Obliczenia Naukowe 3

Arian Herda

19 November 2023

1 Zadanie 1 2 oraz 3

Celem tych zadań była implementacja funkcji przybliżających miejsce zerowe funkcji. Funkcjami które mieliśmy zaimplementować były:

- Metoda bisekcji
- Metoda Newtona
- Metoda Siecznych

Każda z podanych metod zwraca czwórkę:

$$(r, v, it, err)$$

gdzie:

- r - przybliżone rozwiązanie funkcji
- v - wartość $f(r)$
- it - liczbę wykonanych iteracji podczas wyliczania rozwiązania
- err - kod błędu, kod $err = 0$ dla każdej metody oznacza poprawne zakończenie i znalezienie rozwiązania, podczas gdy $err \neq 0$ oznacza błąd

1.1 Metoda bisekcji

Metoda ta jest również nazywana metodą połowienia przedziału lub metodą dychotomii. Pozwala ona na ustalenie w najgorszym wypadku tylko przybliżonego rozwiązania i tylko w przedziale [a, b]. Co ważne, funkcja musi być ciągła i określona w danym przedziale a jej wartości, na krańcach przedziału, przyjmować przeciwne znaki. Aby określić rozwiązanie algorytmu, musimy ustalić dokładność, z jaką chcemy posiadać pierwiastek funkcji oraz dokładność samej funkcji. MEtoda działa poprzez dzielenie przedziału na pół punktem c, a następnie porównywania znaku c z końcami przedziału a oraz b i do następnej iteracji wybrania jednego z przedziałów $[a, c]$ lub $[c, b]$ tak aby zachować różne znaki na końcach przedziałów. Powtarzamy ten proces aż dostaniemy wynik z podaną na wejściu dokładnością.

1.2 Metoda Newtona

Metoda Newtona, zwana inaczej metodą stycznych. Jest inną funkcją iteracyjną, która również pozwala na obliczenie przybliżonej wartości miejsca zerowego podanej funkcji. Metoda ta przyjmuje następujące 3 założenia:

1. W przedziale $[a, b]$ znajduje się dokładnie jeden pierwiastek
2. Funkcja ma różne znaki na końcach przedziału
3. Pierwsza i druga pochodna funkcji mają stały znak na tym przedziale

Metoda ta wykorzystuje fakt że równanie

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

dla kolejnych iteracji k coraz lepiej przybliża pierwaistek funkcji.

1.3 Metoda siecznych

Ostatnia metoda, którą mieliśmy do zaimplemetnowania to metoda siecznych zwana w polsce też metodą cięciw. Algorytm ten jest bardzo podobny do opisywanego w poprzednim podpunkcie algorytmu Newtona. Różnicą jest to że zamiast korzystania z wcześniej obliczonej pochodnej funkcji wykorzystujemy jej przybliżenie:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

podkładając to do wzoru z poprzedniej metody:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Dzięki takiej zmianie nie musimy wyliczać i podawać pochodnej, musimy natomiast podać dodatkowy punkt startowy. Metoda ta nie zbiega do pierwiastka tak szybko jak metoda Newtona ale w trakcie iteracji nie oblicza niepotrzebnie pochodnej

1.4 Rozwiązanie

Implementacja wymienionych funkcji jest w pliku $zad123.jl$ w module $mod123$ a testy podanych funkcji są w pliku $testy.jl$.

1.5 Wyniki

Testy tych funkcji pokazują że funkcje te nie zawsze są dokładne, czasami zwracają błędy które pojawiaą się z róznych powodów zależnie od funkcji.

1.6 Wnioski

Każda z metod poprawnie przybliża pierwiastki funkcji natomiast każda z nich ma też swoje wady. Przy metodzie bisekcji należy uważać na bardzo płaskie i bardzo storme funkcje. Przy pozostałych dwóch metodach trzeba uważać na odpoweidnie dobranie przybliżeń startowych ponieważ czasami potrafią prowadzić do różnego rodzaju błędów.

2 Zadanie 4

W zadaniu tym należało porównać metody napisane w poprzednich zadaniach pod względem wyników przy rozwiązywaniu równania:

$$sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$$

z dokładnościami:

$$\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$$

Dane początkowe dla metod:

1. Metoda bisekcji - przedział: $[1.5, 2]$
2. Metoda Newtona - przybliżenie początkowe: $x_0 = 1.5$
3. Metoda siecznych - przybliżenia początkowe: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$

2.1 Rozwiązanie

Rozwiązanie znajduje się w pliku *zad4.jl* i polega na zdefiniowaniu funkcji podanej w zadaniu, policzeniu i zdefiniowaniu jej pochodneja a następnie wywołaniu odpowiednich funkcji.

