大学物理(下)

华 中 科 技 大 学

张智

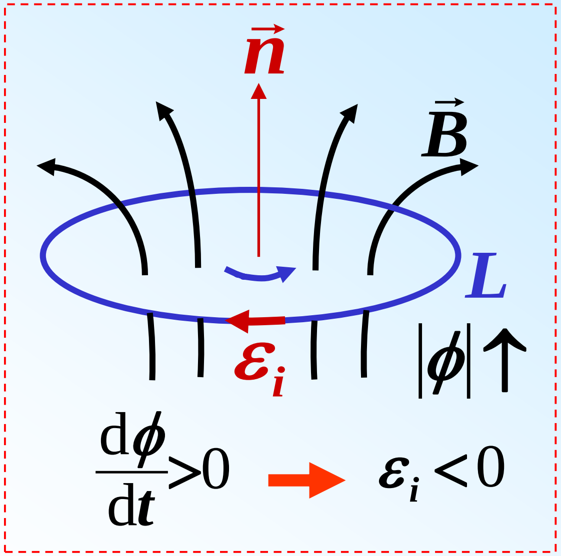
zzhang@hust.edu.cn

第三篇

电磁学

●法拉第电磁感应定律

回路中的感应电动势 $\boxed{\varepsilon_i = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}$



任一回路中：$\phi = \int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int B\cos\theta\,\mathrm{d}s$

(t 时刻的)

●动生电动势

$$\boxed{\varepsilon_i = \int_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

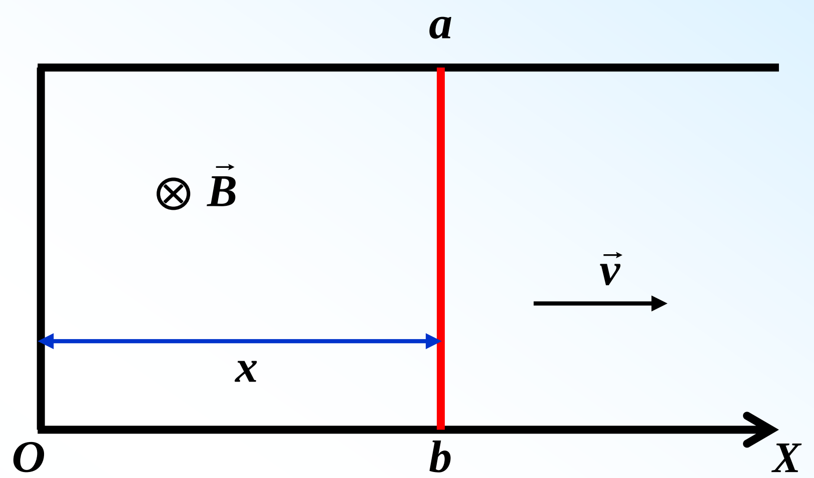
$$\boxed{\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

$\mathrm{d}\vec{l}$ ：导线上任意选定的一小段（足够短）

$\vec{v}$ ：以上这段导线的速度

$\vec{B}$ ：以上这段导线处的磁感应强度

例： 如图所示，均匀磁场$\vec{B}$中有一与之垂直的矩形导体回路．B随时间线性增加，即$B=kt$（$k>0$），ab边长为L且以速度$\vec{v}$向右滑动，另三边不动．以下有两种解法求任意时刻回路中的感应电动势的大小（$t=0$时，$x=0$）．哪个解法正确？为什么？



解一：

$$\phi=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=B\int_S dS=B\cdot Lx=kt\cdot Lvt=kvLt^2$$

$$\therefore \varepsilon=-\frac{d\phi}{dt}=-2kvLt$$

解二：

$$\phi=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_0^x kt\cdot L\,dx\cancel{=}\int_0^t ktL\frac{dx}{dt}dt$$

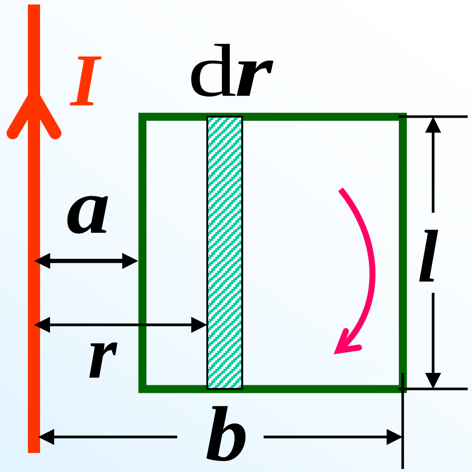
$$=\int_0^t ktLv\,dt=\frac{1}{2}kvLt^2$$

$$\therefore \varepsilon=-\frac{d\phi}{dt}=-kvLt$$

ϕ应为t时刻的磁通量

$$\boxed{\varepsilon_i=-\frac{d\phi}{dt}}$$

例：长直导线通有电流I，在它附近放有一矩形导体回路. 求1）穿过回路中的ϕ;　2）若$I=kt$（k=常数），回路中ε_i=？　3）若I=常数，回路以v向右运动，ε_i=？　4）若$I=kt$，且回路又以v向右运动时，求ε_i=？



