2.2.2 函数极限的性质

前面引进的六种类型的函数极限，它们都有类似于数列极限的一些性质. 这里仅以

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

为代表叙述并证明这些性质，至于其它类型的性质与证明，只要相应作一些修改即可.

性质1 (唯一性): 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 则此极限唯一.

证 不妨设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 以及 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$.

由极限的定义，对于任意的正数 ε, 存在正数 δ_1, δ_2

当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时， $|f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, (1)

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时， $|f(x) - B| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. (2)

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时， (1) 式与(2) 式均成立，所以

$$|A - B| \le |A - f(x)| + |f(x) - B| < \varepsilon .$$

由 ε 的任意性，推得 $A = B$. 这就证明了极限是唯一的.

性质2（局部有界性）

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则存在 $U^\circ(x_0)$, $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0)$上有界.

证 取 $\varepsilon=1$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|f(x)-A|<1.$$

由此得

$$|f(x)|<|A|+1.$$

这就证明了$f(x)$在某个空心邻域 $U^\circ(x_0,\delta)$ 上有界.

性质3（局部保号性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$ (或 <0)，

则对任何正数 $r<A$ (或 $r<-A$), 存在 $U^{\circ}(x_0)$, 使得

对一切 $x\in U^{\circ}(x_0)$, 有

$$f(x)>r>0 \ (\text{或}\ f(x)<-r<0\ ).$$

证 不妨设 $A>0$. 对于任何 $r\in(0,A)$, 取 $\varepsilon=A-r$,

存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \quad \Rightarrow f(x)>A-\varepsilon>r>0.$$

推论：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 且 $A<B$,

则 $\exists\delta>0$, $\forall x\in U^{0}(x_0,\delta)$, 有 $f(x)<g(x)$.

性质4（保不等式性） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，且在某邻域 $U^{\circ}(x_0)$ 内有 $f(x)\le g(x)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x).$$

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，那么对于任意 $\varepsilon>0$，分别存在正数 δ_1,δ_2，使当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有

$$f(x)>A-\varepsilon;$$

而当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $g(x)<B+\varepsilon$.

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，满足

$$A-\varepsilon<f(x)\le g(x)<B+\varepsilon,$$

从而有 $A<B+2\varepsilon$. 因为 ε 是任意正数，所以证得 $A\le B$.

性质5（四则运算法则） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在, 则 $f\pm g, f\cdot g$ 在点 x_0 的极限也存在，且

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(3) 又若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{f}{g}$ 在点 x_0 的极限也存在, 并有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

例11 求 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5}$.

解 $\because \lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 3x + 5) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 - \lim\limits_{x \to 2} 3x + \lim\limits_{x \to 2} 5$

$= (\lim\limits_{x \to 2} x)^2 - 3\lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 5$

$= 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3 \neq 0,$

$\therefore \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} x^3 - \lim\limits_{x \to 2} 1}{\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 3x + 5)} = \dfrac{2^3 - 1}{3} = \dfrac{7}{3}.$

注: 1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0{}^n+a_1x_0{}^{n-1}+\cdots+a_n=f(x_0).$$

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

若 $Q(x_0)=0$, 则商的法则不能应用.

例12. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $x\to 1$时, 分子, 分母的极限都是零. $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

先约去不为零的无穷小因子$x-1$后再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

例13. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解 $x\to\infty$时，分子、分母的极限都是无穷大. $(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型})$

先用x^3去除分子分母，分出无穷小，再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

(无穷小因子分出法)

注: 当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, 当 n = m, \\ 0, 当 n > m, \\ \infty, 当 n < m, \end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子,分母,以分出无穷小,然后再求极限.

例14. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})$.

解　$n\to\infty$时,是无限多个无穷小之和.

先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}.$$

性质6. 复合函数极限运算法则

定理：设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，

$\varphi(x)\neq a$，又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A \qquad ①$$

证：$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A \Longrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0$，当 $0<|u-a|<\eta$ 时，

有 $|f(u)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a \Longrightarrow$ 对上述 $\eta>0$，$\exists\delta_2>0$，

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $|\varphi(x)-a|<\eta$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$0<|\varphi(x)-a|=|u-a|<\eta$$

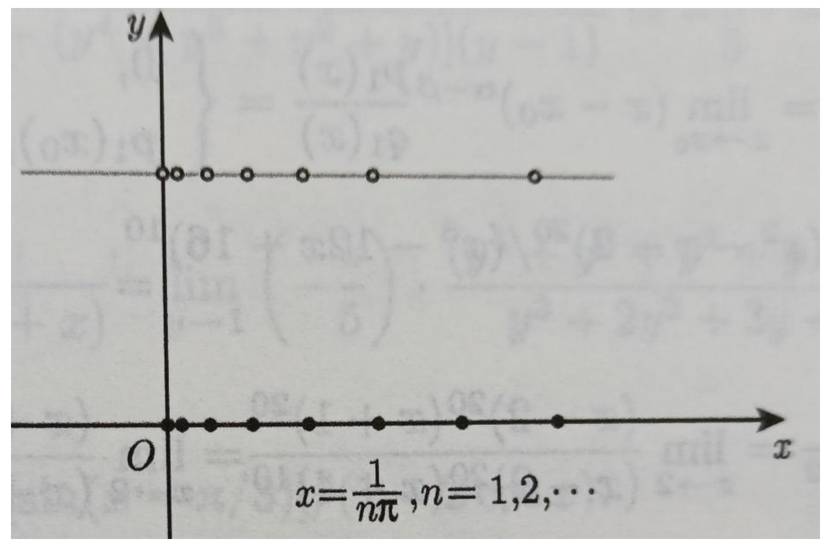
故 $|f[\phi(x)]-A|=|f(u)-A|<\varepsilon$，因此①式成立.

*注： 定理中，条件 $\varphi(x) \neq a$， $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 不能少，否则结论可能不成立. 例如，

$$u = \varphi(x) = x \sin\frac{1}{x}, \qquad y = f(u) = \begin{cases} 0, & u = 0, \\ 1, & u \neq 0 \end{cases}$$

则有 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 0$ ， $\lim\limits_{u\to 0} f(u) = 1$ ，

$$f(\varphi(x)) = \begin{cases} 0, x = 1/(n\pi), \\ 1, x \neq 1/(n\pi), \end{cases} n \in N^+$$



但 $\lim\limits_{x\to 0} f(\varphi(x))$ 不存在.

性质6（复合函数的极限运算法则）

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a\,,\, u{=}\varphi(x) \neq a\,, \\ \lim\limits_{u\to a} f(u) = A\,, \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u\to a} f(u) = A.$$

意义：复合函数极限法则实质上是变代换法则，即

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]} \xrightarrow[a = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]{\text{令 } u=\varphi(x)} \boxed{\lim_{u\to a} f(u)}$$

例15. 试确定常数 a 使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax)=0$.

解： 令 $t=\dfrac{1}{x}$，则

$$0=\lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{t^3}}-\frac{a}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}-a}{t}$$

$$\therefore\quad \lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{t^3-1}-a\right]=0$$

故 $\quad -1-a=0$

因此 $\quad a=-1$