NOIP 2021 模拟 题解

Dragon_in_Bed 2021.10

1. tanao

注意到，正序对数和逆序对数相等，答案即为$n!\,n(n-1)/4$。

2. tosania

注意到，对于任意点p,q,i，有$dist_{p-q} \le dist_{p-i} + dist_{i-q}$，等号成立当且仅当$i$在$p,q$之间的路径上。因此，在所有图中，$i$都在$p,q$之间的路径上，等价于$\sum dist_{p-q} = \sum dist_{p-i} + \sum dist_{i-q}$。只需要预处理出每棵树上所有点对的$LCA$，求出所有点对在每棵树上的距离和，枚举答案即可。时间复杂度：$O(n^3 + n^2k)$。

3.dfslover

我们可以先考虑没有重复元素的情况。设f_i表示$n = i$时的答案。我们可以考虑问题的补集，即至少存在一个非混乱元素的序列数。设第一个非混乱元素为k，那么k之前的元素全部小于k，必须都是混乱的，方案数即f_{k-1}。而k之后的元素全部大于k，可以任意排列，方案数即$(i-k)!$。所以，$f_i = i! - \sum f_{k-1} \cdot (i-k)!$。

然后考虑有重复元素的情况。先把序列a升序排序。此时f_i表示前i个元素的答案。设$g_{i,j}$表示序列$[a_i, \dots, a_j]$的本质不同排列数（设序列中第k种元素的数量为c_k，则$g_{i,j} = (j-i+1)!/\prod c_k!$），那么原方程中的$i!$应该用$g_{1,i}$替换。同理，原方程中的$(i-k)!$应该用$g_{k+1,i}$替换。这里的$g$可以递推求出。

4. tosaka

注意到，n张牌的顺序并没有关系，我们只需要考虑每种牌的数量。以条子为例，设a_i表示i条的个数。

如果你是像出题人一样的 nt，你可能会想dp（见附录 1）。

如果你是像DFSlover一样的DFS大师，你就会开始爆搜。对于同一种花色，直接枚举每种点数的牌在最终的 14 张牌中出现的次数b_i。对于每个序列b，判定它能否组成和张中完整的一部分（可以分为$0-4$个面子和$0-1$个雀头）。

这个判定可以如下进行：设$cnt = \sum b_i$。

若$cnt\%3 = 1$或$cnt > 14$，判 false。

若$cnt\%3 = 0$，那么置$i = 2 \to 8$，若$b_i \ge 3$，则$b_i -= 3$，因为i之前的所有牌都已经被处理，所以如果i不用来组成刻子，肯定会用来组成三组形如$\{i, i+1, i+2\}$的顺子，等价于三个刻子$\{i,i,i\},\{i+1,i+1,i+1\},\{i+2,i+2,i+2\}$。然后尝试将所有$i$都用于与$i+1$和$i+2$组成顺子。若$b_{i+1}$或$b_{i+2}$不够用，判 false。结束后，判 true。

若$cnt\%3 = 2$，那么先枚举雀头的位置，然后按$cnt\%3 = 0$判定。

若判定 true，则统计选牌的方案数$f_{cnt} += \prod \binom{a_i}{b_i}$。

于是我们只需要把 14 张牌分配到 3 种花色中即可。

附录 1

tosaka: dp 做法

设$f_{i,j,k,l,m}$表示当前到$i(2 \le i \le 8)$条，选出的牌中已组成面子共$j(0 \le j \le 4)$组，顺子的一部分$\{i-1,i\}$共$k(0 \le k \le 4)$组，顺子的一部分$\{i\}$共$l(0 \le l \le 4, k+l \le 4)$组，雀头$m(0 \le m \le 1)$组时的选牌方案数。这一种方法有优秀的多项式时间复杂度，可以拓展到更多点数的牌。

这样做会把同套牌的不同组牌方法记作不同方案。以{3,3,3,4,4,4,5,5,5}为例，既可当做{3,3,3},{4,4,4},{5,5,5}，也可当做{3,4,5}*3，因此会计算两次贡献，这是刻子和顺子的冲突。以{3,3,4,4,5,5,6,6}为例，既可当做{3,3},{4,5,6}*2，也可当做{3,4,5}*2,{6,6}，这是雀头和顺子的冲突。以{3,3,3,4,5,6,6,6}为例，即可当做{3,3},{3,4,5},{6,6,6}，也可当做{3,3,3},{4,5,6},{6,6}，这是刻子和雀头的冲突。

对于刻子和顺子的冲突，我们可以规定刻子优先。也就是说，k,l必须满足$k,l \le 2$（否则直接按刻子算）。

对于雀头和顺子的冲突，我们可以枚举雀头是哪种牌。设雀头为p条，那么我们可以规定雀头优先。也就是说，当$i=p+2$时，k必须满足$k \le 1$；当$i=p+1$时，l必须满足$l \le 1$。注意，此时dp状态中不需要再设置m。

对于刻子和雀头的冲突，我们可以分是否有$p-3$条的刻子讨论。若有，则禁止形如$\{p-2,p-1,p\}$的顺子。

当然了，即使处理完这些冲突，你依然会算重。对于更多的冲突，请读者自己发现😅。