解：设回路绕行方向为顺时针，

1）　$$\phi=\int_a^b B\cdot l\mathrm{d}r=\int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r}l\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

2）$I=kt$时，在t时刻，　$$\phi=\frac{\mu_0 lk}{2\pi}t\ln\frac{b}{a}$$

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 lk}{2\pi}\ln\frac{b}{a}<0$$ 逆时针方向

$$\boxed{\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{\phi=\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\int B\cos\theta\,\mathrm{d}s}$$

3）I=常数，t时刻，此时回路的磁通：

$$\phi=\int_{a+vt}^{b+vt}\frac{\mu_0 Il}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{b+vt}{a+vt}$$

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\frac{(a-b)v}{(a+vt)(b+vt)}>0.$$ 顺时针方向

2) $\varepsilon_i = -\frac{\mu_0 lk}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$ 3) $\varepsilon_i = -\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\frac{(a-b)v}{(a+vt)(b+vt)}$

4）综合2）、3），t时刻回路的磁通：$\phi=\frac{\mu_0 ktl}{2\pi}\ln\frac{b+vt}{a+vt}$

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 kl}{2\pi}\left(\frac{(b-a)vt}{(a+vt)(b+vt)}-\ln\frac{b+vt}{a+vt}\right)$$

此题若这样考虑：$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ 而：$\mathrm{d}\phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}l\mathrm{d}r$

全微分

微小量

含义不同

则：$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi r}l\cancel{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi r}l\cdot v.$

这样就有：

~~2）$v=0,\quad \therefore \varepsilon_i=0$~~

~~3）$\varepsilon_i=-\frac{\mu_0 I}{2\pi r}l\cdot v$~~

~~4）$\varepsilon_i=-\frac{\mu_0 kt}{2\pi r}l\cdot v$~~

错在何处？

$\mathrm{d}\phi\neq\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

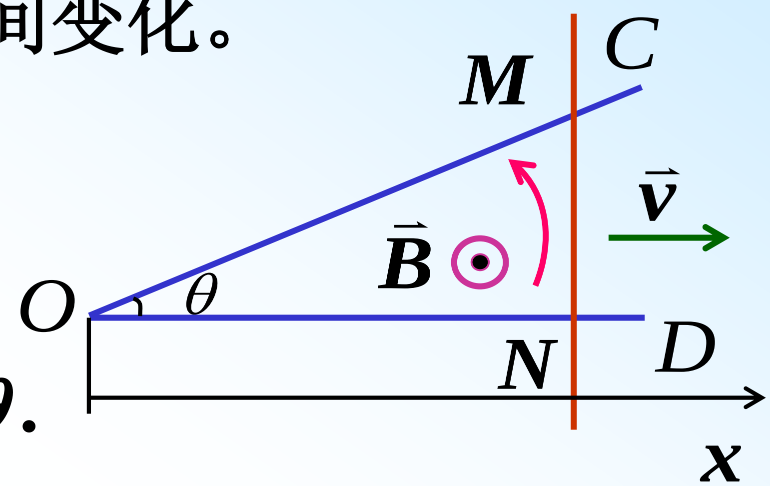
$\mathrm{d}\phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{B}$

考虑特例，均匀磁场中的平面回路。则 $\phi=\vec{B}\cdot\vec{S}$

例: 弯成θ角的金属架COD, 导体棒MN垂直OD以恒定速度v在金属架上向右滑动，且$t=0$, $x=0$， 已知磁场的方向垂直纸面向外，求下列情况中金属架内的ε_i .

1）磁场分布均匀，且磁场不随时间变化。

2）非均匀时变磁场，$B=kx\cos\omega t$。



解: 设回路绕向为逆时针

1） t 时刻， $x=vt$

$$\phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=B\cdot\frac{1}{2}x\cdot xtg\theta=\frac{1}{2}Bv^2t^2tg\theta.$$

