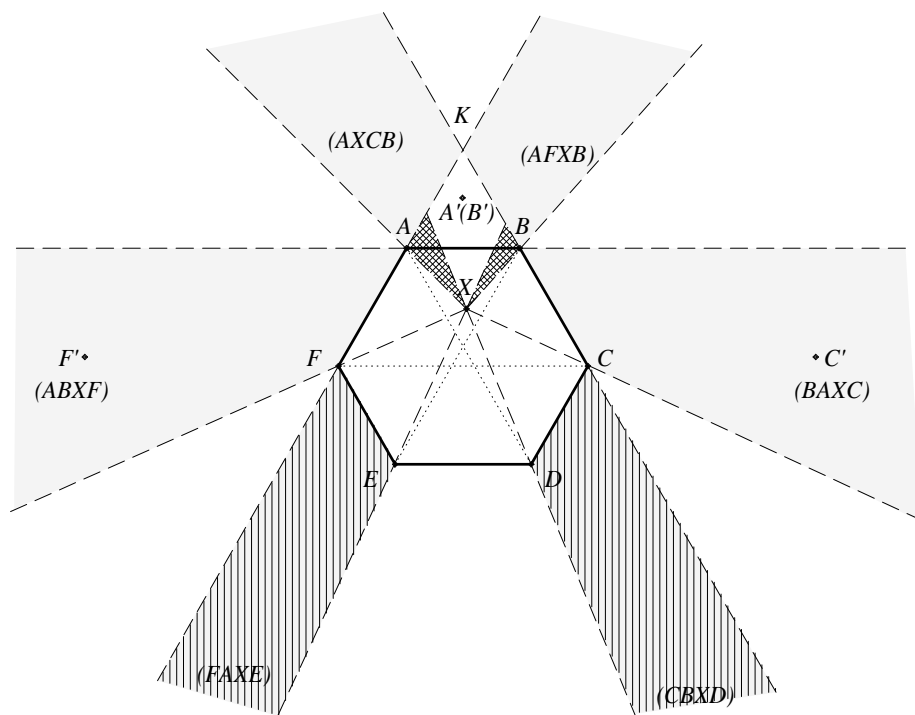


Рис. 53. Разбор случая $A' = B'$

Разберемся, наконец, с двумя оставшимися вершинами восьмиугольника. Для начала отметим, что вся плоскость вне шестиугольника $A'B'C'D'E'F'$ покрыта 4-секторами $(A'ABB')$, $(B'BCC')$, и так далее.

Сейчас каждая прямая, содержащая сторону шестиугольника, отделяет от него ровно две вершины восьмиугольника (см. рис. 51), а после добавления недостающих вершин восьмиугольника каждая такая прямая должна будет отделить три вершины. Следовательно, любая из шести прямых отделяет от шестиугольника ровно одну из двух дополнительных точек. Поскольку две прямые, проведенные через противоположные стороны шестиугольника, одну и ту же вершину отделять не могут (см. рис. 52), то каждая дополнительная точка отделена в совокупности ровно тремя прямыми. Ясно, что, тем самым, дополнительные точки лежат в противоположных секторах вида $(A'ABB')$. Однако в секторе $(A'ABB')$ никакие дополнительные точки располагаться не могут из-за наличия 5-сектора $(A'AXBB')$. Таким образом, дополнительные вершины расположены либо в секторах $(B'BCC')$ и $(E'EFF')$ (точки M и N), либо в секторах $(C'CDD')$ и $(A'AFF')$ (точки U и V), и пункт (а) предложения доказан.

Теперь докажем пункт (b) предложения. Те же рассуждения, что и при доказательстве пункта (а), показывают, что имеет место следующая картина, наглядно изображенная на рисунке 54. Иными словами, вершины A', B', C', D', E', F' восьмиугольника обязаны располагаться в точности там же, где расположены их аналоги с рисунка 51. В то же время, в 4-секторах $A'AFF', B'BCC', D'DEE'$ вершин восьмиугольника быть не может за счет наличия запрещенных зон $A'AXFF', B'BXCC', D'DXEE'$ (ср. конец доказательства пункта (а)). Однако в конце доказательства пункта (а) мы заметили, что две недостающие вершины восьмиугольника непременно находятся в противоположных секторах вида $A'AFF'$. В нынешней ситуации подобное расположение невозможно, и пункт (b) доказан.

