作 业 纸

院系________ 班级________ 姓名________ 第 页

集类与测度.

§1. 集类与单调类定理.

(一). 半集代数. $[a,b)$.

Def. 设 φ 为 Ω 的子集类, 若. 1) $\Omega\in\varphi$ 2) $A,B\in\varphi\Rightarrow AB\in\varphi$. 3). $A\in\varphi\Rightarrow\exists$ 两两不相交 $A_1,\cdots,A_n\in\varphi$ 使 $A^c=\sum_{i=1}^{n}A_i$ 则称 φ 为一个半集代数

prop. 在1)与2)之下, 3) $\Leftrightarrow$ 3'): $\forall A,B\in\varphi$, $\exists$ 两两不相交的 $A_1,\cdots,A_n\in\varphi$. 使 $B-A=\sum_{i=1}^{n}A_i$

证: "$\Leftarrow$" $B=\Omega$

"$\Rightarrow$" $B-A=BA^c=B(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}BA_i$ $BA_i\in\varphi$.

(二) 集代数

Def. 设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 子集类, 若 1) $\Omega\in\mathcal{F}$, 2) $A,B\in\mathcal{F}\Rightarrow \underset{AB^c}{\overset{\parallel}{A-B}}\in\mathcal{F}$. 则称 $\mathcal{F}$ 为集代数

prop. 集代数对于集合的运算封闭. (有限次).

证: 1) $A\in\mathcal{F}$, $\Rightarrow A^c=\Omega-A\in\mathcal{F}$.

2). $A,B\in\mathcal{F}\Rightarrow AB=A-B^c\in\mathcal{F}$.

3) $A,B\in\mathcal{F}\Rightarrow A\cup B=(A^c\cap B^c)^c\in\mathcal{F}$.

Thm. 设 φ 为半集代数, 令 $\mathcal{F}(\varphi)=\{\sum_{i=1}^{n}A_i: n\geq1, A_1,\cdots,A_n\in\varphi$ 两两不交$\}$, 则 $\mathcal{F}(\varphi)$. 为包含 φ 的最小集代数, 称之为由 φ 生成的集代数.

证: 1). $\Omega\in\mathcal{F}(\varphi)$ $n=1$ $A_1=\Omega$

2). $A\in\mathcal{F}(\varphi)$ 要证 $A^c\in\mathcal{F}(\varphi)$

$$\overset{\Psi}{A}=\sum_{i=1}^{n}A_i\Rightarrow A^c=\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c=\bigcap_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}A_{ij}), \quad A_i\in\varphi.\quad A_{ij}\in\varphi$$

$$=\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{m}\underbrace{\bigcap_{i=1}^{n}A_{ik_i}}_{\in\varphi}\in\mathcal{F}(\varphi).$$

3). $A,B\in\mathcal{F}(\varphi)$ $AB=(\sum_{i=1}^{n}A_i)(\sum_{i=1}^{n}B_i)=\sum_{i,j=1}^{n}\underbrace{A_iB_j}_{\overset{\varphi}{\Psi}}\in\mathcal{F}(\varphi)$.

则 $\mathcal{F}(\varphi)$ 为集代数, 显然 $\mathcal{F}(\varphi)\supset\varphi$

最小性: 设 $\mathcal{F}'$ 为集代数, 且 $\mathcal{F}'\supset\varphi$. 则 $\mathcal{F}'\supset\mathcal{F}(\varphi)$.

补充 设Φ是一些运算集合，称其集类为Φ类，如果该集类对Φ中的运算是封闭的.

Thm. $\forall$集类$\mathcal{C}$，都存在包含$\mathcal{C}$的最小Φ类，称为由$\mathcal{C}$生成的Φ类.

证 ①存在包含$\mathcal{C}$的Φ类（Ω中所有子集组成的类）.

②任意多个Φ类的交仍为Φ类

设W为Φ中一个运算，$\{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{F}_I$ 可使用W进行运算. 要证 $W(\{A_j\}_{j\in J}) \in \mathcal{F}_I$

$\forall i\in I$，$W(\{A_j\}_{j\in J}) \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_i$ （$\mathcal{F}_i$为Φ类）

③令$\Phi(\mathcal{C}) = \cap \mathcal{F}$　$\mathcal{F}$为包含$\mathcal{C}$的Φ类，则是包含$\mathcal{C}$最小Φ类.

