Metody Optymalizacji
Laboratorium 1

Adrian Herda

2025-04-03

1. Zadanie 1

1.1. Model

1.1.1. Zmienne decyzyjne

- $n \in \mathbb{N}$ - Wymiar problemu
- $$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \geq 0$$

1.1.2. Ograniczenia

$$Ax = b$$

gdzie:

- $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, dla $i, j, = 1, ..., n$
- $b_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{i+j-1}\right)$, dla $i, j, = 1, ..., n$

1.2. Funkcja kosztu

$$\min c^T x = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i$$

gdzie:
- $c_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{i+j-1}\right)$, dla $i, j, = 1, ..., n$

1.3. Wyniki

Prawidłowym rozwiązaniem jest $x = 1$. Skoro znamy już ten wynik, bardziej interesujące będzie przeanalizowanie błędów względnych by lepiej zobrazować co się dzieje.

$$error = \frac{\|x - \hat{x}\|_2}{\|x\|_2}$$

n	error
1	0
2	$1.05325004057301 \cdot 10^{-15}$
3	$3.67157765110227 \cdot 10^{-15}$
4	$3.27016385075681 \cdot 10^{-13}$
5	$3.35139916635905 \cdot 10^{-12}$
6	$6.83335790676898 \cdot 10^{-11}$
7	$1.67868542192291 \cdot 10^{-08}$

n	error
8	0.514058972177268
9	0.682911338087722
10	0.990387574803086

n	Funkcja kosztu
1	1
2	2.33333333333333
3	3.7
4	5.07619047619048
5	6.45634920634921
6	7.83852813852814
7	9.22187257187257
8	10.6059496062796
9	11.9905168356488
10	13.37542804637291

1.4. Wnioski

Zadanie szukania zadanego wektora jest źle uwarunkowane, ponieważ do jego liczenia jest potrzebna macierz Hilberta.

Błąd względny dla wymiaru $n = 7$ jest jeszcze wyjątkowo mały ale już dla $n = 8$ błąd ten wynosi prawie 0.5

2. Zadanie 2

Zadanie opisuje problem optymalnego przemieszczenia dźwigów między miastami aby zniwelować zapotrzebowania w miastach wykorzystując nadmiary w innych miastach

2.1. Model

2.1.1. Zmienne decyzyjne

- $movI_{m1,m2}$ - liczba dźwigów typu I przeniesiona z miasta m1 do miasta m2,
- $movII_{m1,m2}$ - liczba dźwigów typu II przeniesiona z miasta m1 do miasta m2,
- $movIII_{m1,m2}$ - liczba dźwigów typu II przeniesiona z miasta m1 do miasta m2 w celu zastąpienia dźwigów typu I,

2.1.2. Ograniczenia

1. Ograniczenie przenoszonych dźwigów wedle nadmiarów
   - $\sum_{m2 \in M} movI_{m1,m2} \leq surpI_{m1}$
   - $\sum_{m2 \in M} (movII_{m1,m2} + movIII_{m1,m2}) \leq surpII_{m1}$
2. Ograniczenie przenoszonych dźwigów wedle braków
   - $\sum_{m1 \in M} (movI_{m1,m2} + movIII_{m1,m2}) \geq shortI_{m2}$
   - $\sum_{m1 \in M} movII_{m1,m2} \geq surpII_{m2}$

2.2. Funkcja kosztu

Minimalizujemy koszt związany z transportem

$$\min \sum_{m1,m2 \in M} \left(dist_{m1,m2} \cdot movI_{m1,m2} + 1.2 \cdot dist_{m1,m2} \cdot \left(movII_{m1,m2} + movIII_{m1,m2} \right) \right)$$

2.3. Wyniki

z	do	ile	typ dźwigu
Opole	[Brzeg]	4	I
Opole	Kędzierzyn-Koźle	3	I
Nysa	Brzeg	5	I
Nysa	Prudnik	1	I
Strzelce Opolskie	Kędzierzyn-Koźle	5	I
Nysa	Opole	2	II
Prudnik	Strzelce Opolskie	4	II
Prudnik	Kędzierzyn-Koźle	2	II
Prudnik	Racibórz	1	II
Brzeg	Brzeg	1	II zmiana na I
Prudnik	Prudnik	3	II zmiana na I

Całkowity koszt wyniósł 1400.44 jakimi posługiwał się twórca zadania. Pozbycie się warunku na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych nie wpływa na końcowy wynik. Solver widocznie lubi wykorzystanie dźwigów typu II jako typu I bez zmiany miasta przez to że nie wprowadza to żadnych kosztów związanych z przewozem. Zapotrzebowanie na dźwigi zostało zlikwidowane w optymalny sposób.

