

# 不确定性推理

2019年度南京大学“专创融合”特色示范课程培育项目

高 阳

<http://cs.nju.edu.cn/rl>, 2019.10.8

# 不确定性推理

从确定性到不确定性推理

高 阳

<http://cs.nju.edu.cn/gaoy>, 2019.10.08

# 不确定性推理

## □ 不确定性推理与反绎推理

## □ 基于逻辑的反绎推理

- 非单调推理逻辑

- 真值维护系统

- 基于最小模型

- 集合覆盖

## □ 逻辑之外的反绎方法

- 确信度理论

- DS证据理论

- 模糊集推理

# 一个例子

## 汽车专家系统

(1) 如果发动机不旋转且灯不亮；那么，电池或电缆有问题。

(不可靠)

(2) 如果电池或电缆有问题；那么，发动机不旋转且灯不亮。

(可靠)

## 不确定性推理

从不确定性的初始事实 (证据)，运用不确定性的知识，获得不确定性但却合理的结论。

# 反绎推理

如果发动机不旋转且灯不亮；那么，电池或电缆有问题。



## □ 反绎推理

$P \rightarrow Q$  与  $Q$ ，可能推出  $P$ 。

是一种寻找最佳解释的推理，是不可靠的推理。

也称为溯因推理

# 基于谓词逻辑的推理

## □ 三个重要假设 (传统)

- ✓ 谓词对领域描述是充分的;
- ✓ 知识库必须是一致的;
- ✓ 应用推理规则得到的信息, 必须是单调增长的。

## □ 但, 如果假设不成立

- ✓ 马航370飞机失事.....



# 非单调推理

# 模态操作符的扩充

## 基于假设的推理


空难发生后，可以有多个假设。但发现新的证据后（如卫星数据或黑盒子），则可以排除部分原因。

## 需要解决以下问题


- ✓ 问题一：如何添加基于假设的知识？
- ✓ 问题二：假设不正确，如何进行修改？



# unless操作符

1.  $p(x) \text{ unless } q(x) \rightarrow r(x)$   知识的表示

2.  $r(x) \rightarrow s(x)$

✓ 如果 $p(W)$ 成立, 且不知道 $q(W)$ 是否为真, 则 $r(W)$ , 进而 $s(W)$ 为真;  知识的推理

✓ 进一步已知 $q(W)$ 为真, 则 $r(W)$ 和 $s(W)$ 需要被撤回。

abnormal 默认规则  $p(x) \text{ unless } ab \ p(x) \rightarrow r(x)$

✓ 除非 $p$ 有个反常的实例

# is consistent with 操作符

$\forall x \text{ good\_student}(x) \wedge M \text{ study\_hard}(x) \rightarrow \text{graduates}(x)$

“与我们所知的其他事情相一致”

□ 如何判定 “与……相一致” ？

- ✓ 第一种方法：证明其反  $\neg \text{study\_hard}(x)$ ；如果不能证明，则与...相一致
- ✓ 第二种方法：在有限空间上做启发式搜索

# is consistent with 操作符

## 无约束语义下产生的矛盾

$$\forall x \text{ good\_student}(x) \wedge M \text{ study\_hard}(x) \rightarrow \text{graduates}(x)$$

$$\forall y \text{ party\_person}(y) \wedge M \neg \text{study\_hard}(x) \rightarrow \neg \text{graduates}(x)$$

## 给定事实

$\text{good\_student}(\text{David})$

$\text{party\_person}(\text{David})$

解决方法：控制变量在不同谓词中的赋值



# 默认逻辑

$$A(x) \wedge B(x) \rightarrow C(x)$$

“如果A可被证实，且它与对B的假设相一致，则...”

$$\forall x \text{ good\_student}(x) \wedge \text{study\_hard}(x) \rightarrow \text{graduates}(x)$$

$$\forall y \text{ party\_person}(y) \wedge \neg \text{study\_hard}(x) \rightarrow \neg \text{graduates}(x)$$

- ✓ 允许产生多个似真的结论
- ✓ 似真的结论可作为公理进一步推理
- ✓ 解决方法：信念变化 → 回收 → 知识库一致

# 真值维护系统

# 真值维护系统TMS

**目标：**维持推理系统的逻辑完整性

**原理：**通过存储每条推理的理由，再重新推断根据新的信念所得出的结论的支持情况

**实现方式：**

- 1) **时序回溯：**从死状态或者末状态返回，系统的遍历所有可能路径。（低效！）
- 2) **相关性指导回溯：**直接回溯到出问题的点，并在那个状态对解进行修正。

