大学物理(下)

华 中 科 技 大 学
张智
zzhang@hust.edu.cn

第三篇

电磁学

动生电动势

$$\varepsilon_i=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

$d\vec{l}$：导线上任意选定的一小段（足够短）

$\vec{v}$：以上这段导线的速度

$\vec{B}$：以上这段导线处的磁感应强度

$$\varepsilon=\int_-^+\vec{E}_K\cdot d\vec{l}$$

感生电动势

$$\varepsilon_i=-\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}=\oint\underbrace{\vec{E}_i}_{\text{感应电场}}\cdot d\vec{l}$$

$$\begin{cases}\oint\vec{E}_i\cdot d\vec{s}=0\\ \oint\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=-\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}\end{cases}$$

感应电场 $\vec{E}_i$

由于磁场随时间变化而产生的电场，无源、有旋。

注意：

（1）"L"的两个定义式只有在 L 是常量时是一致的。

（2）"L"是线圈电磁惯性的量度。

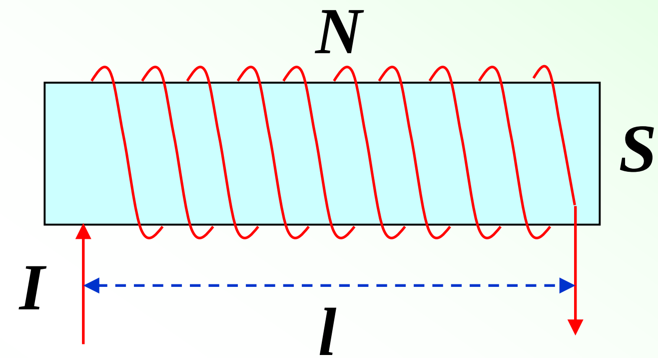
$$\begin{cases} F=ma \\ \varepsilon_L=-L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

(4)自感系数 L 的计算：

例：求细长直螺线管的自感系数（l、S、N）

假定螺线管通入电流 I，因管中各处的 $\vec{B}$ 是均匀的.

$$\psi=N\varphi=NBS=N\mu_0 nIS=\mu_0 IS\frac{N^2}{l}$$



真空中 $L=\dfrac{\psi}{I}=\mu_0 S\, N^2\big/ l=\mu_0 n^2 V_{体}$

$$\boxed{L=\frac{\psi}{I}}$$

介质中 $\mu_0\rightarrow\mu_0\mu_r$

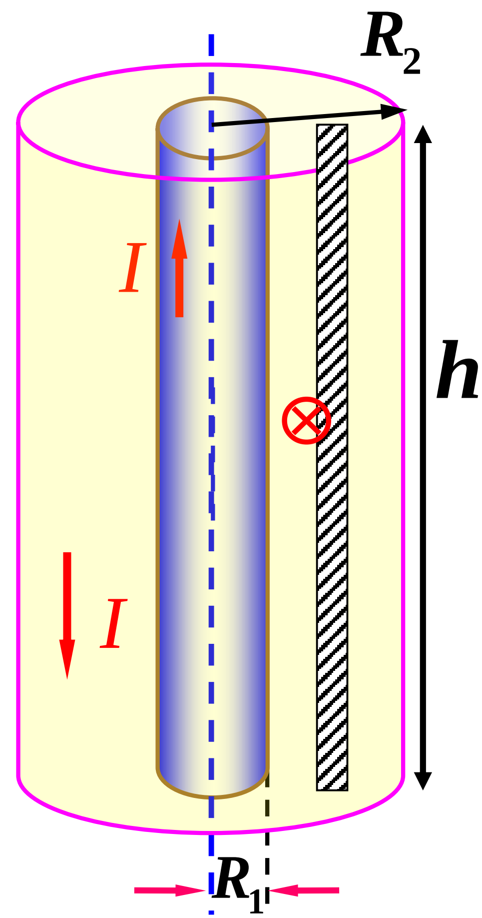
注意： （1）铁磁质不能用上式计算

（2）不仅线圈有自感，任何电路都有

例. 计算同轴电缆单位长度上的自感L。

解　设电缆里通有电流I，则两圆筒间的磁场为

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad R_1 \le r \le R_2$$



长为h的电缆上，通过面元*hdr*的磁通量为

$$d\Phi = B \cdot h \cdot dr = \frac{\mu I}{2\pi r} hdr$$

通过截面的全磁通：

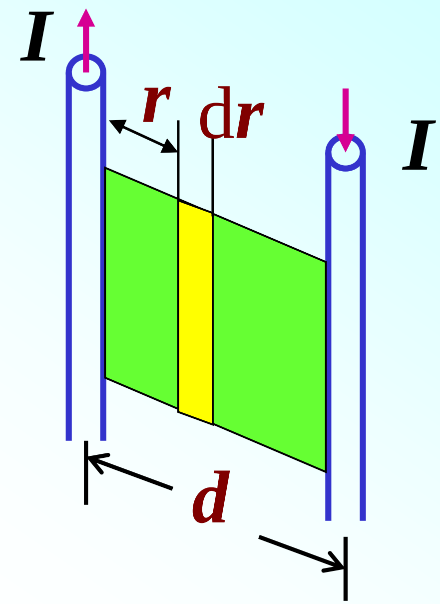
$$\Psi = \Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I}{2\pi r} hdr = \frac{\mu I h}{2\pi r} ln \frac{R_2}{R_1}$$

单位长度电缆的自感

$$L = \frac{\Psi}{h \cdot I} = \frac{\mu}{2\pi r} ln \frac{R_2}{R_1}$$

L称为自感系数、电感、自感

例： 两根平行输电导线，中心距离为d，半径为a，求：两导线单位长度上的分布电感（$d>>a$）。



解： 如图，设导线中有电流I.

