2.3 无穷小量与无穷大量

一、无穷小(量)

二、无穷大(量)

三、无穷小(量)与无穷大(量)的关系

四、无穷小的比较 阶

五、小结

一、无穷小量

1、定义: 极限为0的变量称为该极限过程中的<u>无穷小(量)</u>.

定义 1 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小), 总存在正数δ(或正数 X), 使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ (或 $|x|>X$) 的一切 x, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|<\varepsilon$,

那末 称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时为无穷小

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$).

无穷小的等价定义：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$当$0 < |x - x_0| < \delta$时，
总有$|f(x)| < \varepsilon.$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$当$|x| > X$时，
总有$|f(x)| < \varepsilon.$

例如,

$\because \lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0,$ $\therefore$ 函数 $\sin x$ 是当 $x \to 0$ 时的无穷小 .

$\because \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0,$ $\therefore$ 函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0,$ $\therefore$ 数列 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 是当 $n \to \infty$ 时的无穷小.

注: （1）无穷小是变量,不能与很小的数混淆;

（2）0是可以作为无穷小的唯一的数;

（3）谈到无穷小量, 不能脱离极限过程.

2、无穷小与函数极限的关系:

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小.

证 必要性 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,$ 令 $\alpha(x)=f(x)-A,$

则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$ $\therefore f(x)=A+\alpha(x).$

充分性 设 $f(x)=A+\alpha(x),$

其中 $\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小 ,

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(A+\alpha(x)) = A+\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = A.$

意义:将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小).

3、无穷小的运算性质:

定理2 （1）有限个无穷小之和、差、积是无穷小.

（2）有界量与无穷小之积是无穷小.

证:（1）设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$, 显然由极限运算法则

有 $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha(x)\pm\beta(x))=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0.$

$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\beta(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0.$

（2）设函数 u 在 $U^0(x_0,\delta_1)$ 内有界，即 $|u|\le M$.

又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$

$\Rightarrow\quad 0<|u\cdot\alpha|=M|\alpha|\to 0$

$\therefore$ 当 $x\to x_0$ 时, $u\cdot\alpha$ 为无穷小.

推论1 在自变量的同一变化过程中,有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

例如,当$x \to 0$时, $x\sin\frac{1}{x}, x^2\arctan\frac{1}{x}$ 都是无穷小

注意 无穷多个无穷小的和与积未必是无穷小.

例如, $n \to \infty$时, $\frac{1}{n}$是无穷小,

但n个$\frac{1}{n}$之和为1不是无穷小.

二、无穷大

在某极限过程中绝对值无限增大的变量称为无穷大（量）.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 某一去心邻域内有定义（或 $|x|$ 大于某一正数时有定义）. 如果对于任意给定的正数 M（不论它多么大），总存在正数 δ（或正数 X），使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式 $|f(x)|>M$，

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷大，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \quad (\text{或} \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty).$$

无穷大的等价定义：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow$$

$\forall M>0, \exists \delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，

总有 $|f(x)|>M$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow$$

$\forall M>0, \exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时，

总有 $|f(x)|>M$.

特殊情形：正无穷大，负无穷大.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \quad (\text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty)$$

如：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \iff$

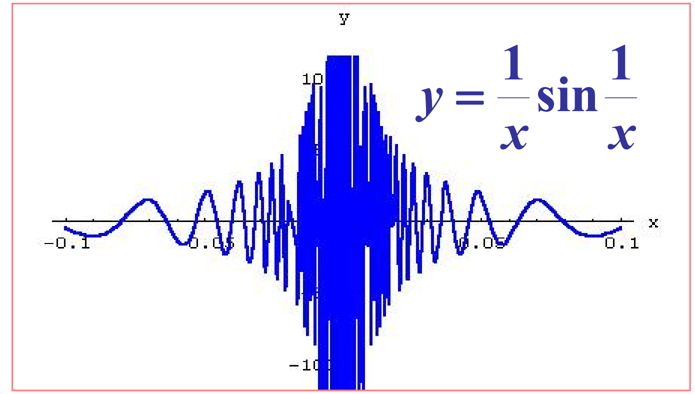
$\forall M>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>M.$

注意 （1）无穷大是变量,不能与很大的数混淆;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$是极限不存在的一种特殊情形.

