2018-2019 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、判断题

1、【正解】✓

【解析】由于$AB=BA$，$A(B+C)A=(AB+AC)A=ABA+ACA=A^2B+ACA$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

2、【正解】✓

【解析】由于线性无关，则$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m\neq 0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11——向量组的线性相关和线性表示

3、【正解】×

【解析】由题干知：$AB=0$，且$A\neq 0, B\neq 0$，则线性齐次方程组$AX=0$有非零解，则A的列向量组线性相关；由$AB=0\to(AB)^T=B^TA^T=0$，即齐次线性方程组$B^TY=0$有非零解。则B^T的列向量组线性相关，即B的行向量组线性相关。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16——齐次线性方程组

4、【正解】✓

【解析】$A_{m\times n}B_{n\times s}=O$，则$R(A)+R(B)\leq n$。故$r(A)+r(A)\leq 3$，且$A$非零矩阵，$r(A)\geq 1$。故$r(A)=1$，因此$Ax=0$线性无关解向量个数为2

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16——齐次线性方程组

5、【正解】✓

【解析】对于方程组①$Ax=0$，②$A^TAx=0$，其中①的解显然必是②的解，对于②的解若$A^TAx=0\Rightarrow x^TA^TAx=0\Rightarrow(Ax)^TAx=0$，所以②的解显然必是①的解，两方程组同解，故$r(A)=r(A^TA)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

6、【正解】✓

【解析】由题可知$A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$,故由定义，显然1为矩阵的一个特征值

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19——特征值和特征向量

7、【正解】✓

【解析】若A为正定矩阵，则A的特征值都为正数，而A^*特征值为$\frac{|A|}{\lambda}$,因此A^*特征值也恒正，因此矩阵A^*正定

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24——正定二次型和正定矩阵

8、【正解】✓

【解析】注意到X^TAX是一个数，所以$X^TAX=(X^TAX)^T=X^TA^TX$

又∵ A^T为反对称矩阵，故$X^TA^TX=-X^TAX$，即$X^TAX=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

二、填空题

1、【正解】$-\frac{1}{2}(A+I)$

【解析】$A^2=A\Rightarrow A^2-A-2I=-2I\Rightarrow(A-2I)(A+I)=-2I$

故$(A-2I)^{-1}=-\dfrac{1}{2}(A+I)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆

2、【正解】$\dfrac{a}{b}$

【解析】由题可知$A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\b\\\vdots\\b\end{bmatrix}$，又$A$可逆，因此$b\neq 0$，因此有$\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}b\\b\\\vdots\\b\end{bmatrix}$

$=\dfrac{1}{|A|}A^*\begin{bmatrix}b\\b\\b\\b\end{bmatrix}=A^*\begin{bmatrix}\frac{b}{a}\\\frac{b}{a}\\\frac{b}{a}\\\frac{b}{a}\end{bmatrix}$，可得$(A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1})\dfrac{b}{a}=1$，故

$A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}=\dfrac{a}{b}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆

3、【正解】2

【解析】$B=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$,故$|B|=|A|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times 2=2$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

4、【正解】$t>5$

【解析】二次型对应矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&t&0\\2&0&t\end{pmatrix}$，为正定矩阵，故顺序主子式大于零，故

$\begin{vmatrix}1&1\\1&t\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix}1&1&2\\1&t&0\\2&0&t\end{vmatrix}>0$，故$t>5$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24——正定二次型和正定矩阵

5、【正解】$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

【解析】由于矩阵A为正交矩阵，而$a_{11}=1$因此矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$或$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

故$AX=\beta$的解$X=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

三、【解析】$D_n=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$（爪型行列式）

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1——行列式的概念及其性质

四、【解析】1.A为系数矩阵$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1\\ 3 & 2 & a & 7 & -1\\ 1 & -1 & -6 & -1 & b\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & a+8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2\end{array}\right)$

当$b\neq-2$时，方程无解；当$b=-2$时，方程有解

2.当$b=-2$，$a\neq-8$时$r(A)=R(A|b)=3$，因此通解为

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\qquad k\in R$$

当$b=-2$，$a=-8$时$r(A)=R(A|b)=2$，因此通解为

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}4\\ -2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\qquad k_1,k_2\in R$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17——非齐次线性方程组

五、【解析】$A^*BA=2BA-8I$，而$|A|=-2$，因此A可逆，$|A|A^{-1}BA=2BA-8I$

$|A|A^{-1}B=2B-8A^{-1}\Rightarrow|A|B=2AB-8I\Rightarrow 8I=(2A-|A|I)B$

$$B=8(2A-|A|I)^{-1}=8\begin{bmatrix}4 & 4 & -4\\ 0 & -2 & 8\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}4 & 4 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 8 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}4 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{array}\right]\qquad B=8\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & -6\\ 0 & -4 & 8\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆

六、【解析】$|E-A|=\begin{vmatrix}2-a & 1 & -1\\ 1 & 2-a & -1\\ -1 & -1 & 2-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-a & 1 & -1\\ 0 & 1-a & 0\\ 1-a & 0 & 1-a\end{vmatrix}=(1-a)\begin{vmatrix}3-a & -1\\ 1-a & 1-a\end{vmatrix}$

$=(1-a)(1-a)(4-a)=0$，$\therefore a=1$或4

当$a=1$时，$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$，$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0\\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1\\ \lambda-1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-2$，$a=4$时，

$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$，$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -1\\ 1 & \lambda-3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda-1)$

$\lambda_1=\lambda_2=4$，$\lambda_3=1$　　$\therefore A$的特征值的和最小时，$a=1$

$(E-A)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，取单位正交特征向量

$\eta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$，$\eta_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}(-2E-A)=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix}$，

$\to\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. 取单位特征向量$\eta_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$

$\therefore C=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$　　$C^TAC=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点22——二次型

七、【解析】$(I-A)^{-1}+(I-A^{-1})^{-1}=(I-A)^{-1}+(AA^{-1}-A^{-1})^{-1}$

$=(I-A)^{-1}+[(A-I)A^{-1}]^{-1}=(I-A)^{-1}+A(A-I)^{-1}$

$=(I-A)^{-1}-A(I-A)^{-1}=(I-A)(I-A)^{-1}=I$

【考点延伸】《考试宝典》知识点4——矩阵的概念和基本运算

八、【解析】（1）$B^2+B=I\Rightarrow B(B+E)=I$；$|B||B+E|=|I|=1$；$|B|\neq 0,B$可逆

（2）而A可相似对称化

$\min(r(A),r(B))\geqslant r(AB)=2\geqslant r(A)+r(B)-n=r(A)$，故$r(A)=2$

α,x分别为A的特征向量，特征值$A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow A^2\alpha=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha$

$A^2\alpha=-A\alpha=x^2\alpha=-\lambda\alpha$；$\lambda^2=-\lambda$，因此$A$的特征值为0或-1，$r(A)=2$

$A\sim\begin{bmatrix}-1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0\end{bmatrix}_{n\times n}$　　故$|A+2I|=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2\end{bmatrix}_{n\times n}=2^{n-2}$