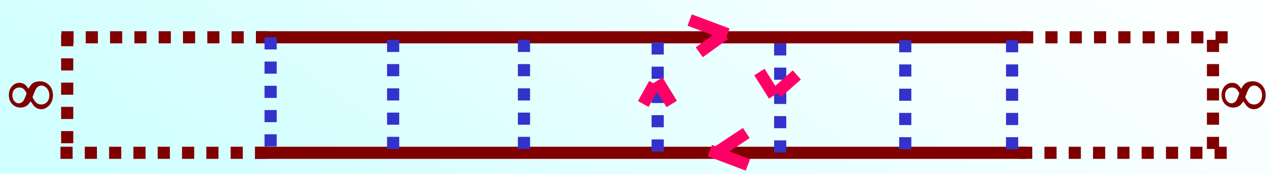
单位长度上的磁通量：

$$\Psi=\phi=\int \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$=\int_a^{d-a}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr+\int_a^{d-a}\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}dr$$

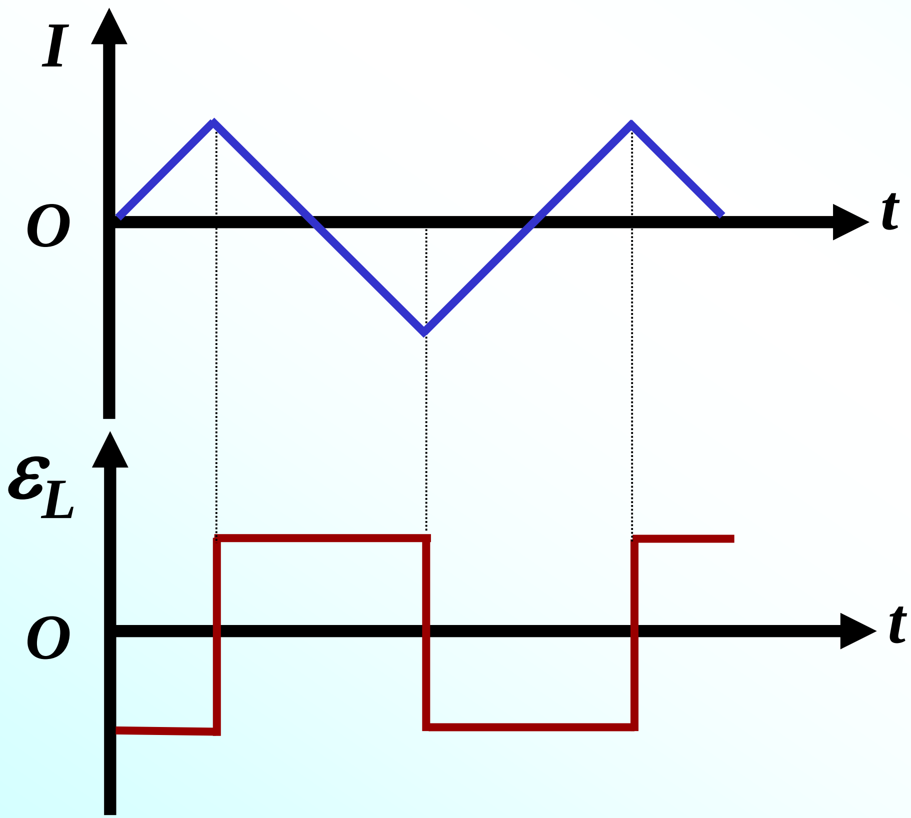
$$=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}\quad(d>>a)$$



(合理吗？)

例: 一线圈中通过的电流I随时间t变化的规律如图.试画出自感电动势ε_L随时间t变化的规律(以I的正方向为ε_L的正向).



