大学物理(下)

华 中 科 技 大 学
张智
zzhang@hust.edu.cn


第三篇
电磁学

动生电动势

$$\varepsilon_i=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

$d\vec{l}$：导线上任意选定的一小段（足够短）

$\vec{v}$：以上这段导线的速度

$\vec{B}$：以上这段导线处的磁感应强度

$$\varepsilon=\int_{-}^{+}\vec{E}_K\cdot d\vec{l}$$

感生电动势

$$\varepsilon_i=-\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}=\oint\underbrace{\vec{E}_i}_{\text{感应电场}}\cdot d\vec{l}$$

$$\begin{cases}\oint\vec{E}_i\cdot d\vec{s}=0\\ \oint\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=-\int\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}\end{cases}$$

感应电场 $\vec{E}_i$

由于磁场随时间变化而产生的电场，无源、有旋。

2. 感应电场 —— 感应电场的存在得到了实验的验证。

由电动势的定义： $\varepsilon_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ (经电源内部)

对闭合回路： $\boxed{\varepsilon_i = \oint \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$

感生电动势： $\varepsilon_i = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$ $\boxed{= -\int \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{s}}$

$\therefore \oint \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$ 注： $\mathrm{d}\vec{l}$ 与 $\mathrm{d}\vec{s}$ 成右手螺旋关系。

可见，$\vec{E}_K$ 与 $\vec{B}$ 的变化有关。

$$\boxed{\oint \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s}}$$

由此，麦克斯韦提出感应电场的概念。

磁场随时间变化的同时在周围空间产生电场，

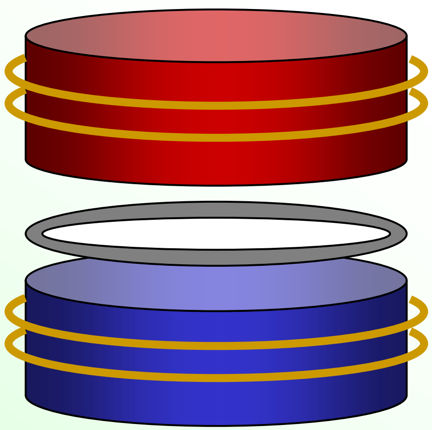
此电场称为感应电场 $\vec{E}_i$。

它是由于磁场随时间变化而产生的电场。

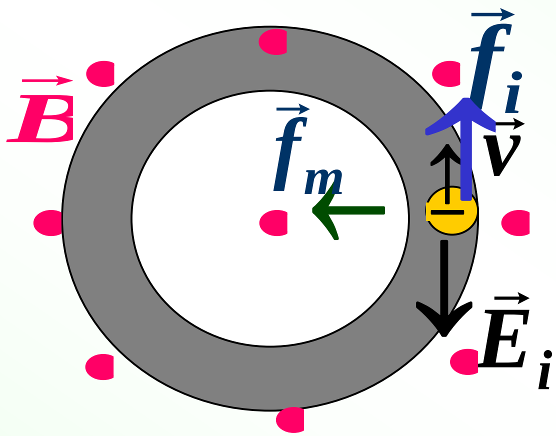
3. 感应电场的实验验证与应用

（1）电子感应加速器

原理：用变化磁场所激发的感应电场来加速电子



交流电在前 1/4周期时，假定管中的感应电场是顺时针的(俯视图)



