2020 线性代数试题答案

一、　判断题（2’×8=16’）

1（×）　2（×）　3（×）　4（√）　5（√）　6（×）　7（×）　8（×）

二、　填空题（4’×5=20’）

1、 $A^5=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5^5-2 & 5^5+1 & 5^5+1\\ 5^5+1 & 5^5-2 & 5^5+1\\ 5^5+1 & 5^5+1 & 5^5-2\end{bmatrix}$ （或） $\begin{bmatrix}1041 & 1042 & 1042\\ 1042 & 1041 & 1042\\ 1042 & 1042 & 1041\end{bmatrix}$

2 、通解为 $x=k_1\begin{bmatrix}3\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$. （结构 2 分；结果 2 分）

3、 $a=-5$， $b=4$ （每个 2 分）

4、 秩为 2

5、 P= $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

三、　计算 n 阶行列式的值（8 分）

$$D_n=\begin{vmatrix}a+x & b & b & \cdots & b & b\\ a & a+x & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a & 0 & a+x & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ a & 0 & 0 & \cdots & a+x & 0\\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a+x\end{vmatrix}$$ （$a+x\neq 0$ 每列乘以 $\frac{-a}{a+x}$ 加到第一列）

$$=\begin{vmatrix}(a+x)\text{-}(n\text{-}1)\frac{ab}{a+x} & b & b & \cdots & b & b\\ 0 & a+x & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a+x & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+x & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a+x\end{vmatrix}$$

$$=[a+x-(n-1)\frac{ab}{a+x}]\cdot(a+x)^{n-1}$$

$$=(a+x)^n-(n-1)ab(a+x)^{n-2}$$ ）

附注：

1 计算结果对得分 8 分

2 如有错误：计算过程得 3~5 分； 结果得 3 分。

四、 （12 分）

线性组合表示为方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=\beta$ … 2 分

$$\begin{bmatrix}1&1&a&-2\\a&1&1&a-3\\1&a&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&a&-2\\0&1-a&1-a^2&3(a-1)\\0&0&(1-a)(2+a)&3(a-1)\end{bmatrix}:$$

… 1 分（有变换就给分）

（1） $a\neq 1, a\neq -2$，唯一线性表示 … 2 分

（2） $a=-2$不能线性表示 … 2 分

（3）） $a=1$无穷线性表示 … 2 分

$$x=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix},$$

或者$(-k_1-k_2-2)\alpha_1+k_1\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta$， $k_1,k_2\in R$ … 3 分

五、（12 分）

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix},$$ … 2 分

$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，特征值$1,1,-2$， … 2 分

λ=1 对应特征向量$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$ … 2 分

λ=−2 对应特征向量$\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$ … 1 分

特征向量正交化，标准化 ...3 分

$$C=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}, X=CY, f=y_1^2+y_2^2-y_3^2)$$ ... 2 分

附注：

1 如特征向量没有标准化、正交化 扣 3 分

2 如果某一步起错误，后面有过程，给后面步骤不超过一半的得分。

六、(12 分)

由题意矩阵 A 秩为 3， .. 2 分

齐次解空间 $\dim N(A)=4-3=1$

或者基础解系为一个向量 或者给出解得结构 ... 2 分

$Ax=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=(x_1+x_2)\alpha_2+(-2x_1+x_3)\alpha_3+x_4\alpha_4=0$，

由线性无关性，得 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\ -2x_1+x_3=0\\ x_4=0\end{cases}$， $x=k\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\\0\end{bmatrix}$， ... 3 分

（$\beta=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=A\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$，则 $Ax=\beta$ 有特解 $\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$;， ... 3 分

则 $Ax=\beta$ 通解 $x=k\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ ... 2 分

七、(10 分)

设 A 为实对称矩阵，则 A 可以相似对角化 ... 3 分

设A有特征值λ，则满足$(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+5)=0$，

$\lambda^2+2\lambda+5=(\lambda+1)^2+4>0$，所以$\lambda=1$，即$A$的特征值只能是 1， … 4 分

由A为实对称矩阵，故必存在正交矩阵C，

使得$C^{-1}AC=I$，即$A=C\cdot I\cdot C^{-1}=CC^{-1}=I$ … 3 分

附注：其他证明方法给分

1 给出实对称矩阵得任何性质 3 分； 2 相关证明论述 2~4 分；

3 结构表述 3 分

八、(10 分)

1 （ 4 分）

因为矩阵 A 得特征值 $\lambda_i=a_{ii}$ … 2 分

$a_{ii}\neq a_{jj}$，

则矩阵A有 n 个互不相同得特征值，故矩阵 A 可对角化 … 2 分

2 （6 分）

$a_{ii}=a_{jj}$，则矩阵A得特征值$\lambda_i=a_{ii}=k$， … 2 分

如果存在$a_{ij}\neq 0$，则 矩阵（kI−A）的秩 ≥1 ，所以 n−（kI−A）≤ n−1

即 n 重特征值对应的特征向量不足 n 个，

即矩阵A不可对角化. … 4 分

另法：反证法

如果A可以对角化

则矩阵$A=P(kI)P^{-1}=kI$

这与存在$a_{ij}\neq 0$，A不是对角矩阵相矛盾。