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=-Bv^2t\cdot tg\theta<0$$

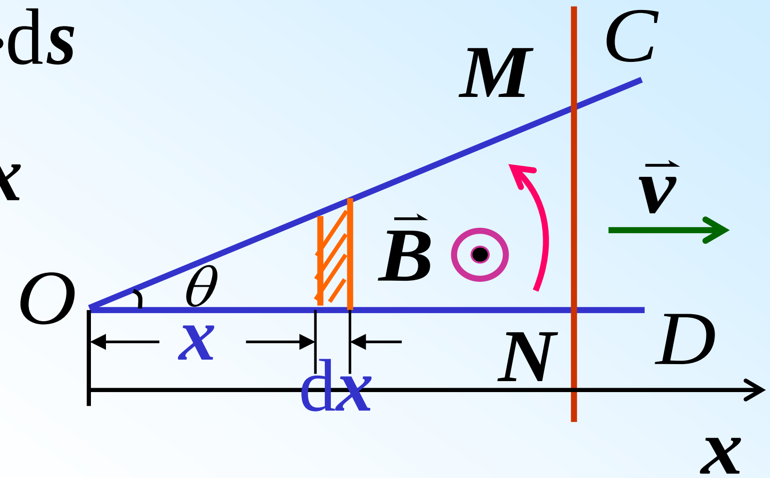
方向与绕向相反，只出现在MN上。

此处可直接利用对均匀场的公式:

$$\phi=\vec{B}\cdot\vec{S}\qquad \mathrm{d}\phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{B}$$

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=-B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}x^2tg\theta\right)=-Bv^2t\cdot tg\theta$$

2） B不均匀， $\phi \neq \vec{B}\cdot\vec{S}$　　$\mathrm{d}\phi = B\cdot\mathrm{d}s$



$$\phi = \int \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_0^x kx\cos\omega t\cdot x\,tg\theta\cdot\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}kx^3\cos\omega t\cdot tg\theta.$$

$$\phi(t) = \frac{1}{3}k\,tg\theta\, v^3 t^3\cos\omega t.$$

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}k\omega\, tg\theta\sin\omega t\cdot v^3 t^3 - k\,tg\theta\cos\omega t\cdot v^3 t^3$$

若 $\varepsilon_i > 0$，　与绕向相同。

若 $\varepsilon_i < 0$，　与绕向相反。

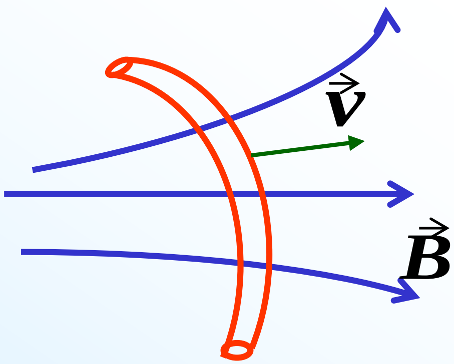
三、动生电动势 ⟶ $\vec{B}$不变，导体回路运动。

$$\varepsilon=\int_{-}^{+}\vec{E}_K\cdot d\vec{l}$$

1. 产生动生电动势的机制

1）等效非静电场$\vec{E}_k$：

导线l在外磁场中运动时，l内自由电子受到磁场力作用：



$$\vec{f}_{洛}=-e(\vec{v}\times\vec{B})$$

类比静电场：$\vec{E}_e=\dfrac{\vec{F}}{q}$

定义非静电场：$\vec{E}_k=\dfrac{\vec{f}_{洛}}{-e}=\vec{v}\times\vec{B}$

$\left|\vec{E}_k\right|=vB\sin\theta$， 方向 $\vec{v}\times\vec{B}$,正电荷受力方向。

2）动生电动势的定义：

$$\varepsilon_i=\int_L\vec{E}_k\cdot d\vec{l}=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

说明：

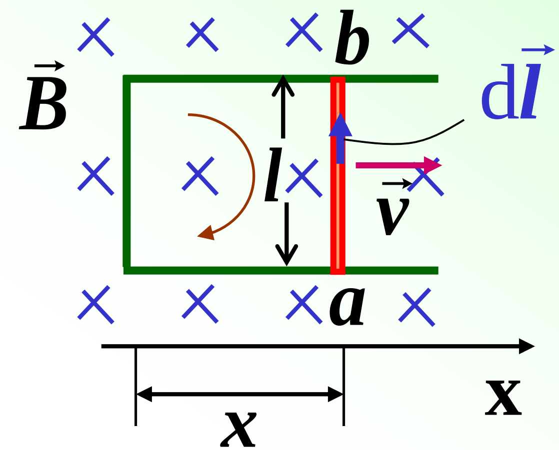
$$\boxed{\varepsilon_i=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}}$$

$d\vec{l}$ ：导线上任意选定的一小段（足够短）

$\vec{v}$ ：以上这段导线的速度

$\vec{B}$ ：以上这段导线处的磁感应强度

例：均匀磁场中ab棒沿导体框向右运动，且$dB/dt=0$求其上的ε_i .