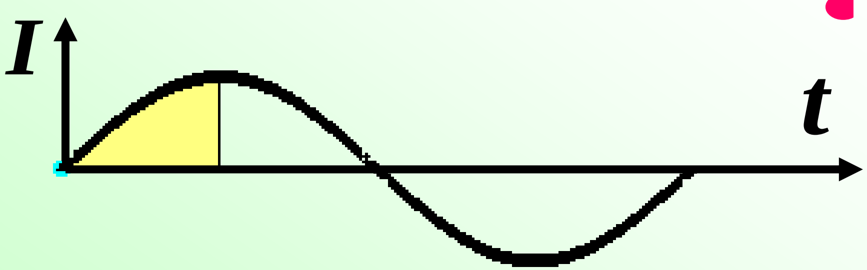
电子受力：

$\vec{f}_i = -e\vec{E}_i$

（切向加速）

$\vec{f}_m = -e\vec{v}\times\vec{B}$

（向心力）

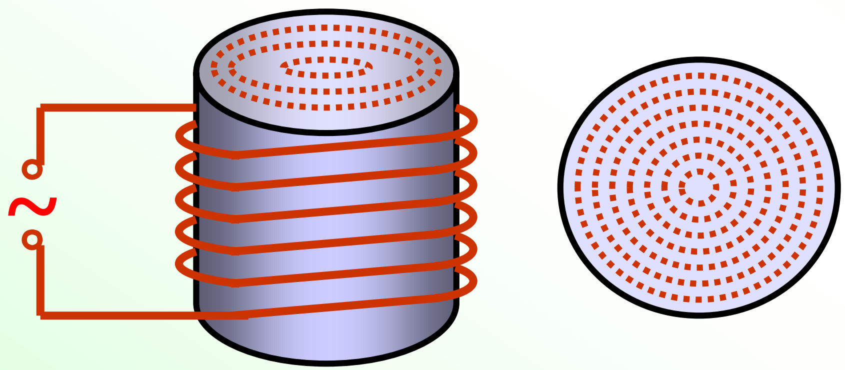


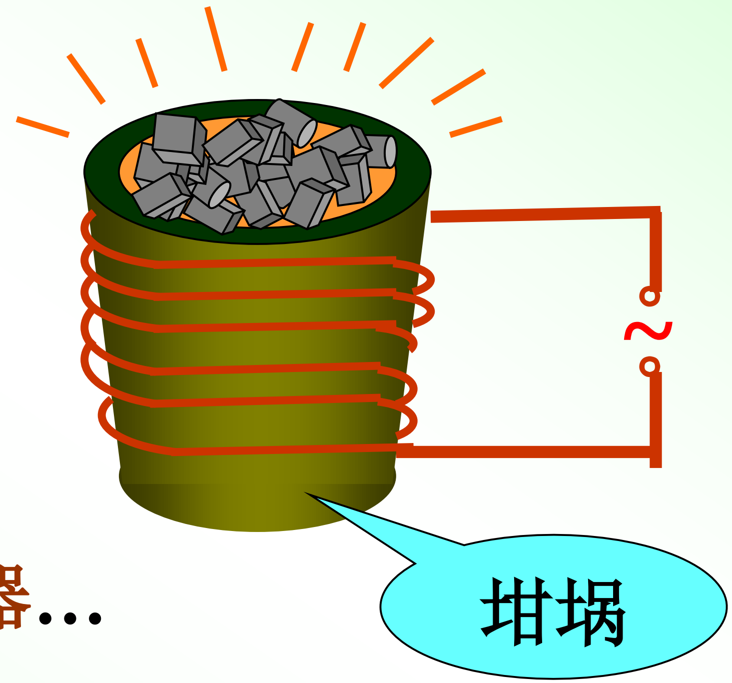
加速器的成功证实了感应电场的客观存在.

问题： 为什么在电流 *I* 的每一个变化周期里，只有前1/4周期是在给电子加速？

（2）涡流 ——高频电磁感应炉

将导体块放置在$\vec{E}_i$中, 则在导体中将产生环形电流→涡流。



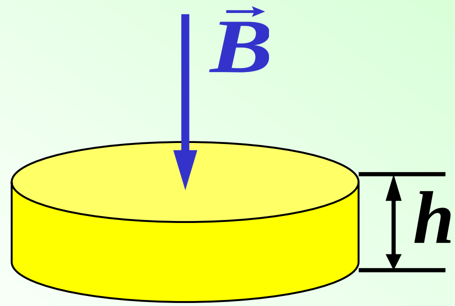


另外，金属探测器；探雷器…

注：

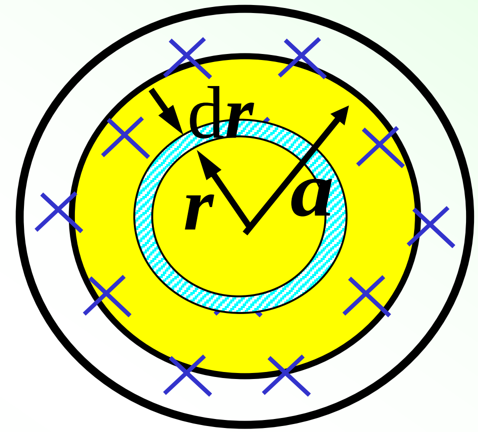
涡流还是有害的，它不仅消耗电功率，而且降低设备能量利用效率。

例：将半径为a、厚为h、电导率为σ的金属圆盘，同轴放置在轴对称匀强磁场$\vec{B}$中，且$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t>0$。求圆盘上的电流强度及产生的热功率。



解：取半径为r,厚度为$\mathrm{d}r$的圆筒,其电动势

$$\mathrm{d}\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B\cdot\pi r^2)=-\pi r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$



其上电阻为： $R=\dfrac{2\pi r}{\sigma\cdot h\cdot\mathrm{d}r}$

电流为：$\mathrm{d}I_i=\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon_i}{R}=-\dfrac{r}{2}\sigma h\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}r$

总电流： $I_i=\int\mathrm{d}I_i=-\dfrac{1}{4}a^2\sigma h\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

