Adrian Herda, 268449

Algorytmy Optymalizacji Dyskretnej

Lista 2

Zadanie 1:

W celu rozwiązania tego zadania, należy zdefiniować zmienną decyzyjną var[i, j], która oznacza ilość paliwa, której dostawca j dostarcza na lotnisko i. Następnie należy zdefiniować funkcję celu, która minimalizuje koszt całkowity dostarczonego paliwa, co można zapisać w następujący sposób:

Minimize: $\sum_{i\in\{1,2,3,4\},j\in\{1,2,3\}} ceny_{ij} * var_{ij}$

Należy również dodać ograniczenia, które zapewniają, że każde lotnisko otrzyma odpowiednią ilość paliwa:

$$\sum_{j\in\{1,2,3\}} var_{1j} \geq 110\,000$$

$$\sum_{j\in\{1,2,3\}} var_{2j} \geq 220\,000$$

$$\sum_{j\in\{1,2,3\}} var_{3j} \geq 330\,000$$

$$\sum_{j\in\{1,2,3\}} var_{4j} \geq 440\,000$$

Ostatecznie, dodajemy ograniczenia, które zapewniają, że ilość paliwa dostarczana przez każdego dostawcę nie przekracza jego dostępnej ilości:

$$\sum_{i\in\{1,2,3,4\}} var_{i1} \leq 275\,000$$

$$\sum_{i\in\{1,2,3,4\}} var_{i2} \leq 550\,000$$

$$\sum_{i\in\{1,2,3,4\}} var_{i3} \leq 660\,000$$

Po rozwiązaniu tego modelu, otrzymujemy minimalny koszt dostaw równy 8 525 000 dolarów. Wszystkie firmy dostarczają paliwo, a możliwość dostarczenia przez firmy nie została wyczerpana.

Macierz dostarczonych litrów paliwa:

$$\begin{bmatrix} 0 & 110000 & 0 \\ 165000 & 55000 & 0 \\ 0 & 0 & 330000 \\ 110000 & 0 & 330000 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2:

Zadanie to polegało na znalezieniu najtańszego i najszybszego sposobu dotarcia z jednego miasta do drugiego, uwzględniając koszty i czasy przejazdów między miastami. Zadanie to również zostało rozwiązane za pomocą programowania całkowitoliczbowego. Na początek należy zdefiniować zmienną decyzyjną var[i, j] dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$, gdzie n to liczba miast, która będzie przyjmowała wartości 0 oraz 1 i będzie przedstawiała drogę jaką przebyto. Jedynka na miejscu var_{ij} będzie oznaczała że z miasta i podróżowano do miasta j.

Funkcja celu:

Minimize: $\sum_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \left(var_{ij} * cost_{ij} \right)$

Należy dodać ograniczanie żeby cena podróży równa 0 oznaczało niemożliwość podróży:

$$cost_{ij} = 0 \rightarrow var_{ij}$$

Następnie upewniamy się, że ścieżka prowadzi i oraz z miast tylko raz

$$\bigwedge_{i \in \{1,\dots,n\}} \Big(\sum_{j \in \{1,\dots,n\}} (var_{ij}) \le 1 \Big)$$

$$\bigwedge_{j \in \{1,\dots,n\}} \Big(\sum_{i \in \{1,\dots,n\}} (var_{ij}) \le 1 \Big)$$

Potem należy się upewnić że ścieżka prowadzi prawidło i bez „skoków” upewniając się że bilans każdego miasta jest poprawny:

$$bilance_{start} = 1 \qquad bilance_{koniec} = -1$$

Dla pozostałych miast $bilance_i = 0$

$$\bigwedge_{i \in \{1,\dots,n\}} \Big(\sum_{j \in \{1,\dots,n\}} \left(var_{ij} \right) - \sum_{j \in \{1,\dots,n\}} \left(var_{ji} \right) = bilance_i \Big)$$

Ostatecznie chcemy aby ścieżka nie była czasowo dłuższa niż określony wcześniej czas:

$$\sum_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \left(var_{ij} * time_{ij} \right) \le czas\_maks$$

Zadanie 3:

Zadanie to polegało na podziale policyjnych radiowozów na dzielnice i zmiany tak aby wykorzystać jak najmniej radiowozów jednocześnie przestrzegając zasad co do minimalnych i maksymalnych liczb radiowozów na każdej zmianie w każdej dzielnicy.

Należy stworzyć nową zmienną decyzyjną var[i, j] dla $i, j \in \{1, 2, 3\}$ oznaczającą ilość radiowozów przydzielonych do każdej dzielnicy i zmiany.