2.2 Wyniki

Dokładniejszy wynik policzony z pomocą klakulatora WolframAlpha:

$$x \approx 1.9337537628270212533$$

Nazwa	x_0	$f(x_0)$	Liczba iteracji
Metoda Bisekcji	**1.933753**9672851562	-2.7027680138402843e-7	16
Metoda Stycznych	**1.9337537**79789742	-2.2423316314856834e-8	4
Metoda Siecznych	**1.933753**644474301	1.564525129449379e-7	4

Jak widać każdej metodzie udało się znaleźć aproksymacje pierwiastka z dokładnością nawet lepszą niż wyznaczona przez nas delta i epsilon.

2.3 Wnioski

Wszystie metody działają poprawnie natomaist bardzo zauważalna jest różnica w liczbie iteracji potrzebnych do znalezienia wyniku. Metoda bisekcji odstaje w tej dziedzinie i potrzebuje dużo więcej iteracji. Metoda ta jest za to stabilna globalnie. Metoda siecznych jest minimalnie wolniej zbieżna czego nie widać na powyższych wynikach ale jest ona stabilna numerycznie.

3 Zadanie 5

W zadaniu 5 celem było znalezienie wartości zmiennej x, dla której przecinają się wykresy $y = 3x$ i $y = e^x$. Zmienną x mieliśy pozyskać korzystając z metody bisekcji. Wymagane dokładności:

$$\delta = 10^{-4}$$

$$\epsilon = 10^{-4}$$

3.1 Rozwiązanie

Aby rozwiązać to zadanie należało odjąć te dwie funkcje

$$3x = e^x \Rightarrow 3x - e^x = 0$$

Następnie trzeba za pomocą analizy matematycznej zauważyć że funkcjie te spotykają się w dwóch miejscach: $x_0 \approx 0.5$ oraz $x_1 \approx 1.5$. A więc należy dobrać odpoweidnie przedziały aby obliczbyć pierwiastki. Ja wybrałem przedziały $[0, 1]$ oraz $[1, 0]$.

Implementacja rozwiązania znajduje się w pliku $zad5.jl$.

3.2 Wyniki

3.2.1 Moje wyniki

	x_0	$f(x_0)$	Liczba iteracji
Pierwsze przecięcie	0.619140625	1.857421875	9
Drugie przecięcie	1.5120849609375	4.5362548828125	13

3.2.2 Poprawne wyniki

	x_0	$f(x_0)$
Pierwsze przecięcie	0.6190612867359451122	1.8571838602078353366
Drugie przecięcie	1.5121345516578424739	4.5364036549735274217

3.3 Wnioski

Mimo posiadania funkcji która wskaże nam rozwiązanie równania cały czas musimy sami analizować problem aby móc poprawnie wpisać dane początkowe do funkcji. Metoda bisekcji zawsze znajdzie jeden poprawny wynik o ile postaramy się by wprowadzone przez nas dane początkowe były zgodne z wymaganiami. Natomiast by znaleźć wszystkie poprawne wyniki, to my musimy wykonać pracę i przeanalizować problem by dowiedzieć się ile jest pierwiastków i jakich przedziałów użyć żeby je znaleźć.

4 Zadanie 6

Zadanie to polegało na znalezieniu pierwiastków dwóch funkcji:

$$f_1(x) = e^{1-x} - 1$$

$$f_2(x) = xe^{-x}$$

Piewraistki mieliśmy znaleźć za pomocą wszystkich zaimplementowanych metod, tj. bisekcji, Newtona oraz siecznych. Wymagane dokładności:

$$\delta = 10^{-5}$$

$$\epsilon = 10^{-5}$$

Dodatkowo mieliśmy sprawdzić co się stanie gdy dla metody Newtona zmienimy przybliżenie początkowe na $x_0 \geq 1$ dla $f_1(x)$ oraz dla $f_2(x)$.

4.1 Rozwiązanie

Rozwiązałem zadanie zaczynając od analizy podanych funkcji. Funkcje te nie są najtrudniejsze i łatwo policzyć ich pierwaistki nawet bez kalkulatora:
$f_1(x) = 0$, gdy $x = 1$
oraz
$f_2(x) = 0$, gdy $x = 0$.

Warto również przeanalizować je pod względem pochodnych, wtedy zauważymy że funkcja f_1 jest bardzo płaska dla $x \geq 4$ oraz bardzo stroma dla $x \leq -3$. Funkcja f_2 wykazuje poodbne zachowanie z jedną różnicą, mianowicie ma ona lokalne maksimum w punkcie $x = 1$a następnie jej pochodna zmienia znak. Wszystkie wymienione wyżej fakty mogą być potencjalnymi problemami przy wybieraniu danych początkowych. Dlatego, mając to na uwadzę, ostrożnie wybrałem dane początkowe:

1. Metoda bisekcji:
   - Dla f_1 - przedział startowy: $[-0.4, 1.9]$
   - Dla f_2 - przedział startowy: $[-1.9, 0.99]$

2. Metoda Newtona:
    - Dla f_1 - przybliżenie początkowe: $x_0 = -5$
    - Dla f_2 - przybliżenie początkowe: $x_0 = -5$
3. Metoda siecznych:
    - Dla f_1 - przybliżenia początkowe: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$
    - Dla f_2 - przybliżenia początkowe: $x_0 = -1$, $x_1 = 1$