解：

$$\varepsilon_{ab}=\int_a^b(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=\int vBdl=vBl$$

用法拉第定律：

$$\varepsilon_i=-\frac{d\phi}{dt}=-\frac{d}{dt}(\vec{B}\cdot\vec{s})=-B\frac{ds}{dt}$$

$$=-B\frac{d}{dt}(lx)=-Bl\frac{dx}{dt}=-Blv$$

方向：$a\rightarrow b$

2. $\varepsilon_{动}$的计算

$$\varepsilon_i=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

第1步：取线元 $\mathrm{d}\vec{l}$ (同时假定了ε的方向)

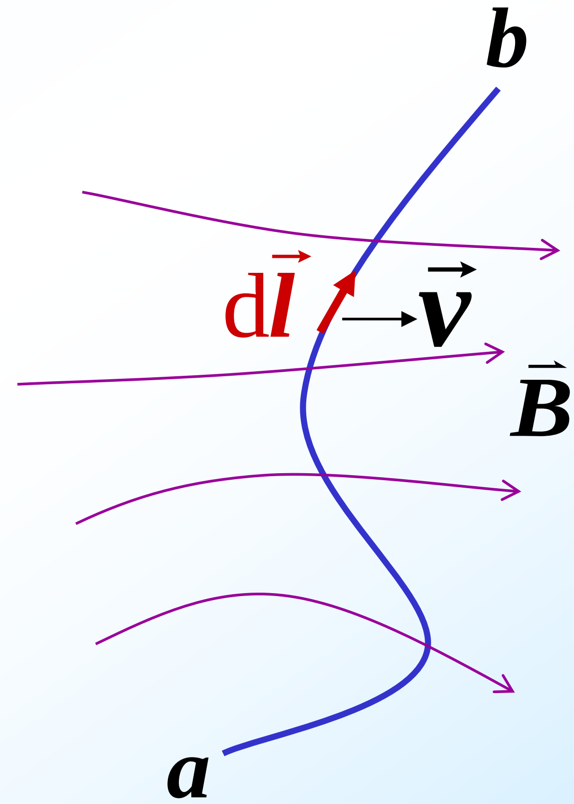
第2步：确定线元处的磁感应强度和线元的运动速度

第3步：计算 $\vec{v}\times\vec{B}$

第4步：计算 $(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

第5步：完成积分

第6步：确定电动势的方向 (根据ε的符号)



问题：

1) 能否直接由法拉第电磁感应定律导出动生电动势的计算公式?

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{?} \varepsilon_i = \int_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

2) 运动导体上的电动势 $\varepsilon_i = \int_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

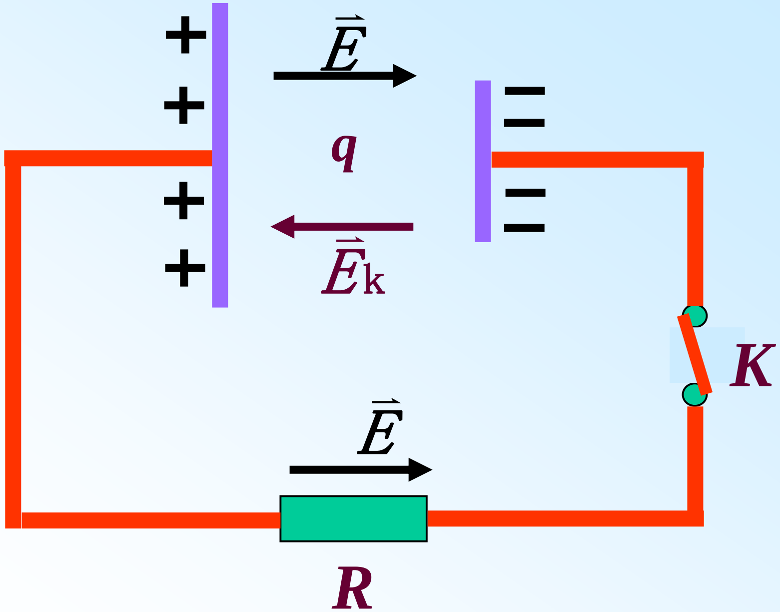
但是： $\vec{f}_{\text{洛}} = -e\vec{v}\times\vec{B} \perp \vec{v}$ 不做功

矛盾?

