



华中科技大学 2023~2024 学年第一学期

“微积分（一）”考试试卷(A 卷)

考试方式: 闭卷 考试日期: 2024.01.10 考试时长: 150 分钟

一、单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上。）

1. 下列函数在其定义域上无界的是【 】

- A. $x^2 D(x)$ ($D(x)$ 为迪尼克雷函数) B. $\tan(\sin x)$ C. $\frac{\sin x}{x}$ D. 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$

2. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的斜渐近线为【 】

- A. $y = -x$ B. $y = -x + 1$ C. $y = x$ D. $y = x + 1$

3. 通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x + x$ (其中 C_1, C_2 为任意常数) 的微分方程是【 】.

- A. $y'' - y' = 1$ B. $y'' - y = 0$ C. $y'' - 2y' + y = e^x$ D. $y'' - 2y' + y = x - 2$

4. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某个邻域内有定义, 则下列命题

- ①若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续.
②若 $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续.
③若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续.

其中正确的个数是【 】.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

5. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x+1) + e^{x^2})}{x^2} = 2$, 则 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的【 】.

- A. 驻点且为极大值点 B. 驻点且为极小值点
C. 不可导点 D. 可导点但不是驻点

6. 设 $M = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x dx, N = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x + \sin^3 x) dx, P = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \cos x - \sin^2 x) dx$, 则【 】

- A. $M > N > P$ B. $N > P > M$ C. $N > M > P$ D. $M > P > N$

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x + 1$ 在点 $(2, 3)$ 处有公共切线, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(2 - \frac{1}{n}) - 3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. $y = f(x)$ 满足 $y' = (1-y)y^\alpha (\alpha > 0)$, 若曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点为 $(t, \frac{1}{2})$, 则 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x} , 则 $\int_{-\frac{1}{2}}^0 xf(2x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 位于曲线 $y = xe^{-x} (0 \leq x < +\infty)$ 下方、 x 轴上方的无界图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题 (每小题 7 分, 6 个小题共 42 分, 必须写出主要计算过程.)

11. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定, 求 $y'(0)$, $y''(0)$.

12. 设 $f(x) = e^x \ln(1+x) - x(1 + \frac{1}{2}x)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 求 $f(x)$ 的主部及阶数.

13. 求极限 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}}{x \sin x^2} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt$.

14. 求极限 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln(1 + \frac{1}{n}) + \ln(1 + \frac{2}{n}) + \cdots + \ln(1 + \frac{n}{n}) \right]$.

15. 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1-t} dt$, 求 $I = \int_0^1 (x-1)f(x)dx$.

16. 若曲线 $y = f(x)$ 是 $y'' + 2y' - 3y = 4e^x$ 的一条积分曲线, 此曲线过点 $A(0,1)$, 且在点 $A(0,1)$ 处的切线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$, 求 $f(x)$.

四. 综合题 (每小题 7 分, 2 个小题共 14 分, 必须写出主要过程.)

17. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 其反函数存在为 $g(x)$, 若

$\int_0^{f(x)} g(t)dt + \int_0^x f(t)dt = xe^x - e^x + 1$, 求 $f(x)$.

18. 设函数 $f(x) = ax + \frac{3}{2}bx^2$ 在区间 $(0,1)$ 内大于零, 其中 a, b 为未知常数, 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围成的区域 D 的面积为 2. 求 a, b 的值, 使得 D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积最小, 并求出最小值.

五. 证明题 (每小题 5 分, 2 个小题共 10 分, 必须写出主要过程.)

19. 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上连续且单调增加, 其中 $a > 0$. 证明

$$a \int_0^a f(x)g(x)dx \geq \int_0^a f(x)dx \int_0^a g(x)dx.$$

20. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$(b-a)^2 |f''(\xi)| \geq 4 |f(b) - f(a)|.$$