CCF 全国青少年信息学奥林匹克联赛（NOIP2020）

提高组 *Day* 1 试题

一、题目概况

题目名称	飞行双翼	矩阵特征	良渚古城
题目英文名	$wing$	$feature$	$ancient$
输入文件名	$wing.\text{in}$	$feature.\text{in}$	$ancient.\text{in}$
输出文件名	$wing.\text{out}$	$feature.\text{out}$	$ancient.\text{out}$
源程序名	$wing.\text{cpp}$	$feature.\text{cpp}$	$ancient.\text{cpp}$
题目类型	传统		
测试点数量	20	25	
测试点等分	是		
时间限制	1000ms	2000ms	1000ms
内存限制	512MB		
编译命令	$-o-lm$		

二、注意事项

1. 主函数的函数名必须为$main$，返回值必须为0；
2. 使用$Lemon$软件评测，必须使用能够发挥恰当作用的文件操作；
3. 评测机器配置原则上应不低于 NOIP2018 或 CSP2019 的水平。

1. 飞行双翼（*wing*.cpp）

【题目描述】

众所周知，飞机的平衡依赖于左右两侧空气压强的平衡。然而，新近研究出的一种神奇的飞机可以在两侧压强相差极大的情况下正常飞行，我们暂且称之为 WING 飞机。

WING 飞机值机的地面上从左到右共分布了N个空气压强传感触点，这些触点不仅可以感知外界流体压强变化，还能进行位移并控制飞机的航向。然而，出于稳定性的考虑，我们必须事先选择一个触点作为中心触点（CENTER 触点），在该触点上配置更多的转向动力，以维持飞机的平衡。

虽然 WING 飞机的飞行状况基本不受压强分布的影响，但是选择 CENTER 触点的过程还是要依赖于起飞前机场的气压情况。由于机场天气状况不佳，飞机上空的气压状况都时刻改变着，但神奇的一点就是无论触点处在哪个位置，每个触点上方的压强都不变。现在将这些触点从1到n进行编号，第i个触点上方的恒定气压为p_i（单位为 kPa），同时将其安装到飞机上的代价为w_i（单位为元）。由于飞机宽度有限，我们只需要将m个触点装上飞机，并保证m是奇数。选择 CENTER 触点的原则是：CENTER 触点的恒定气压必须是所有m个被选择触点的气压中的中位数。为了增强飞机的抗压能力，我们希望 CENTER 触点的恒定气压尽量大。

因为财政方面的限制，安装触点的总费用不能超过C。现在，请你求出在费用许可的前提下，CENTER 触点可能的最大恒定气压。

【输入格式】

输入文件$wing.\mathrm{in}$包括三行。第一行为三个正整数n，m和C，表示触点总数、触点需求量和费用上限；第二行共n个正整数p_i，表示触点的恒定气压；第三行共n个正整数w_i，表示安装触点的费用。

【输出格式】

输出文件$wing.\mathrm{out}$包括一行，共一个正整数，表示 CENTER 触点的最大恒定气压。若不存在可行的方案，输出“-1”（不含引号）。

【输入输出样例 1】

$wing1.\mathrm{in}$	$wing1.\mathrm{out}$
8 5 32 45 42 49 55 51 38 52 47 6 8 6 6 7 6 5 8	51

【样例说明 1】

最优方案之一：选择恒定气压分别为45、49、51、52、55的触点，花费为30，符合题目要求，此时 CENTER 触点的恒定气压为51。可以证明没有比该选择方式更优的方案。

