华中科技大学 2014-2015 学年度第二学期
《线性代数》课程考试试卷 A 卷答案

一、判断题

1. ×。矩阵的伴随矩阵相关问题，记住公式即可。即：

由公式 $(kA)^* = k^{n-1}A^*$知，当且仅当$k = 1$时，题述公式成立

2. √。矩阵秩的相关问题，记住公式即可。即：

由公式$r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = r(A^TA)$知$r(A) = 0$，则$A = 0$；

附常用矩阵秩的公式如下：

(1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$；

(2) $R(A) = R(A^T) = R(A^TA) = R(AA^T)$；

(3) 若A等价于B，即$A \sim B$，则$R(A) = R(B)$；

(4) 设A是$m\times n$矩阵，P，Q分别为m，n阶矩阵，若P、Q可逆，则

$R(PA) = R(AQ) = R(PAQ) = R(A)$；

(5) $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A,B) \le R(A) + R(B)$；

(6) 设A，B分别为$m\times s$与$n\times s$阶矩阵，则$R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \le R(A) + R(B)$；

(7) 设A，B为同型矩阵，则$R(A \pm B) \le R(A) + R(B)$；

(8) $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$，即$R(AB) \le R(A)$，$R(AB) \le R(B)$；

(9) 设A为$m\times n$阶矩阵，B为$n\times s$阶矩阵，若$AB = 0$，则$R(A) + R(B) \le n$；

(10) 设A是n阶矩阵$(n \ge 2)$，则$R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n \\ 1, & R(A) = n-1 \\ 0, & R(A) < n-1 \end{cases}$。

3. √。此题表述也属于常用结论。且很容易理解（根据矩阵相似定义来证明即可，略）

4. ×。题目表述不易直接分析，考虑特殊法（举反例）：

取$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 1 有 3 个，符合题目要求。而A对应行列式的值为 1

5. ×。典型错误表述。这类题目表述形式变化多样，因此需要充分掌握相关概念及推论，具体题目具体分析。此题中，由齐次线性方程组只有零解知，A的列向量线性无关；而对应非齐次线性方程组有唯一解等价于A的秩等于对应增广矩阵的秩且A为列满秩矩阵。

由以上分析，很容易得到反例：

取$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$b=(0,0,1)^T$，则方程组$AX=b$无解

6. ×。将题中条件与结论反过来说，就是一个常见结论。要说明该命题错误，举反例即可：

取$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，则A特征值为 1 或 0，满足要求。而$A^2=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\neq A$

7. √。由A可逆知，A行向量线性无关，A的任何一行都不能由其余行线性组合来表示。否则，A行向量线性相关，与已知矛盾

8. √。常见结论，记住即可。附简单证明如下：

取n 阶列向量$x=(1,0,0,\dots,0)^T$，根据正定矩阵性质，知$x^TAx=a_{11}>0$，同理，可证A其他主对角元素均大于零

二、填空题

1. $D_4=1-x^2-y^2-z^2$

分析：此类题一般两种思路：根据行列式形式特征，对其进行变化以简化求解过程；在行列式阶数较小，且一时不能很快发现化简方法，则可直接展开，细心计算即可。此题可使用后一种方法。

将D_4按最后一列展开，得$D_4=-z\begin{vmatrix}x&1&0\\y&0&1\\z&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&x&y\\x&1&0\\y&0&1\end{vmatrix}=-z^2+y\begin{vmatrix}x&1\\y&0\end{vmatrix}+1-x^2=1-x^2-y^2-z^2$

2. $P=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

分析：此类题很基础，可以直接得出结果。一般这种求P的问题不会单独考察，更多的是在解决某个复杂问题中，需要自己得到结果并应用

3. $k(1,-1,1,-1)^T$（$k\neq 0$）

分析：此题体现上题分析内容。由已知得$Ax=0$，其中$x=(1,-1,1,-1)^T$。因为$r(A)=3$，则$AX=0$基础解析只含$4-3=1$个线性无关向量。故其基础解析可表示为$k(1,-1,1,-1)^T$（$k\neq 0$）

4. -288

分析：关于特征值的基本应用问题。由已知可得B的三个特征值分别为$1^3-5\times1^2=-4$；$-1^3-5\times1^2=-6$；$2^3-5\times2^2=-12$。则$|B|=-4\times6\times12=-288$

5. $(-2,1)$

分析：对于正定矩阵的应用，有很多思路。如配方法，顺序主子式法，特值法等等。此题中出现三阶正定矩阵，考虑用顺序主子式判别法进行讨论：

二次型对应矩阵为$\begin{bmatrix}1&t&-1\\t&4&2\\-1&2&4\end{bmatrix}$，由顺序主子式大于零，即$\begin{vmatrix}1&t\\t&4\end{vmatrix}>0$，$\begin{vmatrix}1&t&-1\\t&4&2\\-1&2&4\end{vmatrix}>0$，化简并解得$t\in(-2,1)$