# 一个例子

似真的假设： $q(x)$

飞机上有中方情报人员

$q(x) \rightarrow p(x)$

美方要对飞机进行控制

$p(x) \rightarrow r(x) \wedge s(x)$

毁灭飞机并不留痕迹

$t(x), u(x)$

机长有问题，飞机曾返航

似真的假设 $q(x)$ 被证实是错误的！



# 相关性指导回溯

## □ TMS实现机制

- 关联机制：将每条结论和其理由联系在一起
- 定位机制：当给定矛盾和其理由时，直接定位错误的假设
- 回收机制：收回错误的假设
- 追溯机制：收回错误的假设的结论

**注意：回收的假设未必是为假！**



# 基于理由的真值维护系统JTMS

## □ 检查理由网络

- ✓ 通过问题求解程序的查询(是否相信命题 $p$ , 为什么要相信命题 $p$ , 哪些假设支持命题 $p$ )进行触发

## □ 修改相关性网络

- ✓ 由问题求解程序所提供的信息进行修改。添加新命题、添加或删除前提等

## □ 更新网络

- ✓ 重新计算与现存理由相一致的命题  
构造理由网络，并将网络与推理过程分离

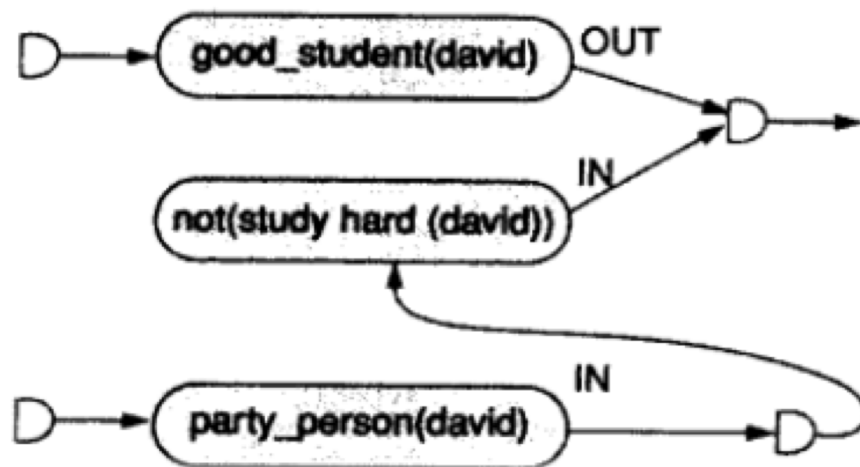
# 理由网络

- 结点：知识库中的信念
- 理由：支持结点上的信念
- 联系： IN, 支持结点成立的信念集合； OUT, 不支持结点成立的信念集合

$\forall x \text{ good\_student}(x) \wedge M \text{ study\_hard}(x) \rightarrow \text{study\_hard}(x)$

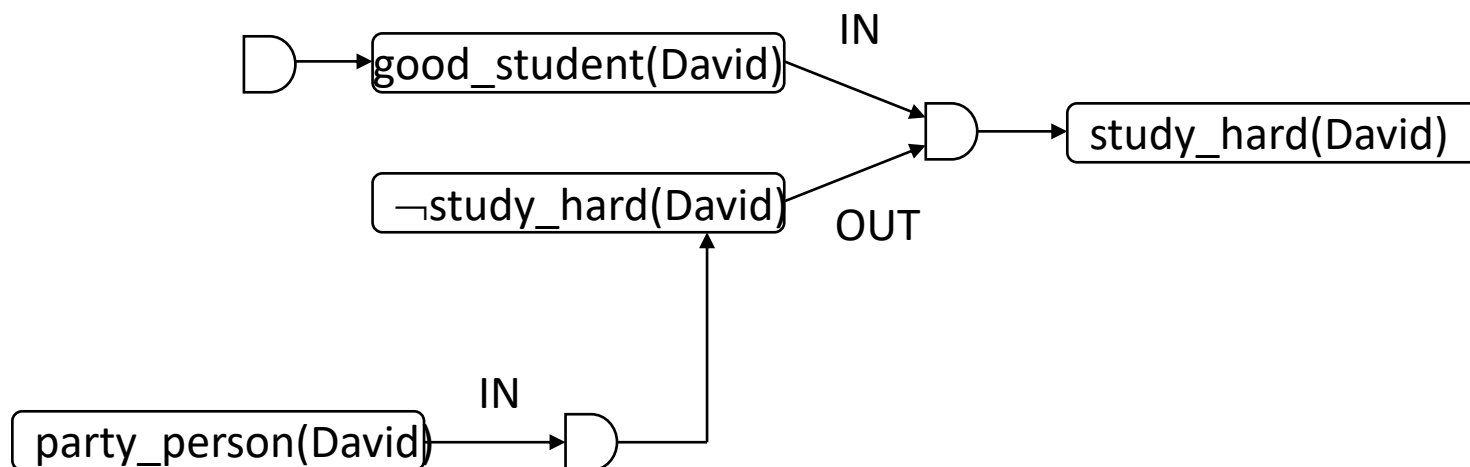
$\forall y \text{ party\_person}(y) \rightarrow \neg \text{study\_hard}(x)$