【输入输出样例 2】

见选手目录下$Sample\backslash wing\backslash wing2.\mathrm{in/out}$。

【数据范围与测试点信息】

对于全部数据，保证$n \le 2 \times 10^5$，$m \le n$，m为奇数，C，p_i，$w_i \le 10^9$，且所有p_i都互不相同。

本题共20个测试点，每个测试点的信息如下：

<table>
<tr><th>测试点编号</th><th>n</th><th>特殊条件</th><th>测试点编号</th><th>n</th><th>特殊条件</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="5">≤ 100</td><td rowspan="7">无</td><td>11</td><td rowspan="4">≤ 50000</td><td rowspan="2">$\sum w_i \le C$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>12</td></tr>
<tr><td>3</td><td>13</td><td rowspan="8">无</td></tr>
<tr><td>4</td><td>14</td></tr>
<tr><td>5</td><td>15</td><td rowspan="6">$\le 2 \times 10^5$</td></tr>
<tr><td>6</td><td rowspan="5">≤ 2000</td><td>16</td></tr>
<tr><td>7</td><td>17</td></tr>
<tr><td>8</td><td rowspan="3">$m = n$</td><td>18</td></tr>
<tr><td>9</td><td>19</td></tr>
<tr><td>10</td><td>20</td></tr>
</table>

2. 矩形特征（*feature*.cpp）

【题目描述】

一个矩形在某种条件下是可以转化为一维的。

已知一个矩形A有n行m列，每个格子内有一个正整数，记第i行、第j列的格子内的正整数为$A_{i,j}$。正如天地有阴阳之分，矩形转化为一维的方式也有所区别，取决于矩阵元值k（保证k为0，1，2三个数中的一个）：

• 如果$k = 0$，则矩形不能转化为一维序列。

• 如果$k = 1$，则矩形按从上到下、从左到右的顺序转化为长度为nm的一维序列L。形式化地，若L_i表示序列的第i个元素，令$p = \left\lceil \frac{i}{m} \right\rceil$，则：

$$L_i = A_{p,i-m\cdot(p-1)}$$

例如2×3的矩阵A转化后的序列：

$$\{L\} = \{A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,1}, A_{2,2}, A_{2,3}\}$$

• 如果$k = 2$，则矩形按从上到下的顺序，奇数行从左向右、偶数行从右向左的顺序转化为长度为nm的一维序列L。

形式化地，若L_i表示序列的第i个元素，令$p = \left\lceil \frac{i}{m} \right\rceil$，则：

$$L_i = \begin{cases} A_{p,i-m\cdot(p-1)} & | \quad p \bmod 2 = 1 \\ A_{p,m\cdot p-(i-1)} & | \quad p \bmod 2 = 0 \end{cases}$$

例如3×3的矩阵A转化后的序列

$$\{L\} = \{A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,3}, A_{2,2}, A_{2,1}, A_{3,1}, A_{3,2}, A_{3,3}\}$$

这样完成转化后，原矩阵和序列都具有了自身的特征。

量化地表示，矩形的特征值记为S_1，序列的特征值记为S_2。

矩形中的每个数字都不超过正整数P。如果用(x_1, y_1, x_2, y_2)来表示一个左上角为A_{x_1,y_1}、右下角为A_{x_2,y_2}的子矩形（$1 \le x_1, x_2 \le n$，$1 \le y_1, y_2 \le m$，四个参数均为正整数），那么两个子矩形不同当且仅当这四个参数中有至少一个参数不相等。将每个子矩形中所有正整数的和对P取模，如果余数为0，就说明这个子矩形是有特征的。形式化地，以下等式是子矩形有特征的充分必要条件：

$$\sum_{i=x_1}^{x_2} \sum_{j=y_1}^{y_2} A_{i,j} \bmod P = 0$$

那么，S_1的值就是所有有特征的不同子矩阵的数量。

接下来，我们给出子序列的定义：在序列L中按从左到右的顺序，选出任意数量的正整数组成的序列，就是其子序列。选择的正整数可以不连续，但是必须严格遵守在原序列中的位置顺序。特殊地，空序列（没有任何正整数）也是一个子序列，其长度规定为0。很显然，空序列和任意其他的序列都是不相同的。两个子序列不同，当且仅当它们的长度不同或长度相同时它们有至少一位上的数字不相同。

形式化地，如果有两个子序列$X=\{X_1,X_2,\dots,X_D\}$，$Y=\{Y_1,Y_2,\dots,Y_E\}$，则两个子序列不同当且仅当$D\neq E$或存在i使得$X_i\neq Y_i$。

