Obliczenia naukowe
Lista nr 2 (laboratorium) [1]
(uwarunkowanie zadań i stabilność algorytmów)

zad. 1 Powtórz zadanie 5 z listy 1, ale usuń ostatnią 9 z x_4 i ostatnią 7 z x_5. Jaki wpływ na wyniki mają niewielkie zmiany danych?

zad. 2 Narysować wykres funkcji $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \ln(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{x}})$ w co najmniej dwóch dowolnych programach do wizualizacji. Następnie policzyć granicę funkcji $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Porównać wykres funkcji z policzoną granicą. Wyjaśnić zjawisko.

zad. 3 Rozważmy zadanie rozwiązywania układu równań liniowych

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}.$$

dla danej macierzy współczynników $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i wektora prawych stron $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

Macierz $\boldsymbol{A}$ generować w następujący sposób:

(a) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}_n$, gdzie $\boldsymbol{H}_n$ jest macierzą Hilberta stopnia n wygenerowaną za pomocą funkcji `A=hilb(n)` (źródła w języku `Julia` na stronie domowej),

(b) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}_n$, gdzie $\boldsymbol{R}_n$ jest losową macierzą stopnia n z zadanym wskaźnikiem uwarunkowania c wygenerowaną za pomocą funkcji `A=matcond(n,c)` (źródła w języku `Julia` na stronie domowej).

Wektor $\boldsymbol{b}$ zadany jest następująco $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ax}$, gdzie $\boldsymbol{A}$ jest wygenerowaną macierzą, a $\boldsymbol{x} = (1, \ldots, 1)^T$. Zatem wiemy jakie jest rozwiązanie dokładne $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dla $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{b}$.

Rozwiązać $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ za pomocą dwóch algorytmów: eliminacji Gaussa (`x=A\b`) oraz $x = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ (`x=inv(A)*b`). Eksperymenty wykonać dla macierzy Hilberta $\boldsymbol{H}_n$ z rosnącym stopniem $n > 1$ oraz dla macierzy losowej $\boldsymbol{R}_n$, $n = 5, 10, 20$ z rosnącym wskaźnikiem uwarunkowania $c = 1, 10, 10^3, 10^7, 10^{12}, 10^{16}$. Porównać obliczony $\tilde{\boldsymbol{x}}$ z rozwiązaniem dokładnym $\boldsymbol{x} = (1, \ldots, 1)^T$,tj. **policzyć błędy względne**.

W pakiecie `LinearAlgebra` znajdują się dwie użyteczne funkcje `cond(A)` i `rank(A)`. Za pomocą funkcji `cond(A)` można sprawdzić jaki jest wskaźnik uwarunkowania wygenerowanej macierzy. Natomiast za pomocą funkcji `rank(A)` można sprawdzić jaki jest rząd macierzy.

zad. 4 ("złośliwy wielomian", Wilkinson) Zainstalować pakiet `Polynomials`.

(a) Użyć funkcji `roots` (z pakietu `Polynomials`) do obliczenia 20 zer wielomianu P w

[1] Większość zadań pochodzi z książki: D. Kincaid, W. Cheney, Analiza numeryczna, WNT, 2005.
Zadania 5 i 6 pochodzą z książki H.O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe *Granice chaosu. Fraktale, część 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997, rozdziały 1.4 i 1.5.

postaci naturalnej

$$\begin{aligned}P(x) \;\; = \;\; & x^{20} - 210x^{19} + 20615x^{18} - 1256850x^{17} + 53327946x^{16} \\ & -1672280820x^{15} + 40171771630x^{14} - 756111184500x^{13} \\ & +11310276995381x^{12} - 135585182899530x^{11} \\ & +1307535010540395x^{10} - 10142299865511450x^{9} \\ & +63030812099294896x^{8} - 311333643161390640x^{7} \\ & +1206647803780373360x^{6} - 3599979517947607200x^{5} \\ & +8037811822645051776x^{4} - 12870931245150988800x^{3} \\ & +13803759753640704000x^{2} - 8752948036761600000x \\ & +2432902008176640000\end{aligned}$$

