



华中科技大学 2021~2022 学年第一学期

“微积分（一）”考试试卷(A 卷)

考试方式: 闭卷

考试日期: 2022.01.03

考试时长: 150 分钟

一、单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上。）

1. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调有界,  $\{x_n\}$  为数列, 下列命题**正确**的是【 】

- A. 若  $\{x_n\}$  收敛, 则  $\{f(x_n)\}$  收敛.      B. 若  $\{x_n\}$  单调, 则  $\{f(x_n)\}$  收敛.  
C. 若  $\{f(x_n)\}$  收敛, 则  $\{x_n\}$  收敛.      D. 若  $\{f(x_n)\}$  单调, 则  $\{x_n\}$  收敛.

2. 函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2}{x^n + 1}$  的间断点及类型是【 】.

- A.  $x = -1$  是第二类间断点      B.  $x = 1$  是第二类间断点  
C.  $x = \pm 1$  均是第一类间断点      D.  $x = \pm 1$  均是第二类间断点

3. 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 与  $\sqrt{x}$  等价的无穷小量是【 】.

- A.  $1 - e^{\sqrt{x}}$       B.  $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$       C.  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$       D.  $1 - \cos \sqrt{x}$

4. 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 下列命题**错误**的是【 】

- A. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$ .      B. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$ .  
C. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f'(0)$  存在.      D. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$  存在, 则  $f'(0)$  存在.

5. 曲线  $y = x \ln(e + \frac{1}{x})$  ( $x > 0$ ) 的渐近线条数为【 】.

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

6. 设  $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$ , 则  $F(x)$  【 】.

- A. 为正常数      B. 为负常数      C. 恒为零      D. 不为常数

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 曲线  $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$  对应于  $t=1$  处的法线方程为\_\_\_\_\_.

8. 曲线  $y = x \sin x + 2 \cos x (-\frac{\pi}{2} < x < 2\pi)$  的拐点是\_\_\_\_\_.

9. 曲线  $y = \ln \cos x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{6})$  的弧长为\_\_\_\_\_.

10.  $y = 2^x$  的麦克劳林公式中  $x^n$  项的系数是\_\_\_\_\_.

**三、计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程.）**

11. 已知  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + x - 3}{x - 1} = b$ ，求常数  $a, b$  的值.

12. 设  $f(x)$  为连续函数，且满足  $f(x) = x^2 - x \cdot f(2) + 2 \int_0^1 f(x) dx$ ，求  $f(x)$ .

13. 求极限  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i}$ .

14. 计算定积分  $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$ .

15. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $\lambda > 0$ ，求  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ .

16. 求微分方程  $xy' + y - e^x = 0$ ， $y(2) = 1$  的特解.

**四、综合题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程.）**

17. 已知  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续， $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$ ，求  $f^{(n)}(0)$  的值 ( $n \geq 2$ ).

18. 设抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  过原点，当  $0 \leq x \leq 1$  时， $y \geq 0$ ，又该抛物线与直线  $x = 1$  及  $x$  轴围成平面图形的面积为  $\frac{1}{3}$ ，求  $a, b, c$  使该图形绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体体积  $V$  最小.

**五、证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程.）**

19. 证明方程  $\ln x = \frac{x}{e} - 2021$  在区间  $(0, +\infty)$  内只有两个不同的实根.

20. 设  $f''(x)$  在  $[0, 2]$  上连续且  $|f''(x)| \leq M$ ， $f(1) = 0$ ，证明： $\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{3}$ .