Предложение 3 полностью доказано.

Как и в предыдущем пункте, результат пункта (а) предложения допускает некоторое уточнение. Действительно, из доказательства сразу вытекает справедливость следующего утверждения.

Предложение 3'. *Если в данной конфигурации вида $(8, 6, 1)$ конструкция, состоящая из шестиугольника $ABCDEF$ и точки X , такова, что X находится в части, содержащей сторону AB , и в этой конфигурации нет выпуклых и пустых шестиугольников, то вершины восьмиугольника обязаны располагаться так, как это показано на рисунке 55.*

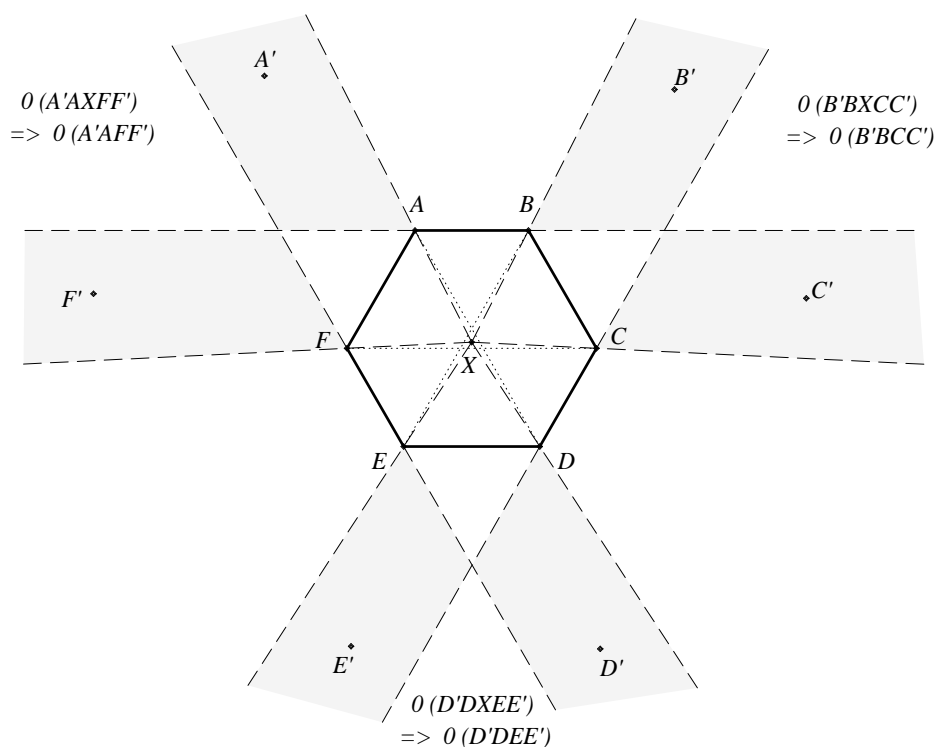
На рисунке темным цветом закрашены 5-сектора

$$(FEDXA), (BXEDC), (CXFED), \\ (DXAFE), (DCBXE), (FXCDE),$$

в которых вершин восьмиугольника, конечно, быть не может. Кроме того, на этом рисунке явно показано, какие три вершины отделяет от шестиугольника каждая из прямых, содержащих его стороны.

Заметим, наконец, что, выбрав в предложениях 3 и 3' часть, содержащую сторону AB , мы никоим образом не ограничили общности; полностью аналогичные утверждения верны в остальных пяти случаях.

Явный контрпример изображен на рис. 56.

Рис. 54. Разбор случая, когда X лежит в центральной части

5.4. Конфигурации вида $(8, 5, 1)$

Как обычно, в данной конфигурации вида $(8, 5, 1)$ рассмотрим конструкцию, состоящую из пятиугольника $ABCDE$ и точки X внутри него. Проведем все диагонали в пятиугольнике. Они разбивают его на части, причем одна из этих частей не имеет вершин пятиугольника на границе. Эту часть будем далее называть центральной. Покажем, что если точка X расположена не в центральной части, то выпуклые и пустые шестиугольники в конфигурации есть. Действительно, если предположить, что точка X находится не в центральной части, то существует меньший пятиугольник (на рисунке 57 это $BCDEX$). Исходя из этого наблюдения, можно построить стандартное разбиение плоскости на сектора (см. рис. 57) и воспользоваться логикой из пункта 4.3.2.