(współczynniki wielomianu P umieszczone są na stronie domowej w pliku `wielomian.txt`). P jest postacią naturalną wielomianu Wilkinsona p

$$\begin{aligned}p(x) \;\; = \;\; & (x-20)(x-19)(x-18)(x-17)(x-16) \\ & (x-15)(x-14)(x-13)(x-12)(x-11) \\ & (x-10)(x-9)(x-8)(x-7)(x-6) \\ & (x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)\end{aligned}$$

Sprawdzić obliczone pierwiastki z_k, $1 \leqslant k \leqslant 20$, obliczając $|P(z_k)|$, $|p(z_k)|$ i $|z_k - k|$. Wyjaśnić rozbieżności.

Wsk. Arytmetyka w `Float64` w języku `Julia` ma od 15 do 17 cyfr znaczących w systemie dziesiętnym.

(b) Powtórzyć eksperyment Wilkinsona, tj. zmienić współczynnik -210 na $-210-2^{-23}$. Wyjaśnić zjawisko.

zad. 5 Rozważmy równanie rekurencyjne (model logistyczny, model wzrostu populacji)

$$p_{n+1} := p_n + rp_n(1-p_n), \text{ dla } n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

gdzie r jest pewną daną stałą, $r(1-p_n)$ jest czynnikiem wzrostu populacji, a p_0 jest wielkością populacji stanowiąca procent maksymalnej wielkości populacji dla danego stanu środowiska.

Przeprowadzić następujące eksperymenty:

1. Dla danych $p_0 = 0.01$ i $r = 3$ wykonać 40 iteracji wyrażenia (1), a następnie wykonać ponownie 40 iteracji wyrażenia (1) z niewielką modyfikacją tj. wykonać 10 iteracji, zatrzymać, zastosować obcięcie wyniku odrzucając cyfry po trzecim miejscu po przecinku (daje to liczbę 0.722) i kontynuować dalej obliczenia (do 40-stej iteracji) tak, jak gdyby był to ostatni wynik na wyjściu. Porównać otrzymane wyniki.

   Obliczenia wykonać w arytmetyce `Float32` (w języku `Julia`).
2. Dla danych $p_0 = 0.01$ i $r = 3$ wykonać 40 iteracji wyrażenia (1) w arytmetyce `Float32` i `Float64` (w języku `Julia`). Porównać otrzymane wyniki.

zad. 6 Rozważmy równanie rekurencyjne

$$x_{n+1} := x_n^2 + c \text{ dla } n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

gdzie c jest pewną daną stałą.

Przeprowadzić następujące eksperymenty. Dla danych:

1. $c = -2$ i $x_0 = 1$
2. $c = -2$ i $x_0 = 2$
3. $c = -2$ i $x_0 = 1.99999999999999$
4. $c = -1$ i $x_0 = 1$
5. $c = -1$ i $x_0 = -1$
6. $c = -1$ i $x_0 = 0.75$
7. $c = -1$ i $x_0 = 0.25$

wykonać, w języku `Julia` w arytmetyce `Float64`, 40 iteracji wyrażenia (2). Zaobserwować zachowanie generowanych ciągów.

Wsk. Przeprowadzić iteracje graficzną $x_{n+1} := x_n^2 + c$.

Rozwiązania zadań przedstawić w sprawozdaniu, plik pdf, które powinno zawierać:

1. krótki opis problemu,
2. rozwiązanie,
3. wyniki oraz ich interpretację,
4. wnioski.

Do sprawozdania należy dołączyć pliki z kodem (`*.jl`). Pliki powinny być skomentowane: imię i nazwisko autora (**anonimowe źródła nie będą sprawdzane**), opisane parametry formalne funkcji, komentarze zmiennych. Uwaga: Ostateczną wersję programów proszę przetestować pod linuksem.