3. Zadanie 3

Zadanie to polegało na optymalizacji kosztów rafinerii tworzącej 3 rodzaje paliw z dwóch rodzajów ropy. Rafineria wykorzystuje destylacje i krakowanie jako metody tworzenia paliw.

3.1. Model

- $R = \{\text{B1, B2}\}$ - rodzaje ropy
- $P_d = \{\text{benzyna, olej, destylat, reszta}\}$ - produkty destylacji
- $P_k = \{\text{benzyna, olej, reszta}\}$ - produkty krakowania destylatu
- $W_o = \{\text{domowe, ciezkie}\}$ - wykorzystanie oleju z destylacji
- $W_d = \{\text{krak, ciezkie}\}$ - wykorzystanie destylatu

3.1.1. Parametry

- $\text{wydajnosc}_{r,p}$ - wydajność destylacji ropy określająca ile produktu $p \in P_d$ zostało stworzonego z ropy $r \in R$
- wydajnosc_krak_p - wydajność krakowania destylatu określająca ile produktu $p \in P_k$ zostało stworzonego
- desty_siarka_r - udział siarki w oleju pozyskanego z destylacji ropy $r \in R$
- krak_siarka_r - udział siarki w oleju pozyskanego z krakowania destylatu ropy $r \in R$

3.1.2. Zmienne decyzyjne

- ropa_r, $r \in R$ – ilość ton zakupionej oraz przetwarzanej ropy $B1$ oraz $B2$

- $\text{olej}_{r,c}$, $r \in R$, $c \in W_o$ – określa ilość, w tonach, oleju z każdego rodzaju ropy idącego do paliw domowych i ciężkich
- $\text{desty}_{r,c}$, $r \in R$, $c \in W_d$ – określa ilość, w tonach, destylatu z każdego rodzaju ropy idącego do krakowania i paliw ciężkich

3.1.3. Ograniczenia

- Suma oleju wyprodukowanego z danego typu ropy musi równać się sumie ton oleju wykorzystywanego do różnych celów

$$\forall_{r \in R} \left(\text{wydajnosc}_{r,\text{ olej}} \cdot \text{ropa}_r = \sum_{w \in W_o} \text{olej}_{r,w} \right)$$

- Suma destylatu wyprodukowanego z danego typu ropy musi równać się sumie ton destylatu wykorzystywanego do różnych celów

$$\forall_{r \in R} \left(\text{wydajnosc}_{r,\text{ destylat}} \cdot \text{ropa}_r = \sum_{w \in W_d} \text{desty}_{r,w} \right)$$

- Ilość wyprodukowanych paliw silnikowych nie może być mniejsza niż podane w zadaniu $\text{min}_s = 200000$ na ilość wyprodukowanego paliwa składa się benzyna z destylacji oraz benzyna z krakowania destylatu

$$\sum_{r \in R} \left(\text{wydajnosc\_krak}_{\text{benzyna}} \cdot \text{desty}_{r,\text{ krak}} + \text{wydajnosc}_{r,\text{ benzyna}} \cdot \text{ropa}_r \right) \geq \text{min}_s$$

- Ilość wyprodukowanych paliw olejowych nie może być mniejsza niż podane w zadaniu $\text{min}_o = 400000$ na ilość wyprodukowanego paliwa składa się część oleju z destylacji oraz olej z krakowania destylatu

$$\sum_{r \in R} \left(\text{wydajnosc\_krak}_{\text{olej}} \cdot \text{desty}_{r,\text{ krak}} + \text{olej}_{r,\text{ domowe}} \right) \geq \text{min}_o$$

- Ilość wyprodukowanych paliw ciężkich nie może być mniejsza niż podane w zadaniu $\text{min}_c = 250000$ na ilość wyprodukowanego paliwa składa się część oleju z destylacji, część destylatu, resztki destylacji oraz resztki z krakowania destylatu

$$\sum_{r \in R} \left(\text{wydajnosc\_krak}_{\text{reszta}} \cdot \text{desty}_{r,\text{ krak}} + \text{desty}_{r,\text{ reszta}} + \text{olej}_{r,\text{ ciezkie}} + \text{wydajnosc}_{r,\text{ reszta}} \cdot \text{ropa}_r \right) \geq \text{min}_c$$