产生的热功率：

$$P=\int\mathrm{d}P=\int R(\mathrm{d}I_i)^2=\frac{1}{8}\pi\sigma h a^4\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

4. 感应电场的特点、性质

感应电场 $\vec{E}_i$ 的特点：

1）$\vec{E}_i$ 与 $\vec{E}_e$ 一样，对场中的电荷有电场力的作用。

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{q} \qquad \vec{F} = q\vec{E}_i$$

2）$\vec{E}_i$ 的产生不依赖空间是否有导体存在，

只要 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t \neq 0$ 就行。

只要磁场变化，真空 、介质中都可以激发感应电场。

3）不仅在磁场分布范围内有感应电场，之外也有。

$\vec{E}_i$ 的方向与 ε_i 基本一致，可用楞次定律判断。

4）$\vec{E}_i$ 是非保守力场，$\oint \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$

$\vec{E}_i$ 场中不能引入电势概念，

其电场线是无头无尾的闭合曲线~~故也称为涡旋电场。

感应电场 $\vec{E}_i$ 与静电场 $\vec{E}_e$ 的异同:

相同处: 对电荷的作用相同。

不同处

$$\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$ 有源

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = 0$$ 无源

$$\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = 0$$ 无旋

保守场→电势

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$ 有旋

非守保场

$\vec{E}_e$与 $\vec{E}_i$的比较

静电场	感应电场
对场中的电荷有力的作用	同静电场
由静止的电荷激发	由变化的磁场激发
使导体内电荷移动产生静电感应，平衡时内部场强为零，导体是等位体不能形成持续电流。	使导体内电荷移动产生电磁感应，导体内产生感应电动势 —— 感应电流。
场方程 $\begin{cases} \oint_s \vec{E}_e \cdot d\vec{s} = \sum_i q_i \big/ \varepsilon_0 \neq 0 & \text{有源场} \\ \oint_L \vec{E}_e \cdot d\vec{l} \equiv 0 & \text{无旋场} \end{cases}$	场方程 $\begin{cases} \oint_s \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = 0 & \text{无源场} \\ \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \neq 0 & \text{有旋场} \end{cases}$
电力线不闭合	电力线闭合
保守场 、 可以引入电 位	非保守场、不能引入电位

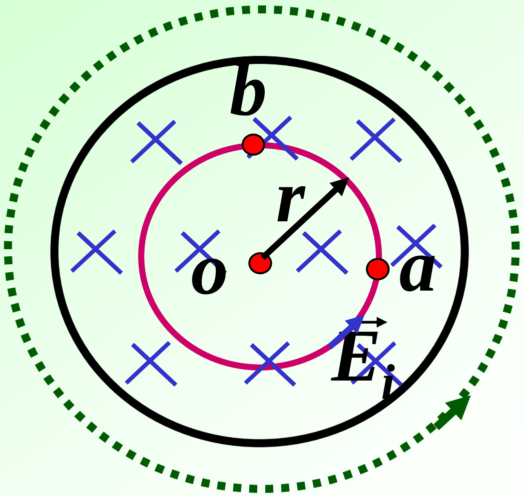
5. $\vec{E}_i$的计算　一般情况下的 $\vec{E}_i$的计算较

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

例： 求一个轴对称磁场变化时的涡旋电场。分布在半径为R的范围内，dB/dt=常量，而且大于零。

求： 1）任意距中心o为r处的$\vec{E}_i$=?

2）计算将单位正电荷从$a \to b$，$\vec{E}_i$的功。



解： 1)由$\vec{B}$的均匀及柱对称性可知，在同一圆周上$\vec{E}_i$的大小相等，且沿切线方向，

取半径为r的电力线为积分路径，

方向为逆时针方向:

当$r<R$时： $\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = E_i \cdot 2\pi r$

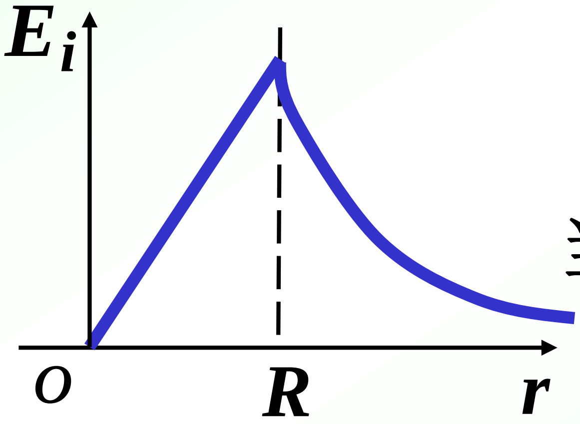
$$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = -\frac{dB}{dt} \cdot (-\pi r^2)$$

$$E_i = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

当$r>R$时： $\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = E_i \cdot 2\pi r$

