2.2.3 函数极限存在的判别，两个重要极限

仍以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 为代表，介绍函数极限存在的条件.

对于其他类型的极限, 也有类似的结论.

一、归结原理

二、夹挤原理

三、单调有界原理

一、归结原理 (Heine定理)

定理3： 设 f 在 $U^\circ(x_0,\eta)$ 有定义．$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是：对于在 $U^\circ(x_0,\eta)$ 内以 x_0 为极限的任何数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在，并且相等.

证 (必要性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

设 $\{x_n\}\subset U^\circ(x_0,\eta)$，$x_n\to x_0$，那么对上述 δ，存在 N，当 $n>N$ 时，有 $0<|x_n-x_0|<\delta$，

所以 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$．这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

(充分性) 设任给 $\{x_n\} \subset U^\circ(x_0, \eta)$, $x_n \to x_0$,

恒有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

若 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时, 不以 A 为极限, 则存在正数 ε_0, 对于任意正数 δ, 存在 $x_\delta \in U^\circ(x_0, \delta)$, 使得

$$|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0.$$

现分别取 $\delta_1 = \eta, \delta_2 = \dfrac{\eta}{2}, \cdots, \delta_n = \dfrac{\eta}{n}, \cdots,$

存在相应的 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,\quad x_n \in U^\circ(x, \delta_n)$,

使得 $\quad |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0,\ n = 1, 2, \cdots.$

另一方面, $0 < |x_n - x_0| < \delta_n = \dfrac{\eta}{n}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

这与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ 矛盾.

注1 归结原理有一个重要应用：

若存在$\{x_n\},\{y_n\}\subset U^{\circ}(x_0)$, $x_n\to x_0$, $y_n\to x_0$, 但是

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A\neq B=\lim_{n\to\infty} f(y_n),$$

则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

注2 $x\to x_0^{+}$时的归结原理如下：

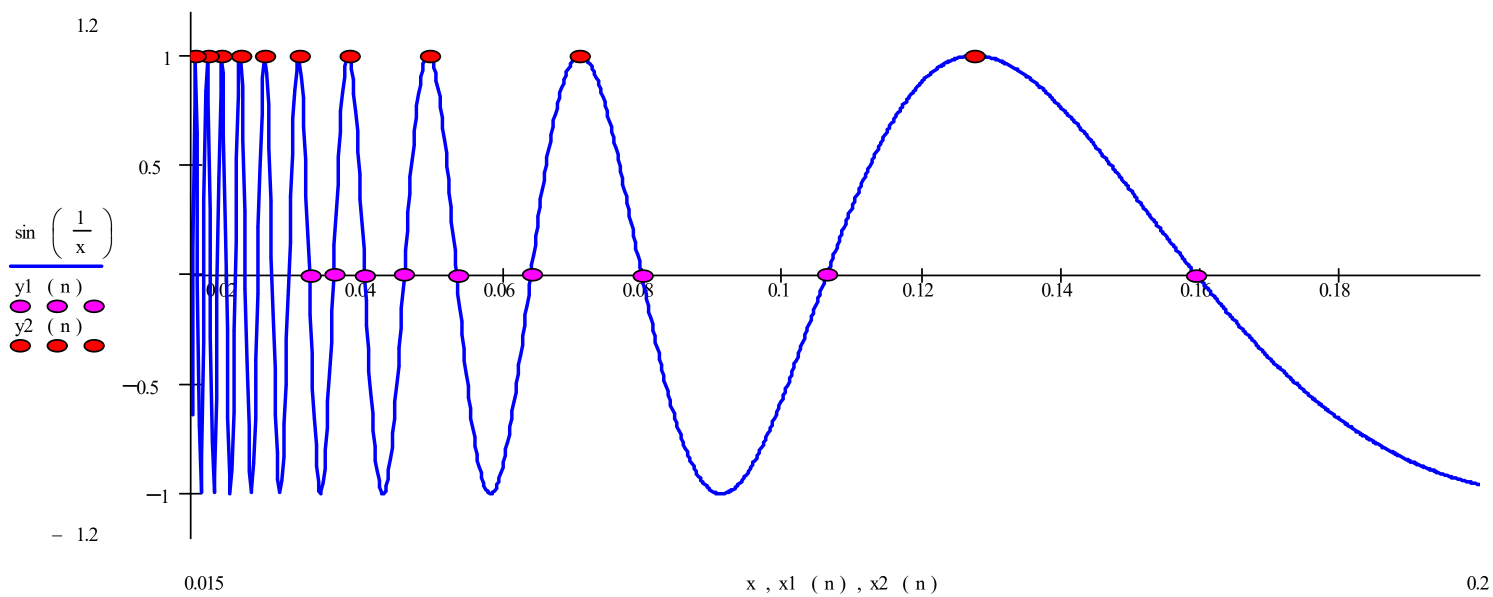
定理 设 $f(x)$ 在 x_0 的某空心右邻域 $U_{+}^{\circ}(x_0)$有定义，则

$$\lim_{x\to x_0^{+}} f(x)=A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{任给 } \{x_n\}\subset U_{+}^{\circ}(x_0),\ x_n\to x_0, \\ \text{必有 } \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A. \end{cases}$$

例16. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 都不存在.

