2017-2018 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、 判断题（16 分，每题 2 分，共 8 题）

1、【正解】对

【解析】若矩阵A的所有r阶子式都为0，那么$r(A)<r$，因此 A 的所有 r+1 阶子式，如果存在都要为 0，否则$r(A)\geq r+1$就会出现矛盾.

2、【正解】错

【解析】“两个n维向量组等价的充分必要条件是它们有相同的秩”这个命题是错的，

我们用反例：$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}_{n\times1}\right\}$、$\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}_{n\times1}\right\}$是n维向量组，且它们的秩都是 1，

显然它们不等价.（不能相互线性表示）

3、【正解】错

【解析】$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$是两个初等矩阵，但是$AB=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$不是初等矩阵

4、【正解】对

【解析】若n阶方阵A的行列式$|A|=0$,则说明$r(A)<n$，因此A的列向量线性相关，所以一定有一列可由其余列线性表示.

5、【正解】对

【解析】依题意$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0$，且$a_m\neq0,a_0\neq0$，

那么$A(a_mA^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots+a_1I)=-a_0I$，

反证法：假设A不可逆，那么$|A|=0$，

所以$|A||(a_mA^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots+a_1I)|=|-a_0I|$，等式左边为 0，右边为$(-a_0)^n$，由于$a_0\neq0$，那么左右两边矛盾，所以$A$可逆

6、【正解】错

【解析】举个反例：假设$A=[1,1],\beta=1,r=r(A)=1,n=2$，

那么$AX=\beta$的展开形式为$x_1+x_2=1$,其通解为：

$x=a\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+(1-a)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，a 是任意常数

所以非齐次线性方程组$AX=\beta$的线性无关的解的个数为大于$n-r=1$.

7、【正解】错

【解析】令$r=2,n=2,\alpha_1=\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$,显然生成的向量空间$L(\alpha_1,\alpha_2)$的维数为 1，

而不是$\min(r,n)=2$.（思考：题目改为r个线性无关的n维向量才正确）

8、【正解】对

【解析】设 n 阶方阵 A, B 均为正交矩阵，根据正交矩阵的定义，那么$AA^T=BB^T=I$，

则$AB(AB)^T=ABB^TA^T=AIA^T=I$，所以AB也为正交矩阵.

二、 **填空题(18 分，每题 3 分，共 6 题)**

1、【正解】-3

【解析】根据行列式的性质：(−4, 0, 1, 3)和(−2, 5, 1, x)是正交的，因此$8+1+3x=0$，

所以$x=-3$.

2、【正解】$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

【解析】由初等矩阵的性质：$A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=B,B\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=C$，那么：

$$A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=C\Rightarrow Q=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

3、【正解】1

【解析】先求A的特征值，由$\det(A-\lambda I)=0$,那么可以化简得到：（注：这里的符号$\det(A-\lambda I)$表示方阵$A-\lambda I$的行列式，下同）$[(4+\lambda)(3-\lambda)-8](\lambda-a)=0$，由于$\lambda=1$是该式的一个解，而$\lambda=1$时前面[中括号]的一项不为 0，因此$(\lambda-a)=0$，那么$a=1$.

4、【正解】$k\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\\0\end{bmatrix}$,$k$为任意常数

【解析】根据各行元素和为0，那么$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\mathbf{0}_{5\times1}$,由于$r(A)=3,n=4$，那么解集中，线性无

关的解的个数不超过n − r=1 个,因此我们找到了方程的齐次解.$\beta=\alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_3$这个条件告诉

我们$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\\0\end{bmatrix}=\beta$，所以我们找到了特解.所以通解为：$k\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\\0\end{bmatrix}$,$k$为任意常数

5、【正解】0

【解析】对$A_{n\times n}$是一个实对称矩阵，那么 A 一定可相似对角化，所以我们可知：

$$A=P\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}P^{-1},\text{那么}A^m=P\begin{bmatrix}\lambda_1{}^m&&&\\&\lambda_2{}^m&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n{}^m\end{bmatrix}P^{-1},$$

由于$A^m=\boldsymbol{O}$，那么$r(A^m)=0$，

根据性质：与可逆矩阵相乘不改变矩阵的秩，那么：

$$r\left(\begin{bmatrix}\lambda_1{}^m&&&\\&\lambda_2{}^m&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n{}^m\end{bmatrix}\right)=r(A^m)=0\Rightarrow\lambda_i=0(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\text{又}A=P\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}\text{，所以}r(A)=r\left(\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}\right)=0$$

也就是说$A=\boldsymbol{O}_{n\times n}$

三、　（8分）

【正解】$$D_n=\begin{vmatrix}a_1&1&1&\cdots&1\\1&a_2&1&\cdots&1\\1&1&a_3&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&a_n\end{vmatrix}=D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&1&1&1&\cdots&1\\0&a_1&1&1&\cdots&1\\0&1&a_2&1&\cdots&1\\0&1&1&a_3&\cdots&1\\0&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&1&1&1&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$ (利用加边法)

从第二行开始，每一行都减去第一行,那么：

$$D_{n+1}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&\cdots&1\\-1&a_1-1&&&&\\-1&&a_2-1&&&\\-1&&&a_3-1&&\\\vdots&&&&\ddots&\\-1&&&&&a_n-1\end{bmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-1}\right)\prod_{i=1}^{n}(a_i-1)$$

$a_i\neq1,i=1,2,\cdots,n$

四、 （12 分）

【正解】$A=\begin{bmatrix} a+3 & 1 & 2 \\ a & a-1 & 1 \\ 3(a+1) & a & a+3 \end{bmatrix}$,$[A\mid B]=\left[\begin{array}{ccc|c} a+3 & 1 & 2 & a \\ a & a-1 & 1 & a \\ 3(a+1) & a & a+3 & 3 \end{array}\right]$.