解: 根据

$$\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

可得左边的ε_L随t变化的曲线。

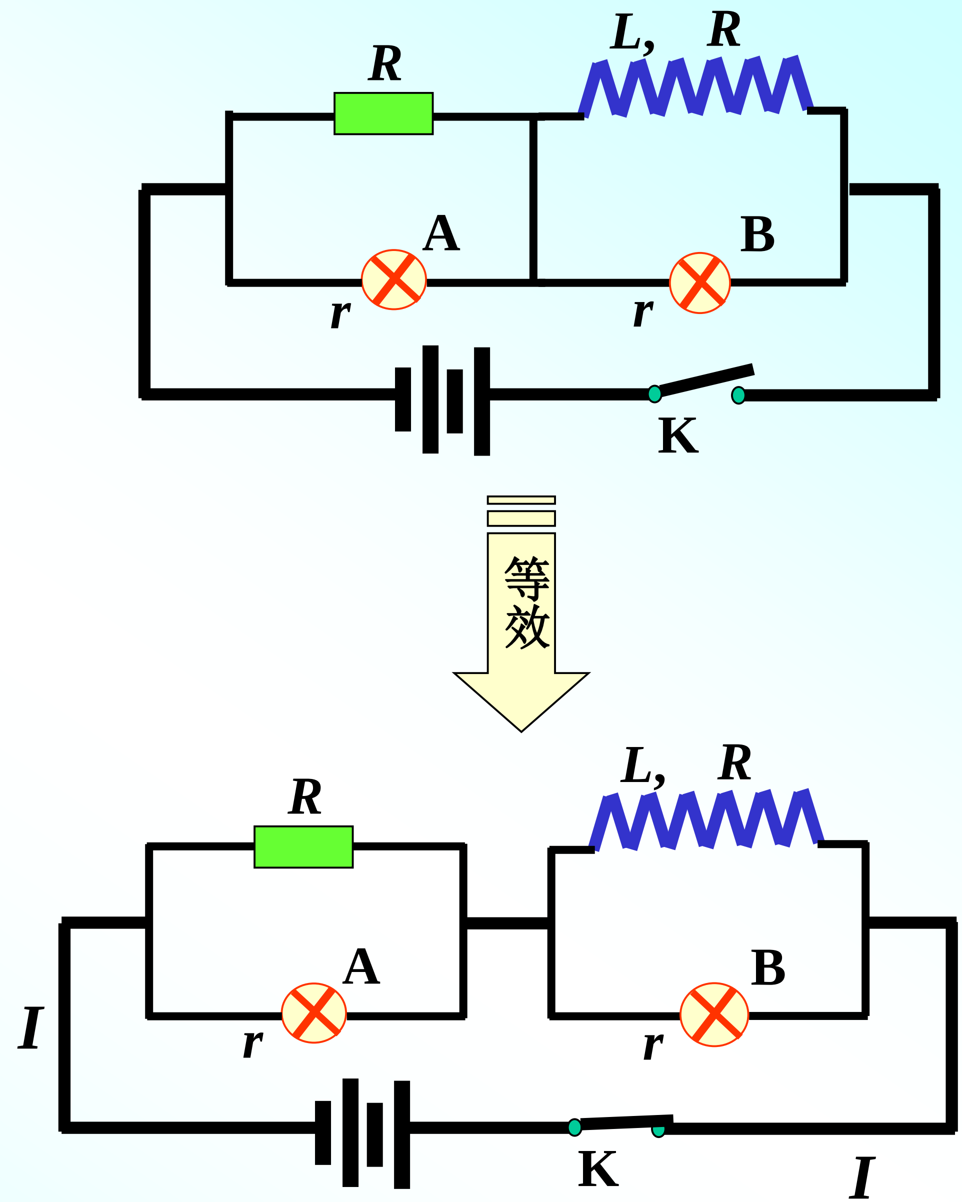
例：A、B是相同的两灯泡，内阻$r>>R$. 线圈的电阻为R，L很大。则下面正确的是[　　　].

(A) K接通时，$I_A<I_B$.

(B) K接通时，$I_A=I_B$.

(C) K断开时，A、B同时灭.

(D) K断开时，$I_A=I_B$.



解：

K接通时，因$r>>R$，故$I_A<<I$.

又因L很大，故 ε_L 大，

所以$I_L\approx0$，$I_B\approx I$

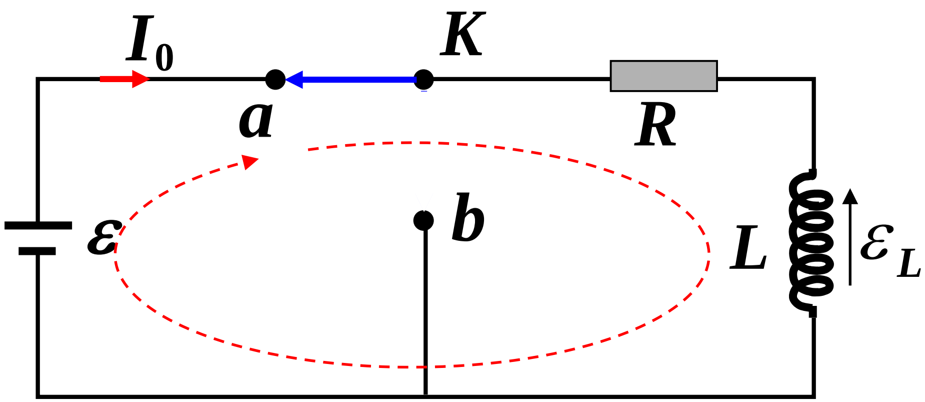
故，K接通时，$I_B>I_A$.

K断开时，仍有$I_B>I_A$.