(三). σ代数

Def. 设$\mathcal{A}$为集类，若 1) $\Omega\in\mathcal{A}$ 2) $A\in\mathcal{A} \Rightarrow A^c\in\mathcal{A}$ 3) $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathcal{A}$

则称$\mathcal{A}$为σ代数

prop. a) 在1) 2)之下，3) $\Leftrightarrow$ 3') $\{A_n\}_{n\geq1}\subset\mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in\mathcal{A}$　$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c$　$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in\mathcal{A}$.

b). σ代数 $\Rightarrow$ 集代数　令$A_1=A$，$A_2=B$. $A_n=\phi$，$n>2$　$A, B\in\mathcal{A} \Rightarrow A\cup B\in\mathcal{A}$

e.g 1) 平凡σ代数，$\mathcal{A}=\{\Omega,\phi\}$.

2) 最大σ代数，$2^{\Omega}=\{A: A\subset\Omega\}$.

3) Borel σ代数 $\Omega=\mathbb{R}^d$，$\mathcal{T}^d$是$\mathbb{R}^d$中开集类，则称$\sigma(\mathcal{T}^d)$为$\mathbb{R}^d$中Borel σ代数

$\forall A\subset\Omega \leftrightarrow I_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$

$I_A: \Omega\to\{0,1\} \in \{0,1\}^{\Omega} = 2^{\Omega}$.

(四) 单调类定理

Def. 设$\mathcal{M}$为Ω中子集类，若 1) $\forall\{A_n\}_{n\geq1}\subset\mathcal{M}$，$A_n\uparrow \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathcal{M}$.

2). $\forall\{A_n\}_{n\geq1}\subset\mathcal{M}$，$A_n\downarrow \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathcal{M}$. 则称$\mathcal{M}$为单调类

$\forall$集类$\mathcal{C}$，有包含$\mathcal{C}$的最小单调类，记作$\mathcal{M}(\mathcal{C})$.

prop $\mathcal{A}$为σ代数 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$为集代数、单调类.（σ代数＝集代数＋单调类）.

$\{A_n\}_{n\geq1}\subset\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\subset\mathcal{A}$.　$\mathcal{A}\ni\bigcup_{k=1}^{n} A_k \uparrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\in\mathcal{A}$.

Thm 设$\mathcal{F}$为集代数，则$\sigma(\mathcal{F})=\mathcal{M}(\mathcal{F})$.

证：1) $\sigma(\mathcal{F})\supset\mathcal{M}(\mathcal{F})$（$\sigma$代数是单调类，而$\mathcal{M}$为最小单调类）

2) 要证 $\sigma(\mathcal{F})\subset\mathcal{M}(\mathcal{F})$，需证$\underset{\mathcal{F}}{\mathcal{M}(\mathcal{F})}$是集代数

作 业 纸

院系______ 班级______ 姓名______ 第 页

a). $A\in m(\mathcal{F}) \overset{要证}{\Rightarrow} A^c \in m(\mathcal{F})$.

令 $m=\{A\subset\Omega: A^c\in m(\mathcal{F})\}$.

只要证 $m\supset m(\mathcal{F})$.

只要证：$m\supset\mathcal{F}$ 且为单调类

思想：要证集类 $\mathcal{C}$ 中集合有性质 P

令 m_P 为具有性质 P 的所有集合组成类

证 $m_P\supset\mathcal{C}$

a1) m 为单调类：$\{A_n\}_{n\geq1}\subset m$，$A_n\uparrow$，$A_n^c\in m(\mathcal{F})$.

$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n^c)\in m(\mathcal{F}) \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)^c\in m(\mathcal{F}) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in m$

$\downarrow$ 同理

a2) $A\in\mathcal{F} \overset{?}{\Rightarrow} A\in m \Leftrightarrow A^c\in m(\mathcal{F})$

$\Downarrow$

$A^c\in\mathcal{F}\subset m\mathcal{F}$.

b). $A.B\in m(\mathcal{F}) \overset{?}{\Rightarrow} AB\in m(\mathcal{F})$

固定 $B\in m(\mathcal{F})$，要证 $\forall A\in m(\mathcal{F})$ 则 $AB\in m(\mathcal{F})$

令 $m_B=\{A\subset\Omega: AB\subset m(\mathcal{F})\}$

要证 $m_B\supset m(\mathcal{F}) \Leftarrow m_B$ 为单调类且 $\supset\mathcal{F}$.