$\text{good\_student}(\text{david})$



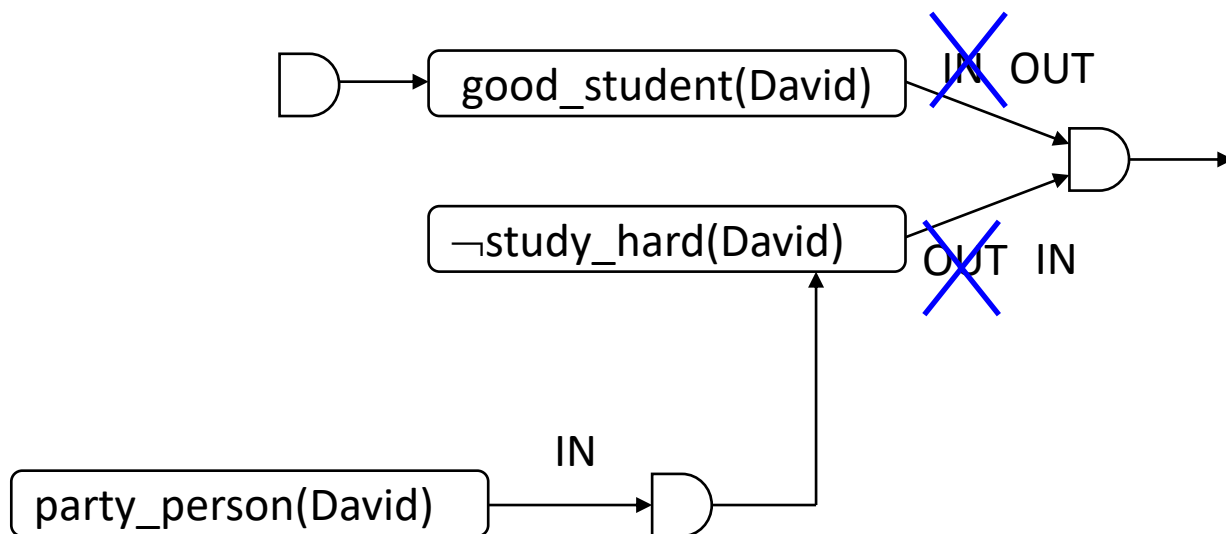
# 理由网络的更改

如果增加了 `party_person(David)`



# 理由网络的更改

如果增加了 `party_person(David)`



# 基于最小模型的逻辑

# 模型

- **模型**：对所有变量赋值均满足谓词表达式集合S的解释
- 存在问题：实际的领域无需任意多的谓词
- **最小模型**：对所有变量赋值满足谓词表达式S的模型中，最小的那个模型

例子：野人和修道士过河

谓词：船会沉吗？风向？水流？

不是必须的！

# 封闭世界假设

- 求解所需的谓词会被创建
- 实现否定的语义：若不含有 $p(X)$ 为真，那么 $\text{not}(p(X))$ 就为真
- 封闭世界是个完整的基于逻辑的规范系统

例子：某学生是不是某班级注册会员，未明确列出则不是

例子：两个城市之间是否有直达的班机，未查询到则不存在

# 限定

□ 给定问题求解相关的谓词

□ “元谓词” 划界并限定谓词可能的解释

□ 元规则使一些公式产生最小扩展

例1  $\forall x \text{ bird}(x) \wedge \text{not}(\text{abnormal}(x)) \rightarrow \text{fly}(x)$

