Algorytmika
Ćwiczenia 4

Adrian Herda

2025-05-07

1. Zadanie 18

Lemat Schwartza-Zippela:

$$P \in R[x_1, \cdots, x_n]$$

To niezerowy wielomian o stopniu całkowitym $\deg(P) = d \geq 0$ nad domeną R. Jeśli S jest skończonym podzbiorem R to wybierając niezależnie i jednostajnie losowe $r_1, \cdots, r_n$ należące do S^n

$$\Pr[P(r_1, ...c, r_n) = 0] \leq \frac{d}{|S|}$$

1.1. Oszacowanie liczby zer

Niech $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$ będzie wielomianem w którym każda zmienna występuję w stopniu co najwyżej d. Załóżmy, że $f \neq 0$, oraz $A \subseteq k$ i $|A| > d$. Chcemy oszacować:

$$|\{a \in A^n : f(a) = 0\}| \leq d \cdot |A|^{n-1}$$

Z Lematu Schwartza-Zippela dla $a \in A^n$:

$$\frac{d}{|A|} \geq \Pr[f(a) = 0] = \frac{|\{a \in A^n : f(a) = 0\}|}{|A^n|}$$

$$\text{mnożymy to przez } \ |A^n| = |A|^n$$

$$\Downarrow$$

$$|\{a \in A^n : f(a) = 0\}| \leq d \cdot |A|^{n-1}$$

1.2. Prawdopodobieństwo dla $|A| = 2d$

Z Lematu Schwartza-Zippela wynika, że dla $|A| = 2d$ mamy:

$$\Pr[f(\zeta) = 0] \leq \frac{d}{|A|} = \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}$$

1.3. Dla Ciągu lsoowych punktów

$|A| = 2d$ oraz $\{\zeta_1, \cdots, \zeta_{40}\} \subseteq A$ to ciąg niezależnych oraz losowych punktów ze zbioru A^n.

$$\forall_{n \in [40]} \Pr[f(\zeta_n) = 0] \leq \frac{1}{2}$$

Jako że ζ są niezależne to:

$$\Pr[f(\zeta_1) = \cdots = f(\zeta_{40}) = 0] = \Pr[f(\zeta_1) = 0] \cdot .... \cdot \Pr[f(\zeta_{40}) = 0] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{40} < 10^{-12}$$

1.4. Zadanie 21

Rzucamy igłę długości l na płaszczyznę z pionowymi liniami równoległymi w odległościach $k = 1$.

Parametry:

- $t = 1$ - odległość między liniami
- $l \leq t$ - długość igły
- $x \sim U[0, \frac{t}{2}]$ - odległość środka igły od linii
- $\theta \sim U[0, \frac{\pi}{2}]$ - kąt nachylenia igły do poziomu

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{t} : 0 \leq x \leq \frac{t}{2} \\ 0 : \text{gdziekolwiek indziej} \end{cases}$$

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 : \text{gdziekolwiek indziej} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$f_{X\Theta}(x, \theta) = f_x(x) \cdot f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{4}{\pi t} : 0 \leq x \leq \frac{t}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 : \text{gdziekolwiek indziej} \end{cases}$$

Igła przecina linię, gdy:

$$x \leq \frac{l}{2} \cos \theta$$

Teraz liczymy prawdopodobieństwo:

$$\Pr[\text{Igła przecina linię}] = \Pr\left[x \leq \frac{l}{2} \cos \theta\right] = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{\frac{l}{2} \cos \theta} f_{X\Theta}(x, \theta) dx d\theta =$$

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{\frac{l}{2} \cos \theta} \frac{4}{\pi t} dx d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{4x}{\pi t}\right]_0^{\frac{l}{2} \cos \theta} d\theta = \frac{4l}{2\pi t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{2l}{\pi t} \cdot [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{l}{\pi t}$$