b1). $A_n\uparrow$ $A_n\in m_B \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)B=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_nB\in m(\mathcal{F})$

$\Updownarrow$

$A_nB\in m(\mathcal{F}) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in m_B$ 同理 $\downarrow$.

b2) 只需证 $m_B\supset\mathcal{F}$

$\forall A\in\mathcal{F}$，$AB\overset{?}{\in} m(\mathcal{F})$

先设 $B\in\mathcal{F} \Rightarrow \forall A\in\mathcal{F}$ 有 $AB\in m(\mathcal{F}) \Rightarrow m_B\supset\mathcal{F} \Rightarrow m_B\supset m(\mathcal{F})$

$\Rightarrow \forall A\in m(\mathcal{F})$，$B\in\mathcal{F} \Rightarrow AB\in m(\mathcal{F})$

$\Rightarrow AB\in m(\mathcal{F})$

Def 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 中集类 1) 如果 $\mathcal{C}$ 对交封闭，则称之为 π 系、

2) 如果 $\Omega \in \mathcal{C}$，且 $A, B \in \mathcal{C}$，$A \supset B$，则 $A - B \in \mathcal{C}$ 且对

单升极限封闭，则称之为 λ 系

prop. $\mathcal{A}$ 为 σ 代数 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 为 π 系、λ 系（σ 代数 $=$ π 系 $+$ λ 系）

$\lambda(\mathcal{C})$ 为包含 $\mathcal{C}$ 的最小 λ 系

"最小很重要"

Thm $\mathcal{C}$ 为 π 系，则 $\sigma(\mathcal{C}) = \lambda(\mathcal{C})$

证：$\sigma(\mathcal{C}) \subset \lambda(\mathcal{C})$ 只要证 $\lambda(\mathcal{C})$ 为 π 系，只要证 $\forall A, B \in \lambda(\mathcal{C})$，则 $AB \in \lambda(\mathcal{C})$.

1) 设 $A \in \mathcal{C}$，要证 $\forall B \in \lambda(\mathcal{C})$ 则 $AB \in \lambda(\mathcal{C})$

令 $\mathcal{M}_A = \{B \subset \Omega : AB \in \lambda(\mathcal{C})\}$. 要证 $\mathcal{M}_A \supset \lambda(\mathcal{C})$

只需证 $\mathcal{M}_A \supset \mathcal{C}$，且 $\mathcal{M}_A$ 为 λ 系

① $B \in \mathcal{C}$，$AB \in \mathcal{C} \Rightarrow B \in \mathcal{M}_A$

证其为 λ 系 $\leftarrow$ ② $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_A$，$B_1 \supset B_2$ $\quad A(B_1 - B_2) = \underset{\lambda(\mathcal{C})}{\underset{\Uparrow}{AB_1}} - \underset{\lambda(\mathcal{C})}{\underset{\Uparrow}{AB_2}} \in \lambda(\mathcal{C}) \Rightarrow B_1 - B_2 \in \mathcal{M}_A$

$B_n \uparrow$ $\quad B_n \in \mathcal{M}_A$，$AB_n \uparrow$ $\quad \bigcup_{n=1}^{\infty} (AB_n) \in \lambda(\mathcal{C}) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}_A$

1) ①② $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{C}$ $\quad B \in \lambda(\mathcal{C}) \Rightarrow AB \in \lambda(\mathcal{C})$

2) 若 $A \in \lambda(\mathcal{C})$ $\quad B \in \mathcal{C}$，$AB \in \lambda(\mathcal{C}) \Rightarrow B \in \mathcal{M}_A$ $\quad$ ② 同样.

$\therefore \Rightarrow$ $\quad \forall A \in \lambda(\mathcal{C})$，$B \in \lambda(\mathcal{C}) \Rightarrow AB \in \lambda(\mathcal{C})$

Thm（单调类定理）设 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$，若 1) $\mathcal{C}$ 为集代数且 $\mathcal{A}$ 为单调类

2) $\mathcal{C}$ 为 π 系，$\mathcal{A}$ 为 λ 系 $\quad$ 则 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.

应用：要证 $\sigma(\mathcal{C})$ 中集合具有性质 P，只需证 $\mathcal{C}$ 为 π 系、{具有性质 P} 为 λ 系 或 $\mathcal{C}$ 为集代数

{…} 为单调类