（3）无穷大是一种特殊的无界变量,但是无界变量未必是无穷大.

例如，当$x \to 0$时，$y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$



是一个无界变量，但不是无穷大.

(1) $\forall M > 0$，取 $x_k = \dfrac{1}{2k\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ $(k = 0,1,2,3,\cdots)$

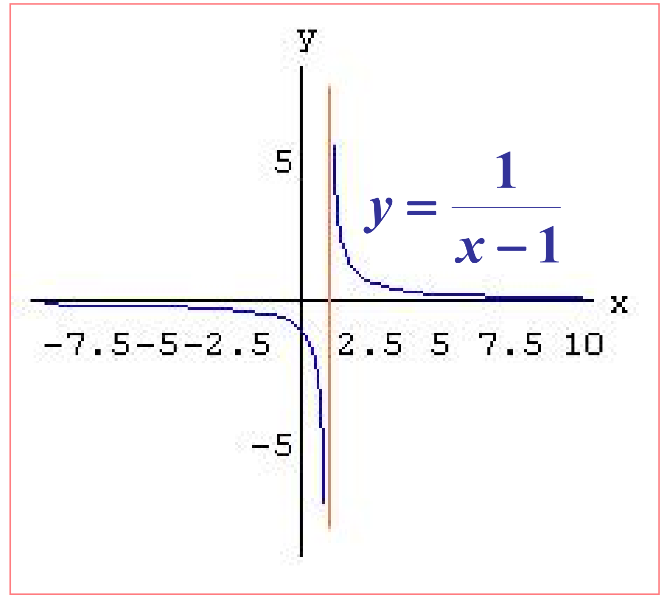
$y(x_k) = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$， 当$k$充分大时，$y(x_k) > M$． y无界，

(2) 取 $x_{k'} = \dfrac{1}{2k'\pi}$ $(k' = 0,1,2,3,\cdots)$

当 k' 充分大时， $x_{k'} < \delta$，

但 $y(x_{k'}) = 2k'\pi \sin 2k'\pi = 0 < M$． y不是无穷大.

例　证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$



证　$\forall\ M>0.$ 要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M,$

只要 $|x-1|<\dfrac{1}{M},$　取 $\delta=\dfrac{1}{M},$

当 $0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$ 时，就有 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M.$ $\therefore\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$

定义：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的垂直渐近线.

三、无穷小与无穷大的关系

定理3 (1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0.$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 (f(x) \neq 0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty.$

证 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty.$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

恒有 $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon},$ 即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon.$

$\therefore$ 当 $x \to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

反之,设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$,且 $f(x) \neq 0$.

$\therefore \forall M > 0, \exists \delta > 0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

恒有 $|f(x)| < \dfrac{1}{M}$, 由于 $f(x) \neq 0$, 从而 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| > M$.

$\therefore$ 当 $x \to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

意义 关于无穷大的讨论,都可归结为关于无穷小的讨论.

四、无穷小的比较　阶

例如，　当$x \to 0$时，$x, x^2, \sin x, x^2 \sin \frac{1}{x}$都是无穷小.

观察各极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3x} = 0,$$ x^2比$3x$要快得多；

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$ $\sin x$与x大致相同；

$(\frac{0}{0}$型)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$ 不存在. 不可比.

极限不同，反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

1. 定义: 设α,β是同一过程中的两个无穷小, 且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, 就说 β 是比 α 高阶的无穷小,

记作 $\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$, 就说 β 是比 α 低阶的无穷小;

(3) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$, 就说 β 与 α 是同阶的无穷小;

记作 $\beta = O(\alpha)$;

特殊地, 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 是等价的无穷小;

记作 $\beta \sim \alpha$;