Algorytmiczna Teoria Gier
Zadanie domowe 3

2 grudnia 2025 r.

Adrian Herda (268449)
Informatyka Algorytmiczna
Politechnika Wrocławska

Spis treści

1. Treść zadania

Wsk. Wszystkie punkty tego zadania się łączą.

1.1. a)

Pokaż, że skończony produkt zbiorów zwartych w przestrzeniach metrycznych jest zwarty (w topologii produktowej).

1.2. b)

Pokaż, że skończony produkt zbiorów wypukłych w przestrzeniach liniowych jest wypukły (w sumie prostej przestrzeni liniowych).

1.3. c)

Pokaż, że domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty.

1.4. d)

Niech (S, d_S) i (I, d_I) będą skończonymi przestrzeniami z topologiami dyskretnymi. Jakie funkcje $f : S \to I$ są ciągłe (funkcja jest ciągła, gdy przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest otwarty).

1.5. e)

Gra w Natarczywego Adoratora. Kobieta lubi spędzać czas na Spacerze w parku albo w Galerii. Natarczywy Adorator o tym wie i próbuje ją spotkać w jednym z tych dwóch miejsc, czego kobieta pragnie uniknąć. Wypłaty Kobiety, dla tej gry o sumie zerowej, podane są poniżej:

s_K \ s_A	S	G	
S	-1	1	p
G	1	-1	$1-p$
	q	$1-q$	

Podaj wszystkie równowagi Nasha dla tej gry.

1.6. f)

Czy funkcje wypłat u_i w grze w NA są wklęsłe ze względu na $s_i \in S_i$ (przy ustalonych s_{-i} in S_{-i})?

1.7. g)

Dla wszystkich profili strategii s, określamy $F(s)$ jako profil strategii, w którym $F_i(s)$ jest zbiorem najlepszych odpowiedzi gracza i na s_{-i}. Czy F ma własność wykresu domkniętego w grze w NA?

1.8. h)

Dlaczego gra w *NA* nie ma czystych równowag Nasha? Uzasadnij na bazie dowodu Twierdzenia Nasha (lub innego pokrewnego). Uwzględnij założenia tych twierdzeń.

2. Rzowiązanie

2.1. a) Produkt zbiorów zwartych

Proof. Niech (X, d_X) i (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi, a $K_X \subseteq X$ i $K_Y \subseteq Y$ zbiorami zwartymi. Rozważmy produkt $K = K_X \times K_Y$ z metryką produktową (np. maksimum). W przestrzeniach metrycznych zwartość jest równoważna zwartości ciągowej. Weźmy dowolny ciąg $z_n = (x_n, y_n)$ w K.

1. Ponieważ $x_n \in K_X$, a K_X jest zwarty, istnieje podciąg $x_{\{n_k\}}$ zbieżny do pewnego $x \in K_X$.
2. Rozważmy odpowiadający podciąg $y_{\{n_k\}}$ w K_Y. Ponieważ K_Y jest zwarty, z ciągu $y_{\{n_k\}}$ można wybrać dalszy podciąg $y_{\{n_{\{k_l\}}\}}$ zbieżny do pewnego $y \in K_Y$.
3. Wtedy podciąg $z_{\{n_{\{k_l\}}\}} = \left(x_{\{n_{\{k_l\}}\}}, y_{\{n_{\{k_l\}}\}}\right)$ jest zbieżny do punktu $(x, y) \in K_X \times K_Y$.

Zatem każdy ciąg w K posiada podciąg zbieżny, co oznacza, że produkt jest zwarty. (Indukcyjnie rozszerza się to na dowolny skończony produkt).

■

2.2. b) Produkt zbiorów wypukłych

Proof. Niech C_1 i C_2 będą zbiorami wypukłymi w przestrzeniach liniowych odpowiednio V_1 i V_2. Niech $x, y \in C_1 \times C_2$, gdzie $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$. Dla dowolnego $\lambda \in [0, 1]$ musimy pokazać, że $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C_1 \times C_2$. Działania w przestrzeni produktowej wykonujemy „po współrzędnych":

$$\lambda(x_1, x_2) + (1 - \lambda)(y_1, y_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2) \tag{2.1}$$

Ponieważ C_1 jest wypukły, $\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 \in C_1$.
Ponieważ C_2 jest wypukły, $\lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2 \in C_2$.
Zatem cały punkt należy do iloczynu kartezjańskiego $C_1 \times C_2$. (Ten dowód ponownie można rozszerzyć indukcyjnie na dowolny skończony produkt).

