华中科技大学 2024～2025 学年第一学期
“线 性 代 数 ”考试试卷(A 卷)参考答案（及评分标准）

一、判断题（每小题 2 分，共 16 分）

1. √　2. x　3. √　4. x　5. x　6. √　7. √　8. √

二、填空题（5 小题，共 20 分）

1. $7^{\frac{5}{6}}$　2. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$　3. -2　4. 14　5. $a=\pm4,\ b=1$

三、（10 分）

整理得，$X=(|A|I-A^2)^{-1}(I+A)$ …5 分

其中$|A|=2$，$|A|I-A^2=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，$(|A|I-A^2)^{-1}=\begin{bmatrix}-1/2&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$

故$X=\begin{bmatrix}-1/2&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&-1\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3/2&0&0\\0&2&-5\\0&0&2\end{bmatrix}$. …10 分

四、（10 分）

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\2&3&3&4\\-1&-2&1&1\\1&0&5&11\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&11\\0&1&0&-6\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ …5 分

（1） 故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一组极大线性无关组，故空间 V 的维数为 3. …8 分

（2） 比如：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一组基， $\alpha_4=11\alpha_1-6\alpha_2$. …10 分

五、（12 分）

（1）解法 1

α满足$A\alpha=\lambda\alpha$，即$(\lambda I-A)\alpha=0$，

故$\begin{bmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\k\\-1\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda-k+1=0\\-2+k\lambda+1=0\\-2-k-\lambda=0\end{cases}$

解得$k=-1$，$\lambda=-1$. … 5 分

（2）

令$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$

故$\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=2$.

当$\lambda_1=\lambda_2=-1$，其特征向量为$(-I-A)X=0$的非零解，

$-I-A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，基础解系为$\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

注（1）解法 2: $k=-1$时，$\alpha=-\alpha_1-\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$是$A$和$A^{-1}$的特征向量.

当$\lambda_3=2$，其特征向量为$(2I-A)X=0$的非零解，

$2I-A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，基础解系为$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

令$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$, $\beta_3=\alpha_3$

令$\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{bmatrix},\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$, …10 分

令$C=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]$, 经过正交变换 $X=CY$,

$f=X^TA^{-1}X=-y_1^2-y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2$. …12 分

六、（12 分）

（ 1 ） $[A\ \vdots\ b]=$

$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & -1 & 3\\ \lambda & 1 & 1 & 2-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2\lambda-4\end{bmatrix}$

若$r(A)=r([A\ \vdots\ b])=3$, 即$\lambda\neq\pm1$ 交于一点；

若$r(A)=r([A\ \vdots\ b])<3$, 即$\lambda=1$ 交于一条直线；

若$r(A)\neq r([A\ \vdots\ b])$，即$\lambda=-1$，没有公共交点； …8 分

（2）当$\lambda=1$时，

$[A\ \vdots\ b]\xrightarrow{\text{行初等变换}}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -2\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

直线方程为$\begin{cases}x+y=2\\ z=-1\end{cases}$. …12 分

七、（10 分）

（1）证明：令$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n=0$，（*）

则$A^{n-1}(k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n)=0$

即$k_1A^{n-1}\xi_1+k_2A^{n-1}\xi_2+\cdots+k_nA^{n-1}\xi_n=0$

由条件，$A^{n-1}\xi_i=0,\quad i=2,\dots,n$

则$k_1A^{n-1}\xi_1=0$，即$k_1(n-1)!\,\xi_n=0$

由于$\xi_n\neq 0$，故$k_1=0$.

$k_1=0$代入（*）式，得$k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n=0$

类似，$A^{n-2}(k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n)=0$，可得$k_2=0$.

同理可得$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，即证$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$线性无关. … 5 分

（2）由题意，

$$A[\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1},\xi_n]=[\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1},\xi_n]\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n-1&0\end{bmatrix},$$

由（1）知，$[\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1},\xi_n]$可逆，

故 A 相似于 $B=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n-1&0\end{bmatrix}$，且 $\mathrm{r}(B)=n-1$.

令$|\lambda I-B|=0$，得$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$，

且 $\dim\mathrm{N}(B)=n-\mathrm{r}(B)=n-(n-1)=1$,

即 B 线性无关的特征向量只有 1 个，没有 n 个，

故 B 不能相似对角阵，

故 A 也不能相似对角阵. … 10 分

八、（10 分）证明

（1）解法 1

$$D(x)=\begin{vmatrix}1 & b+x & b+x & \cdots & b+x\\ 0 & x_1+x & a+x & \cdots & a+x\\ 0 & b+x & x_2+x & \cdots & a+x\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & b+x & b+x & \cdots & x_n+x\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & b+x & b+x & \cdots & b+x\\ -1 & x_1-b & a-b & \cdots & a-b\\ -1 & 0 & x_2-b & \cdots & a-b\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-b\end{vmatrix}_{n+1}$$

按照第一行展开，即证$D(x)$是关于x的不超过一次的多项式.

另证：

$$D(x)=\begin{vmatrix}x_1+x & a+x & a+x & \cdots & a+x\\ b-x_1 & x_2-a & 0 & \cdots & 0\\ b-x_1 & b-a & x_3-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b-x_1 & b-a & b-a & \cdots & x_n-a\end{vmatrix},$$

按照第一行展开，即证$D(x)$是关于x的不超过一次的多项式. … 5 分

（2）$D(0)=D$，设$D(x)=D+xc$

由$D(x)$表达式，有$D(-b)=(x_1-b)(x_2-b)\cdots(x_n-b)=f(b)$，

且$D(-a)=(x_1-a)(x_2-a)\cdots(x_n-a)=f(a)$，

又$D(-b)= D-bc,$

$D(-a)= D-ac,$

故$aD(-b)=a D-abc,$

且$bD(-a)= bD-abc,$

联立上述两式，且由$a\neq b$，得

$$D=\frac{aD(-b)-bD(-a)}{a-b}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

即证. … 10 分