Теперь допустим, что X лежит в центральной части. Тогда справедливо

Предложение 4. Если в данной конфигурации вида $(8, 5, 1)$ выпуклых и пустых шестиугольников нет, то вершины восьмиугольника без ограничения общности обязаны располагаться так, как это показано на рисунке 58.

Фактически в предложении 4 утверждается, что при условии отсутствия выпуклого и пустого шестиугольника в конфигурации ровно по одной вершине восьмиугольника $LMNOPQRS$ лежит в каждой из областей

$$\mathcal{Q}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4 \cup \mathcal{P}_5, \mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8.$$

В остальных областях, явно указанных на рисунке 58, вершин восьмиугольника нет.

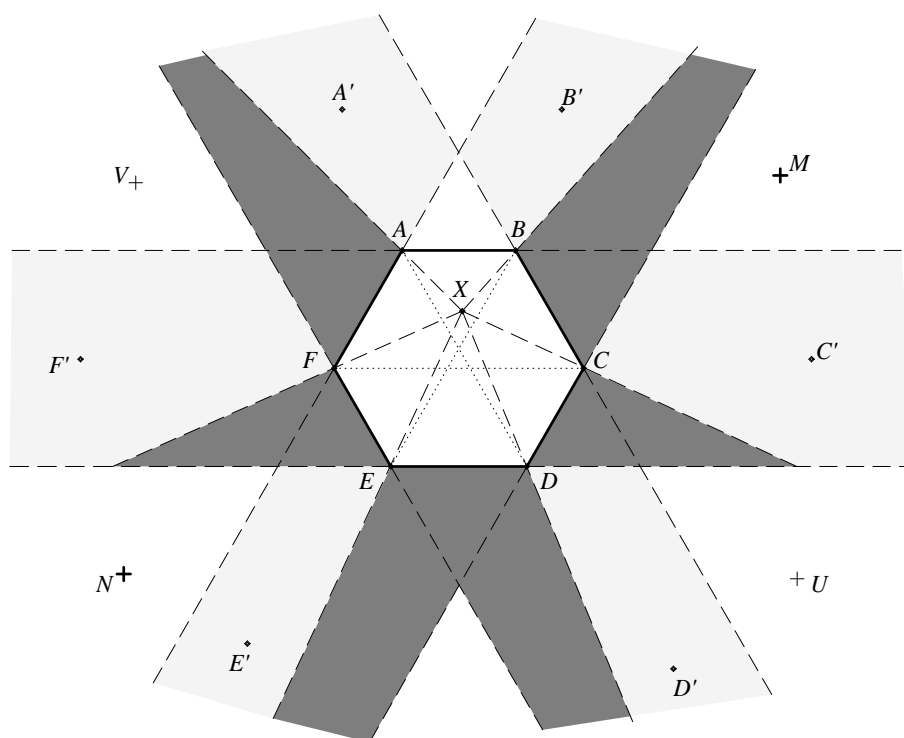
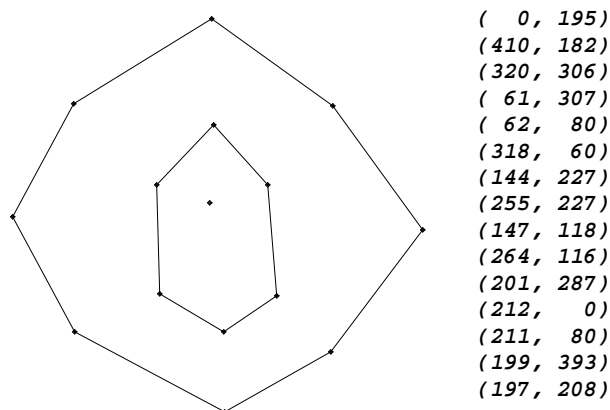


Рис. 55. Уточнение рисунка 51

Рис. 56. Контрпример для случая вида $(8, 6, 1)$

Заметим, что на самом деле $\mathcal{P}_1 = (BAXC) \setminus \mathcal{Q}_1$ и так далее.

