

第三章 习题讲解

20. (5)和(6)任选一

(5) $G=(V,E)$ 为一个无向图, 则 $\bigcup_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ 。

证明:

(1) $|V|=1$ 时, $|E|=0$, $\bigcup_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 0$ 成立。

(2) 设 $|E|=m$, 假设 $|V|=n > 1$ 时成立, 即 $\bigcup_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 2m$

当 $|V|=n+1$ 时, 设 $V = V' \cup \{v_0\}$, $V' \cap \{v_0\} = \emptyset$, $\bigcup_{v \in V'} \deg(v) = 2|E'| = 2m$

若 v_0 与 $0 \leq k \leq n$ 个结点相连, 则增加边数 k , $\deg(v_0) = k$, 对于 n 个结点增加度数也为 k , 所以, $\bigcup_{v \in V} \deg(v) = 2|E'| + 2k = 2(m+k) = 2|E|$

(3) 由归纳原理, $G=(V,E)$ 为一个无向图, 则 $\bigcup_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ 。

(6) $G=(V,E)$ 为一个有向图, 则 $\bigcup_{v \in V} i\deg(v) = \bigcup_{v \in V} o\deg(v) = |E|$ 。

证明:

(1) $|V|=1$ 时, $|E|=0$, $\bigcup_{v \in V} i\deg(v) = \bigcup_{v \in V} o\deg(v) = 0 = |E|$ 成立

(2) 设 $|E|=m$, 假设 $|V|=n > 0$ 时成立, 即 $\bigcup_{v \in V} i\deg(v) = \bigcup_{v \in V} o\deg(v) = |E|$ 成立

当 $|V|=n+1$ 时, 设 $V = V' \cup \{v_0\}$, $V' \cap \{v_0\} = \emptyset$, $\bigcup_{v \in V'} i\deg(v) = \bigcup_{v \in V'} o\deg(v) = |E'| = m$

设 $i\deg(v_0) = p$, $o\deg(v_0) = q$

则 $\bigcup_{v \in V} i\deg(v) = \bigcup_{v \in V'} i\deg(v) + i\deg(v_0) = (|E'| + q) + p = |E|$

$\bigcup_{v \in V} o\deg(v) = \bigcup_{v \in V'} o\deg(v) + o\deg(v_0) = (|E'| + p) + q = |E|$

(3) 由归纳原理, 当 $G=(V,E)$ 为一个有向图时, $\bigcup_{v \in V} i\deg(v) = \bigcup_{v \in V} o\deg(v) = |E|$

23. $\Sigma = \{aa, ab, bb, ba\}$, 求字符串 $aaaaabbbbba$ 的所有前缀的集合、后缀的集合、真前缀的集合、真后缀的集合。

解:

前缀集合为: $\{\varepsilon, aa, aaaa, aaaaab, aaaaabbb, aaaaabbbbba\}$

真前缀集合为: $\{\varepsilon, aa, aaaa, aaaaab, aaaaabbb\}$

后缀集合为: $\{\varepsilon, ba, bbba, abbbbba, aaabbbbba, aaaaabbbbba\}$

真后缀集合为: $\{\varepsilon, ba, bbba, abbbbba, aaabbbbba\}$

1.32. (1) 所有以0开头的串

解: $\{0\} \{0,1\}^*$

1.32. (2) 所有以0开头,以1结尾的串

解: $\{0\} \{0,1\}^* \{1\}$

1.32. (3) 所有以11开头,以11结尾的串

解: $\{11\} \cup \{111\} \cup \{11\} \{0,1\}^* \{11\}$

1.32. (4) 所有最多有一对连续的0或者最多有一对连续的1的串

解: $\{01,1\}^* \{\varepsilon, 00\} \{10,1\}^* \cup \{10,0\}^* \{\varepsilon, 11\} \{01,0\}^*$

9/10/16

1

1.32. (5) 所有最多有一对连续的0并且最多有一对连续的1的串

解:

只有一对连续的0: $\{\varepsilon, 1\} \{01\}^* \{00\} \{10\}^* \{\varepsilon, 1\}$

只有一对连续的1: $\{\varepsilon, 0\} \{10\}^* \{11\} \{01\}^* \{\varepsilon, 0\}$

没有连续的0并且没有连续的1:

$\{10\}^* \{\varepsilon, 1\} \cup \{01\}^* \{\varepsilon, 0\}$

有一对连续的0和一对连续的1:

$\{\varepsilon, 1\} \{01\}^* \{00\} \{10\}^* \{11\} \{01\}^* \{\varepsilon, 0\}$

\cup

$\{\varepsilon, 0\} \{10\}^* \{11\} \{01\}^* \{00\} \{10\}^* \{\varepsilon, 1\}$

9/10/16

2

1.32. (6) 所有长度为偶数的串

解: $\{0,1\}^{2n}, n = 1, 2, \dots$

1.32. (7) 所有长度为奇数的串

解: $\{0,1\}^{2n-1}, n = 1, 2, \dots$

1.32. (8) 所有包含子串01011的串

解: $\{1,0\}^* \{01011\} \{1,0\}^*$

1.32. (9) 所有包含3个连续0的子串

解: $\{1,0\}^* \{000\} \{1,0\}^*$

9/10/16

3

1.32. (10) 所有不包含3个连续0的串

解: $\{001, 01, 1\}^* \{\varepsilon, 0, 00\}$

1.32. (11) 所有正数第10个字符是0的串

解: $\{0,1\}^9 \{0\} \{0,1\}^*$

1.32. (12) 所有倒数第10个字符是0的串

解: $\{0,1\}^* \{0\} \{0,1\}^9$

9/10/16

4