序列L的所有不同子序列的数量，就是S_2。

此外，当$k=0$时，序列L相当于一个空序列，规定该情况下$S_2=1$。注意，空矩形不能算作矩形的子矩形。

因而，我们要求的总特征值，即为S_1+S_2，并对998244353取模。

【输入格式】

输入文件$feature.\mathrm{in}$包括若干行。第一行为四个正整数n，m，k和P，分别表示矩形的行数、列数、矩阵元值和矩形中元素值的上限；接下来n行，每行m个正整数$A_{i,j}$，描述初始的矩形。

【输出格式】

输出文件$feature.\mathrm{out}$包括一行，共一个正整数，表示S_1+S_2对998244353取模后得到的值。

【输入输出样例 1】

$feature1.\mathrm{in}$	$feature1.\mathrm{out}$
2 2 0 4 3 3 1 4	3

【样例说明 1】

此时共有$|4|$、$\begin{vmatrix}3\\1\end{vmatrix}$两个矩阵的元素和是4的倍数，故$S_1=2$；而在$k=0$时依照题目规定$S_2=1$，故$S_1+S_2=3$。

【输入输出样例 2】

$feature2.\mathrm{in}$	$feature2.\mathrm{out}$
2 4 1 10 1 9 9 8 7 3 2 1	819

【样例说明 2】

按$k=1$时的方式转化，序列L为$\{1,9,9,8,7,3,2,1\}$，共有814个不同的子序列，故$S_2=814$；原矩形中有$|1\quad 9|$、$\begin{vmatrix}9&8\\2&1\end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix}1&9\\7&3\end{vmatrix}$、$|7\quad 3|$、$\begin{vmatrix}1&9&9&8\\7&3&2&1\end{vmatrix}$五个子矩形的元素和为10的倍数，故$S_1=5$，$S_1+S_2=819$。

【输入输出样例 3】

见选手目录下$Sample\backslash feature\backslash feature3.\mathrm{in/out}$。

【数据范围与测试点信息】

对于全部数据，保证$n \le 100$，$m \le 2000$，$A_{i,j} \le P \le 10^6$，$k \in \{0,1,2\}$。

本题共25个测试点，每个测试点的信息如下：

<table>
<tr><th>测试点编号</th><th>n</th><th>m</th><th>P</th><th>特殊性质</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="4">≤ 5</td><td rowspan="4">≤ 5</td><td rowspan="4">≤ 2</td><td rowspan="8">无</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="4">≤ 10</td><td rowspan="8">≤ 20</td><td rowspan="10">$\le 10^6$</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td><td rowspan="6">≤ 100</td><td rowspan="2">$k = 0$</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="15">无</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="4">≤ 500</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td>15</td><td rowspan="2">≤ 10</td><td rowspan="2">≤ 2</td></tr>
<tr><td>16</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="9">≤ 100</td><td rowspan="9">≤ 2000</td><td rowspan="9">$\le 10^6$</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td></tr>
<tr><td>22</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
<tr><td>24</td></tr>
<tr><td>25</td></tr>
</table>

3. 良渚古城（*ancient*.cpp）

【题目描述】

良渚文明在中华文明的历史上具有举足轻重的地位。根据最新的考古挖掘成果，良渚古城的遗址拥有 5300 年的历史，不愧为中华文明的发源地。同时，良渚文明的社会各阶层实现了合理的分工和各个产业的集约化，这一切都需要良好交通条件的支持。作为良渚城的支柱产业，大量人员参与了玉器的发掘、运输、加工和销售等环节，共同创造了璀璨的文明。

良渚古城内共有n个加工玉器的作坊，m条双向道路分别连接了两个作坊，第i条道路连接的是第x_i和第y_i个作坊。由于良渚国王大力支持交通产业的发展，良渚城内的道路系统颇为完善，任意两个作坊都能通过至少一种方式互相到达。但是道路属于公共财产，因此使用每条道路都是有代价的，在第i条道路上行驶的代价为w_i。良渚是一个政教合一的国家，因此宗教的力量无处不在，第m条道路（即最终通往宫殿的道路）的行驶代价是未知的。