电源及电动势

$\vec{E}$：静电场场强，单位正电荷所受的静电力。电源内外都存在。

$\vec{E}_k$：非静电场场强，单位正电荷所受的非静电力。只存在于电源内部。



要维持电流，必须使正电荷经电源内部从负极不断补充到正极。显然，这个力不是静电力，而是一种不同于静电力的所谓的非静电力。

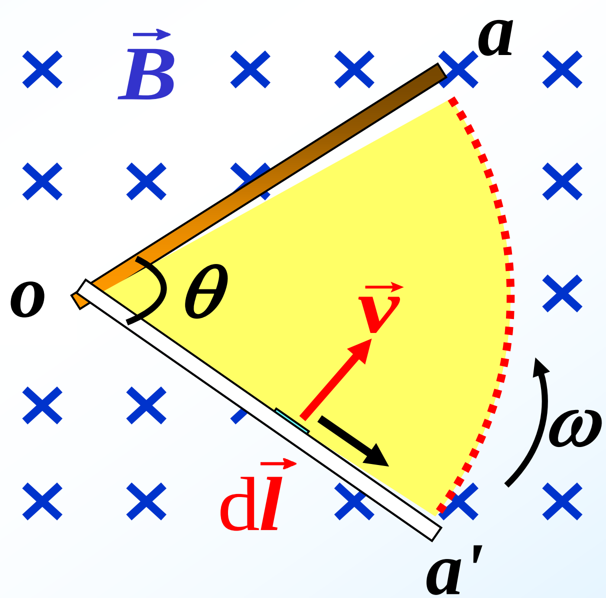
电源的电动势 ε 的定义：

把单位正电荷从负极经过电源内部移到正极，非静电力所做的功。

即：$$\varepsilon = A = \int_{-}^{+} \vec{E}_K \cdot d\vec{l}$$

对闭合回路，$$\varepsilon = A = \oint \vec{E}_K \cdot d\vec{l}$$

例： 金属杆oa长L，在匀强磁场$\vec{B}$中以角速度ω反时针绕o点转动。求杆中的感应电动势。



解： 用动生电动势计算公式，

任取线元 $\mathrm{d}\vec{l}$

$$\mathrm{d}\varepsilon_i = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$= -\omega l B\cdot\mathrm{d}l$$

$$\varepsilon_i = -\int_o^a \omega l B\cdot\mathrm{d}l = -\frac{1}{2}\omega B L^2$$

方向：$a \rightarrow o$

$$\boxed{\varepsilon_i = \int_L \underbrace{(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}}_{\mathrm{d}\varepsilon_i}}$$

（物理意义？）

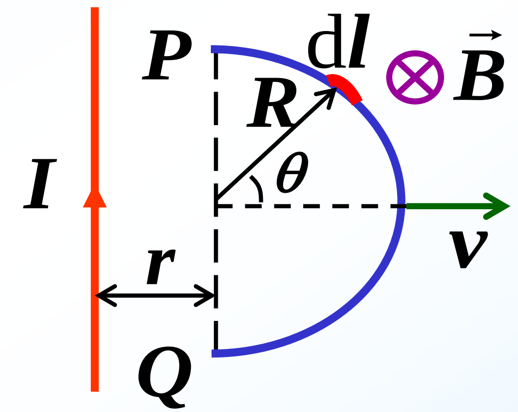
另解： 用法拉第电磁感应定律

任意时刻通过扇形截面的磁通量

$$\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\frac{1}{2}(L^2\theta) \qquad \varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}BL^2\omega$$

例:在真空中，有一无限长直导线电流I 旁，有一半圆弧导线以v 向右运动。已知 r，R。

求 E_k、ε_{QP}， P与Q 哪点电势高？



解：1）在导线上任意dl处的E_k

距离长直电流为：$r'=r+R\cos\theta$

$$E_k=\left|\vec{v}\times\vec{B}\right|=vB=v\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I v}{2\pi\left(r+R\cos\theta\right)}$$

方向向上

2） $$\varepsilon_{QP}=\int\vec{E}_k\cdot d\vec{l}=\int\frac{\mu_0 I v}{2\pi\left(r+R\cos\theta\right)}\cdot\cos\theta\cdot dl$$

$dl=Rd\theta$

$$=\frac{\mu_0 I v}{2}\left(1-\frac{4r}{\pi\sqrt{r^2-R^2}}tg^{-1}\sqrt{\frac{r-R}{r+R}}\right).$$

3） 显然： ε_i从$Q\rightarrow P$，$U_P>U_Q$。

能否用直线$\overline{PQ}$来代替$\overset{\frown}{PQ}$？ 否！ $\varepsilon_{\overline{PQ}}=\frac{\mu_0 I v}{2\pi r}2R\neq\varepsilon_{\overset{\frown}{PQ}}$

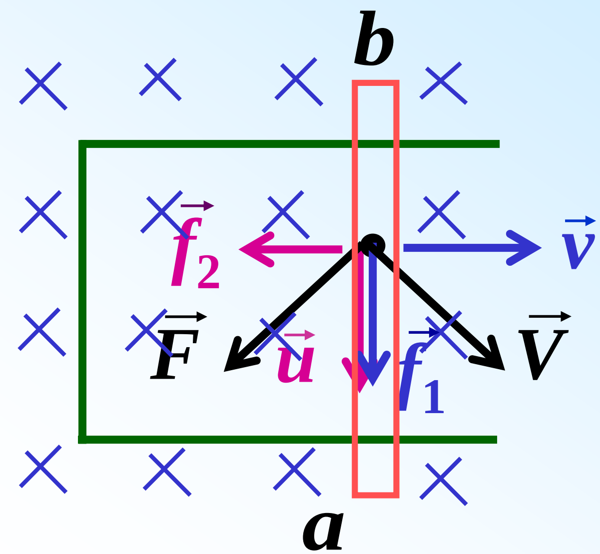
3. 回路中产生动生电动势时谁为回路提供电能?

