

2. 下列语言都是字母表  $\{0, 1\}$  上的语言。哪些是 RL，哪些不是 RL。

(1)  $\{0^{2n} \mid n \geq 1\}$

RL。有穷描述如下：

$S \rightarrow 00S \mid 00$

(2)  $\{0^{n^2} \mid n \geq 1\}$

不是 RL。证明如下：

(第一步假设)

设  $L = \{0^{n^2} \mid n \geq 1\}$ 。假设  $L$  是 RL，则它满足泵引理。不妨设  $N$  是泵引理所指的仅依赖于  $L$  的正整数，取  $z = 0^{N^2}$ 。显然  $z \in L$ 。

(第二步分析)

按照泵引理所述，必存在  $u, v, w$ 。

由于  $|v| \geq 1$ ，所以  $v$  必定是由 0 组成的非空串。

不妨设  $v = 0^k$ ， $k \geq 1$ 。此时有  $u = 0^j$  和  $w = 0^{N^2-j-k}$ 。

从而有  $uv^i w = 0^j 0^{ki} 0^{N^2-j-k} = 0^{N^2+(i-1)k}$

(第三步取数)

取  $i = N+1$  时，有  $uv^i w = 0^{N^2+Nk} = 0^{N(N+k)}$

显然， $N(N+k)$  不是平方数。

从而  $uv^i w$  不是  $L$  的句子。这与泵引理矛盾。所以  $L$  不是 RL。

(3)  $\{0^n 1^m 0^n \mid n, m \geq 1\}$

不是 RL。证明如下：

设  $L = \{0^n 1^m 0^n \mid n, m \geq 1\}$ 。假设  $L$  是 RL，则它满足泵引理。不妨设  $N$  是泵引理所指的仅依赖于  $L$  的正整数，取  $z = 0^N 1^N 0^N$ 。显然  $z \in L$ 。

按照泵引理所述，必存在  $u, v, w$ 。

由于  $|uv| \leq N$ ，并且  $|v| \geq 1$ ，所以  $v$  必定是由 0 组成的非空串。

不妨设  $v = 0^k$ ， $k \geq 1$ 。此时有  $u = 0^j$  和  $w = 0^{N-j-k} 1^N 0^N$ 。

从而有  $uv^i w = \dots = 0^{N+(i-1)k} 1^N 0^N$

取  $i = 0$  时，有  $uv^0 w = 0^{N-k} 1^N 0^N$

由于  $k \geq 1$ ，所以  $N-k$  不等于  $N$ 。

从而  $uv^0 w$  不是  $L$  的句子。这与泵引理矛盾。所以  $L$  不是 RL。

(4)  $\{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 1\}$

同上。

## 12. 构造最小的 DFA

图 1: 参考 PPT 练习题，结果如下：