例2  $\text{isblock}(A) \wedge \text{isblock}(B) \wedge \text{isblock}(C)$

$\forall x (\text{isblock}(x) \leftarrow ((x=A) \vee (x=B) \vee (x=C)))$



# 集合覆盖

# 集合覆盖

考虑反绎推理中解释的产生：一个反绎的解释为谓词的覆盖。

例子：在诊断问题中，某一现象的解释可能有多种，假设存在5种解释(H1-H5)与5种现象存在如下关系：

$H1 \rightarrow O1, O2, O3$

$H2 \rightarrow O1, O4$

$H3 \rightarrow O2, O3, O5$

$H4 \rightarrow O5$

$H5 \rightarrow O2, O4, O5$

现观测到O1, O2 和 O5，那么我们的最佳解释是什么呢？

{H1, H4}解释了全部但多余O3 (未观测)

{H2, H5}解释了全部但多余O4 (2次) (未观测)

{H1, H3}解释了全部但多余O3 (2次)

{H1, H4, H5}解释了全部但H4多余

问题转化成：寻找{O1, O2, O5}的最小集合覆盖(最小集合覆盖算法)

# 确信度理论

# 确信度概念

## □ 确信度：

例：沈强今天没来上课，理由是头疼。

可能一：真的头疼，理由为真；

可能二：没有头疼，理由为假。

} 某种程度上的相信

## □ Stanford确信度理论：

$MB(H|E)$ : 给定证据E时，假设H的可信度量

$MD(H|E)$ : 给定证据E时，假设H的不可信度量

# 不确定性知识的表示

在CF模型中，知识是用产生式规则表示的，其一般形式为：

IF E THEN H (CF(H|E))

其中，E是知识的前提条件；H是知识的结论；CF(H|E)是知识的确信度。

例: IF 发烧 AND 流鼻涕 THEN 感冒 (0.8)

表示当某人确实有“发烧”及“流鼻涕”症状时,则有80%的把握是患了感冒。

说明:

(1) E可以是单一条件,也可以是复合条件。

例如:  $E = (E_1 \text{ OR } E_2) \text{ AND } E_3 \text{ AND } E_4$

(2) H可以是单一结论,也可以是多个结论

# (不)可信度量和概率

$$MB(H|E) = \begin{cases} 1 & P(H) = 1 \\ \frac{\max\{P(H|E), P(H)\} - P(H)}{1 - P(H)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$MD(H|E) = \begin{cases} 1 & P(H) = 0 \\ \frac{\min\{P(H|E), P(H)\} - P(H)}{-P(H)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$CF(H|E) = MB(H|E) - MD(H|E)$$

## MB和MD的关系

(1) 当 $MB(H, E) > 0$ 时, 有 $P(H|E) > P(H)$ , E的出现增加了H的概率

(2) 当 $MD(H, E) > 0$ 时, 有 $P(H|E) < P(H)$ , E的出现降低了H的概率

# 确信度的性质

## □ 互斥性

同一证据不可能既增加对H的信任程度，又同时增加对H的不信任程度，故MB与MD是互斥的。

即有如下互斥性：

当 $MB(H, E) > 0$ 时， $MD(H, E) = 0$ ；当 $MD(H, E) > 0$ 时， $MB(H, E) = 0$

## □ 值域

$$0 \leq MB(H|E) \leq 1, 0 \leq MD(H|E) \leq 1, -1 \leq CF(H|E) \leq 1$$

# 确信度的性质

## □ 典型值

- (1) 当 $CF(H|E)=1$ 时，有 $P(H|E)=1$ ，E所对应证据的出现使H为真。  
此时， $MB(H|E)=1$ ， $MD(H|E)=0$ 。
- (2) 当 $CF(H|E)=-1$ 时，有 $P(H|E)=0$ ，E所对应证据的出现使H为假。  
此时， $MB(H|E)=0$ ， $MD(H|E)=1$ 。
- (3) 当 $CF(H|E)=0$ 时，有 $MB(H|E)=0$ ， $MD(H|E)=0$ ，E所对应证据的出现不证实H，也不否认H。

$$CF(H|E)=MB(H|E)-MD(H|E)$$



# 确信度的性质

实际应用中， $P(H)$ 和 $P(H|E)$ 的值难以获得，因此 $CF(H|E)$ 的值要求由领域专家直接给出。

## 原则:

1. 证据的出现越是支持 $H$ 为真，使 $CF(H|E) > 0$ ， $CF(H|E)$ 的值越大
2. 证据的出现越是支持 $H$ 为假，使 $CF(H|E) < 0$ ， $CF(H|E)$ 的值越小
3. 若证据的出现与否与 $H$ 无关，则使 $CF(H|E) = 0$

