

2023 ~2024 学年第 一 学期
 《微积分(一)》课程考试试卷(A 卷)

一. 单项选择题(每小题 3 分, 6 个小题共 18 分, 将结果涂在答题卡上.)

1. 下列函数在其定义域上无界的是【 】

- A. $x^2 D(x)$ ($D(x)$ 为迪尼克雷函数) B. $\tan(\sin x)$ C. $\frac{\sin x}{x}$ D. 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$

解答: $x^2 D(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 显然定义域上无界.

$$x \in R, |\sin x| \leq 1, |\tan x(\sin x)| \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \text{ 所以 } \frac{\sin x}{x} \text{ 在 } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \text{ 上有界.}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \text{ 显然在定义域中有界.}$$

故选 A

2. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1+e^x)$ 的斜渐近线为【 】

- A. $y = -x$ B. $y = -x + 1$ C. $y = x$ D. $y = x + 1$

解答: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln(1+e^x) \right) = 0, \quad y = 0 \text{ 为水平渐近线}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \ln(1+e^x) \right) = \infty, \quad x = 0 \text{ 为垂直渐近线}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln(1+e^x) - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1+e^x) - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1+e^x) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$$

斜渐近线为 $y = x$.

故选 C

3. 通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x + x$ (其中 C_1, C_2 为任意常数) 的微分方程是【 】.

- A. $y'' - y' = 1$ B. $y'' - y = 0$ C. $y'' - 2y' + y = e^x$ D. $y'' - 2y' + y = x - 2$.

解答: 由线性微分方程通解的结构, $(C_1 + C_2 x)e^x$ 是一个齐次方程的通解, $y = x$ 是一个相应非齐次方程的特解, 所以选项 B 不对; 从 $(C_1 + C_2 x)e^x$ 知 e^x 对应的是齐次方程的二重特征根 $r = 1$, 即特征方程为 $r^2 - 2r + 1 = 0$, 相应的二阶齐次方程为 $y'' - 2y' + y = 0$, 所以在 CD 中选择. 将特解 $y = x$ 分别代入选项 C、D, 可确定 D 是正确答案. 答案为 D.

4. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某个邻域内有定义, 则下列命题

- ①若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续.
 ②若 $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续.
 ③若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续.

其中正确的个数是

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

解答: 由导数与连续之间的关系得①②是正确的

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -x + 1, & x < 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1,$$

因而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 从而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 不连续, 故 C 不对.

故答案为: B

5. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x+1) + e^{x^2})}{x^2} = 2$, 则 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的【 】.

- A. 驻点且为极大值点 B. 驻点且为极小值点
 C. 不可导点 D. 可导点但不是驻点

解答: 由条件得 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(f(x+1) + e^{x^2}) = 0$, 于是由连续性有 $\ln(f(1) + 1) = 0$, 因而 $f(1) = 0$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x+1) + e^x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) + e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+1)}{x^2} + \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right) = 2$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} = 1$, 由极限的保号性得 $\forall x \in N(0, \delta), f(x+1) > 0 = f(1)$, 故 $x=1$ 是极小值点

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) - f(1)}{x} = 0, \text{ 因而 } f'(1) = 0.$$

故答案为: B.

6. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x dx, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x + \sin^3 x) dx, P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \cos x - \sin^2 x) dx$, 则 【】

- A. $M > N > P$ B. $N > P > M$ C. $N > M > P$ D. $M > P > N$

解: 由对称性 $M = 0, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{4}{3} > 0, P = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx < 0$

所以 $N > M > P$. 故答案为: C.

二、填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x + 1$ 在点 $(2, 3)$ 处有公共切线, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(f(2 - \frac{1}{n}) - 3 \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 由题中条件可得 $f(2) = 3, f'(2) = (2x-1)|_{x=2} = 3$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f(2 - \frac{1}{n}) - 3 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2 - \frac{1}{n}) - f(2)}{\frac{1}{n}} = -f'(2) = -3.$$

8. $y = f(x)$ 满足 $y' = (1-y)y^\alpha (\alpha > 0)$, 若曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点为 $(t, \frac{1}{2})$, 则 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: $\frac{dy}{dx} = (\alpha - (1+\alpha)y)(1-y)y^{2\alpha-1}$, 由题意 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=t} = 0, y(t) = \frac{1}{2}$,

所以 $\left(\alpha - (1+\alpha)\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{2\alpha} = 0$, 解得 $\alpha = 1$.

9. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x} , 则 $\int_{-\frac{1}{2}}^0 xf(2x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: $f(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}$, 令 $u = 2x$, 则

$$\int xf(2x)dx = \frac{1}{4} \int uf(u)du = \frac{1}{4} \int u de^{-u} = \frac{1}{4}(u+1)e^{-u} + C$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 xf(2x)dx = \frac{1}{4}$$

10. 位于曲线 $y = xe^{-x}$ ($0 \leq x < +\infty$) 下方、 x 轴上方的无界图形的面积为 _____ .

$$\text{解: } A = \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

三. 计算题 (每小题 7 分, 6 个小题共 42 分, 必须写出主要计算过程.)

11. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定, 求 $y'(0), y''(0)$.

解: 由方程得 $x = 0$ 时, $y = 0$. (1 分)

方程两边关于 x 求导得

$$(e^y + 6x)y' + 6y + 2x = 0, \quad (3 \text{ 分})$$

令 $x = 0$ 得 $y'(0) = 0$. (4 分)

关于 x 再求导得

$$(e^y + 6x)y'' + e^y(y')^2 + 12y' + 2 = 0, \quad (6 \text{ 分})$$

将 $x = 0, y'(0) = 0$ 代入得 $y''(0) = -2$. (7 分)

12. 设 $f(x) = e^x \ln(1+x) - x(1 + \frac{1}{2}x)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 求 $f(x)$ 的主部及阶数.