演示：自感

2、自感电路中电流的滋涨和衰减情况

“*LR*”电路的暂态过程：由于电感线圈对电流的阻碍作用，使电流的增减需要一个过程。



(I_0是稳定后的电流)

$I_0=\dfrac{\varepsilon}{R}$ (因为稳定时自感电动势为零)

滋涨的暂态过程：

电键拨到 a 后某瞬间，回路中的电流为i, 电感线圈内自感电动势

$$\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$V_a-iR-|\varepsilon_L|+|\varepsilon|=V_a$$

$$iR+|\varepsilon_L|-|\varepsilon|=0$$

$$iR+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-\varepsilon=0 \rightarrow \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\varepsilon}{R}-i=I_0-i$$

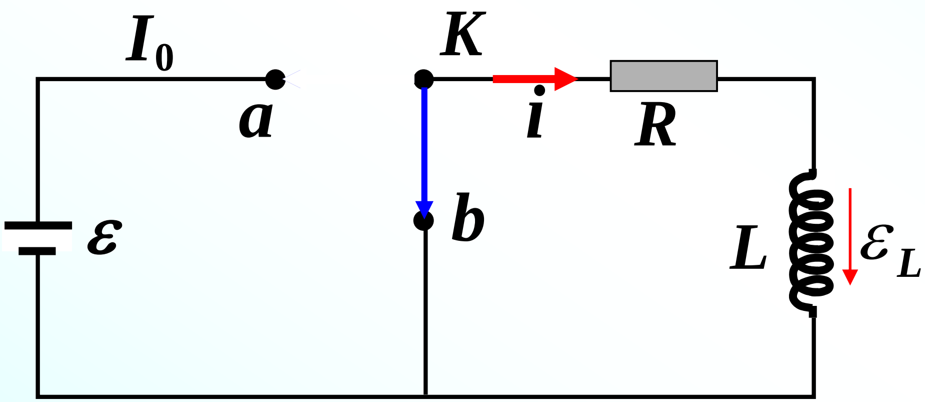
$$\therefore \frac{\mathrm{d}(i-I_0)}{i-I_0}=-\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

取 $t=0$ 时， $i=0$

$$\therefore \int_0^i \frac{\mathrm{d}(i-I_0)}{i-I_0}=-\int_0^t \frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

$$\boxed{i=I_0\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

衰减的暂态过程：



(I_0是稳定后的电流)

电键由 a 拨到 b后某瞬间，回路中的电流为i，电感线圈内自感电动势 $\varepsilon_L=-L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

$$V_k - iR + |\varepsilon_L| = V_k \longrightarrow |\varepsilon_L| = iR$$

$$-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=iR$$

$I_0=\dfrac{\varepsilon}{R}$(因为稳定时自感电动势为零)

