Algorytmika
Ćwiczenia 3

Adrian Herda

2025-04-14

$$\mu = E[X]$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$\sigma = \mathrm{Std}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(x)} = \sqrt{E[X^2] - E[X]^2}$$

1. Zadanie 12 - losowanie monetą

Rzucamy monetą dwa razy:

- $\mathrm{Pr}(\text{Orzeł}, \text{Reszka}) = p \cdot q$ – Orzeł monety normalnej
- $\mathrm{Pr}(\text{Reszka}, \text{Orzeł}) = q \cdot p$ – Reszka monety normalnej

Oba wyniki są sobie równe, jeśli będziemy ignorować wyniki (Orzeł, Orzeł) oraz (Reszka, Reszka), dostajemy monetę uczciwą.

$$\mathrm{Pr}(\text{Orzeł}) = \mathrm{Pr}(\text{Reszka}) = \frac{pq}{pq + pq} = \frac{1}{2}$$

2. Zadanie 13 - jednostajnie losowane $[0, \cdots, 6]$

1. Mamy generator liczb losowych ze zbioru $\{0, \cdots, 4\}$, niech wynik tego generatora będzie oznaczony literą X.
2. Tworzymy generator liczb losowych ze zbioru $\{1, \cdots, 24\}$

   $$Y = 5a + b$$

   gdzie $a, b \in \{0, \cdots, 4\}$ są generowane przez generator z punktu 1. Z tego wynika że:

   $$\mathrm{Pr}(Y = y) = \mathrm{Pr}(Y = 5a + b) = \mathrm{Pr}(X = a) \cdot \mathrm{Pr}(X = b) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$
3. Zbiór liczb $\{0, \cdots, 20\}$ ma $3 \cdot 7$ liczb co pozwoli nam na dopasowanie równej ilości liczb do zbioru $\{0, \cdots, 6\}$ za pomocą operacji $\bmod 7$.
4. Jeśli $Y > 20$ odrzucamy wynik i ponownie losujemy dwie liczby, powtarzamy dopóki nie wylosujemy $Y \leq 20$, w takim przypadku wylosowaną zmienną liczymy

   $$Z = Y \bmod 7$$

   i w ten sposób dostajemy liczbę ze zbioru $\{0, \cdots, 6\}$ z prawdopodobieństwem:

   $$\forall_{z \in \{0, \cdots, 6\}} \left(\mathrm{Pr}(Y \bmod 7 = z) = \frac{3}{25} \right) \Longrightarrow \mathrm{Pr}(Z = z) = \frac{1}{7}$$

3. Zadanie 14 - pole koła z Monte Carlo

3.1. Var(X)

Losujemy n punktów $(x_i, y_i) \in [0,1]^2$
Niech:

$$Z_i = \begin{cases} 1 \text{ jeśli } x_i^2 + y_i^2 \leq 1 \\ 0 \text{ w przeciwnym razie} \end{cases}$$

$$\left(\forall_{i \in [n]}\right)\left(\Pr(Z_i = 1) = \frac{\frac{\text{Area}_{\bigcirc}}{4}}{\Omega} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1 \cdot 1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow E[Z_i] = \frac{\pi}{4} \cdot 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 0 = \frac{\pi}{4}\right)$$

Mamy do czynienia z rozkładem Bernouliego z prawdopodobieństwem wynoszącym tyle co pole ćwiartki koła czyli $p = \frac{\pi}{4}$. Zatem wiemy od razu że

$$\left(\forall_{i \in [n]}\right)\left(E[Z_i] = p = \frac{\pi}{4}\right)$$

oraz że

$$\left(\forall_{i \in [n]}\right)(\text{Var}(Z_i) = p(1-p))$$

Wtedy pole:

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Wiemy że wybierane punkty są od siebie niezależne więc $\left(\forall_{i,j \in [n], i \neq j}\right)\left(\text{Cov}\left(Z_i, Z_j\right) = 0\right)$. Ze wzoru na wariancje z mnożnikiem stałym oraz ze wzoru na wariancje sumy zmiennych niezależnych:

$$\sigma_n^2 = \text{Var}(A_n) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(Z_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_n^2 = \frac{\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{n} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{4-\pi}{4}}{n} = \frac{4\pi - \pi^2}{16n}$$

3.2. Minimalne n potrzebne do dokładności 0.01 z prawdopodobieństwem 0.99

Nierówność Czebyszewa:

$$\Pr(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}$$

Z Treści zadania chcemy żeby $\Pr(|A_n - E[A_n]| \geq 0.01) \leq 0.01$

$$\Pr(|A_n - E[A_n]| \geq 0.01) = \Pr\left(|A_n - E[A_n]|^2 \geq 0.01^2\right) \leq \frac{\sigma_n^2}{0.01^2}$$

$$\Downarrow$$

$$0.01 = \frac{\sigma_n^2}{0.01^2} = \frac{4\pi - \pi^2}{16n \cdot 0.01^2}$$

$$\Downarrow$$

$$n = \left\lceil \frac{4\pi - \pi^2}{0.01^3 \cdot 16} \right\rceil \approx \lceil 168547.888329363395938 \rceil = 168548$$