三、分析：高阶行列式问题，一般可以利用行列式性质，对行列式进行变形、化简直到得出预期结果；也可以根据行列式具体特征，得到其递推式，再利用数学归纳法得到一般式。下面采用第二种方法

解答：将D_n按第一列展开，得$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$。

（1）$a\neq b$时

$D_1=a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b}$，$D_2=(a+b)^2-ab=a^2+b^2+ab=\frac{a^3-b^3}{a-b}$

于是猜想 $D_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$，下面使用数学归纳法证明此猜想：

当$n=1,2$时等式均成立。假设当$n\leq k$时等式成立，则

易得当$n=k+1$时，$D_{k+1}=(a+b)D_k-abD_{k-1}=\frac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}$，猜想成立

（2）$a=b$时

此时利用递推式也可得到正确结果，但过程较为繁琐。下面展示一种利用极限求取答案的方法：

$a\neq b$时，$D_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=\frac{(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+b^n)}{a-b}$

令$a\to b$，便可得$D_n=(n+1)a^n$

综上，可得$D_n=\begin{cases}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, & a\neq b\\(n+1)a^n, & a=b\end{cases}$

四、分析：应用矩阵公式$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$，然后根据定义直接求A^{-1}的伴随矩阵即可

解答：$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\-2 & 2 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

五、分析：概念性问题，按方程组解的条件进行分别的讨论即可

解答：对增广矩阵进行初等行变换，得矩阵如下所示

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 2 & 1\\0 & 0 & a-1 & 0 & b+1\\0 & 0 & 0 & a-1 & 0\end{bmatrix}$$

1.由已知得$r(A)=r(A|b)=4$，则$a-1\neq 0$即$a\neq 1$（此时对b无取值要求）

2.由已知得$r(A)<r(A|b)$，则$a-1=0$且$b+1\neq 0$即$a=1$，且$b\neq -1$

3. 由已知得$r(A)=r(A|b)<4$，则$a-1=0$且$b+1=0$即$a=1$，$b=-1$。此时增广矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

对应齐次线性方程组，基础解系由两个线性无关的解向量构成：$\xi_1=(1,-2,0,1)^T$，$\xi_2=(1,-2,1,0)^T$

非齐次方程组一特解$\xi_3=(-1,1,0,0)^T$

故通解$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \xi_3$，其中$c_1$，$c_2$为常数

六、分析：对矩阵特征值的相关结论要熟悉，此题为基础题

解答：由已知得，矩阵A特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，设其另一个特征值为$\lambda_3$，由$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 4 + 5$得$\lambda_3 = 6$；

特征方程$(\lambda E - A)x = 0$，将$\lambda = 2$代入，得系数矩阵：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为 A 有三个线性无关的特征向量，那么对应于$\lambda = 2$，$(\lambda E - A)x = 0$ 基础解系由两个线性无关解向量构成，可知$r(A_1) = 1$ 从而得到：

$a = 2 = -b$，即$a = 2$，$b = -2$

对应于$\lambda = 2$，由$(\lambda E - A)x = 0$ 易得两个线性无关基础解系：

$\xi_1 = (1,0,1)^T$，$\xi_2 = (-1,1,0)^T$

对应于$\lambda = 6$，由$(\lambda E - A)x = 0$ 易得一基础解系：$\xi_3 = (1,-2,3)^T$

令$P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，满足$P^{-1}AP = \Lambda$，其中$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

七、分析：概念性问题。将实对称矩阵进行相似对角化即可

解答：二次型对应矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

由特征行列式$|\lambda E - A| = 0$得A特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$，$\lambda_3 = 5$

对应于$\lambda = -1$，由$(\lambda E - A)x = 0$ 易得两个线性无关、正交的基础解系：$\xi_1 = (-1,1,0)^T$，$\xi_2 = (1,1,-2)^T$

对应于$\lambda = 5$，由$(\lambda E - A)x = 0$ 易得一基础解系：$\xi_3 = (1,1,1)^T$

故存在$C = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，使得在$X = CY$变换下，二次型化为标准型：$f(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$

八、分析：证明题难度偏大，需要多加练习提高解题能力。此题中需证明矩阵不可逆，那么就有相关思路（如行列式法、特征值法、矩阵秩法等……），此处用行列式法证明

证明：由$A^2 = B^2 = I$，取行列式得$|A|^2 = |B|^2 = 1$，又已知$|A| = -|B|$，则必有$|A| = -|B| = 1$或$|A| = -|B| = -1$，即$|A||B| = -1$

故 $|A||B||A+B| = |A||A+B||B| = |A^2 + AB||B| = |A^2B + AB^2| = |A+B|$

即 $-|A+B| = |A+B|$，则$|A+B| = 0$，故$A+B$不可逆，原命题得证