



华中科技大学 2019~2020 学年第二学期
“线性代数”考试试卷(A 卷)

考试方式: 闭卷 考试日期: 2020.09.02AM 考试时长: 150 分钟

院(系): _____ 专业班级: _____
学号: _____ 姓名: _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

得 分	
评卷人	

一、判断题((2 分×8=16 分) 正确的打“√”, 错误的打“×”)

解答内容不得超装订线

- () 1. 设 A 是 n 阶对称矩阵, B 为 n 阶反对称矩阵, 则 $AB + BA$ 是对称矩阵.
() 2. 设 A 为 n 阶方阵, 若 $A^2 = A$, 则 $A = \mathbf{0}$ 或 $A = I$.
() 3. 若方阵 A 的列向量组是正交向量组, 则 A 为正交矩阵.
() 4. 设 A 、 B 都是 n 阶方阵, 若 $AB + A + B = \mathbf{0}$, 则 $AB = BA$.
() 5. 若 A 和 A^T 都是 n 阶方阵, 则它们有相同的特征值.
() 6. 设三维向量 β 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的坐标为 $(1, -1, 1)^T$, 则 β 在另一组基 $\{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3\}$ 下的坐标为 $(4, -2, 1)^T$
() 7. 二次型 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 4xy - 4yz$ 对应的矩阵的秩是 3.
() 8. 设三阶方阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$, 则行列式 $|A^2 - 3A + 5I| = 60$.

得 分	
评卷人	

二、填空题((4 分×5=20 分) 将答案填在指定的横线上)

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^5 =$ _____.

2. 方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解为 $x = \underline{\hspace{10em}}$.

3. 设-2,4 为矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 6 & -6 & b \end{bmatrix}$ 的特征值, 则 $a = \underline{\hspace{2em}}, b = \underline{\hspace{2em}}$.

4. 向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的秩为 $\underline{\hspace{2em}}$.

5. 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是四维列向量, P 为四阶矩阵, 若 $AP = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_4)$, 则 $P = \underline{\hspace{10em}}$

得 分	
评卷人	

三、计算 n 阶行列式的值 (8 分)

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x & b & b & \cdots & b & b \\ a & a+x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & a+x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & a+x & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a+x \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a+x \neq 0$$

得 分	
评卷人	

四、(12分)

已知向量 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} -2 \\ a-3 \\ -2 \end{bmatrix}$, 问 a 为何值时:

- (1) β 可由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 唯一线性表示;
- (2) β 不能由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 线性表示;
- (3) β 可由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 线性表示但不唯一, 并写出此线性表示式。

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

五、(12分)

用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 为标准形。

得 分	
评卷人	

六、(12分)

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为四阶方阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 且 $\alpha_1 = \alpha_2 - 2\alpha_3$, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$, 求方程组 $AX = \beta$ 的通解。

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

七、(10分)

设 A 为实对称矩阵, 且 $(A - I)(A^2 + 2A + 5I) = 0$ 。证明 $A = I$ 。

得 分	
评卷人	

八、(10分)

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为上三角矩阵，证明

1. 当 $a_{ii} \neq a_{jj}$ ($i \neq j$) 时， A 可对角化.
2. 当 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$ 时，若存在 $a_{ij} \neq 0$ ($i < j$)，则 A 不能相似于对角阵.