3.3. To samo ale z nierównością Chernoffa

Nierówność Chernoffa:

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

$$\mu_n = E[X] = \frac{n\pi}{4}$$

$$\Pr(|X - \mu_n| > \varepsilon\mu) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2+\varepsilon}\mu\right)$$

Z treści zadania chcemy żeby $\Pr(|A_n - E[A_n]| \geq 0.01) \leq 0.01$

$$\Pr(|A_n - E[A_n]| \geq 0.01) = \Pr\left(\frac{1}{n} |X - \mu_n| \geq 0.01\right) = \Pr(|X - \mu_n| \geq 0.01n) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2+\varepsilon}\mu_n\right)$$

$$0.01n = \varepsilon\mu_n = \varepsilon\frac{n\pi}{4} \Rightarrow \varepsilon = \frac{0.04}{\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{0.01}{2} = 0.005 = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2+\varepsilon}\mu_n\right) = \exp\left(-\frac{\left(\frac{0.04}{\pi}\right)^2}{2+\frac{0.04}{\pi}} \cdot \frac{n\pi}{4}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{0.0016 \cdot n\pi}{\pi^2 \cdot \frac{2\pi+0.04}{\pi} \cdot 4}\right) = \exp\left(-\frac{0.0016n}{8\pi + 0.16}\right) = e^{-\frac{0.0016n}{8\pi+0.16}}$$

$$\Downarrow$$

$$-\ln(0.005) = \frac{0.0016n}{8\pi + 0.16} \Rightarrow (\pi + 0.02) \cdot \ln\left(0.005^{-1}\right) = 0.0002n$$

$$\Downarrow$$

$$n = \lceil (\pi + 0.02) \cdot \ln(200) \cdot 5000 \rceil \approx \lceil 83755.6063123274 \rceil = 83756$$

4. Zadanie 15 - Standardowe odchylenia przy obliczaniu ćwiartek koła

4.1. Metoda losowania z $[0,1]^2$

Niech:

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ jeśli } x_i^2 + y_i^2 \leq 1 \\ 0 \text{ w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Wtedy:

$$A_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(A_X) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\ \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{n}} \approx \sqrt{\frac{0.1685}{n}} \approx \frac{0.4105}{\sqrt{n}}$$

4.2. Metoda losowania z $[0, 1]$

Niech:

$$Y_i = \sqrt{1-x_i^2}$$

$$\Downarrow$$

$$E[Y_i] = \int_0^1 \sqrt{1-x_i^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

$$E[Y_i^2] = \int_0^1 1-x_i^2 dx = x - \frac{x_i^3}{3}\ |_0^1 = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_Y^2 = E[Y_i^2] - E[Y_i]^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx 0.0498$$

Wtedy:

$$A_Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(A_Y) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(Y_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{3} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{n}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{n}} \approx \sqrt{\frac{0.0498}{n}} \approx \frac{0.2232}{\sqrt{n}}$$

4.3. Wnioski

$$\sigma_X > \sigma_Y$$

Metoda losowania na jednej osi daje lepsze wyniki (o mniejszej wariancji) i zbiega do wartości oczekiwanej szybciej niż metoda losowania z dwóch osi

5. Zadanie 16

Niech:

$$X \in [0,1]$$

$$Y = \begin{cases} X \text{ jeśli } X \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ 1 - X \text{ jeśli } X \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \Rightarrow Y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Dystrybuanta Y:

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(\max\{X, 1-X\} \leq y) = \Pr(X \in [1-y, y]) \text{ dla } y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Jako że X jest losowane z rozkładem jednostajnym to:

$$F_Y(y) = \frac{y - (1-y)}{1} = 2y - 1 \text{ dla } y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Gęstość prawdopodobieństwa:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} 2y - 1 = 2$$

$$\Downarrow$$

Y ma rozkład jednostajny $\Rightarrow E[Y] = 0.75$

$$E[Y^2] = \int_{\frac{1}{2}}^{1} y^2 \cdot f_Y(y) dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2y^2 dy = \left[2\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{24} - \frac{2}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_Y^2 = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{7}{12} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{18}{48} - \frac{27}{48} = \frac{1}{48}$$

6. Zadanie 17

X ma rozkład jednostajny na $[0,1]$ więc:

$$f_X(x) = 1$$

$$E[X] = \frac{1}{2}$$

$$E[X^2] = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{Cov}(X, 1-X) = \operatorname{Cov}(X, -X) = -\operatorname{Cov}(X,X) = -\sigma_X^2 = -\frac{1}{12}$$