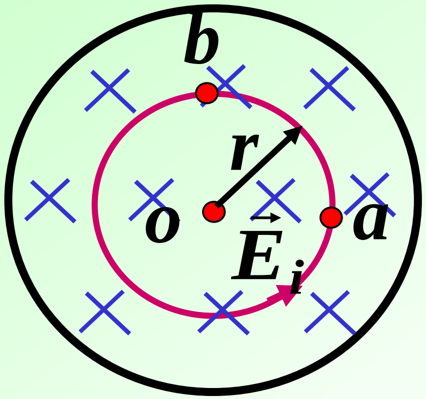
$$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \frac{dB}{dt}\pi R^2$$

$$E_i = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$$



2）沿1/4圆周将单位正电荷从$a\rightarrow b$，$\vec{E}_i$做功

$$\boxed{E_i=\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}}$$



$$A_{\frac{1}{4}ab}=\int \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l} \;=\int_0^{\frac{\pi r}{2}}\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}l \;=\frac{\pi}{4}r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

沿3/4圆周$\vec{E}_i$做功

$$A_{\frac{3}{4}ab}=\int \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l} \;=-\int_0^{\frac{3\pi r}{2}}\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}l \;=-\frac{3\pi}{4}r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

结论：

1）$E_i\propto \mathrm{d}B/\mathrm{d}t$，与$B$大小无关

2）$r>R$，磁场外$E_i\neq 0$。

3）$A_{1/4ab}\neq A_{3/4ab}$

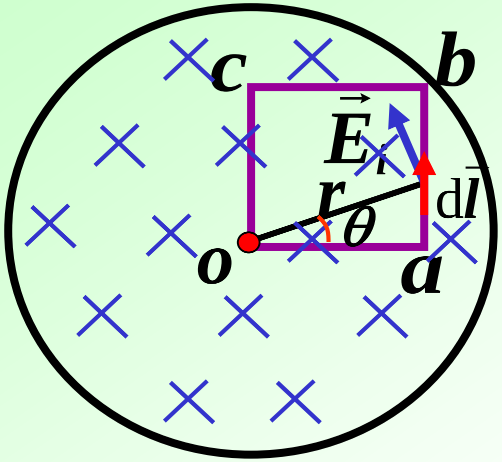
即:$\vec{E}_i$做功与路径有关——非保守场

例：在上例的磁场中,放入一边长为L的正方形导体回路$oabc$。

求：1）回路各边的感应电动势； 2) $\varepsilon_{i总}$；

3）回路内有静电场吗？

若有，c与a哪点电势高？



解：1）$\left.\begin{array}{l}\because oa\perp\vec{E}_i \\ oc\perp\vec{E}_i\end{array}\right\}\quad \therefore \varepsilon_{oa}=\varepsilon_{oc}=0$

$$\varepsilon_{ab}=\int_a^b \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_a^b E\cos\theta \mathrm{d}l=\int_a^b \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cos\theta \mathrm{d}l$$

$$=\int_a^b \frac{L}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}l=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}L^2$$

$$\boxed{\varepsilon_i=\int_-^+ \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

$$\boxed{E_i=\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}}$$

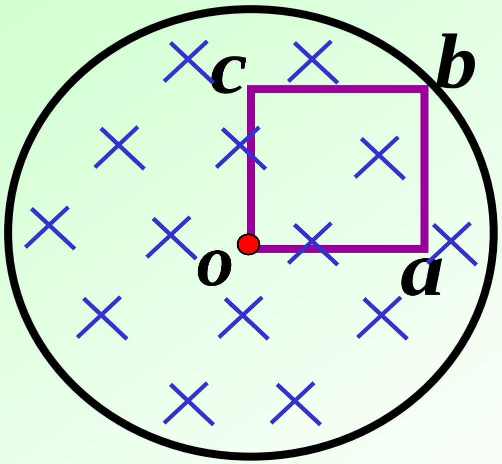
同理：$\varepsilon_{bc}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}L^2$

2）$\varepsilon_{i总}=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bc}=L^2\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$,

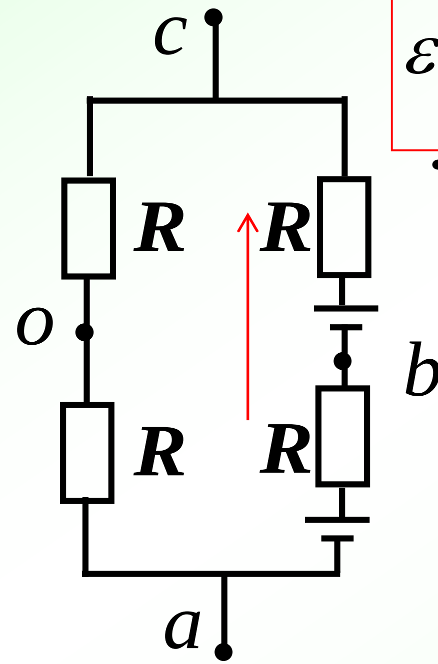
或$\varepsilon_{i总}=-\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{B}\cdot\vec{s})=s\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=L^2\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

注：根据对称性：1）、2）的计算可以倒过来进行。

3）有静电场。电荷积累在哪?