我们暂且记第m条道路的行驶代价为w_x，那么w_x的计算方式如下：

$$w_x = \max\left\{1, \left(\sum_{1\le i\le j\le m-1} w_i \text{ xor } w_{i+1} \text{ xor} \dots \text{xor } w_j\right) \bmod 10\right\}$$

其中xor表示按位异或运算，在 C++语言中求$a \text{ xor } b$的代码块如下：

```
ans = a xor b;
```

现在某个玉器加工公司准备在所有道路中选择$n-1$条，使得任意两个作坊只通过这些道路仍然可以互相到达。同时国王的命令规定任意企业都不得选择利润最大的方案（因为该方案要为公共工程预留），因此这$n-1$条道路的行驶代价之和必须是严格次小的——设最小的行驶代价之和为$W_{\min}$，则严格次小的行驶代价就是所有严格大于$W_{\min}$的行驶代价中的最小值。

作为该加工公司的顾问，计算出这个符合要求的严格次小值是你的使命。

【输入格式】

输入文件$ancient.\text{in}$包括若干行。第一行为两个正整数n，m，表示作坊的数量和道路的数量；接下来$m-1$行每行三个正整数x_i，y_i，w_i，表示前$m-1$条道路连接的作坊的编号和行驶代价；最后一行两个正整数x_m，y_m，表示最后一条道路连接的两个作坊的编号。

【输出格式】

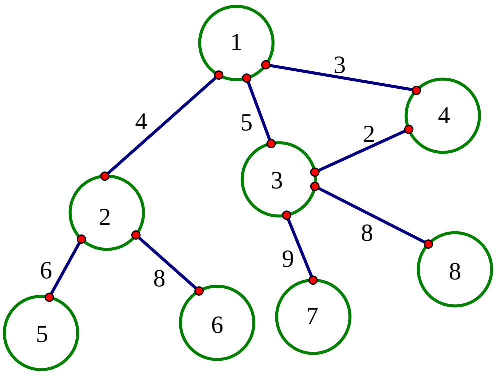
输出文件$ancient.\text{out}$包括一行，共一个正整数，表示符合要求的行驶代价之和的严格次小值。

【输入输出样例 1】

*ancient*1.in	*ancient*1.out
8 8 1 2 4 1 3 5 1 4 3 2 5 6 2 6 8 3 4 2 3 7 9 3 8	42

【样例说明 1】

$w_8 = 8$，故整个城市的道路分布示意图如下：



此时行驶代价最小的方案为选择去除连接1、3号作坊的道路外的其他道路，代价为40；行驶代价严格次小的方案为选择去除连接1、4号作坊的道路外的其他道路，代价为42。

【输入输出样例 2】

见选手目录下$Sample\backslash ancient\backslash ancient2$.in/out。

【数据范围与测试点信息】

对于全部数据，保证n，$m \le 2 \times 10^5$，$1 \le x_i, y_i \le n$，$x_i \ne y_i$，且不会出现两条重复的道路，构成的道路交通网与题目描述中所述的特点一致；$w_i \le 10$，保证计算得到的w_x值不为0。

本题共25个测试点，每个测试点的信息如下：

<table>
<tr><th>测试点编号</th><th>n,m</th><th>特殊性质</th><th>测试点编号</th><th>n,m</th><th>特殊性质</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="4">≤ 20</td><td rowspan="8">无</td><td>13</td><td rowspan="4">≤ 50000</td><td rowspan="2">$n = m$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>14</td></tr>
<tr><td>3</td><td>15</td><td rowspan="11">无</td></tr>
<tr><td>4</td><td>16</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="4">≤ 200</td><td>17</td><td rowspan="9">$\le 2 \times 10^5$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>18</td></tr>
<tr><td>7</td><td>19</td></tr>
<tr><td>8</td><td>20</td></tr>
<tr><td>9</td><td rowspan="4">≤ 2000</td><td rowspan="2">所有w_i均相等</td><td>21</td></tr>
<tr><td>10</td><td>22</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="2">无</td><td>23</td></tr>
<tr><td>12</td><td>24</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>25</td></tr>
</table>