Funkcja celu musi minimalizować tą ilość:

Minimize: $\sum_{i,j \in \{1,2,3\}} \left(var_{ij} \right)$

Ograniczenia dla poszczególnych dzielnic i zmian:

$$\min_{auto} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad \max_{auto} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 10 \\ 8 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\bigwedge_{i,j\in\{1,2,3\}} (\min_{auto}{}_{ij} \le var_{ij} \le \max_{auto}{}_{ij})$$

Prawo też daje ograniczenia na minimalną liczbę auto w dzielnicach oraz zmianach

$$\min_{shift} = [10, 20, 18] \qquad \min_{p} = [10, 14, 13]$$

$$\bigwedge_{i\in\{1,2,3\}} (\sum_{j\in\{1,2,3\}} (var_{ij}) \ge \min_{p}{}_i)$$

$$\bigwedge_{j\in\{1,2,3\}} (\sum_{i\in\{1,2,3\}} (var_{ij}) \ge \min_{shift}{}_j)$$

Użyte radiowozy: 48

	$zmiana\ 1$	$zmiana\ 2$	$zmiana\ 3$
$p1$	2	7	5
$p2$	3	6	5
$p3$	5	7	8

Zadanie 4:

W tym zadaniu mamy zoptymalizować ułożenie i liczbę kamer które obesrwują kontenery. Każdy kontener musi być obserwowany przez co najmniej jedną kamerę oraz kamery i kontenery nie mogą być w tym samym polu. W tym celu tworzymy zmienną decyzyjną var[m, n], która będzie reprezentować rozstawienie kamer. Var_{mn} będzie przyjmowało wartość 1 jeśli na polu jest kamera oraz 0 jeśli na polu nie ma kamera. Każda kamera ogląda pola patrzy na k pól w każdym kierunku

Funkcja celu ma zminimalizować ilość kamer:

Minimize: $\sum_{i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,n\}} (var_{ij})$

Najpierw ograniczamy żeby na każdym polu była kamera albo kontener ale nigdy oba:

$$\bigwedge_{i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,n\}} (var_{ij} + conteners_{ij} \le 1)$$

Następnie sprawdzamy czy dla każdego kontenera istnieje kamera oglądająca go

$$\bigwedge_{i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,n\}} (conteners_{ij} = 1$$
$$\Rightarrow \left(\sum_{x\in\{\max(1,i-k),\dots,\min(m,i+k)\}} (var_{xj}) + \sum_{x\in\{\max(1,j-k),\dots,\min(n,j+k)\}} (var_{ix}) \right) \ge 1)$$

Mój egzemplarz problemu:

$$m = 8, n = 8$$

$$conteners = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$Dla\ k = 2$$

$$var = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad liczba\ kamer = 7$$

$$Dla\ k \geq 3$$

$$var = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad liczba\ kamer = 6$$

Zadanie 5:

Zadanie to ma zmaksymalizować zysk z pracy maszyn produkujących produkty. W Zadaniu pod uwagę trzeba wziąć cenę tworzenia produktów, koszt pracy maszyn, maksymalne tygodniowe wykorzystanie maszyn, cenę produktu, tygodniowy popyt produktu oraz czas tworzenia każdego produktu przez każdą z maszyn. W celu rozwiązania zadania tworzymy zmienną decyzyjną var[i, j] dla $i \in \{1, 2,3,4\}$ oraz $j \in \{1, 2, 3\}$ gdzie *i* oznacza numer produktu a *j* numer maszyny, w której będą przedstawione czasy, w minutach, produkcji, z podziałem na produkty i maszyny.

Dane:

$$price\_per\_kilo = [9 \quad 7 \quad 6 \quad 5] \qquad cost\_per\_kilo = [4 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$cost\_per\_hour \ = [2 \quad 2 \quad 4]$$

$$\max\_demand = [400 \quad 100 \quad 150 \quad 500]$$

$$time\_max = 60$$

$$minutes\_per\_kilo = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ppk oraz cpk można skrócić do jednej danej:

$$income\_per\_kilo = ppk - cpk = [5 \quad 6 \quad 5 \quad 4]$$

Funkcja celu:

Maximize: $\sum_{i,j} \left(ipk_i * \left(\frac{var_{ij}}{mpk_{ij}} \right) \right) - \sum_{i,j} (\left(\frac{var_{ij}}{60} \right) * cph_j)$

Pisząc ograniczenia do tego modelu najłatwiej zacząć od ograniczenia czasu pracy maszyn:

$$\bigwedge_{j \in \{1,2,3\}} \left(\sum_{i \in \{1,2,3,4\}} (var_{ij}) \leq time\_max * 60 \right)$$

Następnie trzeba ograniczyć maszyny aby nie tworzyły produktów ponad popyt:

$$\bigwedge_{i\in\{1,2,3,4\}}\left(\sum_{j\in\{1,2,3\}}\left(\frac{var_{ij}}{mpk_{ij}}\right)\leq \mathrm{max}\_demand_i\right)$$

Rozwiązanie:

$$var = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \\ 600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{bmatrix}$$

Tygodniowe produkcje w kg:

Produkt 1: 400kg

Produkt 2: 100kg

Produkt 3: 150kg

Produkt 4: 500kg

Zysk ze sprzedaży tygodniowej produkcji: $5228