# 证据不确定性的表示

证据E的不确定性也是用确信度来表示的，其取值范围也为  $[-1,1]$

- (1) 若E为初始证据，其值由用户给出；
- (2) 若E为中间结论，其值可通过计算得到。

证据确信度的含义：

$CF(E)=1$ ： 证据E肯定它为真

$CF(E)=-1$ ： 证据E肯定它为假

$CF(E)=0$ ： 对证据E一无所知

$0 < CF(E) < 1$ ： 证据E以某种程度(大小为 $CF(E)$ )为真

$-1 < CF(E) < 0$ ： 证据E以某种程度(大小为 $CF(E)$ )为假

# 证据不确定性的表示

## 1. 否定证据不确定性的计算

$$CF(\neg E) = - CF(E)$$

## 2. 组合证据不确定性的计算

**合取：**当规则前提(组合证据)是多个单一证据的组合，即  $E=E_1$  and  $E_2$  and ... and  $E_n$  时，若已知  $CF(E_1), CF(E_2), \dots, CF(E_n)$ ，则

$$CF(E) = \min\{CF(E_1), CF(E_2), \dots, CF(E_n)\}$$

**析取：**当规则前提(组合证据)是多个单一证据的析取，即  $E=E_1$  or  $E_2$  or ... or  $E_n$  时，若已知  $CF(E_1), CF(E_2), \dots, CF(E_n)$ ，则

$$CF(E) = \max\{CF(E_1), CF(E_2), \dots, CF(E_n)\}$$

# 不确定性的更新

□ 原理：每一次运用不确定性知识，都需要由证据的不确定性和知识的不确定性去计算结论的不确定性。

□ 不确定性的更新公式：

$$CF(H)=CF(H, E) \times \max \{0, CF(E)\}$$

(1) 若 $CF(E)<0$ ，则 $CF(H)=0$ ，即该模型没考虑E为假对H的影响

(2) 若 $CF(E)=1$ ，则 $CF(H)=CF(H,E)$ ，即规则强度 $CF(H,E)$ 实际上是在E为真时，H的确信度

# 例子

知识库中的规则：  $(P1 \text{ AND } P2) \text{ OR } P3 \rightarrow R1 (0.7) \text{ and } R2 (0.3)$

P1、P2、P3是规则的前提(证据E)，R1、R2是规则的结论(假设H)，已知 $CF(P1) = 0.6$   $CF(P2) = 0.4$   $CF(P3) = 0.2$

$$CF(P1(0.6) \text{ AND } P2(0.4)) = \text{MIN}(0.6, 0.4) = 0.4.$$

$$CF((0.4) \text{ OR } P3(0.2)) = \text{MAX}(0.4, 0.2) = 0.4.$$

那么

R1的CF是0.7，所以R1添加到特定知识集时的CF为 $(0.7) \times (0.4) = 0.28$ .

R2的CF是0.3，所以R2添加到特定知识集时的CF为 $(0.3) \times (0.4) = 0.12$ .

# 结论不确定性的合成

- 原理：多条知识支持同一个结论，且这些知识的前提相互独立，结论的确信度不相同，可利用不确定性的合成算法求出结论的综合确信度。

设有知识: IF E1 THEN H ( $CF(H|E1)$ ), IF E2 THEN H ( $CF(H|E2)$ )

则结论H 的综合确信度可分以下三步计算:

- 分别对每条知识求出其 $CF(H)$ 。即  $CF_1(H)=CF(H|E1) \times \max\{0, CF(E1)\}$ ,  $CF_2(H)=CF(H|E2) \times \max\{0, CF(E2)\}$
- 用如下公式求E1与E2对H的综合确信度

# 结论不确定性的合成公式

$$CF(H) = \begin{cases} CF1(H) + CF2(H) - CF1(H) * CF2(H) & \text{若 } CF1(H) \geq 0 \\ & \text{且 } CF2(H) \geq 0 \\ CF1(H) + CF2(H) + CF1(H) * CF2(H) & \text{若 } CF1(H) < 0 \\ & \text{且 } CF2(H) < 0 \\ \frac{CF1(H) + CF2(H)}{1 - \min\{|CF1(H)|, |CF2(H)|\}} & \text{若 } CF1(H) \text{ 与} \\ & \text{且 } CF2(H) \text{ 异号} \end{cases}$$