等效电路



$$\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{bc}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}L^2$$

$\because \varepsilon_{oa}=\varepsilon_{oc}=0,$

ε_{ab}, ε_{bc}会使正电荷在c点聚集,而a点有负电荷积累.

$$\therefore V_c>V_a$$

另，可考虑从a到c的电势变化：

$$V_a+|\varepsilon_{ab}|-iR+|\varepsilon_{bc}|-iR=V_c$$

$$V_a-V_c=2iR-2|\varepsilon_{ab}|$$

$$i=\frac{2|\varepsilon_{ab}|}{4R}$$

$$V_a-V_c=|\varepsilon_{ab}|-2|\varepsilon_{ab}|=-|\varepsilon_{ab}|<0$$

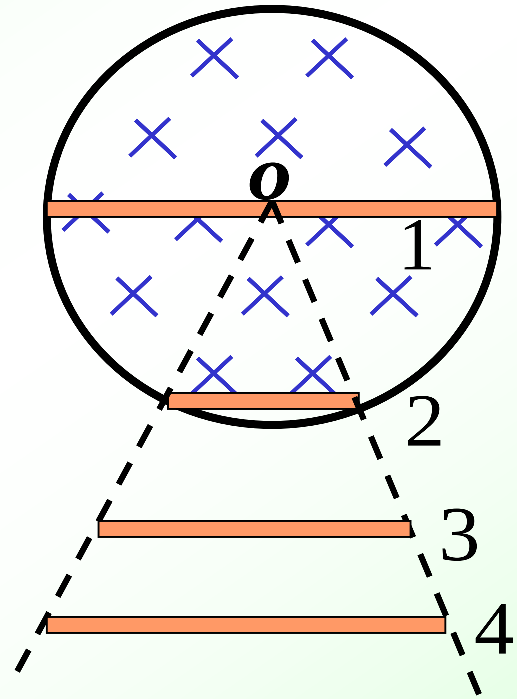
$$\therefore V_c>V_a$$

例：在上例的磁场的磁场中，放有四根导体棒。

1）比较各棒中的ε_i。

2）3，4连成通路I_i=？

3）棒中哪端电势高？



解：

1）$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 = 0$

2）I_i=0

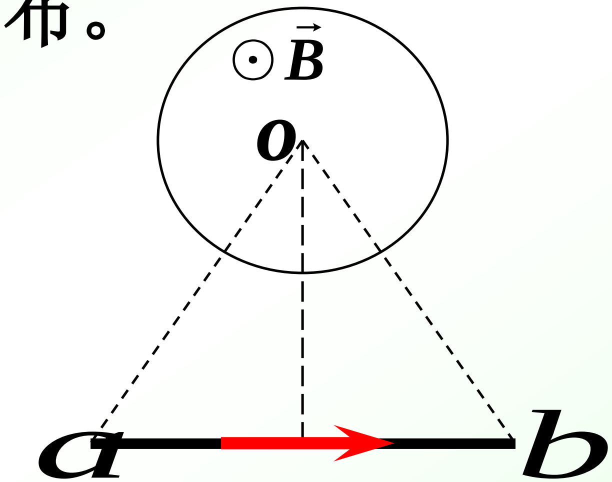
3）$V_{右} > V_{左}$

问题：

还有什么样的情况可以得到感应电场的解析表达式？

例：磁力线限制在圆柱体内，沿轴向均匀分布。

$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=c$，求：$\varepsilon_{ab}$



解：补上半径 oa，ob，

