2020 ～2021 学年第 一 学期

《 微积分（一）》课程考试试卷(A 卷)解答

一. 单项选择题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将结果写在答题卡上。）

1. 曲线 $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ 与 x 轴所围成的图形的面积可表示为【 C 】.

A. $\int_1^3 (x-1)(x-2)(x-3)\mathrm{d}x$

B. $-\int_1^3 (x-1)(x-2)(x-3)\mathrm{d}x$

C. $\int_1^2 (x-1)(x-2)(x-3)\mathrm{d}x - \int_2^3 (x-1)(x-2)(x-3)\mathrm{d}x$

D. $\int_2^3 (x-1)(x-2)(x-3)\mathrm{d}x - \int_1^2 (x-1)(x-2)(x-3)\mathrm{d}x$

2. 设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，a 为常数，则下列必为周期函数的是【 A 】.

A. $\int_x^{x+a} f(t)\mathrm{d}t$　　B. $\int_a^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$　　C. $\int_a^{x} f(t+T)\mathrm{d}t$　　D. $\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x<1, \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是【 D 】

A. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1, \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$　　B. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$

C. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$　　D. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

4. 设 $I_1=\int_2^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$，$I_2=\int_2^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$，$I_3=\int_2^1 (1+x)\mathrm{d}x$，则【 B 】.

A. $I_1>I_2>I_3$　　B. $I_3>I_1>I_2$　　C. $I_1>I_3>I_2$　　D. $I_2>I_1>I_3$

二. 填空题（每小题 5 分，4 个小题共 20 分，将计算结果写在答题卡上。）

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$____________ .

解 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} + |x|\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$.

6. $\int_0^1 x(1-x)^{99}\mathrm{d}x$__________ .

解 令 $t=1-x$，则 $\int_0^1 x(1-x)^{99}\mathrm{d}x = \int_0^1 t^{99}(1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{100}-\frac{1}{101}=\frac{1}{10100}$.

7. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $x\ln x$，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x =$ ________ .

解 $f(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，故 $\int xf'(x)dx = x+C$.

8. $\int_1^3 \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x =$ ________ .

解 $\int_1^3 \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x = 2\int_1^3 \dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}\sqrt{x} = 2\arctan\sqrt{x}\Big|_1^3 = \dfrac{\pi}{6}$.

三. **计算题（每小题 8 分，4 个小题共 32 分，必须写出主要计算过程。）**

9. 求极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}$.

解 $l = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2}{n}\ln\left(1+\dfrac{i}{n}\right)$ （3 分）

$= 2\int_0^1 \ln\left(1+x\right)\mathrm{d}x.$ （6 分）

$= 4\ln 2 - 2$ （8 分）

10. 计算 $l = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}$.

解 $l = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x\cdot\sin x^2}$ （4 分）

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x\sin x}{2x^3}$ （6 分）

$= \dfrac{1}{2}$ （8 分）

11. 计算 $I=\int_0^{\ln 5}\dfrac{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\mathrm{e}^x+3}\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$，则 $x=\ln(1+t^2)$， $\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ （3 分）

$I=\int_0^2 \dfrac{(t^2+1)t}{t^2+4}\cdot\dfrac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t = 2\int_0^2 \dfrac{t^2}{t^2+4}\mathrm{d}t = 2\int_0^2 (1-\dfrac{4}{t^2+4})\mathrm{d}t$ （6 分）

$=4-4\arctan\dfrac{t}{2}\Big|_0^2 = 4-\pi.$ （8 分）

12. 求 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

解 $I=-\int_0^{+\infty}\ln(1+x)\mathrm{d}\frac{1}{1+x}$ （3 分）

$=-\left[\frac{\ln(1+x)}{1+x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x\right]$

$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ （6 分）

$=1$ （8 分）

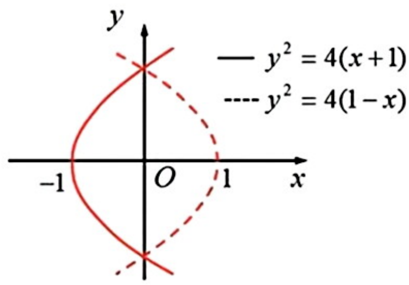
四. 应用题（每小题 8 分，2 个小题共 16 分，必须写出主要过程。）

13. 计算抛物线 $y^2=4(x+1)$ 与 $y^2=4(1-x)$ 所围成的平面图形的面积。

解 $A=\int_{-2}^{2}[(1-\frac{y^2}{4})-(\frac{y^2}{4}-1)]dy$ （4 分）

$=2\int_{-2}^{2}(1-\frac{y^2}{4})dy$

$=4\int_{0}^{2}(1-\frac{y^2}{4})dy=16/3$. （8 分）



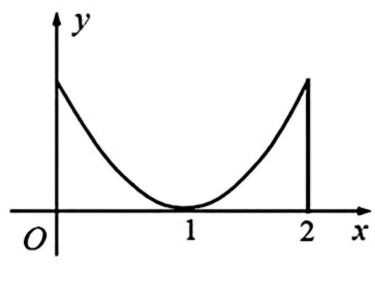
14. 设 D 是由 $y=(x-1)^2$、x 轴、y 轴以及 $x=2$ 所围成的平面区域，求 D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积。

解 取 x 为积分变量，$x\in[0,2]$

$V=2\pi\int_0^2 x(x-1)^2\mathrm{d}x$ （4 分）

$=2\pi\int_0^2(x^3-2x^2+x)\mathrm{d}x$

$=\frac{4}{3}\pi$. （8 分）



五. 综合题（每小题 8 分，2 个小题共 16 分，必须写出主要过程。）

15. 设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，且满足 $f(x)=\cos x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

解 设 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$，则 $f(x)=\cos x+A$，（3 分）

方程两边在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上对 x 积分，得

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+A\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=1+\frac{\pi}{2}A \qquad \text{（6 分）}$$

解出 $A=\dfrac{2}{2-\pi}$，

所以 $f(x)=\cos x+\dfrac{2}{2-\pi}$.（8 分）

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)>0$，又 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$，试证：

$F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中有且仅有一个实根.

证 由题设知 $F(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，且 $F(a)=\int_b^a \dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$，$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$

根据零点定理知 $F(x)=0$ 在 $\left[a,b\right]$ 中有实根，（4 分）

又 $F'(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)'=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geq 2$，

即 $F(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上严格单调递增，（6 分）

故 $F(x)=0$ 在 $\left[a,b\right]$ 中有且仅有一个实根.（8 分）