Доказательство предложения 4. Покажем сперва, что $\bigcup_{i=0}^4 \mathcal{Q}_i$ содержит хотя бы одну вершину восьмиугольника. Предположим противное. Тогда каждая вершина восьмиугольника отделяется от пятиугольника по крайней мере двумя прямыми, проходящими через его стороны. Это означает, что существует прямая, проходя-

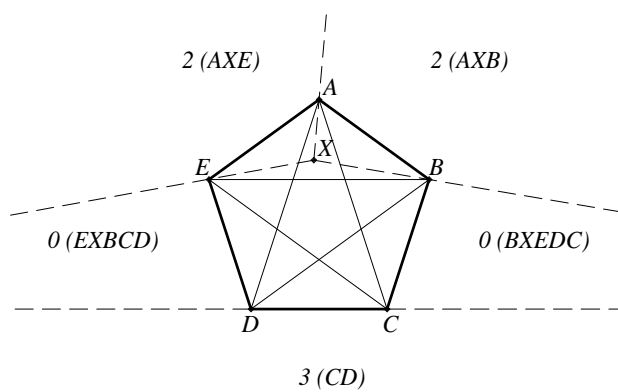
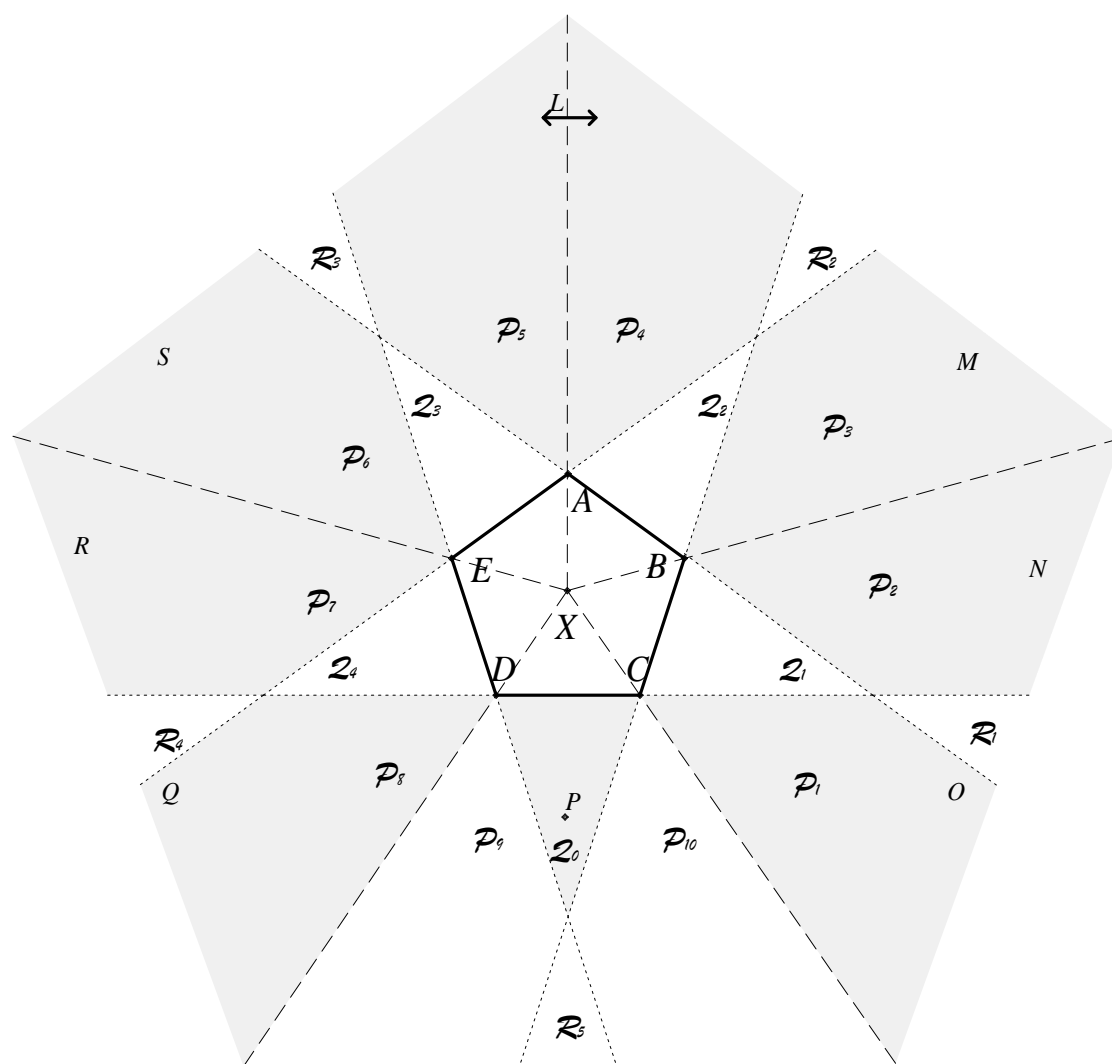
Рис. 57. Расположение точки X не в центральной части