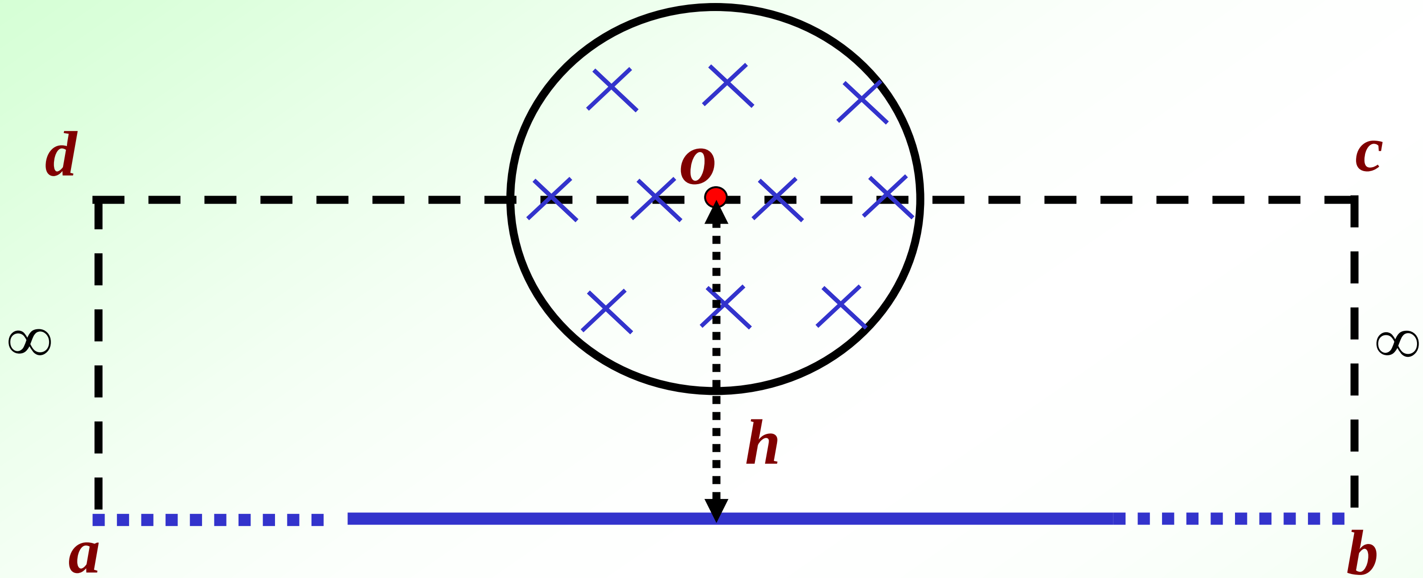
设回路方向如图.

$$\boxed{\varepsilon_{oabo}=\varepsilon_{oa}+\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bo}=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}\quad \boxed{\varepsilon_{oa}=0,\varepsilon_{bo}=0}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ab}=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}\quad \boxed{\phi=BS_{\text{扇形}}}\quad \boxed{\varepsilon_{ab}=-S_{\text{扇形}}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}}$$

若ab 无限长呢？

例：磁场均匀分布在半径为R的范围，$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$=常量，且大于零。求无限长直导线ab上的电动势。



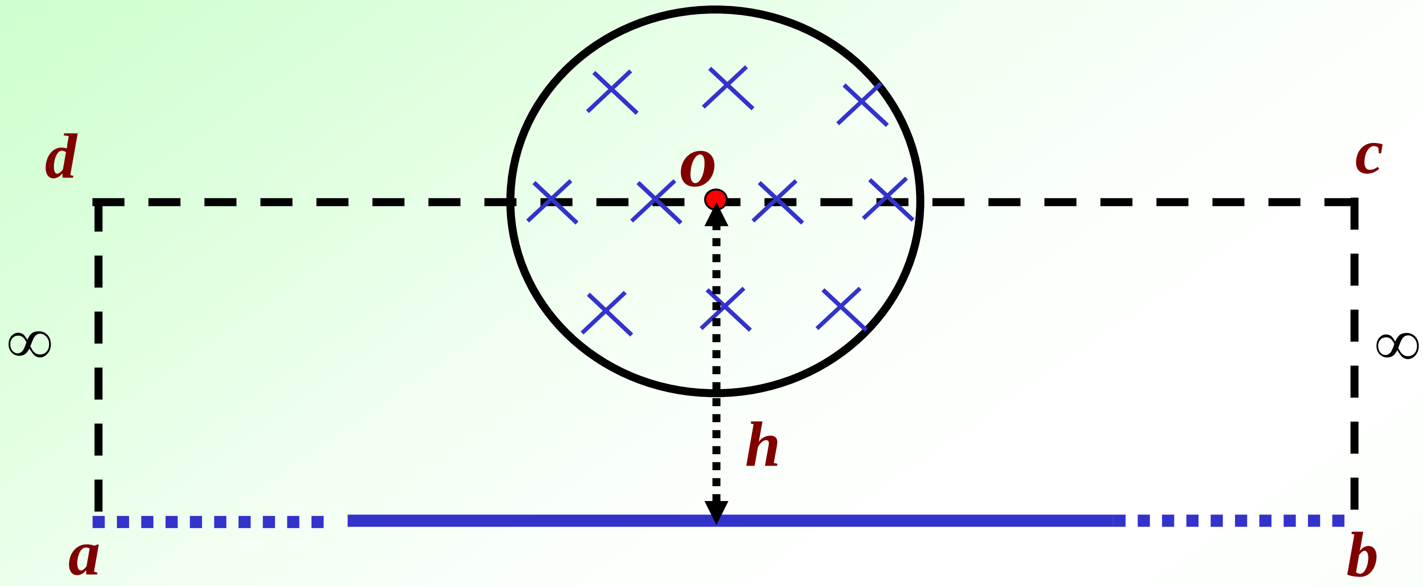
解：由$\vec{B}$的均匀及柱对称性可知，在同一圆周上$\vec{E}_i$的大小相等，方向沿切线方向. 当$r>R$时，$E_i=\dfrac{R^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{\varepsilon_i=\int_-^+\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}}$$

