【题解】牛客 CSP-S 提高组赛前集训营 4

T1 复读数组

可以通过枚举每一个数x，计算有多少个区间包含x。
设x在这个$n \times k$的数组中出现的位置为$p_1, p_2, \dots, p_m$。先补集转化，然后就变成了不包含x的区间个数。那么x的每一次相邻的出现之间的所有区间都是满足条件的。设$f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$，那么不包含x的区间个数就为$f(p_1 - 1) + f(nk - p_m) + \sum_{i=1}^{m-1} f(p_{i+1} - p_i - 1)$。

30 分算法

当$k = 1$时，暴力计算以上式子即可。

100 分做法

$f(p_1 - 1)$和$f(nk - p_m)$都很好计算。对于$\sum_{i=1}^{m-1} f(p_{i+1} - p_i - 1)$，需要分为两部分，一部分为在数组A中相邻的两次出现，这种情况一共被计算了k次；还有一部分为在数组A中的最后一次出现和下一次重复的第一次出现，这种情况一共没计算了$k - 1$次。分两种情况便可以计算出答案。

T2 路径计数机

20 分做法

$O(n^4)$枚举计算答案。

树是一条链

可以发现距离为一个定值的路径数是$O(n)$级别的。暴力枚举两条路径即可。

100 分做法

我们先枚举a和b，那么满足条件的c和d一共有两种情况。

- $\mathrm{lca}(c,d)$在$\mathrm{lca}(a,b)$的子树内。
- $\mathrm{lca}(c,d)$不在$\mathrm{lca}(a,b)$的子树内。

对于第一种情况，只要$\mathrm{lca}(c,d)$不在a到b的路径上即可。定义$f(i)$为 lca 为 i，长度为q的路径数。预处理f数组即可。可以通过枚举每一条路径计算贡献得到。
对于第二种情况，只要c到d的路径不经过连接$\mathrm{lca}(a,b)$和$\mathrm{lca}(a,b)$的父亲的这条边即可。预处理经过每一条边，长度为q的路径即可。可以通过枚举每一条路径，然后树上差分计算贡献得到。
复杂度$O(n^2)$。

T3 排列计数机

10 分做法

枚举所有子序列计算答案。

20 分做法

设$f(i,j,k)$为1到i，选出的子序列的最大值为j，当前权值为k的方案数。枚举下一个数选不选，若选了且比当前最大值要大，那么权值会加一。

另一个 20 分做法

可以发现序列权值就是单调栈中的元素个数。那么设$f(i,j)$为第i个数为单调栈里的数，总共选了j个数的方案数，那么若枚举单调栈中数A_k ，那么A_i 到A_k之间比A_i 小的数都可选可不选。

40 分做法

上述的另一个 20 分做法可以使用前缀和优化。

$$m = 1$$

可以计算每个数出现在多少个子序列的单调栈里，即在这个数前面并比它大的数都不能选，其他数可以任选。用树状数组统计即可。

100 分做法

由于x^m是一个m次多项式，$\binom{x}{i}$是一个i次多项式，那么通过逐位确定，可求出

$w_0, w_1, \ldots, w_m$，使得$x^m = \sum_{i=0}^{m} w_i \binom{x}{i}$（其实可以证明$w_i$ 与斯特林数有关）。那

么题目就变成了对于每一个i，对于所有非空子序列的权值x，求$\binom{x}{i}$之和。

可以发现序列权值就是单调栈中的元素个数。那么求$\binom{x}{i}$之和，可以变成枚举非

空子序列，在它的单调栈中选出i个元素的方案数。
那么可以使用动态规划，设$f(i,j)$为选了第i个数，总共选了j个数的答案。那么

$f(i,j) = \sum_{k=0}^{i-1} [B_k < B_i] f(k, j-1) \times 2^{\sum_{l=k+1}^{i-1} [B_l < B_i]}$，即在第k个数和第i个数之间，

所有满足$Bl < B_i$的 l 都是可能在子序列中出现。
可以先从小到大枚举 j，然后按照B_i 从小到大枚举i，容易发现这个转移可以使用线段树优化。
复杂度$O(nmlogn)$。