

## 【题解】2020 牛客 NOIP 赛前集训营-提高组 (第六场)

### T1 袜子分配

注意题目要求误差需要小于 $10^{-8}$ ，如果直接输出保留的位数不够多会扣很多分。

暴力可以获得至少30分。

定义  $d[i][j]$  表示现在有  $i$  个单只袜子，有  $j$  对双只袜子到取完的数学期望。

每次取时可以枚举拿第一只和拿第二只的情况，可以在  $O(1)$  的时间复杂度下转移。

故时间复杂度为  $O(n^2)$ ，可以得到80分。

开始时，有  $2n(2n-1)$  种不同的取法，只有  $n$  种拿法可以获得快乐值。

可以通过数学推导或者观察得出结论：

对于  $n$ ，答案为  $\frac{n}{2n-1}$ 。

### T2 艰难睡眠

本意是处理一个环上的问题。但是题目描述好像给大家造成一定困扰，再次抱歉。

考虑枚举牛牛睡觉的时间，相当于需要对每个人取睡觉不干扰牛牛部分的最小值。

暴力获取大概可以获得40 - 50分或更多。

可以用 multiset 预处理区间最小值，或者用某些数据结构在线维护。

时间复杂度  $O(nm \log m)$ 。这样显然只能获得大概80分，因为这个  $nm$  有  $10^7$  那么夸张。

用单调队列或是其他  $O(nm)$  的做法来解决问题可以获得100分。

### T3 路径难题

考察最短路和构图技巧。如果是独立思考的结果的话，证明你已经有点懂最短路

了。

如果无视公交车的话，可以得到20分。

每个公交车建 $t_i^2$ 条边的话，大概可以得到60分？

构图上考虑将每路公交车构造一个点：让该路公交车对应的所有站台都有向边连接到它；它通过有向边连接到该路公交车对应的所有站台。然后跑 dijkstra 即可。

因为单次打车和多次打车有舍入上的出入，所以需要维护一个下一次收费的距离，如果坐公交车就清空该距离。

这样的话时间复杂度是 $O(m \log m)$ 级别的。

## T4 牛半仙的妹子序列

把题目转化为对一个极长上升子序列计数。

一个子序列  $A$  是极长上升子序列，当且仅当不存在一个不同于  $A$  的上升子序列  $B$ ，且  $B$  包含  $A$  中所有的元素。

设  $f_i$  表示以第  $i$  个位置结尾的子序列的极长上升子序列个数。

考虑从前往后 DP。

考虑怎样的  $j$  能够转移到  $f_i$ ，在位置  $(j, i)$  之间不存在比  $v_j$  大且比  $v_i$  小的数，如果只考虑“比  $v_i$  小”这个限制，可以建一个权值线段树，含两个标记，一个为是否能产生贡献，一个为贡献的大小，每次更新对应权值，查询只需查询目前加入的小于当前数的权值，单次复杂度  $O(\log n)$ 。

考虑加上“比  $v_j$  大”这个限制，当出现一个权值被夹在中间的数之后， $j$  就不能贡献了，于是我们考虑一个线段树区间取  $\min$  的操作：将能否产生贡献的标记改成一个权值  $mn$ ，在扫完原数列的一个数  $j$  后，将  $mn_j$  赋为  $\inf$ ，在查询第  $i$  位的答案时，先将线段树  $[1, v_i]$  的所有点的  $mn$  对  $v_i$  取  $\min$ ，线段树  $[1, v_i]$  中

的  $mn$  等于  $v_i$  的数的贡献和即是答案。

考虑如何维护线段树取  $min$ ，记录一个  $mx$  表示区间最大， $se$  表示区间严格次大。若区间取  $min$  的值大于等于  $mx$ ，return；若  $se$ ，修改  $mx$  和对应贡献，打个  $tag$ ；否则就暴力递归处理，一次暴力递归复杂度是  $O(\log n)$  的，一次递归  $mn_j$  的种数会至少减 1，而种数是  $O(n)$  的，所以总时间复杂度  $O(n \log n)$