合并计算公式所含特性：

- ✓ 计算出来的CF值保证在1和-1之间
- ✓ 在合并相反符号的CF时，它们能够相互削弱
- ✓ 合并后的CF是一个单调函数

# 例子

知识库中的规则：

R1: IF E1(是鸟) THEN H(会飞) (0.9)

R2: IF E2(有翅膀) THEN H(会飞) (0.6)

R3: IF E3(胎生) THEN H(会飞) (-0.5)

R4: IF E4(有羽毛) AND (E5(恒温) OR E6(两足)) THEN E1 (0.8)

已知:  $CF(E2)=0.8$ ,  $CF(E3)=0.6$ ,  $CF(E4)=0.5$ ,  $CF(E5)=0.6$ ,  
 $CF(E6)=0.8$

那么:  $CF(H)$ ?



# 例子

解：由 $r_4$ 得到：

$$\begin{aligned} CF(E_1) &= 0.8 \times \max\{0, CF(E_4 \text{ AND } (E_5 \text{ OR } E_6))\} \\ &= 0.8 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), CF(E_5 \text{ OR } E_6)\}\} \\ &= 0.8 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), \max\{CF(E_5), CF(E_6)\}\}\} \\ &= 0.8 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), \max\{0.6, 0.8\}\}\} \\ &= 0.8 \times \max\{0, \min\{0.5, 0.8\}\} \\ &= 0.8 \times \max\{0, 0.5\} = 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{由}r_1\text{得到: } CF_1(H) &= CF(H, E_1) \times \max\{0, CF(E_1)\} \\ &= 0.9 \times \max\{0, 0.4\} = 0.36\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{由}r_2\text{得到: } CF_2(H) &= CF(H, E_2) \times \max\{0, CF(E_2)\} \\ &= 0.6 \times \max\{0, 0.8\} = 0.48\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{由}r_3\text{得到: } CF_3(H) &= CF(H, E_3) \times \max\{0, CF(E_3)\} \\ &= -0.5 \times \max\{0, 0.6\} = -0.3\end{aligned}$$

根据结论不精确性的合成算法,  $CF_1(H)$ 和 $CF_2(H)$ 同号, 有:

$$\begin{aligned}CF_{1,2}(H) &= CF_1(H) + CF_2(H) - CF_1(H) \times CF_2(H) \\ &= 0.36 + 0.48 - 0.36 \times 0.48 \\ &= 0.84 - 0.17 = 0.67\end{aligned}$$

$CF_{1,2}(H)$ 和 $CF_3(H)$ 异号, 有:

$$\begin{aligned}CF_{1,2,3}(H) &= \frac{CF_{1,2}(H) + CF_3(H)}{1 - \min\{|CF_{1,2}(H)|, |CF_3(H)|\}} \\ &= \frac{0.67 - 0.3}{1 - \min\{0.67, 0.3\}} = \frac{0.37}{0.7} \\ &= 0.53\end{aligned}$$

即综合可信度为 $CF(H)=0.53$

# 证据理论

# DS证据理论

□ **原理：**基于收集到的证据数量，将概率论中的单点赋值扩展为集合赋值，处理由“不知道”所引起的不确定性。

□ **形式定义：**

考虑命题集，赋给区间值[belief, plausibility]，每个命题的可信度(belief measure)必须在这个区间内。

1. 从相关问题的主观概念得到其可信度的思想
2. 基于相互独立的证据时，合并可信度的规则

1960'，哈佛大学数学家A. P. Dempster, 利用上下限概率解决多值映射。

1976，其学生G. Shafer引入信任函数《A Mathematical Theory of Evidence》，基于证据和组合处理不确定性推理。

# 概率密度函数

□ 例子：  $\Omega = \{\text{红}, \text{黄}, \text{绿}\}$ ，则定义一个基本函数  $m$ ，

$$m: 2^\Omega \rightarrow [0, 1], \text{ 且满足 } m(\Phi) = 0, \sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1$$

$m$  是定义在  $2^\Omega$  的概率密度函数。

$$2^\Omega = (\{\}, \{\text{红}\}, \{\text{黄}\}, \{\text{绿}\}, \{\text{红, 黄}\}, \{\text{红, 绿}\}, \{\text{黄, 绿}\}, \{\text{红, 黄, 绿}\})$$

$$m = (0, 0.3, 0, 0.1, 0.2, 0.2, 0, 0.2)。$$

# 信任函数

## 信任函数：

$$\text{Bel}: 2^\Omega \rightarrow [0,1], \text{Bel}(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B), \text{ 其中 } A \subseteq \Omega$$