解 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0$, $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\to 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0\neq 1=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n},$$ 故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.



二、夹挤原理

定理 8（夹挤原理） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, 且在 x_0 的某个空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)\le h(x)\le g(x)$. 那么 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$.

证 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, 所以对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon,\quad A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon.$$

再由定理的条件，得 $A-\varepsilon<f(x)\le h(x)\le g(x)<A+\varepsilon$.

这就证明了 $h(x)$ 在点 x_0 的极限存在，并且就是 A .

例 17. 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

解　由取整函数的性质，$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$. 当 $x>0$ 时，有 $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，因此由追敛性得 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$；又当 $x<0$ 时，有 $1<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1-x$，同理得 $\lim\limits_{x\to 0^-}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$. 于是求得

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

三、单调有界原理

相应于数列极限的单调有界定理，关于 $x \to x_0^+$， $x \to x_0^-$，$x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 这四种类型的单侧极限也有相应的定理.

现以 $x \to x_0^+$ 这种类型为例叙述如下：

定理 9 设 f 是定义在 $U_+^0(x_0)$ 上的单调有界函数，则右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 存在.

证 不妨设 f 在 $U_+^0(x_0)$ 上递增. 因 f 在 $U_+^0(x_0)$ 上有界，由确界原理 $\inf\limits_{x \in U_+^0(x_0)} f(x)$ 存在，记为 A． 下证 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$

下证 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

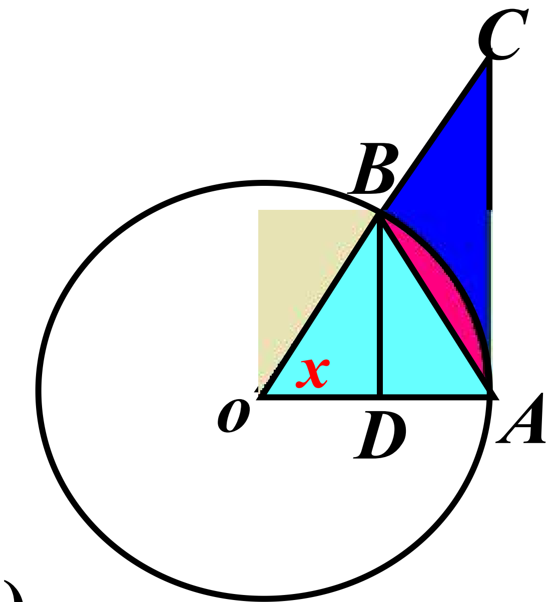
事实上，任给 $\varepsilon > 0$，按下确界定义，存在 $x' \in U_+^0(x_0)$，使得 $f(x') < A + \varepsilon$. 取 $\delta = x' - x_0 > 0$，则由 f 的递增性，对一切 $x \in (x_0, x') = U_+^0(x_0;\delta)$，有 $f(x) \le f(x') < A + \varepsilon$.

另一方面，由 $A \le f(x)$，更有 $A - \varepsilon \le f(x)$. 从而对一切 $x \in U_+^0(x_0;\delta)$ 有 $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$

这就证得 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

两个重要极限:

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$



设单位圆 O, 圆心角$\angle AOB = x$, $(0 < x < \dfrac{\pi}{2})$

作单位圆的切线，得ΔACO.

扇形OAB的圆心角为x， ΔOAB的高为BD,

于是有 $\sin x = BD$, $x =$ 弧 AB, $\tan x = AC$,

$\therefore \sin x < x < \tan x,$ 即 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1,$

上式对于 $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立. 当 $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ 时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

$\because \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{2} = 0,$ $\therefore \lim\limits_{x \to 0}(1 - \cos x) = 0,$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1,$ 又 $\because \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1,$ $\therefore \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

一般地： $$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

例19. (1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x/\alpha x}{\sin\beta x/\beta x}\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\overset{t=\arcsin x}{\underset{x=\sin t}{=}}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$$

例20. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{(\dfrac{x}{2})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2$

$=\dfrac{1}{2}$.

（2） $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

一般地：

$\lim\limits_{\square\to\infty}(1+\frac{1}{\square})^{\square} = e$ 或 $\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}} = e$

证明：当 $x \geq 1$时， 有 $[x] \leq x \leq [x]+1$,

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} \leq (1+\frac{1}{x})^{x} \leq (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1},$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]} \cdot \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]}) \quad = e,$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1} \cdot \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1} \quad = e,$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e.$$

令 $t=-x$,

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})=e.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

注 若令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x\to\infty$ 时, $t\to 0$. 可得

$$\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}=e\ .$$

例21. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1} \quad = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{-x})^{-x}} = \frac{1}{e}$.

例22. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{2+x})^{2x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x+2})^{x+2}]^2(1+\frac{1}{x+2})^{-4} \quad = e^2$.

例23. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

解 因为 $\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,

$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-\frac{n}{n-1}}\geq\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-2}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, $\frac{n-1}{n^2}\to 0$, 所以由归结原则,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}=\mathrm{e}.$$

再由迫敛性, 求得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\mathrm{e}$.

例23. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

解: $\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^n=\left[\left(1+\dfrac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}}$?