Algorytmiczna Teoria Gier
Zadanie domowe 1

14 listopada 2025 r.

Adrian Herda (268449)
Informatyka Algorytmiczna
Politechnika Wrocławska

1. Treść zadania

Rozważmy zbiór gier dwuosobowych skończonych, gdzie $|S_1| = n$, a $|S_2| = m$ i oznaczamy przez $\mathcal{G}_{n,m}$. Niech $\equiv_{n,m}$ będzie oznaczeniem relacji równoważności dla równoważności gier na $\mathcal{G}_{n,m}$. Ile jest takich nierównoważnych gier, tj. ile wynosi $|\mathcal{G}_{n,m}/\equiv_{n,m}|$?

2. Rozwiązanie

$\boldsymbol{C = S_1 \times S_2}$ - zbiór profili strategii, $|C| = |S_1| \cdot |S_2| = nm$

2.1. Ilość różnych gier

Każdy z graczy $p \in P$ ma swój porządek liniowy nad C, dla dwóch graczy będzie to para porządków przypisujących każdemu profilowi miejsce $i \in [nm]$. Każdy taki porządek to inna gra, więc liczba porządków dla jednego gracza to $|C|!$, więc liczbę oznaczonych (z etykietami strategii) gier można wyliczyć ze wzoru:

$$|\mathcal{G}_{n,m}| = (|C|!)^2 = ((nm)!)^2 \tag{1}$$

2.2. Ilość nierównoważnych gier

2.2.1. Dla $n \neq m$

$G = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ to zbiór permutacji, który działa na zbiorze profilów strategii, $|G| = |\mathcal{S}_1| \cdot |\mathcal{S}_2| = n! \cdot m!$. Z tego wynika że dwie gry są równoważne jeśli są w tej samej orbicie działania na C. Z tego wynika że liczba orbit działania jest równa liczbie gier nierównoważnych.

Według Burnside'a[1] liczba orbit jest równa

$$|\mathcal{G}_{n,m}/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathcal{G}^g_{n,m}| \tag{2}$$

gdzie

$$\mathcal{G}^g_{n,m} = \left\{ x \in \mathcal{G}_{n,m} : g \cdot x = x \right\} \tag{3}$$

to zbiór różnych gier które pozostają niezmienne po zastosowaniu permutacji.

Każda gra w orbicie musi być różna więc jeśli $g \in G^g \neq e$, gdzie e to element neutralny to $|\mathcal{G}^g_{n,m}| = 0$. Z tego z kolei wynika że stabilizator każdej gry jest trywialny więc:

$$
\begin{aligned}
\sum_{g\in G}|\mathcal{G}^g_{n,m}| &= |\mathcal{G}^e_{n,m}| + \sum_{g\in G\setminus\{e\}} 0 \\
&= |\mathcal{G}_{n,m}|
\end{aligned}
\tag{4}
$$

i to w połączeniu z równaniem 1 daje:

$$
|\mathcal{G}_{n,m}/\equiv_{n,m}| = |\mathcal{G}_{n,m}/G| = \frac{|\mathcal{G}_{n,m}|}{|G|} = \frac{((nm)!)^2}{n!m!} \tag{5}
$$

2.2.2. Dla $n = m$

Podobnie jak w sekcji 2.2.1 definiujemy $G' = \langle G, \tau\rangle$ gdzie τ oznacza zamiane graczy $\tau \cdot (r_1, r_2) = (r_2, r_1)$

Szukamy

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{G}_{n,n}/G'| &= \frac{1}{|G'|}\sum_{g'\in G'}|\mathcal{G}^{g'}_{n,m}| \\
&= \frac{1}{|G'|}\left(\sum_{g\in G}|\mathcal{G}^g_{n,n}| + \sum_{g\in G}|\mathcal{G}^{\tau g}_{n,n}|\right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Wartość $|G'|$ można obliczyć poodbnie jak w sekcji poprzedniej:

$$
|G'| = |\mathcal{S}_1|\cdot|\mathcal{S}_2| + |\mathcal{S}_2|\cdot|\mathcal{S}_1| = n!\cdot n! + n!\cdot n! = 2(n!)^2 \tag{7}
$$

Wartość pierwszej sumy w równaniu 6 możemy wziąć z równania 4:

$$
\sum_{g\in G}|\mathcal{G}^g_{n,n}| = |\mathcal{G}_{n,n}| = \left((n^2)!\right)^2 \tag{8}
$$

Teraz obliczymy kiedy element τg ma punkty stałe. Żeby do tego doszło musi zajsć:

$$
(\tau g)\cdot(r_1, r_2) = (r_1, r_2) \tag{9}
$$

rozpisując:

$$
\begin{aligned}
(\tau g)\cdot(r_1, r_2) &= \tau(g\cdot(r_1, r_2)) \\
&= \tau\big(r_1\circ g^{-1}, r_2\circ g^{-1}\big) \\
(r_1, r_2) &= \big(r_2\circ g^{-1}, r_1\circ g^{-1}\big)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

To daje układ równań którego rozwiązaniem jest:

$$
r_1 = r_1\circ g^{-2} \tag{11}
$$

a to jest spełnione wtedy i tylko wtedy gdy $g^2 = e$ czyli $g = (\alpha, \beta)$ jest inwolucją (funckja, która złożona sama ze sobą daje jednosć). Aby policzyć liczbę inwolucji na zbiorze S_n wykorzystywany jest wzór:

$$
a_n = \sum_{m=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{n!}{2^m m!(n-2m)!} \tag{12}
$$

Takich inwolucji dla gry dwuosobowej jest a_n^2 i dla każdej możemy wybrać r_1 na $(n^2)!$ sposobów co wybierze jednoznaczne $r_2 = r_1\circ g^{-1}$. Znając te wyniki można obliczyć drugą sumę równania 6:

$$\sum_{g \in G} |\mathcal{G}_{n,n}^{\tau g}| = (n^2)! a_n^2 \tag{13}$$

Podkładając wynik tego równania do wzoru w równaniu 6 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_{n,n}/G'| &= \frac{1}{|G'|} \left(|\mathcal{G}_{n,n}^g| + \sum_{g \in G} |\mathcal{G}_{n,n}^{\tau g}| \right) \\ &= \frac{1}{2(n!)^2} \Big(\big((n^2)!\big)^2 + a_n^2 (n^2)! \Big) \\ |\mathcal{G}_{n,n}/\equiv_{n,n}| &= \frac{(n^2)!}{2(n!)^2} ((n^2)! + a_n^2) \end{aligned} \tag{14}$$

2.3. Wyniki

$$|\mathcal{G}_{n,n}/\equiv_{n,n}| = \begin{cases} \frac{((nm)!)^2}{n!m!}, & \text{dla } m \neq n \\ \frac{(n^2)!}{2(n!)^2} ((n^2)! + a_n^2), & \text{dla } m = n \end{cases} \tag{15}$$

Bibliografia

[1] W. Burnside, „Theory of groups of finite order”, *Messenger of Mathematics*, t. 23, s. 112, 1909.