Рис. 58. Конфигурация вида (8,5,1)

щая через сторону пятиугольника, которая отделяет от него не менее $\lceil \frac{8.2}{5} \rceil = 4$ вершин восьмиугольника. Следовательно, выпуклый и пустой шестиугольник, в этом случае, в конфигурации есть. Противоречие.

Теперь покажем, что в $\bigcup_{i=0}^4 Q_i$ есть только одна вершина восьмиугольника. Предположим противное. Возможны всего две принципиально различные ситуации: 1) найдется две вершины восьмиугольника (скажем, V и W), принадлежащие соседним областям вида Q_i ; 2) найдется две вершины восьмиугольника (опять-таки V и W), принадлежащие несмежным областям вида Q_i . В рамках первой ситуации без ограничения общности считаем, что $V \in Q_4$, $W \in Q_0$; в рамках второй ситуации полагаем $V \in Q_3$, $W \in Q_0$.

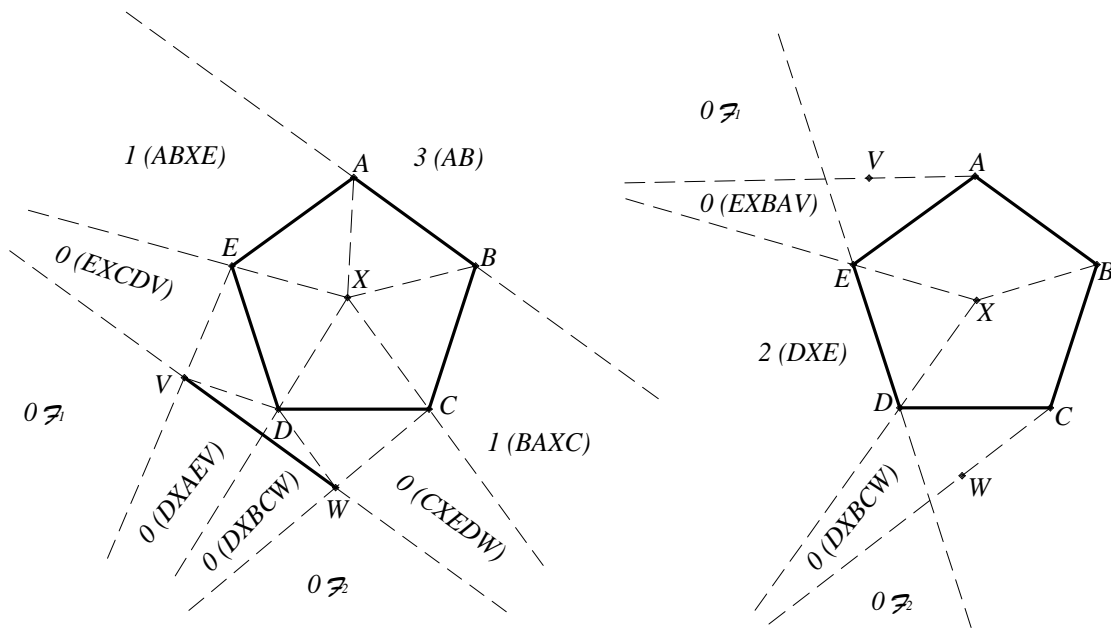


Рис. 59. Разбор случаев, когда $\bigcup_{i=0}^4 Q_i$ содержит более одной вершины

Рассмотрим первую ситуацию. На рисунке 59 слева показано покрытие плоскости вне пятиугольника некоторыми областями. В каждой из этих областей расположено не более столько же вершин восьмиугольника, сколько обозначено на рисунке. Действительно, с секторами все ясно, а в \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 вершин восьмиугольника быть не может, так как иначе возникает противоречие с его выпуклостью. Отметим, что по той же причине вершин восьмиугольника нет в четырехугольнике $EVWC$. Таким образом, в текущей ситуации мы можем расставить лишь семь из восьми вершин. Противоречие.