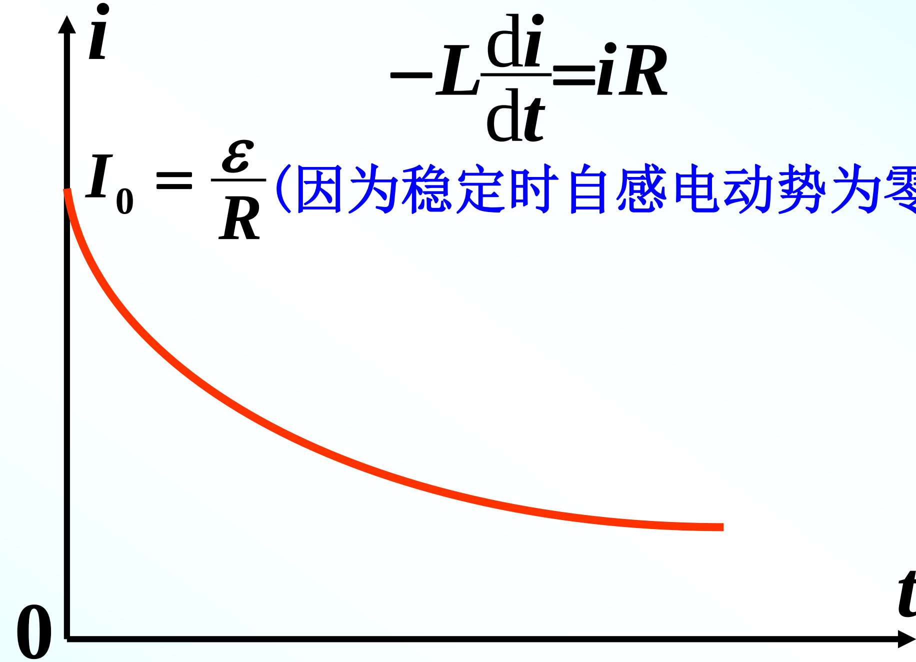
设 t=0 时， i=I_0

$$\frac{\mathrm{d}i}{i}=-\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

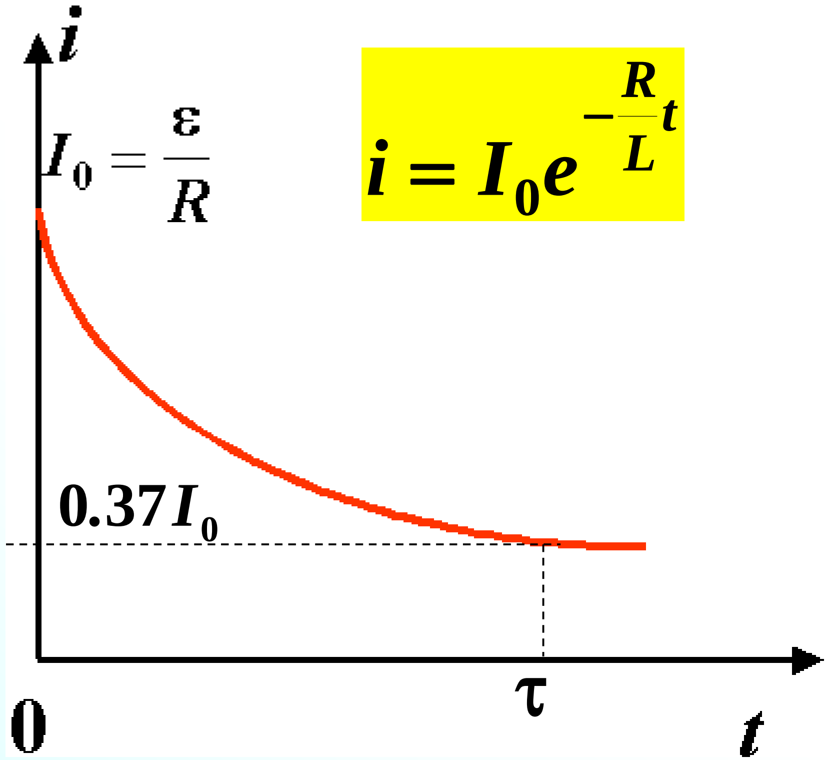
$$\int_{I_0}^{i}\frac{\mathrm{d}i}{i}=-\int_0^t\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

$$\ln\frac{i}{I_0}=-\frac{R}{L}t$$

$$\boxed{i=I_0e^{-\frac{R}{L}t}}$$



$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$



电流 i 随时间指数形式地衰减.