Na koniec dla eksperymentów przy metodzie Newtona wybrałem przybliżenia startowe $x_0 \geq 1$

4.2 Wyniki

4.2.1 Wyniki dla f_1

Metoda	Dane początkowe	r	$f(r)$	Liczba iteracji
Metoda bisekcji	$[-0.4, 1.9]$	1.000000762939453	-7.629391619579096e-7	17
Metoda Newtona	$x_0 = -5$	0.9999999998809204	1.1907963504143027e-10	10
Metoda siecznych	$x_0 = -1$, $x_1 = 0$	0.9999990043764041	9.956240916153547e-7	6

4.2.2 Wyniki dla f_2

Metoda	Dane początkowe	r	$f(r)$	Liczba iteracji
Metoda bisekcji	$[-1.9, 0.99]$	2.136230468628605e-6	2.1362259051528643e-6	15
Metoda Newtona	$x_0 = -5$	-9.064102913053547e-6	-9.064185071387511e-6	10
Metoda siecznych	$x_0 = -1$, $x_1 = 1$	1.744165849924562e-8	1.7441658195034172e-8	18

4.2.3 Eksperymenty przy metodzie Newtona dla f_1

x_0	r	$f(r)$	Liczba iteracji	Kod błędu
1.1	0.99999999991094	8.906009263398573e-11	3	0
2.0	0.9999999810061002	1.8993900008368314e-8	5	0
5.0	0.9999996427095682	3.572904956339329e-7	54	0
10.0	NaN	NaN	60	1
100.0	100.0	-1.0	1	2
10000.0	10000.0	-1.0	1	2

4.2.4 Eksperymenty przy metodzie Newtona dla f_2

x_0	r	$f(r)$	Liczba iteracji	Kod błędu
1.0	1.0	0.36787944117144233	1	2
1.1	14.272123938290509	9.040322779745447e-6	3	0
2.0	14.398662765680003	8.03641534421721e-6	10	0
5.0	14.118053159563352	1.0432351956139508e-5	9	2
10.0	14.380524159896261	8.173205649825554e-6	4	0
100.0	100.0	3.7200759760208363e-42	0	0
10000.0	10000.0	0.0	0	0

4.3 Wnioski

Pprzy odpowiedznio dobranych danych poczatkowych wszytstkie metody działają poprawnie i znajdują pierwiastki z dokładnością nawet lepszą niż ustalona. Funkcja Newtona w dodatkowych eksperymentach działa natomiast bardzo źle. W przykładzie dla f_1 dla $x \in \{1.1, 2, 5\}$ metoda daje jeszcze poprawne wyniki ale potem już nic nie działa dobrze. Pojawia się nawet NaN który zazwyczaj oznacza dzielenie przez 0. Mogło się tak stać przez ograniczoną precyzję liczb, które zaokrogliły się do 0 i spowodowały taki problem. Metoda ta mogła działać na NaN przez 60 iteracji zanim zakończyła swoje działanie z przekroczenia limitu iteracji ($kod\ błędu = 1$). Dla $x \in \{100, 10000\}$ metoda od razu zauważa że pochodna jest zbyt płaska by móc kontynuować działanie i zwraca kod błędu 2.

Eksperyment na metodzie Newtona z f_2 dla $x_0 \in \{1.1, 2, 5, 10, 100, 10000\}$ pokazuje jak duże błedy może powodować nieodpoweidnie dobranie przybliżeń startowych. Od razu widać źle policzone pierwiastki około 14, które wynikają z tego że funkcja $f_2(x) = xe^{-x}$ przybiera tak małe wartości dla $x \geq 14$ że skończona precyzja powoduje zaokrąglenie do 0 i wprowadzenie metody w błedne przekonanie znalezienia pierwaistka. Podobnie się dzieje dla $x_0 \in \{100, 10000\}$ tylko metoda już w zerowej iteracji zwraca je jako pierwiastki bo funkcja przypisuje im wartości tak małe że zaokrąglane są od razu do 0. Powodem tego że metoda patrzy na coraz większe liczby zamiast na coraz mniejsze jest zmiana znaku pochodnej tej funkcji który występuje w $x = 1$. Liczby większe od 1 nigdy nie znajdą prawidłowego pierwaistka z z tego faktu. jest to złamanie jednego z założeń metody newtona o niezmiennych znakach pochodnych funkcji pierwszego i drugiego stopnia.

W punkcie $x_0 = 1$ metoda wykrywa że pochodna funkcji przyjmuje wartość 0, a więc jest zbyt płaska by móc znaleźć pierwaistek. Metoda zwraca wtedy kod błędu 2.