Рассмотрим теперь вторую ситуацию. Здесь мы заметим, что 2-сектор (DE) может быть покрыт пятью областями так, как это показано на рисунке 59 справа. Очевидно, в 5-секторах вершины восьмиугольника отсутствуют, в 3-секторе их не более двух, а в областях \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 их нет ввиду выпуклости восьмиугольника. Получается, что прямая DE отделяет от пятиугольника не более двух вершин восьмиугольника.

Противоречие с утверждением 1.

Далее, без ограничения общности единственная вершина P восьмиугольника, находящаяся в $\bigcup_{i=0}^4 Q_i$, расположена в Q_0 . Отметим, что, вообще говоря, область Q_0 (равно как и прочие Q_i) представляет собой 5-сектор, который обычно мы интерпретировали как запрещенную зону пятиугольника. Никакого противоречия, однако, здесь нет, поскольку в данном случае пятиугольник $ABCDE$ не является пустым, в силу чего получившийся шестиугольник $ABCPDE$ является выпуклым, но не пустым.

Вершины L, M, N, O, Q, R, S восьмиугольника расположены вне $\bigcup_{i=0}^4 Q_i$. Значит, каждая из них отделяется от пятиугольника по крайней мере двумя прямыми, проходящими через его стороны. С другой стороны, каждая прямая, проходящая через сторону пятиугольника, отделяет от него ровно три вершины восьмиугольника (утверждение 1, пункт (а)). В сумме, с учетом кратностей, получается $5 \cdot 3 = 15$ "вершин". Предположим, существует по крайней мере одна вершина, которая отделена от пятиугольника тремя или более прямыми (то есть вершина, принадлежащая одной из областей R_i). Тогда та же сумма оценивается снизу величиной $1 + 2 \cdot 6 + 3 = 16$ (здесь 1 – кратность вершины P , 3 – оценка кратности той вершины, существование которой мы предположили, 2 – оценка кратности любой из оставшихся вершин). Противоречие. Стало быть, в областях R_1, \dots, R_5 вершин восьмиугольника нет.

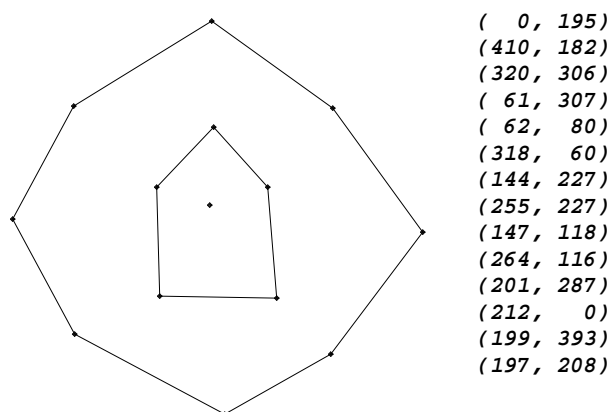
Убедимся в том, что в области $P_9 \cup R_5 \cup P_{10}$ вершины восьмиугольника также отсутствуют. В самом деле, в запрещенных зонах $(PCBXD)$ и $(PDEXC)$ эти вершины находиться не могут, а попадание их в область $(P_9 \cup R_5 \cup P_{10}) \setminus ((PCBXD) \cup (PDEXC))$ противоречит выпуклости восьмиугольника.

Поскольку, как мы уже говорили перед началом доказательства, каждая из областей P_1, \dots, P_8 является частью некоторого 4-сектора, ясно, что она может содержать не более одной вершины восьмиугольника.