■

2.3. c) Domknięty podzbiór zbioru zwartego

Proof. Niech K będzie zbiorem zwartym, a $F \subseteq K$ zbiorem domkniętym. Weźmy dowolne pokrycie otwarte $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ zbioru F. Zbiór $F^c = K \setminus F$ jest zbiorem otwartym (jako dopełnienie zbioru domkniętego). Rodzina $\mathcal{U} \cup \{F^c\}$ stanowi pokrycie otwarte całego zbioru K. Ponieważ K jest zwarty, istnieje skończone pokrycie tego zbioru, powiedzmy $\left\{U_{i_1}, ..., U_{i_n}, F^c\right\}$ (ewentualnie bez F^c, jeśli nie jest potrzebne). Odrzucając zbiór F^c (który nie zawiera żadnych punktów z F), otrzymujemy skończoną rodzinę $\left\{U_{i_1}, ..., U_{i_n}\right\}$, która pokrywa F. Zatem F jest zwarty.

■

2.4. d) Funkcje ciągłe między przestrzeniami dyskretnymi

W topologii dyskretnej każdy podzbiór jest zbiorem otwartym. Definicja ciągłości mówi, że funkcja f jest ciągła, jeśli przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego w przeciwdziedzinie jest otwarty w dziedzinie. Niech $U \subseteq I$ będzie dowolnym zbiorem (jest on otwarty w I). Wtedy $f^{-1}(U)$ jest pewnym podzbiorem S. Ponieważ w S (topologia dyskretna) każdy zbiór jest otwarty, warunek ciągłości jest zawsze spełniony.

Odpowiedź: Wszystkie funkcje $f : S \to I$ są ciągłe.

2.5. e) Równowagi Nasha w grze natarczywego adoratora

2.5.1. Macierz wypłat

Gra o sumie zerowej. Wiersze: Kobieta (K), Kolumny: Adorator (A). Kobieta unika spotkania ($S \neq G$), Adorator dąży do spotkania ($S = S$ lub $G = G$).

s_K \ s_A	S	G
S	-1 \ 1	1 \ -1
G	1 \ -1	-1 \ 1

Tabela 1: Macierz wypłat w grze Natarczywego Adoratora

2.5.2. Analiza

Gra nie posiada równowag w strategiach czystych, cykl preferencji:

$$(S_K, S_A) \underset{K}{\leq} (G_K, S_A) \underset{A}{\leq} (G_K, G_A) \underset{K}{\leq} (S_K, G_A) \underset{A}{\leq} (S_K, S_A) \tag{2.2}$$

Szukamy równowagi w strategiach mieszanych.

p - prawdopodobieństwo, że K wybierze S.
q - prawdopodobieństwo, że A wybierze S.

- **Dla Kobiety (chce zmaksymalizować u_K):**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u_K(S)] &= -1 \cdot q + 1 \cdot (1-q) = 1 - 2q \\ \mathbb{E}[u_K(G)] &= 1 \cdot q + (-1) \cdot (1-q) = 2q - 1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

W równowadze wypłaty muszą być równe:

$$\begin{aligned} 1 - 2q &= 2q - 1 \\ 2 &= 4q \\ q &= \frac{1}{2} \wedge 1 - q = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Wartość oczekiwana dla Kobiety w równowadze to

$$\mathbb{E}[u_K] = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \tag{2.5}$$

.

- **Dla Adoratora (chce zmaksymalizować u_A):**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_A(S)] &= 1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = 2p - 1 \\ \mathbb{E}[u_A(G)] &= -1 \cdot p + 1 \cdot (1-p) = 1 - 2p\end{aligned} \tag{2.6}$$

W równowadze:

$$\begin{aligned}2p - 1 &= 1 - 2p \\ 4p &= 2 \\ p &= \frac{1}{2} \wedge 1 - p = \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Podobnie jak dla Kobiety, wartość oczekiwana dla Adoratora w równowadze to

$$\mathbb{E}[u_A] = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0 \tag{2.8}$$

Odpowiedź: Jedyna równowaga Nasha to profil strategii mieszanych $\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.

2.6. f) Wklęsłość funkcji wypłat dla ustalonej strategii przeciwnika

W rozszerzeniu mieszanym gry, funkcja wypłaty gracza i, oznaczana jako $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ jest definiowana wzorem:

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_i(s_i) \cdot \sigma_{-i}(s_{-i}) \cdot u_i(s_i, s_{-i}) \tag{2.9}$$

Strategia przeciwnika jest ustalona z treści zadanie więc

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) C(s_i) \tag{2.10}$$

gdzie

$$C(s_i) = \sigma_{-i}(s_{-i}) \cdot u_i(s_i, s_{-i}) \tag{2.11}$$

A więc jest to funkcja liniowa względem zmiennych $\sigma_i(s_i)$. Każda funkcja liniowa jest jednocześnie wklęsła i wypukła (spełnia nierówność Jensena jako równość). Zatem warunek wklęsłości jest spełniony.