运动导体上的电动势 $\varepsilon_i = \int_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

但 $\vec{f}_{洛} = -e\vec{v}\times\vec{B} \perp \vec{v}$ 不做功

} 矛盾?

这里，ε_i的出现是什么力做功呢?



电子同时参与两个方向的运动:

$\vec{v}$ 方向，随导体运动;

$\vec{u}$方向，在导体内的漂移形成电流。

电子受到的总洛仑兹力: $\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$,

$\vec{F}\perp\vec{V}$ $\therefore \vec{F}\cdot\vec{V} = 0$,

即: $(\vec{f}_1 + \vec{f}_2)\cdot(\vec{v}+\vec{u}) = \vec{f}_1\cdot\vec{u} + \vec{f}_2\cdot\vec{v} = 0$

显然: $\vec{f}_1 /\!/ \vec{u}$, $\vec{f}_1\cdot\vec{u} > 0$, $\vec{f}_1$做正功，即非静电力$\vec{E}_k$做功。

$\vec{f}_2\cdot\vec{v} = -\vec{f}_1\cdot\vec{u}$, $\vec{f}_2\cdot\vec{v} < 0$, $\vec{f}_2$做负功

要使棒ab保持$\vec{v}$运动，则必有外力做功: $\vec{f}_{外} = -\vec{f}_2$

即: $\vec{f}_{外}\cdot\vec{v} = \vec{f}_1\cdot\vec{u}$

四. 感生电动势　　感应电场

法拉第电磁感应定律：$\varepsilon_i = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ (ε_i是回路中的感应电动势)

ϕ的变化方式 $\begin{cases} \text{导体回路变动，}\vec{B}\text{不变}\rightarrow\text{动生电动势} \\ \text{导体回路不动，}\vec{B}\text{变化}\rightarrow\text{感生电动势} \end{cases}$

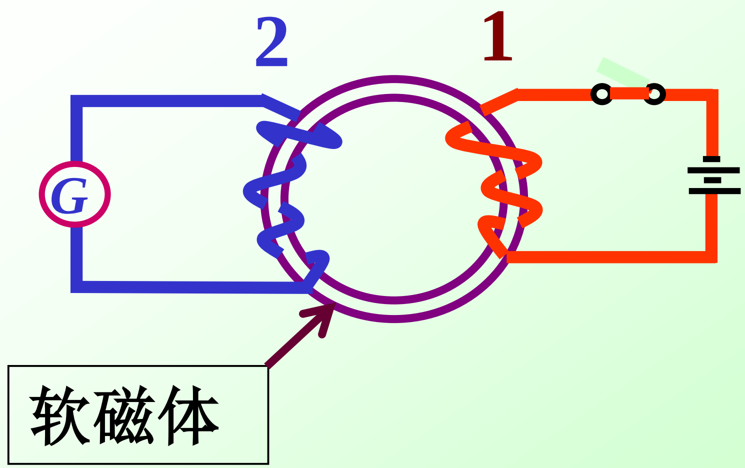
1. 感生电动势

如图，考虑两个静止的线圈1, 2.

当线圈1中I变化时，线圈2中出现感应电流I_i，即回路2中出现感应电动势ε_i.

那么，与此ε_i对应的非静电力是什么？

是不是静电场提供的静电力？



$\because \oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$，$\vec{E}$为保守力场，静电场$\vec{E}$不能为闭合回路运动的电荷提供能量。那么，此非静电力是什么呢？其场强$\vec{E}_K$是什么？

2. 感应电场 —— 感应电场的存在得到了实验的验证。

由电动势的定义： $\varepsilon_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ (经电源内部)

对闭合回路： $\boxed{\varepsilon_i = \oint \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$

感生电动势： $\varepsilon_i = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$ $\boxed{= -\int \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{s}}$

$\therefore \oint \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$ 注： $\mathrm{d}\vec{l}$ 与 $\mathrm{d}\vec{s}$ 成右手螺旋关系。