当 $t = L/R$ 时， $i = I_0 \frac{1}{e}$

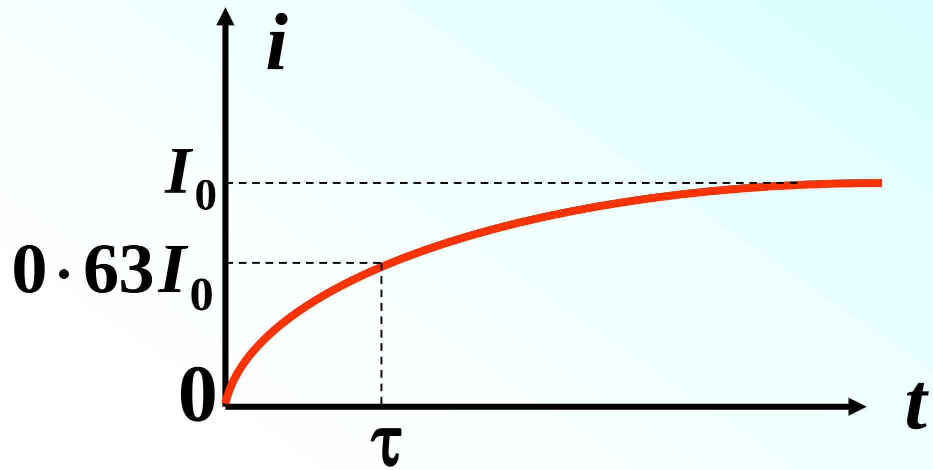
$\tau = \frac{L}{R}$ 称为电路的时间常数或弛豫时间

在L=1 亨利，R=1000 欧姆的电路中弛豫时间为1毫秒

注意

（1）滋涨的暂态过程：

$$i = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$



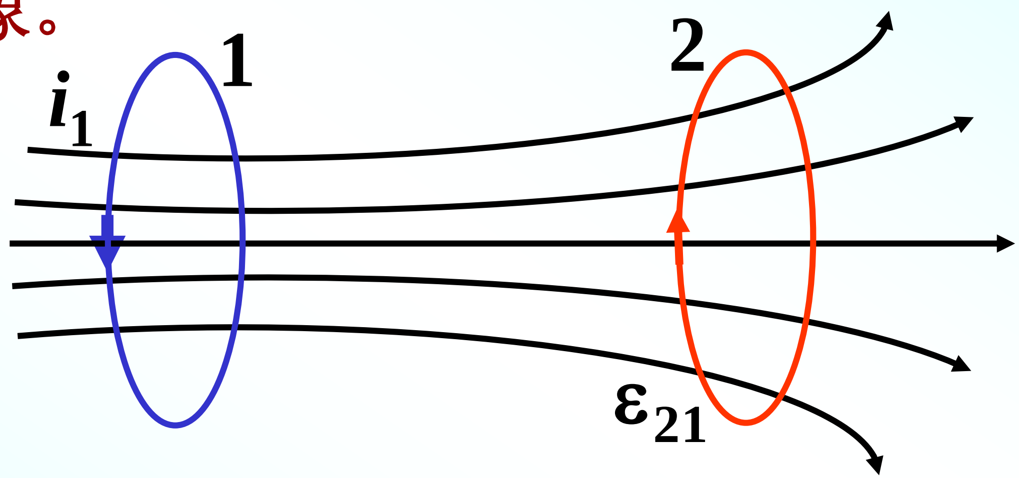
（2）断路时，必须采用逐渐增大电阻的方法

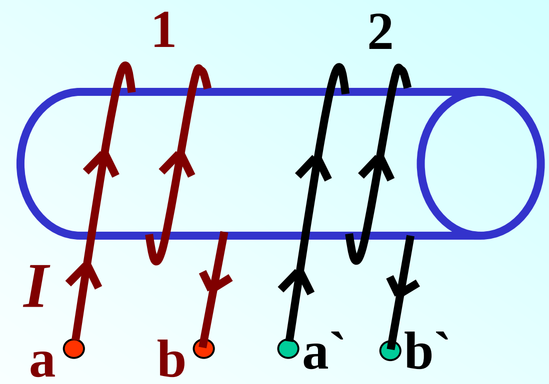
$$\boxed{i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}} \quad \boxed{\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

3、互感（也称互感应）

$B \propto I, \varphi \propto I, \psi \propto I$

一个回路中的电流变化，在邻近的另一回路中产生感生电动势的现象。





根据毕奥—萨伐尔定律以及 $\varphi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$ 知：$\psi = MI$

若两线圈的相对位置确定：

设L_1的电流为i_1在L_2中产生的磁通匝链数为ψ_2

$\because B_1 \propto i_1$，则 $\Psi_2 \propto B_1 \propto i_1$，$\Psi_2 \propto i_1$

$\Psi_2 = M_{21} i_1$　　　同理可得：$\Psi_1 = M_{12} i_2$

M_{ij}是比例系数——互感系数，简称互感。

M_{ij}与 $\begin{cases}\text{两回路的位置有关} \\ \text{线圈的几何形状及介质}(\mu)\text{有关}\end{cases}$

互感系数M的单位：　亨利（H）

可以证明，对给定的一对导体回路有：$M_{12}=M_{21}=M$

物理意义：$M=\Psi/I$, 单位电流的磁场在另一线圈中产生的ψ

互感电动势：$\varepsilon_M=-\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=-M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-i\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$

当 M=常数时：　$\varepsilon_M=-M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

$\varepsilon_2=-M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$

$\varepsilon_1=-M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$

方向？

$\updownarrow$

楞次定律

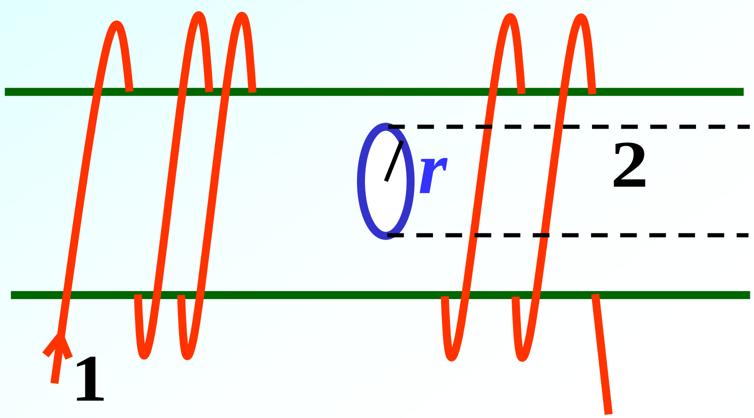
互感的定义式:

$$\varepsilon_M = -M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\Psi_2 = M\,i_1 \qquad \Psi_1 = M\,i_2$$

$$\longrightarrow \quad M = \begin{cases} \Psi_2/i_1 = \Psi_1/i_2 \\ \left|\dfrac{\varepsilon_2}{\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t}\right| = \left|\dfrac{\varepsilon_1}{\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t}\right| \end{cases} \text{(普适)}$$

例: 长直螺线管单位长度上有n 匝线圈，另一半径为r的圆环放在螺线管内, 环平面与管轴垂直。求M。



解:

设螺线管通有i_1，则$B_1 = \mu_0 n i_1$。

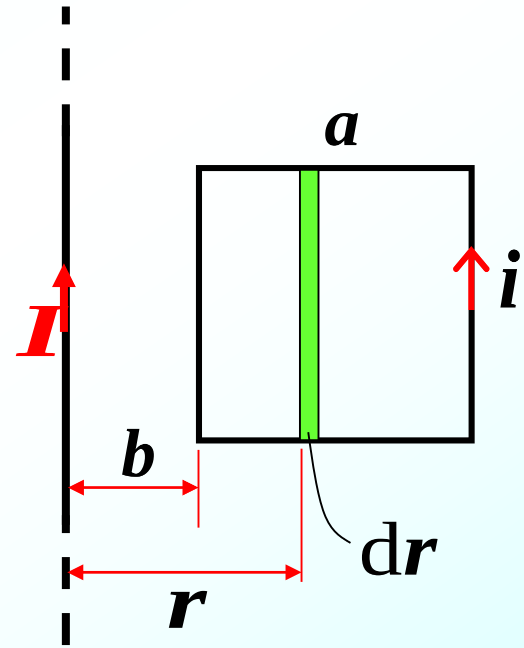
圆环中：$\psi_2 = B_1\,\pi r^2 = \mu_0 n\, i_1 \pi r^2$

$$\therefore M = \psi_2/i_1 = \mu_0 n \pi r^2$$

- 原则上可设任一线圈产生磁场计算另一线圈的磁通量 $\psi \rightarrow M = \psi/i$。但很多实际问题中$M$很难算出。

例： 载流正方形线圈旁有一无限长直导线。若线圈中有变化的电流i，求在无限长直导线中产生的感应电动势。

解： 直导线中的电动势是互感电动势。



$$\varepsilon=-M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$M = ?$$

设直导线中有电流I，在线圈中

$$\phi=\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\int_b^{b+a}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot a\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\frac{b+a}{b}$$

$$M=\frac{\phi}{I}=\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{b+a}{b}$$

$$\therefore\varepsilon=-M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 a}{2\pi}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\ln\frac{b+a}{b}$$

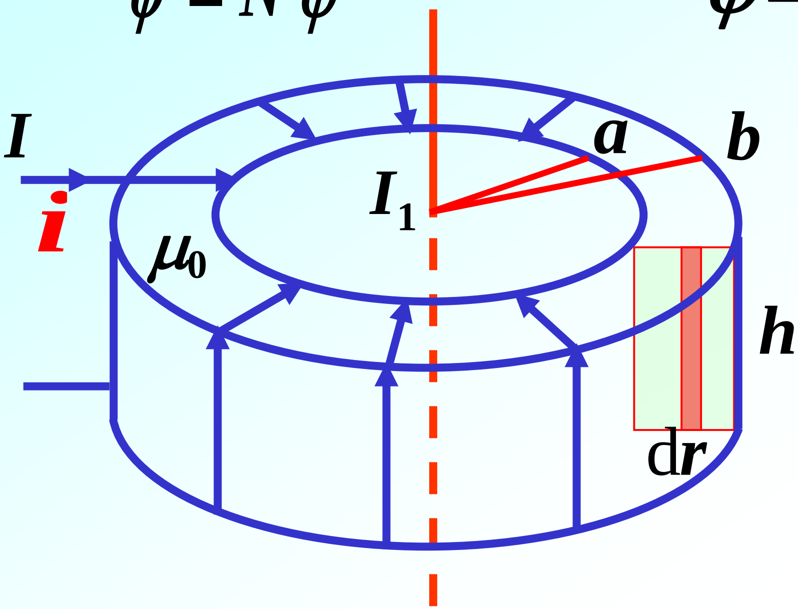
例：环形螺线管总匝数 N（如图）（1）求 L

解：设线圈中通有电流 I.

安培环路定理

$\psi = N\varphi$

$$\varphi = \int_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\cdot h\,dr = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h\cdot\ln\frac{b}{a}$$



$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\varphi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

（2）若中心有一无限长直导线，求M.

设直线中通电流 I_1　　$M = \psi_2 / I_1$

$$= \frac{N\varphi_2}{I_1} = \frac{N}{I_1}\cdot\int_a^b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\cdot h\,dr = \frac{\mu_0 N}{2\pi} h \ln\frac{b}{a}$$

（3）若在螺绕环中通以交变电流 $i = I_0 \cos\omega t$，求在长直导线中的感应电动势.

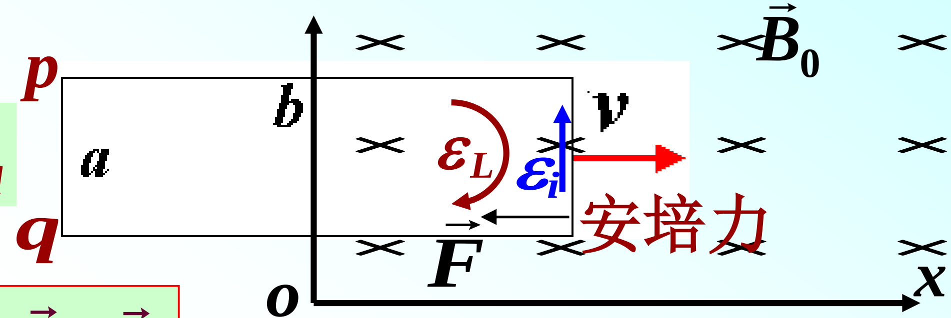
$$\varepsilon = -M\frac{di}{dt} = +\frac{\mu_0 Nh}{2\pi}\ln\frac{b}{a} I_0 \omega \sin\omega t$$

方向?

