



华中科技大学 2019~2020 学年第一学期

“微积分 (一)” 考试试卷(A 卷)解答

一. 单项选择题 (每小题 3 分, 6 个小题共 18 分, 将结果涂在答题卡上。)

1. 设  $0 < a_n < 1$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ , 则以下数列中无界的是 【 C 】.

A.  $\{a_n^2\}$     B.  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$     C.  $\left\{\tan \frac{\pi a_n}{2}\right\}$     D.  $\{\ln a_n\}$

2. 已知  $f(2)=3, f'(2)=5$ , 则极限  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2+h)-9}{h} =$  【 A 】.

A. 30    B. 10    C. 6    D. 0

3. 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上可导, 则以下说法中 **错误** 的是 【 B 】.

A.  $f(x)$  必在  $[a, b]$  上有界    B.  $f(x)$  必在  $[a, b]$  上有连续的导数

C.  $f(x)$  必在  $[a, b]$  上连续    D.  $f(x)$  必在  $[a, b]$  上可积

4. 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1+e^x)$  一共有 【 D 】 条渐近线.

A. 0    B. 1    C. 2    D. 3

5. 设函数  $f(x)$  二阶可导, 且  $f''(x) < 0$ , 则以下不等式中一定成立的是 【 B 】.

A.  $f(1)+f(3) > 2f(2)$     B.  $f(1)+f(3) < 2f(2)$

C.  $f(1)+f(2) > 2f(3)$     D.  $f(1)+f(2) < 2f(3)$

6. 微分方程  $y' - \frac{y}{2x} = 0$  满足初值条件  $y(1)=2$  的特解为 【 A 】.

A.  $2\sqrt{x}$     B.  $1+\sqrt{x}$     C.  $1+x$     D.  $\sqrt{x+3}$

二. 填空题 (每小题 4 分, 4 个小题共 16 分, 将计算结果写在答题卡上。)

7. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) =$  \_\_\_\_\_.

解 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}$  或  $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ .

8. 设函数  $y = x^2 - x$ . 在  $x=2, \Delta x=0.01$  时, 微分  $dy =$  \_\_\_\_\_.

解  $dy = y'(2)\Delta x = 0.03$ .

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \sqrt{3+t^2} dt}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x \sqrt{3 + \sin^4 x}}{2x} = \sqrt{3}.$$

10. 曲线  $y = 1 - x^4$  与  $x$  轴所围成图形的面积为\_\_\_\_\_.

$$\text{解 } S = \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = \frac{8}{5}.$$

三. 基本计算题 (每小题 7 分, 6 个小题共 42 分, 必须写出主要计算过程。)

11. 已知当  $x \rightarrow 0$ ,  $u = e^{3x} - ax^2 - (1 + bx) \cos x$  是与  $x^3$  同阶的无穷小. 求常数  $a, b$  的值.

$$\text{解 } e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\text{所以 } u = (3 - b)x + (5 - a)x^2 + \frac{9 + b}{2}x^3 + o(x^3) \sim cx^3.$$

必然有  $a = 5, b = 3$ .

12. 求  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  在区间  $[-2, 2]$  上的最大值与最小值.

$$\text{解 } f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

令  $f'(x) = 0$ , 得到函数在开区间  $(-2, 2)$  内的驻点为  $x = -1$ .

直接计算有  $f(-2) = 3, f(2) = -17, f(-1) = 10$ .

故在区间  $[-2, 2]$  上函数的最大值为 10、最小值为 -17.

$$13. \text{求不定积分 } I = \int \frac{e^{5x}}{e^{2x} + 1} dx.$$

解 令  $u = e^x$ ,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{u^4}{u^2 + 1} du = \int (u^2 - 1 + \frac{1}{u^2 + 1}) du \\ &= \frac{u^3}{3} - u + \arctan u + C = \frac{e^{3x}}{3} - e^x + \arctan e^x + C. \end{aligned}$$

$$14. \text{求定积分 } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

解  $I = x \tan x \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x dx$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln \cos x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

或  $\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}, \quad \frac{\pi}{4} + \ln \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}.$

15. 判定反常积分  $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$  的敛散性, 若收敛求其值.

解法一 令  $x = \tan t$ , 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \csc t dt \\ &= \ln |\csc t - \cot t| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \ln(\sqrt{2}-1) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1-\cos t}{\sin t} = +\infty \end{aligned}$$

原反常积分发散.

解法二 令  $x = 1/t$ , 有

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = \ln(t + \sqrt{t^2+1}) \Big|_1^{+\infty} = +\infty.$$

原反常积分发散.

解法三  $\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \sim \frac{1}{x}, x \rightarrow 0$ , 积分  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  发散, 故  $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$  发散.

16. 求微分方程  $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}$  满足初值条件  $y(2) = 0, y'(2) = 1$  的特解.

解 令  $y' = p(y)$ , 原方程化为

$$p \frac{dp}{dy} = \frac{\sin y}{\cos^3 y}.$$

分离变量以后积分得

$$\frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2 \cos^2 y} + C_1.$$

代入初始条件得  $C_1 = 0$ . 注意到当  $y = 0, p = 1$ , 故  $p = \frac{1}{\cos y}$ , 亦即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

再次分离变量积分得到  $x = \sin y + C_2$ , 代入初始条件得  $C_2 = 2$ .

所求解为  $x = \sin y + 2$  或  $y = \arcsin(x-2)$ .

四. 应用题 (每小题 7 分, 2 个小题共 14 分, 必须写出主要过程。)

17. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , 讨论  $f'(x)$  在点  $x = 0$  的连续性(需说明理由)。

解 当  $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$  时,  $f'(x) = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$ .

$$\text{又} \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

又有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x)}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

从而成立  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$ . 所以  $f'(x)$  在  $x = 0$  连续.

18. 求曲线  $y = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3}$  对应于  $1 \leq x \leq 4$  弧段的长度.

$$\text{解} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

$$\text{弧微分 } ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{故曲线长度为 } s &= \frac{1}{2} \int_1^4 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx \\ &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

五. 综合题 (每小题 5 分, 2 个小题共 10 分, 必须写出主要过程。)

19. 设  $n$  为正整数. 求方程  $(x+1)^{2n} = x^{2n} + 1$  所有的实根. 证明你的结论.

**解** 显然方程有实根  $x=0$ .

设  $f(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 1$ . 因  $t^{2n-1}$  为严格单增函数,

$$f'(x) = 2n((x+1)^{2n-1} - x^{2n-1}) > 0.$$

所以  $f(x)$  为严格单增函数, 因此原方程只有唯一实根  $x=0$ .

**20.** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有连续的导数. 证明:

$$f(x) \leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx, x \in [a, b].$$

**证** 根据积分中值定理,  $\exists \xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

$$\begin{aligned} \text{则 } |f(x)| &= \left| f(\xi) + \int_{\xi}^x f'(t) dt \right| \leq |f(\xi)| + \left| \int_{\xi}^x f'(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx. \end{aligned}$$