（1）β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一的线性表示意味着 $AX=B$ 仅有唯一解.

所以 $r(A)=r(A\mid B)=3$，那么 A 可逆

则 $\det(A)\neq 0$.由于 $\det(A)=a^2(a-1)$

所以，当 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$ 时，β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一的线性表示.

（2）当 $a=1$ 时，

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix},[A\mid B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

此时，$r(A)=r(A\mid B)<3$，β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示不唯一.

主元列在第一列和第二列，因此我们将 x_3 看作自由变量

那么 $\begin{cases} x_1=-x_3+1 \\ x_2=2x_3-3 \\ x_3=x_3 \end{cases}$，即通解为：$X=k\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$

此时 $\beta=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]X$

（3）当 $a=0$ 时

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix},[A\mid B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

由于 $r(A)\neq r(A\mid B)$，因此 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

五、 （10 分）

【正解】由于 $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & b \end{bmatrix}$ 和矩阵 $B=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & c \end{bmatrix}$ 相似，

那么 A、B 有相同的特征值，则 $tr(A)=tr(B),\det(A)=\det(B)$

由于 B 的特征值为对角线上元素 $-1,2,c$,那么 A 也有这三个特征值.

由于 $A=\left[\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & b \end{array}\right]$ 是下三角的分块矩阵，

所以其特征值为：-2, 以及 $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ 的两个特征值.

那么 $c=-2$.

由于 $\det(B)=-1\times 2\times(-2)=4,tr(B)=-1+2+(-2)=-1$

因此：$\det(A)=-2\times(ab-2)=4,tr(A)=a+b-2=-1$

解得：$a=0,b=1$(或者 $a=1,b=0$)

六、 （12分）

【正解】$f(x,y,z)=x^2+4xy+4xz+y^2+4yz+z^2$

对应的矩阵形式表示为$f(x,y,z)=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

我们令$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$,那么由于$A$是对称矩阵，

所以A一定可以相似对角化.

令$\det(A-\lambda I)=0$,所以$(\lambda-5)(\lambda+1)^2=0$

解得$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$

当$\lambda_1=\lambda_2=-1$时，根据$(A-\lambda I)x=0$可以解得对应的特征向量为$p_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},p_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

将其进行施密特正交化，那么$q_1=p_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},q_2=p_2-\frac{q_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_1}q_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\-1\end{bmatrix}$

单位化后为：$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix},\varepsilon_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$

同理：$\lambda_3=5$对应的标准化后的特征向量为$\varepsilon_3=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$

那么所使用的正交变换矩阵$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&-2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$（$P$正交）

因此$A=P\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{bmatrix}P^{-1}\Rightarrow P^TAP=\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{bmatrix}$（利用$P^{-1}=P^T$）

我们令：$X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},V=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix},X=PV$

所以$f(x,y,z)=X^T\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}X=V^TP^T\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}PV=V^T\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{bmatrix}V$

因此，标准型为$f=-{v_1}^2-{v_2}^2+5{v_3}^2$

七、 （10分）

【证明】根据$A,B,A+B$都是n阶可逆矩阵，

因此$A^{-1}(A+B)B^{-1}=A^{-1}AB^{-1}+A^{-1}BB^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$

因此$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=\{A^{-1}(A+B)B^{-1}\}^{-1}=B(A+B)^{-1}A$

八、 （10分）

【证明】由于矩阵A的列向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$线性无关，因此$m\geq n$.

否则当$m<n$时，$r(A)\leq\min(m,n)\Rightarrow r(A)<n$,那么$A$的列向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$线性相关，故矛盾.

由于$m\geq n$，且A的列向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$线性无关，因此$r(A)=n$

充分性：

（1）K是可逆矩阵时，那么由于$B=AK$，因此$r(B)=r(A)=n$，

因此矩阵B的列向量组$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$也线性无关

（**注：**与可逆矩阵相乘不改变矩阵的秩）

必要性：

（2）当矩阵B的列向量组$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$线性无关时，那么$r(B)=n$

因此，我们可以得到$r(B)=r(A)=n$

由题意存在$B=AK$，注意到K是n阶方阵.

我们用反证法：假设K不可逆，那么一定有$r(K)<n$，因此$r(AK)\leq\min(r(A),r(K))=r(K)<n$

（**注：**秩的不等式$r(AB)=\min(r(A),r(B))$）

又因为$r(B)=n$，$B=AK$，所以$r(AK)=n$

因此产生了矛盾

也就是说K一定是可逆矩阵.