可见，$\vec{E}_K$ 与 $\vec{B}$ 的变化有关。

$$\boxed{\oint \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s}}$$

由此，麦克斯韦提出感应电场的概念。

磁场随时间变化的同时在周围空间产生电场，

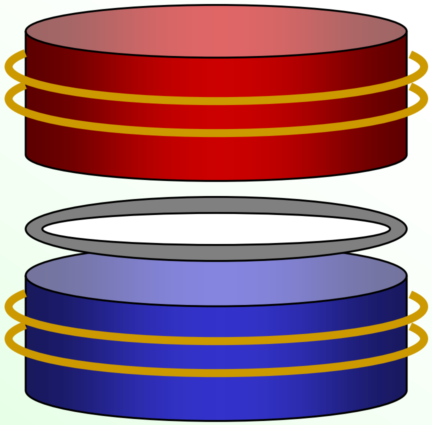
此电场称为感应电场 $\vec{E}_i$。

它是由于磁场随时间变化而产生的电场。

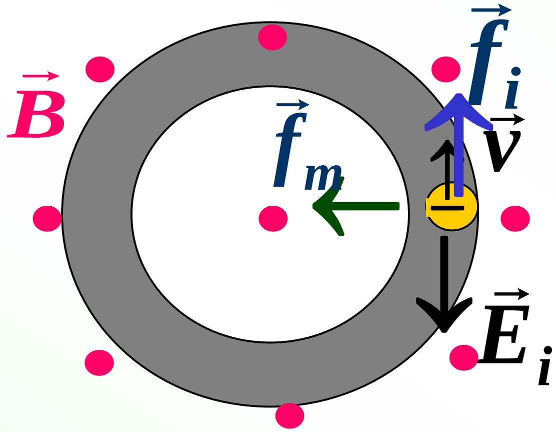
3. 感应电场的实验验证与应用

（1）电子感应加速器

原理：用变化磁场所激发的感应电场来加速电子



交流电在前 1/4周期时，假定管中的感应电场是顺时针的(俯视图)



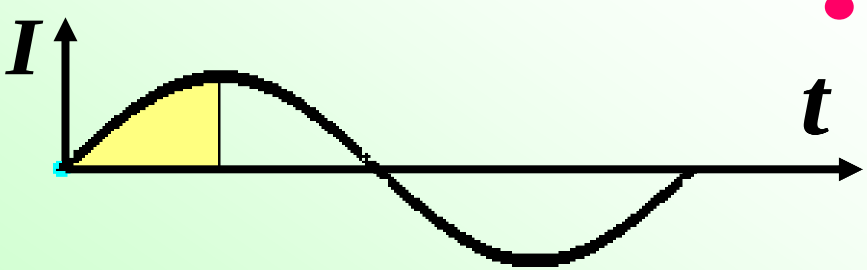
电子受力：

$\vec{f}_i = -e\vec{E}_i$

（切向加速）

$\vec{f}_m = -e\vec{v}\times\vec{B}$

（向心力）

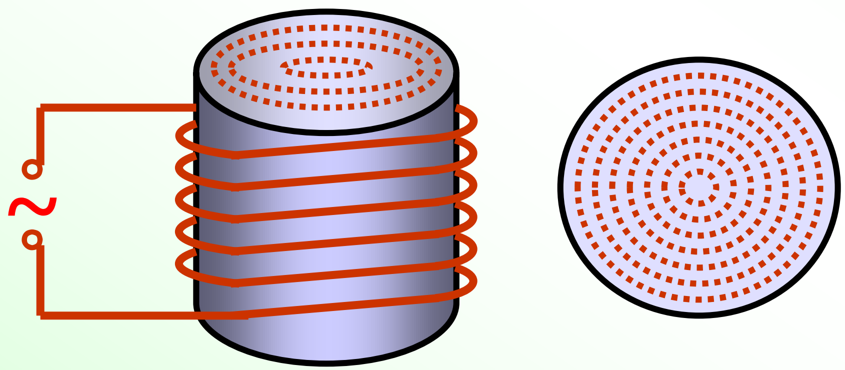


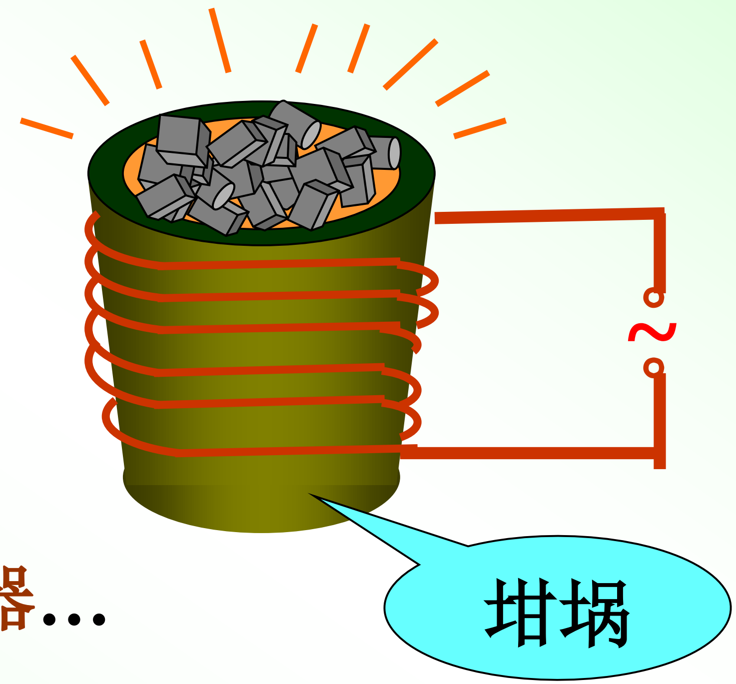
加速器的成功证实了感应电场的客观存在.