- Wyprodukowane paliwa olejowe nie mogą mieć więcej niż $\text{max}_s = 0.5\%$ siarki w swoim składzie. Skład siarki w podawany jest przez parametry desty_siraka oraz krak_siarka

$$\sum_{r \in R} \left(\text{desty\_siarka}_r \cdot \text{olej}_{r,\text{ ciezkie}} + \text{krak\_siarka}_r \cdot \text{wydajnosc\_krak}_{r,\text{ olej}} \cdot \text{desty}_{r,\text{ krak}} \right) \leq$$
$$\text{max}_s \cdot \sum_{r \in R} \left(\text{wydajnosc\_krak}_{\text{olej}} \cdot \text{desty}_{r,\text{ krak}} + \text{olej}_{r,\text{ domowe}} \right)$$

3.2. Funkcja kosztu

- $C_{B1} = 1300$ - koszt tony ropy B1
- $C_{B2} = 1500$ - koszt tony ropy B2
- $CR_1 = 10$ - koszt destylacji ropy
- $CR_2 = 20$ - koszt krakowania destylatu

Chcemy zminimalizować koszty produkcji paliw:

$$\min \sum_{r \in R} \left(\text{ropa}_r * (C_r + CR_1) + CR_2 * \text{desty}_{r,\text{ krak}}\right)$$

3.3. Wyniki

Optymalnym rozwiązaniem okazuje się zakup wyłącznie tańszej ropy B1. Ta ropa nie dość że jest tańsza w kupnie jak i w obróbce ale ma również mniejszą zawartość siarki.

- Kupujemy 1026030.37 ton ropy B1
- 381561.37 ton oleju z destylacji idzie na cele paliw olejowych
- 28850.325 ton oleju z destylacji idzie na cele paliw ciężkich
- 91190.89 ton destylatu idzie do krakowania
- 61713.67 ton destylatu idzie na cele paliw ciężkich

Całkowity koszt wyniósł 1345943600.87$

4. Zadanie 4

Zadanie polegało na znalezieniu optymalnego planu ćwiczeń wedle godzin i ocen zajęć podanych w treści zadania. Dodatkowo w plan trzeba było zmieścić godzinną przerwę w godzinach 12 - 14 a także zajęcia sportowe co najmniej raz w tygodniu.

4.1. Model

- Zaj = {algebra, analiza, fizyka, chemia_minerałów, chemia_organiczna} - Zbiór wszystkich ćwiczeń
- Gr = {gr1, gr2, gr3, gr4} - grupy ćwiczeniowe z których można wybierać
- Gr_wf = {gr1, gr2, gr3} - grupy zajęć sportowych z których można wybierać

4.1.1. Parametry

- $\text{Start}_{z,g}$, $z \in \text{Zaj}, g \in \text{Gr}$ - macierz zawierająca informacje na temat godzin o których zajęcia się zaczynały
- $\text{Koniec}_{z,g}$, $z \in \text{Zaj}, g \in \text{Gr}$ - macierz zawierająca informacje na temat godzin o których zajęcia się kończyły
- $\text{Dzien}_{z,g} \in [1, 2, 3, 4, 5]$, $z \in \text{Zaj}, g \in \text{Gr}$ - macierz zawierająca informacje na temat dni w których zajęcia się odbywały
- $\text{Pkt}_{z,g}$, $z \in \text{Zaj}, g \in \text{Gr}$ - macierz zawierająca informacje na temat preferencji co do zajęć
- $\text{Start\_wf}_{z,g}$, $z \in \text{Zaj}, g \in \text{Gr}$ - macierz zawierająca informacje na temat godzin o których zajęcia sportowe się zaczynały
- $\text{Koniec\_wf}_{z,g}$, $z \in \text{Zaj}, g \in \text{Gr}$ - macierz zawierająca informacje na temat godzin o których zajęcia sportowe się kończyły
- $\text{Dzien\_wf}_{z,g} \in [1, 2, 3, 4, 5]$, $z \in \text{Zaj}, g \in \text{Gr}$ - macierz zawierająca informacje na temat dni w których zajęcia sportowe się odbywały

4.1.2. Zmienne decyzyjne

- $\text{Wybrane}_{z,g} \in [0, 1]$, $z \in \text{Zaj}, g \in \text{Gr}$ - Macierz określająca które zajęcia wybraliśmy
  - 1 - oznacza wybranie zajęć
  - 0 - oznacza nie wybranie zajęć
- $\text{Wybrane\_wf}_{z,g} \in [0, 1]$, $z \in \text{Zaj}, g \in \text{Gr}$ - Macierz określająca które zajęcia sportowe wybraliśmy
  - 1 - oznacza wybranie zajęć
  - 0 - oznacza nie wybranie zajęć