例: 一矩形金属线框，边长为 a、b（b足够长），线框质量为 m 自感系数为 L，电阻忽略，线框以初速度 v_0 沿 x 轴方向从磁场外进入磁感应强度大小为B_0 的均匀磁场中，求矩形线圈在磁场内的速 度与时间的关系式 $v=v(t)$ 和沿 x 轴方向移动的距离与时间的关系式 $x=x(t)$.

解: 线圈的一部分进入磁场后，线圈内有动生电动势和自感电动势。

$V_p=V_q$



$$V_p+|\varepsilon_L|-|\varepsilon_i|=V_q$$

$$\therefore |\varepsilon_L|-|\varepsilon_i|=0$$

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}}$$

$$\boxed{\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{\varepsilon_i=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}}=B_0av$$

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-B_0av=0 & (1)\\[2ex] B_0aI=-m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & (2)\end{cases}$$

由（2）有:

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{B_0a}{m}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\qquad(3)$$

联立（1）、（3）

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2v=0$$

$$\boxed{\omega^2=\frac{B_0^2a^2}{mL}}$$

$$v=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t$$

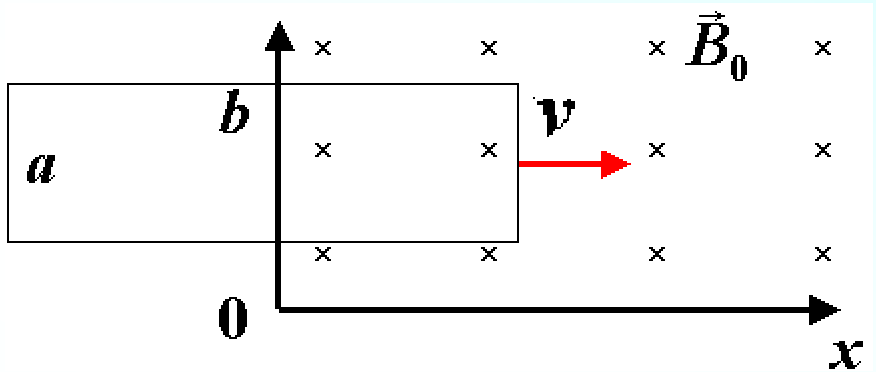
$$v = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$$

当$t = 0$ 时，$v = v_0 \Rightarrow C_2 = v_0$

$$B_0 a I = -m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad (2)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = C_1\omega\cos\omega t - C_2\omega\sin\omega t = -\frac{B_0 a I}{m}$$

当$t = 0$时，$I = 0$



$$C_1\omega\cos 0 = 0$$

$$\therefore C_1 = 0$$

$$\begin{cases} v = v_0 \cos\omega t \\ x = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t \end{cases}$$

讨 论 $R = 0$这 一 近 似 的 合 理 性 。

$$v = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$$

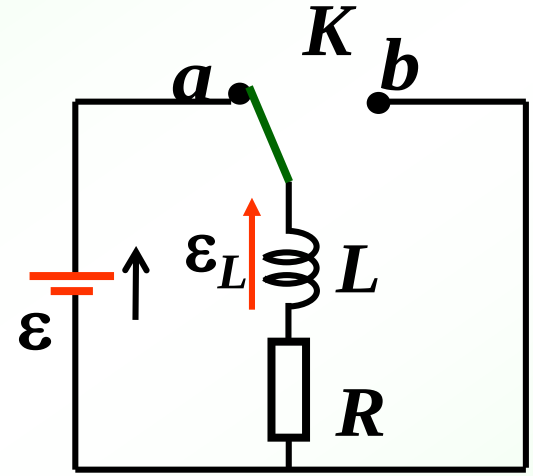
七. 磁场的能量

1. LR电路中的能量转换

电路在建立稳定电流的过程中
电源力克服自感电动势 ε_L做功

$\xrightarrow{\text{能量}}$

储存
L中



当电流以$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t>0$变化时，电流变化$\mathrm{d}i$，
电源克服ε_L做功为$\mathrm{d}A$： $\mathrm{d}A=-\varepsilon_L\mathrm{d}q=-\varepsilon_L i\mathrm{d}t$

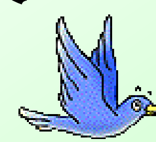
$$A=q\Delta V$$

$$\because \varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \therefore \mathrm{d}A=Li\mathrm{d}i$$

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

$$A=\int \mathrm{d}A=\int_0^I Li\mathrm{d}i=\frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow{\text{储存}} \boxed{W=\frac{1}{2}LI^2}$$

电流稳定后，去掉电源，电流i 从$I\rightarrow 0$，ε_L做功，释放存在线圈内的能量，把能量传给电阻，以热能形式散发：



$$\boxed{i=Ie^{-\frac{R}{L}t}}$$

$$Q=\int Ri^2\mathrm{d}t=\int R(I^2e^{-2\frac{R}{L}t})\mathrm{d}t$$

$$=RI^2\int_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}LI^2\int_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}t}\mathrm{d}(-\frac{2R}{L}t)=\frac{1}{2}LI^2$$