华中科技大学《线性代数》

2018-2019 学年第二学期期末考试 A 卷

一、判断题（每小题 2 分，共 16 分）

1、设A,B,C是三个n阶非零矩阵，如果$AB=BA$,则$A^2B+ACA=A(B+C)A$

2、若向量$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性无关，则必有$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m\neq 0$

3、设A,B为满足$AB=0$的两个非零矩阵，则A的列向量组线性相关，B的列向量组也线性相关.

4、设A为三阶非零矩阵满足$A^2=0$，则齐次线性方程组$AX=0$的线性无关的解向量的个数为 2.

5、设A为$m\times n$阶实矩阵，则矩阵A^TA与A有相同的秩，其中A^T是A的转置

6、若方阵A的各行元素和为 1，则 1 必为A的一个特征值

7、记A^*为方阵A的伴随矩阵，若A为正定矩阵，则A^*也为正定矩阵.

8、设A是n阶实反对称矩阵，即$A^T=-A$，其中A^T是A的转置，则对任意的n维实向量X，均有$X^TAX=0$.

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1、设A是n阶方阵，I为n阶单位矩阵，且$A^2=A$,则$(A-2I)^{-1}=$__________.

2、设A是n阶可逆矩阵，A的行列式$|A|=a$，且A的各行元素之和均为b，则A的第 1 列元素的代数余子式之和$A_{11}+A_{21}+\dots+A_{n1}=$__________.

3、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为三个三维（列）向量，记矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,已知$A$的行列式$|A|=1$，记矩阵$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，则行列式$|B|=$__________.

4、已知$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+tx_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3$为正定二次型，则$t$的取值范围为__________.

5、设矩阵$A=(a_{ij})_{3\times 3}$是正交矩阵，且$a_{11}=1$.设向量$\beta=(1,0,0)^T$，则非齐次线性方程组$AX=\beta$的解$X=$__________.

三、（8 分）计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中$a_i\neq 0, i=1,2,\ldots,n$

四、（12 分）设线性方程组为$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1 \\ 3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=-1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=b \end{cases}$

（1）讨论a,b为何值时，方程组有解或无解；

（2）当有解时，求出方程组的解.

五、（10 分）设矩阵A,B满足$A^*BA=2BA-8I$，其中$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A^*$表示$A$的伴随矩阵，$I$为三阶单位矩阵，求矩阵$B$.

六、（12 分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ -1 & a-1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$有特征值 1，当$A$的特征值之和最小时，求正交矩阵$C$,使得$C^T AC$为对角矩阵，并写出此对角矩阵.

七、（10 分）已知方阵A,$I-A$,$I-A^{-1}$均可逆，其中I为单位矩阵，证明：

$$(I-A)^{-1}+(I-A^{-1})^{-1}=I$$

八、（12 分）证明题

设A,B为n阶方阵，已知A可相似对角化，又有$A^2+A=0$，$B^2+B=I$,且有秩关系$R(AB)=2$

证明：（1）B可逆；

（2）$|A+2I|=2^{n-2}$，其中I为n阶单位矩阵.