4.1.3. Ograniczenia

1. Z każdego przedmiotu możemy wybrać tylko jedną grupę

$$\forall_{z\in \text{ Zaj}} \left(\sum_{g\in \text{ Gr}} \text{Wybrane}_g = 1 \right)$$

2. Z wf musimy wybrać minimalnie jedną grupę

$$\sum_{g\in \text{ Gr\_wf}} \text{Wybrane\_wf}_g \geq 1$$

3. Możemy mieć maksymalnie 4h ćwiczeń dziennie

$$\forall_{d\in[5]} \left(\sum_{g\in \text{ Gr}, z\in \text{ Zaj}, \text{Dzien}_{z,g}=d} \left(\text{Koniec}_{z,g} - \text{Start}_{z,g}\right) \leq 4 \right)$$

4. Zajęcia nie mogą się zaczynać w trakcie innych zajęć - sprawdzamy to poprzez porównywanie czasu rozpoczęcia i zakończenia par zajęć, jeśli czas rozpoczęcia jednych zajęć zawiera się w pomiędzy granicami innych zajęć to wybrać możemy co najwyżej jedne z nich

$$\left(\forall_{z1,z2\in \text{ Zaj}}\right)\left(\forall_{g1,g2\in \text{ Gr}}\right)$$
$$\left((z1,g1) \neq (z2,g2) \land \text{Dzien}_{z1,g1} = \text{Dzien}_{z2,g2} \land \text{Start}_{z1,g1} \leq \text{Start}_{z2,g2} \land \text{Start}_{z2,g2} \leq \text{Koniec}_{z1,g1}\right)$$
$$\Longrightarrow \text{Wybrane}_{z1,g1} + \text{Wybrane}_{z2,g2} \leq 1$$

5. Podobnie treningi nie mogą się zaczynać w trakcie ćwiczeń

$$\left(\forall_{z\in \text{ Zaj}}\right)\left(\forall_{g\in \text{ Gr}}\right)\left(\forall_{g^{\text{wf}}\in \text{ Gr\_wf}}\right)$$
$$\left(\text{Dzien}_{z,g} = \text{Dzien\_wf}_{g^{\text{wf}}} \land \text{Start}_{z,g} \leq \text{Start\_wf}_{g^{\text{wf}}} \land \text{Start\_wf}_{g^{\text{wf}}} \leq \text{Koniec}_{z,g}\right)$$
$$\Longrightarrow \text{Wybrane}_{z,g} + \text{Wybrane\_wf}_{g^{\text{wf}}} \leq 1$$

6. Ani nie mogą się kończyć w trakcie ćwiczeń

$$\left(\forall_{z\in \text{ Zaj}}\right)\left(\forall_{g\in \text{ Gr}}\right)\left(\forall_{g^{\text{wf}}\in \text{ Gr\_wf}}\right)$$
$$\left(\text{Dzien}_{z,g} = \text{Dzien\_wf}_{g^{\text{wf}}} \land \text{Start\_wf}_{g^{\text{wf}}} \leq \text{Start}_{z,g} \land \text{Start}_{z,g}\right) \leq \text{Koniec\_wf}_{g^{\text{wf}}}$$
$$\Longrightarrow \text{Wybrane}_{z,g} + \text{Wybrane\_wf}_{g^{\text{wf}}} \leq 1$$

7. Ćwiczenia muszą zostawić godzinę przerwy w godzinach 12-14 na obiad na stołówce