另解：

取如图所示的矩形回路。

$$\varepsilon_{ab}=\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$



解： 考虑回路*abcd*，$\varepsilon_{abcd} = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc} + \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{da}$，

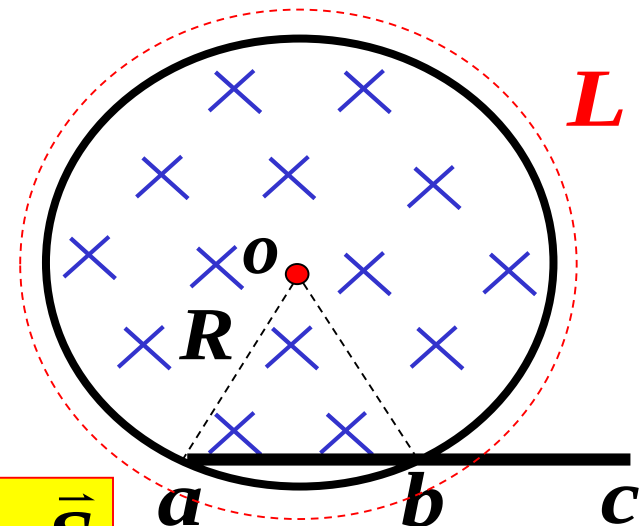
而 $\varepsilon_{bc} = \varepsilon_{cd} = \varepsilon_{da} = 0$，

故 $\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{abcd} = -\,\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = -\,(\pi R^2/2)\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$

方向：由愣次定律知 $a \rightarrow b$

例: 在半径为R的圆形区域内，有垂直向里的均匀磁场正在减小。有一金属棒abc放在图示位置，已知$ab=bc=R$，求（1）a、b、c三点感应电场的大小和方向（在图上标出）；（2）棒上感应电动势ε_{abc}为多大；（3）a、c哪点电势高。

解:（1）$\oint \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \ (= -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t})$



取回路L，且绕行方向为顺时针。

由楞次规律知，感应电场的方向是顺时针沿L回路。

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

由对称性知，$\oint \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = E_i \cdot 2\pi r$

$$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \cdot \pi R^2$$

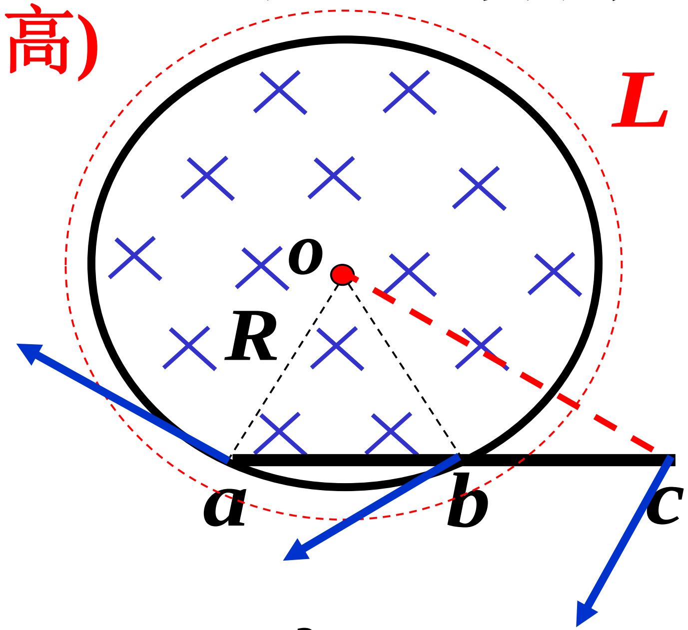
$$\Rightarrow E_i = -\frac{R^2}{2r} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

例: 在半径为*R*的圆形区域内，有垂直向里的均匀磁场正在速减小。有一金属棒*abc*放在图示位置，已知*ab*=*bc*=*R*，求

（1）*a*、*b*、*c*三点感应电场的大小和方向（在图上标出）；

（2）棒上感应电动势ε_{abc}为多大；（3）*a*、*c*哪点电势高。

（3）*a*点电势高。(正极高)



解:

$$E_a = E_b = -\frac{R}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$E_c = -\frac{R^2}{2\overline{oc}}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{2\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