问题： 为什么在电流 I 的每一个变化周期里，只有前1/4周期是在给电子加速？

（2）涡流 ——高频电磁感应炉

将导体块放置在$\vec{E}_i$中，则在导体中将产生环形电流→涡流。





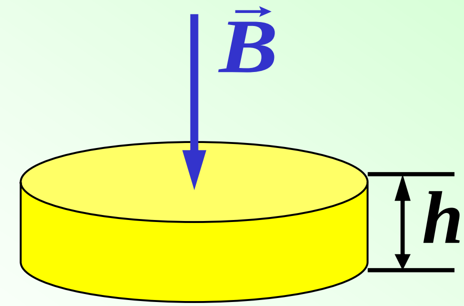
另外，金属探测器；探雷器…

注：

涡流还是有害的，它不仅消耗电功率，
而且降低设备能量利用效率。

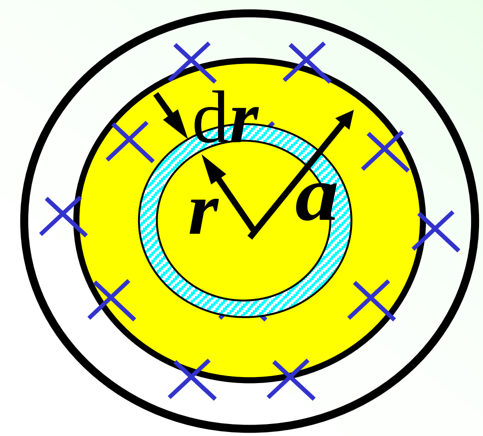
例： 将半径为a、厚为h、电导率为σ的金属圆盘，同轴放置在轴对称匀强磁场$\vec{B}$中，且$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t>0$。求圆盘上的电流强度及产生的热功率。

解： 取半径为r,厚度为dr的圆筒,其电动势



$$\mathrm{d}\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B\cdot\pi r^2)=-\pi r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

其上电阻为： $R=\dfrac{2\pi r}{\sigma\cdot h\cdot\mathrm{d}r}$



电流为： $\mathrm{d}I_i=\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon_i}{R}=-\dfrac{r}{2}\sigma h\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}r$

总电流： $I_i=\int\mathrm{d}I_i=-\dfrac{1}{4}a^2\sigma h\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

产生的热功率：

$$P=\int\mathrm{d}P=\int R(\mathrm{d}I_i)^2=\frac{1}{8}\pi\sigma h a^4\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

4. 感应电场的特点、性质

感应电场 $\vec{E}_i$ 的特点：

1）$\vec{E}_i$ 与 $\vec{E}_e$ 一样，对场中的电荷有电场力的作用。

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{q} \qquad \vec{F} = q\vec{E}_i$$

2）$\vec{E}_i$ 的产生不依赖空间是否有导体存在，

只要$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t \neq 0$就行。

只要磁场变化，真空 、介质中都可以激发感应电场。

3）不仅在磁场分布范围内有感应电场，之外也有。

$\vec{E}_i$ 的方向与ε_i 基本一致，可用楞次定律判断。

4）$\vec{E}_i$ 是非保守力场，$\oint \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$

$\vec{E}_i$ 场中不能引入电势概念，

其电场线是无头无尾的闭合曲线~~故也称为涡旋电场。

感应电场 $\vec{E}_i$ 与静电场 $\vec{E}_e$ 的异同:

相同处: 对电荷的作用相同。

不同处

$$\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$ 有源

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = 0$$ 无源

$$\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = 0$$ 无旋

保守场→电势

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$ 有旋

非守保场

$\vec{E}_e$与 $\vec{E}_i$的比较

静电场	感应电场
对场中的电荷有力的作用	同静电场
由静止的电荷激发	由变化的磁场激发
使导体内电荷移动产生静电感应，平衡时内部场强为零，导体是等位体不能形成持续电流。	使导体内电荷移动产生电磁感应，导体内产生感应电动势 —— 感应电流。
场方程 $\left\{\begin{array}{l}\oint_s \vec{E}_e \cdot d\vec{s} = \sum_i q_i \big/ \varepsilon_0 \neq 0 \quad \text{有源场} \\ \oint_L \vec{E}_e \cdot d\vec{l} \equiv 0 \quad \text{无旋场}\end{array}\right.$	场方程 $\left\{\begin{array}{l}\oint_s \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{无源场} \\ \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\phi}{dt} = -\int_s \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \neq 0 \quad \text{有旋场}\end{array}\right.$
电力线不闭合	电力线闭合
保守场 、 可以引入电 位	非保守场、不能引入电位