



华中科技大学 2019~2020 学年第一学期

“微积分（一）”考试试卷(A 卷)

考试方式: 闭卷 考试日期: 2109.12.31 考试时长: 150 分钟

院(系): _____ 专业班级: _____

学 号: _____ 姓 名: _____

一、单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上。）

1. 设 $0 < a_n < 1$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, 则以下数列中无界的是【 】.

- A. $\{a_n^2\}$ B. $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ C. $\left\{\tan \frac{\pi a_n}{2}\right\}$ D. $\{\ln a_n\}$

2. 已知 $f(2)=3, f'(2)=5$, 则极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2+h)-9}{h} =$ 【 】.

- A. 30 B. 10 C. 6 D. 0

3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导, 则以下说法中 **错误** 的是【 】.

- A. $f(x)$ 必在 $[a, b]$ 上有界 B. $f(x)$ 必在 $[a, b]$ 上有连续的导数
C. $f(x)$ 必在 $[a, b]$ 上连续 D. $f(x)$ 必在 $[a, b]$ 上可积

4. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 一共有【 】条渐近线.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) < 0$, 则以下不等式中一定成立的是【 】.

- A. $f(1) + f(3) > 2f(2)$ B. $f(1) + f(3) < 2f(2)$
C. $f(1) + f(2) > 2f(3)$ D. $f(1) + f(2) < 2f(3)$

6. 微分方程 $y' - \frac{y}{2x} = 0$ 满足初值条件 $y(1) = 2$ 的特解为【 】.

- A. $2\sqrt{x}$ B. $1 + \sqrt{x}$ C. $1 + x$ D. $\sqrt{x+3}$

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 设函数 $y = x^2 - x$. 在 $x = 2, \Delta x = 0.01$ 时, 微分 $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \sqrt{3+t^2} dt}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 曲线 $y = 1 - x^4$ 与 x 轴所围成图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程。）

11. 已知当 $x \rightarrow 0, u = e^{3x} - ax^2 - (1+bx)\cos x$ 是与 x^3 同阶的无穷小. 求常数 a, b 的值.

12. 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值.

13. 求不定积分 $I = \int \frac{e^{5x}}{e^{2x} + 1} dx.$

14. 求定积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx.$

15. 判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ 的敛散性, 若收敛求其值.

16. 求微分方程 $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}$ 满足初值条件 $y(2) = 0, y'(2) = 1$ 的特解.

四、应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程。）

17. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 讨论 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 的连续性(需说明理由).

18. 求曲线 $y = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3}$ 对应于 $1 \leq x \leq 4$ 的弧段长度.

五、综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程。）

19. 设 n 为正整数, 求方程 $(x+1)^{2n} = x^{2n} + 1$ 所有的实根. 并证明你的结论.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续的导数. 证明:

$$f(x) \leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx, x \in [a, b].$$