感应电场的方向如图所示。

$$E_i = -\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

（2）$\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc}$

分别对*oab*、*obc*回路应用

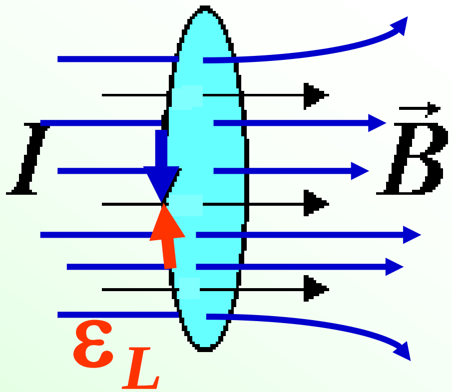
$\varepsilon_i = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ 即可。或直接考虑*oac*回路。

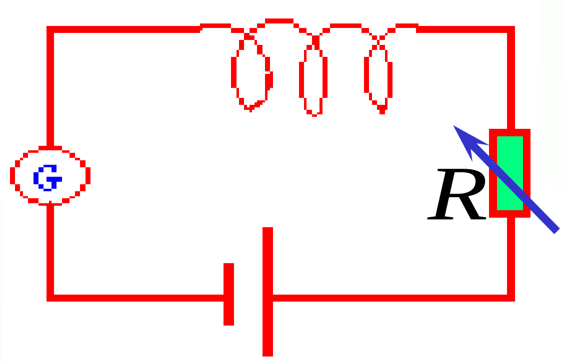
$$\vec{B}=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

五. 自感与互感

1、自感（也称自感应）

由于通电线圈中电流发生变化导致电流产生的磁通量发生变化，而在线圈自身产生感应电动势的现象(自感)。





$$\left\{\begin{array}{l}\varepsilon_L=-\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\\[2ex] \varepsilon_L=-N\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\end{array}\right.$$

(1)自感电动势的大小

若回路中通有电流 I ，几何形状不变，空间没有铁磁质，根据毕奥—萨伐尔定律：

$$B\propto I,\varphi\propto I,\psi\propto I$$

$$\rightarrow\psi=LI$$

L称为自感系数、电感、自感

$\psi = LI$

对一定几何形状的线圈，在一定的磁介质中（除铁磁质外）L 是常量。（L只与线圈几何形状和周围的磁介质有关，与电流无关）

演示：自感L与磁导率μ的关系

$$\varepsilon_L = -\frac{d\psi}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right)$$

L 为常量时：$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}}$

(2)自感电动势的方向：反抗回路中电流的改变

$$\begin{cases}\text{电流增加时，自感电动势与原电流方向相反}\\ \text{电流减小时，自感电动势与原电流方向相同}\end{cases}$$

(3)自感系数“L”的定义：

$$\begin{cases} L = \Psi / I & \text{（普适）} \\ L = \left| -\dfrac{\varepsilon_L}{dI/dt} \right| & \text{（仅}L\text{ 为常量时）} \end{cases}$$

L的单位：亨利（H）

$1\ \mathrm{H} = 1000\ \mathrm{mH} = 10^6\ \mu\mathrm{H}$

注意：

（1）“L”的两个定义式只有在 L 是常量时是一致的。

（2）“L”是线圈电磁惯性的量度。

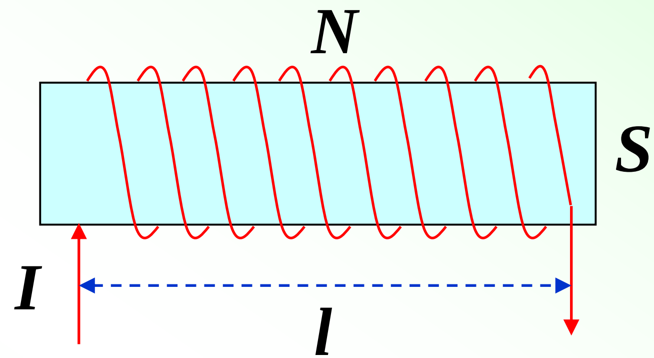
$$\begin{cases} F=ma \\ \varepsilon_L=-L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

(4)自感系数 L 的计算：

例：求细长直螺线管的自感系数（l、S、N）

假定螺线管通入电流 I，因管中各处的 $\vec{B}$ 是均匀的.

$$\psi=N\varphi=NBS=N\mu_0 nIS=\mu_0 IS\frac{N^2}{l}$$



真空中 $L=\dfrac{\psi}{I}=\mu_0 S\,{N^2}\!/l=\mu_0 n^2 V_{体}$

介质中 $\mu_0\rightarrow\mu_0\mu_r$

$$\boxed{L=\frac{\psi}{I}}$$

注意：（1）铁磁质不能用上式计算

（2）不仅线圈有自感，任何电路都有