$$\left(\forall_{d\in[5]}\right)$$
$$\sum_{g\in \text{ Gr}, z\in \text{ Zaj}, \text{Dzien}_{z,g}=d, \text{Start}_{z,g}<12, \text{Koniec}_{z,g}\leq 14} \left(\left(\text{Koniec}_{z,g} - 12\right) \cdot \text{Wybrane}_{z,g}\right) +$$
$$\sum_{g\in \text{ Gr}, z\in \text{ Zaj}, \text{Dzien}_{z,g}=d, \text{Start}_{z,g}\geq 12, \text{Koniec}_{z,g}\leq 14} \left(\left(\text{Koniec}_{z,g} - \text{Start}_{z,g}\right) \cdot \text{Wybrane}_{z,g}\right) +$$
$$\sum_{g\in \text{ Gr}, z\in \text{ Zaj}, \text{Dzien}_{z,g}=d, \text{Start}_{z,g}\geq 12, \text{Koniec}_{z,g}>14} \left(\left(14 - \text{Start}_{z,g}\right) \cdot \text{Wybrane}_{z,g}\right) +$$
$$\sum_{g\in \text{ Gr\_wf}, \text{Dzien\_wf}_g=d, \text{Start\_wf}_g<12, \text{Koniec\_wf}_g\leq 14} \left(\left(\text{Koniec\_wf}_g - 12\right) \cdot \text{Wybrane\_wf}_g\right) +$$
$$\sum_{g\in \text{ Gr\_wf}, \text{Dzien\_wf}_g=d, \text{Start\_wf}_g\geq 12, \text{Koniec\_wf}_g\leq 14} \left(\left(\text{Koniec\_wf}_g - \text{Start\_wf}_g\right) \cdot \text{Wybrane\_wf}_g\right) +$$
$$\sum_{g\in \text{ Gr\_wf}, \text{Dzien\_wf}_g=d, \text{Start\_wf}_g\geq 12, \text{Koniec\_wf}_g>14} \left(\left(14 - \text{Start\_wf}_g\right) \cdot \text{Wybrane\_wf}_g\right) \leq 1$$

4.1.4. Ograniczenia dodatkowe

1. Brak ćwiczeń w środy oraz 5

$$\left(\forall_{g \in \text{ Gr}, z \in \text{ Zaj}}\right)\left(\text{Dzien}_{z,g} \in \{3, 5\} \Longrightarrow \text{Wybrane}_{z,g} = 0\right)$$

2. Brak ćwiczeń o preferencji mniejszej niż 5

$$\left(\forall_{g \in \text{ Gr}, z \in \text{ Zaj}}\right)\left(\text{Pkt}_{z,g} \leq 5 \Longrightarrow \text{Wybrane}_{z,g} = 0\right)$$

4.2. Funkcja kosztu

Naszym celem jest zmaksymalizowanie wybieranie preferowanych ćwiczeń. W tym celu maksymalizujemy sumę preferencji wszystkich wybranych ćwiczeń

$$\max \sum_{g \in \text{ Gr}, z \in \text{ Zaj}} \left(\text{Pkt}_{z,g} \cdot \text{Wybrane}_{z,g}\right)$$

4.3. Wyniki

4.3.1. Bez dodatkowych warunków

Bez dodatkowych warunków plan prezentuje się następująco:

	Pn.	Wt.	Śr.	Cz.	Pt.
8:00	chemia min. (I)				
8:30	chemia min. (I)				
9:00	chemia min. (I)				
9:30	chemia min. (I)				
10:00		analiza (II)	algebra (III)		
10:30	chemia org. (II)	analiza (II)	algebra (III)		
11:00	chemia org. (II)	analiza (II)	algebra (III)		
11:30	chemia org. (II)	analiza (II)	algebra (III)		
12:00	lunch	lunch	lunch	lunch	lunch
12:30	lunch	lunch	lunch	lunch	lunch
13:00	trening				
13:30	trening				
14:00	trening				
14:30	trening				
15:00					
15:30					
16:00					
16:30					
17:00				fizyka (IV)	
17:30				fizyka (IV)	
18:00				fizyka (IV)	
18:30				fizyka (IV)	
19:00				fizyka (IV)	
19:30				fizyka (IV)	

Suma preferencji wynosi 37. Można by nawet dodać jeszcze jedne zajęcia sportowe w środę od 13:00 do 15:00 ale to nie jest już wymagane od solvera.

4.3.2. Dodatkowe warunki

Ograniczenia dodatkowe widoczne w Sekcja 4.1.4 powodują zmiany w planie prezentujące się następująco:

	Pn.	Wt.	Śr.	Cz.	Pt.
8:00				analiza (IV)	
8:30				analiza (IV)	
9:00				analiza (IV)	
9:30				analiza (IV)	
10:00		fizyka (II)			
10:30	chemia org. (II)	fizyka (II)			
11:00	chemia org. (II)	fizyka (II)	trening		
11:30	chemia org. (II)	fizyka (II)	trening		
12:00	lunch	fizyka (II)	trening	lunch	lunch
12:30	lunch	fizyka (II)	trening	lunch	lunch
13:00	algebra (I)	lunch	lunch	chemia min. (III)	
13:30	algebra (I)	lunch	lunch	chemia min. (III)	
14:00	algebra (I)			chemia min. (III)	
14:30	algebra (I)			chemia min. (III)	

W tym wypadku suma preferencji wynosi 28. Jest to znacznie mniej niż w poprzednim wypadku ale jej kosztem zapewniliśmy dwa wolne dni od ćwiczeń.