华中科技大学 2017-2018 学年第二学期

《线性代数（一）》期末考试 A 卷

一、判断题（16 分，每题 2 分，共 8 题）

1.若矩阵A的所有r阶子式都为0，则A的所有$r+1$阶子式，如果存在，也都为 0.(　　)

2.两个n维向量组等价的充分必要条件是它们有相同的秩.(　　)

3.初等矩阵的乘积仍然是初等矩阵.(　　)

4.若方阵A的行列式$|A|=0$，则A的列向量中一定有一列可由其余列线性表示.(　　)

5.设A是一个n阶方阵，f(A)是一个常数项不为0的m次多项式，其中$m>0$.如果有$f(A)=0$,则A一定可逆.(　　)

6.设A是一个mxn矩阵，其秩为r.则非齐次线性方程组$AX=\beta$的线性无关的解的个数不超过$n-r$个.(　　)

7.由r个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$生成的向量空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$的维数为$\min(r,n)$.(　　)

8.设n阶方阵A, B均为正交矩阵，则AB也为正交矩阵.(　　)

二、填空题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1.已知一个4阶行列式第一行元素依次是$-4,0,1,3$，第3行元素的代数余子式依次为$-2,5,1,x$，则$x=$________.

2.设A是三阶方阵，将A的第1列与第2列交换得矩阵B，再把B的第2列加到第3列得矩阵C，则满足$AQ=C$的可逆矩阵Q为________.

3.设$\lambda=1$是方阵$A=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 4\\ -2 & a & 2\\ -2 & 0 & 3\end{bmatrix}$的一个特征值，则$a=$________.

4.记5×4阶矩阵A的列向量依次为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$设矩阵A的秩为3且各行元素和为0,又已知向量$\beta=\alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_3$,那么非齐次线性方程组$AX=\beta$的通解为：________.

5.设$A_{n\times n}$是一个实对称矩阵，且存在整数$m\geq1$使得$A^m=\boldsymbol{0}$，则$A=$________.

三、（8 分）计算 n 阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$，其中$a_i\neq 1, i=1,2,\cdots,n$.

四、（12 分）设三维向量$\alpha_1=\begin{bmatrix} a+3 \\ a \\ 3(a+1) \end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix} 1 \\ a-1 \\ a \end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ a+3 \end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix} a \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$，问：

（1） a为何值时，β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表示？

（2） a为何值时，β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表示不唯一？此时给出所有可能的表示.

（3） a为何值时，β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

五、（10 分）设矩阵$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & b \end{bmatrix}$和矩阵$B=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & c \end{bmatrix}$相似，求$a,b,c$

六、（12 分）已知二次型$f(x,y,z)=x^2+4xy+4xz+y^2+4yz+z^2$，试用正交变换将此二次型化为标准型.给出其标准型，及所使用的正交变换矩阵.

七、证明题（10 分）设$A,B,A+B$都是n阶可逆矩阵，证明$A^{-1}+B^{-1}$也是可逆矩阵.

八、证明题（10 分）设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$是两个$m\times n$矩阵，已知存在$n$阶方阵$K$使得$B=AK$,且矩阵$A$的列向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$线性无关.证明：矩阵$B$的列向量组$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$也线性无关当且仅当$K$是可逆矩阵.