Odpowiedź: Tak.

2.7. g) Własność wykresu domkniętego

Definicja: dla każdego profilu strategii s definiujemy korespondencję

$$F(s) = (F_1(s), ..., F_n(s)) \tag{2.12}$$

gdzie $F_i(s)$ jest zbiorem najlepszych odpowiedzi gracza i na strategie pozostałych s_{-i} przy ustalonej s_i (w treści zadania jest drobna nieścisłość zapisu, ale interpretujemy to klasycznie: $F_i(s_{-i})$ to zbiór najlepszych odpowiedzi na s_{-i}).

Pytanie: czy F ma wykres domknięty? (Mówiąc formalnie: czy zbiór $\{(s, t) : t \in F(s)\}$ jest domknięty.)

Theorem 2.1. Tak, przy standardowych założeniach (przestrzenie strategii są zwarte i wypukłe, funkcje wypłat są ciągłe), wykres korespondencji najlepszych odpowiedzi jest domknięty.

Proof. Niech (s^k, t^k) być ciągiem punktów z wykresu, tzn. $t^k \in F(s^k)$ dla każdego k. Załóżmy, że $(s^k, t^k) \to (s^*, t^*)$. Musimy pokazać, że $t^* \in F(s^*)$, czyli że komponenty t_i^* są najlepszymi odpowiedziami na s_{-i}^*. Dla każdego gracza i i dowolnej strategii alternatywnej y_i mamy (skoro t_i^k jest najlepszą odpowiedzią na s_{-i}^k)

$$u_i\left(t_i^k, s_{\{-i\}}^k\right) \geq u_i\left(y_i, s_{\{-i\}}^k\right) \tag{2.13}$$

Ponieważ zbiory odpowiedzi są zwarte wiemy że wartości maksymalne istnieją, a dzięki wypukłości tych zbiorów i ciągłości funkcji wypłat, po przejściu do granicy otrzymujemy

$$u_i\left(t_i^*, s_{\{-i\}}^*\right) \geq u_i\left(y_i, s_{\{-i\}}^*\right) \tag{2.14}$$

dla każdego y_i, czyli t_i^* jest najlepszą odpowiedzią na s_{-i}^*. To kończy dowód, pokazując, że wykres jest domknięty.

■

2.8. h) Brak czystych równowag Nasha a Twierdzenie Nasha

2.8.1. Powód braku czystych równowag

Nie ma żadnych równowag Nasha w strategiach czystych, ponieważ w każdym profilu strategii jeden gracz może zmienić strategie aby zwiększyć swoją wypłatę. Zmiany i zapętlenie porządku profili strategii pokazuje Równanie (2.2).

2.8.2. Uzasadnienie poprawności

Twierdzenie Nasha [1] o istnieniu równowagi opiera się na Twierdzeniu Kakutaniego [2] (czyli równowagi), zbiór, na którym określona jest korespondencja najlepszych odpowiedzi, musi być:
1. Zwarty.
2. **Wypukły**.

Rozważając **tylko** strategie czyste:
- Przestrzeń strategii to zbiór skończony $\{S, G\} \times \{S, G\}$. Jest to zbiór dyskretny.
- Zbiór dyskretny składający się z więcej niż jednego punktu **nie jest wypukły**.

Brak wypukłości przestrzeni strategii czystych sprawia, że nie możemy zastosować twierdzenia o punkcie stałym w tej przestrzeni. Dopiero przejście do strategii mieszanych tworzy przestrzeń wypukłą (odcinek $[0, 1]$ dla każdego gracza), co, zgodnie z Sekcją 2.2, zachowuje wypukłość produktu tych zbiorów, umożliwiając znalezienie równowagi (punktu przecięcia ciągłych reakcji).

W strategiach czystych „przecięcie” krzywych reakcji może „trafić w próżnię” między punktami dyskretnymi.

Bibliografia

[1] J. F. Nash Jr, „Equilibrium points in n-person games”, *Proceedings of the national academy of sciences*, t. 36, nr 1, s. 48–49, 1950.

[2] S. Kakutani, „A generalization of Brouwer's fixed point theorem”, *Duke Mathematical Journal*, t. 8, nr 3, s. 457–459, 1941.