Рассмотрим прямую BC . В силу утверждения 1 она отделяет от пятиугольника ровно три вершины восьмиугольника. Значит, в каждой из областей P_1, P_2, P_3 находится ровно одна вершина восьмиугольника. Без ограничения общности, упомянутые вершины суть O, N, M (ср. рис. 58). В точности такое же рассуждение показывает, что по одной вершине восьмиугольника расположено в областях P_6, P_7, P_8 : эти вершины суть S, R, Q (ср. рис. 58). В результате семь вершин восьмиугольника однозначно локализованы. Последнюю вершину, ввиду всех сделанных наблюдений, мы обязаны поставить либо в P_4 , либо в P_5 . Именно это и утверждалось. Предложение доказано.

Слегка уточним предложение 4. Можно заметить, что вершины восьмиугольника P и L обязательно лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AX . Действительно, либо есть запрещенная зона $AXPCB$ и тогда $L \in P_5$, либо есть запрещенная зона $AXPDE$ и тогда $L \in P_4$.

На рисунке 60 приведен пример конфигурации, удовлетворяющей условиям предложения 4 и не содержащей выпуклых и пустых шестиугольников.

Рис. 60. Контрпример для случая вида $(8, 5, 1)$

Список литературы

- [1] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970.
- [2] P. Erdős, G. Szekeres, “A combinatorial problem in geometry”, *Compositio Math.*, **2** (1935), 463–470.
- [3] P. Erdős, G. Szekeres, “On some extremum problems in elementary geometry”, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, **3–4** (1961), 53–62.
- [4] P. Erdős, “Some more problems in elementary geometry”, *Austral. Math. Soc. Gaz.*, **5** (1978), 52–54.
- [5] W. Morris, V. Soltan, “The Erdős – Szekeres problem on points in convex position”, *Bulletin (new series) of the Amer. Math. Soc.*, **37**:4 (2000), 437–458.
- [6] F. P. Ramsey, “On a problem of formal logic”, *Proc. London Math. Soc. Ser.*, **30** (1930), 264–286.
- [7] Graham R.L., Rothschild B.L., Spencer J.H., *Ramsey theory*, eds. John Wiley and Sons. NY, 1990.
- [8] G. Szekeres, L. Peters, “Computer solution to the 17-point Erdős–Szekeres problem”, *ANZIAM J.*, **48** (2006), 151–164.
- [9] F. Chung, R. Graham, “Forced convex n -gons in the plane”, *Discrete Comput. Geom.*, **19** (1998), 367–371.
- [10] D. Kleitman, L. Pachter, “Finding convex sets among points in the plane”, *Discrete Comput. Geom.*, **19** (1998), 405–410.
- [11] “Note on the Erdős – Szekeres theorem”, *Discrete Comput. Geom.*, **19** (1998), 457–459.
- [12] G. Tóth, P. Valtr, “The Erdős – Szekeres theorem: upper bounds and related results”, *Combinatorial and Computational geometry*, **52** (2005), 557–568.
- [13] H. Harborth, “Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen”, *Elem. Math.*, **33** (1978), 116–118.
- [14] J. D. Horton, “Sets with no empty 7-gons”, *Canad. Math. Bull.*, **26** (1983), 482–484.
- [15] T. Gerken, “On empty convex hexagons in planar point set”, *Discrete Comput. Geom.*, **39** (2008), 239–272.
- [16] M. Overmars, B. Scholten, I. Vincent, “Sets without empty convex 6-gons”, *Bull. European Assoc. Theor. Comput. Sci.*, **37** (1989), 160–168.

- [17] M. Overmars, “Finding sets of points without empty convex 6-gons”, *Discrete Comput. Geom.*, **29** (2003), 153–158.

On Erdős – Szekeres problem for empty hexagons in the plane

Koshelev V.A.

Keywords: general position, convex polygons, Ramsey theory

In this work we consider a classical problem of Combinatorial Geometry of P. Erdős and G. Szekeres. The problem was posed in the 1930's. We investigate the minimum number $h(n)$ such, that for each $h(n)$ -point set A in general position in the plane there exists an n -point subset B such, that the convex hull C of B is a convex empty n -gon, that is $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$. Only recently T. Gerken has shown that $h(6) < \infty$. He has established the inequality $h(6) \leq 1717$. The main result of the paper is the following inequality $h(6) \leq 463$.

Сведения об авторе:

Кошелев Виталий Анатольевич,
Математический Институт имени В.А. Стеклова РАН,
аспирант