Bel为下限函数，Bel(A)表示对A的总信任度

## 例子：

$$\text{Bel}(\Phi) = m(\Phi) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Bel}(\{\text{红}, \text{黄}, \text{绿}\}) = & m(\{\}) + m(\{\text{红}\}) + m(\{\text{黄}\}) + m(\{\text{绿}\}) + m(\{\text{红}, \text{黄}\}) + m(\{\text{红}, \\ & \text{绿}\}) + m(\{\text{黄}, \text{绿}\}) + m(\{\text{红}, \text{黄}, \text{绿}\}) = 1 \end{aligned}$$

# 似然函数

## □ 似然函数：

$$Pl: 2^\Omega \rightarrow [0,1], Pl(A) = 1 - Bel(\neg A), \text{ 其中 } A \subseteq \Omega, \neg A = \Omega - A$$

$Pl$ 为上限函数， $Bel(\neg A)$ 表示对 $\neg A$ 的总信任度，即 $A$ 为假的信任度，因此 $Pl(A)$ 表示对 $A$ 为非假的信任度

## □ 例子：

$$\begin{aligned} Pl(\{\text{红}\}) &= 1 - Bel(\neg\{\text{红}\}) = 1 - Bel(\{\text{黄}, \text{绿}\}) = 1 - (m(\{\text{黄}\}) + m(\{\text{绿}\}) + m(\{\text{黄}, \text{绿}\})) \\ &= 1 - 0 - 0.1 - 0 = 0.9 \end{aligned}$$

这里的0.9是“红”为非假的信任度。由于“红”为真的精确信任度为0.3，而剩下的 $0.9 - 0.3 = 0.6$ ，则是知道非假，但却不能肯定为真的那部分。

# 信任函数与似然函数

- A不为假，并不代表A一定为真(A为命题集合，当情况较少时，对它的信念存在“不知道”，即无法判断的可能)，即有：

$$Pl(A) \geq Bel(A) \text{ (可根据定义推导得到)}$$

- 称 $Bel(A)$ 和 $Pl(A)$ 为对A信任程度的下限和上限，记为：

$$A[Bel(A), Pl(A)]$$

- $Pl(A) - Bel(A)$ ：描述“不知道”的情况



# 证据的合并

## □ 马航370空难

□ 信息源A(美联社): 可信赖为0.9, 不可信赖为0.1

□ 信息源B(BBC): 可信赖为0.8, 不可信赖为0.2



主观概率

## □ 两种情况

□ 情况一: A,B都报道是被导弹击中的;

□ 情况二: A,B报道不一致。A认为是导弹击中, B认为不是

# 证据相同情况下的证据合并

## □ 情况一

- 如果信赖A：被导弹击中的信任度 $\text{Bel}(M)=0.9$ ；
- 如果不信赖A：没有被导弹击中的信任度 $\text{Bel}(\neg M)=0$ ，因此 $\text{Pl}(M)=1-0=1$

## □ 同理

- 如果信赖B：被导弹击中的信任度 $\text{Bel}(M)=0.8$ ；
- 如果不信赖B：没有被导弹击中的信任度 $\text{Bel}(\neg M)=0$ ，因此 $\text{Pl}(M)=1-0=1$

A或B至少一个可信赖： $1-0.1*0.2=0.98$

因此，被导弹击中的可信度为 $[0.98,1]$

三人成虎！

# 证据相左情况下的证据合并

□ 由于结论不同，导致信息源不可能同时可信赖

□ 如果只有A可信赖： $0.9*(1-0.8)=0.18$ ；

□ 如果只有B可信赖： $0.8*(1-0.9)=0.08$ ；

□ A和B都不可信赖： $(1-0.8)*(1-0.9)=0.02$ ；

□ A可信赖的后验概率： $0.18/0.28=0.643$

□ B可信赖的后验概率： $0.08/0.28=0.286$

接受A的观点，被导弹击中的信任度为0.643

接受B的观点，不是被导弹击中的信任度0.286

因此，被导弹击中的可信度为 $[0.643, 0.714]$

兼听则明！

# Dempster证据合并规则

对于  $\forall A \subseteq \Omega$ ,  $\Omega$  上的两个m函数  $m_1, m_2$ ,  
其Dempster合成规则为:

$$m_1 \oplus m_2(A) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = A} m_1(B) \times m_2(C)$$

$$K = \sum_{B \cap C \neq \Phi} m_1(B) \times m_2(C) = 1 - \sum_{B \cap C = \Phi} m_1(B) \times m_2(C)$$

