《线性代数2020春B》参考答案

一、判断题

1. 错， 2. 对， 3. 对， 4. 错，5. 对， 6. 对， 7. 对， 8. 对

二、填空题：

1. 2^{3n-1}， 2. $\alpha_5=-\frac{9}{2}\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_2+\frac{5}{2}\alpha_4$， 3. 48， 4. $\lambda\neq 1$， 5. $(1,\infty)$

三、解答题

解：按第一列展开

$$D_n=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix}-1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1\end{vmatrix}=xD_{n-1}+a_n.$$ 所以递推得到

$$D_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

四、解答题

方程有唯一解，当且仅当系数行列式非零，即

$$\begin{vmatrix}1 & -a & -2\\ 1 & -1 & a\\ 5 & -5 & -4\end{vmatrix}\neq 0$$，解之得 $a\neq-\frac{4}{5}$ 或 $a\neq 1$.

当 $a=-\frac{4}{5}$ 时，系数矩阵与增广矩阵的秩不一致，所以无解;

当 $a=1$ 时，无穷多解，其通解为 $c_1(1,1,0)^T+c_2(1,0,1)^T$.

五、解答题

解：f 所对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & a\end{pmatrix}$. 由题意知 A 的特征值为 $-1,-1,5$. 于是根据迹的性质得到：$1+1+a=-1-1+5$，所以 $a=1$.

求特征值 $\lambda=-1$ 所对应的特征向量，即求解方程组 $(-I-A)X=0$，解之得基础解系为

$(-1,1,0)^T$， $(-1,0,1)^T$

利用 Gram-Schmidt 正交化办法对其正交化和单位化得到：

$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$ $(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T$

求特征值$\lambda=5$所对应的特征向量，即求解方程组$(5I-A)X=0$，解之得基础解系为$(1,1,1)^T$. 对其单位化得到：$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$.

所以将此二次型对应的标准型所采用的正交变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

六、

解：A的特征值为 3， 0，0，其中 3 为 1 重特征值，0 为 2 重特征值. 由于A可相似对角化，所以 0 有两个线性无关的解，即$(0I-A)X=0$的解空间的维数为 2， 从而$r(A)=1$，所以$a=0$.

七、解: 根据f的定义，得到：

$$\begin{aligned} I+f(A)&=I+(I+A)^{-1}(I-A)=(I+A)^{-1}(I+A)+(I+A)^{-1}(I-A)\\ &=(I+A)^{-1}(I-A+I+A)=2(I+A)^{-1}. \end{aligned}$$

于是

$$(I+f(A))\cdot\frac{(I+A)}{2}=I\text{，所以}I+f(A)\text{可逆，且其逆为}\frac{(I+A)}{2}.$$

八、 证明：考虑A的行标准型. 由于A的秩为n，所以A的行标准型中有n列，分别是m维的基本单位向量. 同时，又由于A只有n个列，所以A的行标准型为$\begin{pmatrix} I \\ O \end{pmatrix}$，其中$I$是$n$阶的单位矩阵，$O$是$(m-n)\times n$零矩阵. 所以存在$m$阶可逆矩阵$G$使得$GA=\begin{pmatrix} I \\ O \end{pmatrix}$. 最后，令$B=(I,O)G$，则

$$BA=(I,O)GA=(I,O)\begin{pmatrix} I \\ O \end{pmatrix}=I.$$