- K为冲突因子, 反应证据的冲突程度
- $1/K$ 为归一化因子, 相当于在组合中将空集(冲突)等比例分配给各个集合
- 前提: 证据是相互独立的。

# 更复杂的例子

假设Q表示我们关注的领域，包含4个假设：一个病人患伤寒(C)、流感(F)、偏头疼(H)或者脑膜炎(M)。我们的任务是对Q之内的假设集赋予信念度量。Q中元素可看成是相互独立的假设。

利用DS方法直接操作假设集来处理交叉影响问题。

(1) 获取证据“发烧”，支持信念1:  $m_1\{C,F,M\}=0.6$ , 则 $m_1\{Q\}=0.4$ ，这里 $m_1\{Q\}$ 表示的信念的剩余分布/是指Q中所有其他可能的信念；

(2) 获取新证据“反胃恶心”，支持信念2:  $m_2\{C,F,H\}=0.7$ ，则 $m_2\{Q\}=0.3$ ，用Dempster规则合并信念 $m_3$ 得到：

$m_1$	$m_2$	$m_3$
$m_1\{C,F,M\} = 0.6$	$m_2\{C,F,H\} = 0.7$	$m_3\{C,F\} = 0.42$
$m_1(Q) = 0.4$	$m_2\{C,F,H\} = 0.7$	$m_3\{C,F,H\} = 0.28$
$m_1\{C,F,M\} = 0.6$	$m_2(Q) = 0.3$	$m_3\{C,F,M\} = 0.18$
$m_1(Q) = 0.4$	$m_2(Q) = 0.3$	$m_3(Q) = 0.12$

# 更复杂的例子

扩展：  $m_4\{M\}=0.8$ ，则  $m_4\{Q\}=0.2$ ，合并扩展出现空信念集。

$m_3$	$m_4$	$m_5$ (without denominator)
$m_3\{C,F\} = 0.42$	$m_4\{M\} = 0.8$	$m_5\{ \} = 0.336$
$m_3(Q) = 0.12$	$m_4\{M\} = 0.8$	$m_5\{M\} = 0.096$
$m_3\{C,F\} = 0.42$	$m_4(Q) = 0.2$	$m_5\{C,F\} = 0.084$
$m_3(Q) = 0.12$	$m_4(Q) = 0.2$	$m_5(Q) = 0.024$
$m_3\{C,F,H\} = 0.28$	$m_4\{M\} = 0.8$	$m_5\{ \} = 0.224$
$m_3(C,F,M) = 0.18$	$m_4\{M\} = 0.8$	$m_5\{M\} = 0.144$
$m_3\{C,F,H\} = 0.28$	$m_4(Q) = 0.2$	$m_5\{C,F,H\} = 0.056$
$m_3(C,F,M) = 0.18$	$m_4(Q) = 0.2$	$m_5\{C,F,M\} = 0.036$

$m_5$ 最终的信念函数是：

$$m_5\{M\} = 0.545, m_5\{C,F\} = 0.191, m_5\{ \} = 0.56,$$

$$m_5\{C,F,H\} = 0.127, m_5\{C,F,M\} = 0.082, m_5\{Q\} = 0.055$$

# 练习

1. 假设在2001年911事件前，布什总统分别接到中央情报局(CIA)和国家安全局(NSA)的密报，内容是中东地区某组织要对美国发动突然袭击。其证据如下表。请给出证据合成后的结果。

	CIA	NSA	BUSH
{本}	0.4	0.2	
{萨}	0.3	0.2	
{霍}	0.1	0.05	
{本,萨}	0.1	0.5	
{本,萨,霍}	0.1	0.05	

# 总结

1. 操作符与模态的扩展，用以处理不确定性
2. 非单调推理下的信念回收机制
3. Stanford确信度理论建立在大量现象的基础上，区分支持度和不支持度
4. DS证据理论基于命题集，讨论缺乏证据合并、启发式规则固有导致的不确定性



# 思考和讨论

1. 逻辑表示：多值逻辑/模态逻辑/时序逻辑/高阶逻辑？
2. 非单调推理和真值维护。
3. 确信度理论与证据理论的区别。
4. 证据理论与概率论的区别。
5. 讨论“Zadeh”悖论。
6. 学习模糊集和模糊推理、粗糙集和粗糙推理。

谢谢！