解: 由泰勒公式得

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) - x(1 + \frac{1}{2}x) \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim \frac{1}{3}x^3 (x \rightarrow 0), \quad (5 \text{ 分})$$

故 $f(x)$ 的主部为 $\frac{1}{3}x^3$, 阶数为 3. (7 分)

13. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}}{x \sin x^2} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt$.

解: 令 $u = x-t$, 则 $\int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \int_0^x \sin u^2 du$

(3分)

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin u^2 du}{x^3}$$

(5分)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

14. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]$

解: $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln(1+x) dx$

(3分)

$$= x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{1+x} dx$$

(5分)

$$= 2 \ln 2 - 1$$

(7分)

15. 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1-t} dt$, 求 $I = \int_0^1 (x-1)f(x) dx$.

解: $f'(x) = \frac{\sin x}{1-x}$, $f(0) = 0$

(2分)

$$I = \int_0^1 (x-1)f(x) dx = \frac{(x-1)^2}{2} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2} f'(x) dx$$

$$= - \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2} f'(x) dx$$

(4分)

$$= \int_0^1 \frac{x-1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1) d(-\cos x)$$

$$= \frac{1}{2}(-(x-1)\cos x) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \cos x dx$$

(6分)

$$= \frac{1}{2}(\sin 1 - 1).$$

(7分)

16. 若曲线 $y = f(x)$ 是 $y'' + 2y' - 3y = 4e^x$ 的一条积分曲线, 此曲线过点 $A(0,1)$, 且在点 $A(0,1)$ 处的切线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$, 求 $f(x)$.

解: 由题意得 $y(0) = 1, y'(0) = \tan \frac{3}{4}\pi = -1$ (1分)

方程对应的齐次方程的特征方程为

$$r^2 + 2r - 3 = 0, \text{ 特征根 } r_1 = -3, r_2 = 1$$

对应的线性齐次方程通解为: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$ (C_1, C_2 为常数) (3分)

$\lambda = 1$ 为特征方程的特征单根, 故可设线性非齐次方程的特解为 $y^* = Axe^x$, A 为待定常数, 代入线性非齐次方程得 $4A = 4, A = 1$, 特解为 $y = xe^x$.

原方程的通解为 $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + xe^x$ (5分)

将初始条件代入解得 $C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = \frac{1}{4}$

$$y = \frac{3}{4}e^{-3x} + \frac{1}{4}e^x + xe^x. \quad (7分)$$

四. 综合题 (每小题 7 分, 2 个小题共 14 分, 必须写出主要过程.)

17. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 其反函数存在为 $g(x)$, 若

$$\int_0^{f(x)} g(t)dt + \int_0^x f(t)dt = xe^x - e^x + 1,$$

求 $f(x)$.

解 在所给方程两边对 x 求导, 得

$$g(f(x))f'(x) + f(x) = xe^x,$$

由于 $g(f(x)) = x$, 上式变为 $xf'(x) + f(x) = xe^x$.

若 $x = 0$, 则 $f(0) = 0$;

若 $x \neq 0$, 则上式变为 $f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = e^x$,

$$\text{因此, } f(x) = e^{-\int_x^1 dx} \left(\int e^x e^{\int_x^1 dx} dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\int x e^x dx + C \right) = \frac{1}{x} (x e^x - e^x + C),$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 有 $0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [e^x + \frac{C - e^x}{x}]$, 从而 $C=1$, 于是

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ \frac{1}{x}(xe^x - e^x + 1), & x \neq 0. \end{cases}$$

18. 设函数 $f(x) = ax + \frac{3}{2}bx^2$ 在区间 $(0,1)$ 内大于零, 其中 a, b 为未知常数, 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围成的区域 D 的面积为 2. 求 a, b 的值, 使得 D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积最小, 并求出最小值.

解: 由题意得

$$\int_0^1 (ax + \frac{3}{2}bx^2) dx = 2, \text{ 从而得 } a+b=4, \text{ 即 } a=4-b.$$

$$\text{所以 } f(x) = (4-b)x + \frac{3}{2}bx^2, \quad (2 \text{ 分})$$

D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积

$$V = \int_0^1 \pi \left((4-b)x + \frac{3}{2}bx^2 \right)^2 dx = \left(\frac{16}{3} + \frac{b}{3} + \frac{b^2}{30} \right) \pi \quad (4 \text{ 分})$$

$$V' = \left(\frac{1}{3} + \frac{b}{15} \right) \pi, \text{ 令 } V' = 0, \text{ 得 } b = -5, \text{ 于是 } a = 9, V = \frac{9}{2}\pi,$$

$$V''(-5) = \frac{\pi}{15} > 0, \text{ 体积的最小值存在, 故 } a=9, b=-5 \text{ 时, 旋转体体积最小值为 } \frac{9}{2}\pi. \quad (7 \text{ 分})$$

五、证明题(每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设函数 $f(x)、g(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上连续且单调增加, 其中 $a > 0$. 证明

$$a \int_0^a f(x)g(x) dx \geq \int_0^a f(x) dx \int_0^a g(x) dx.$$

证 构造函数 $F(x) = x \int_0^x f(t)g(t) dt - \int_0^x f(t) dt \int_0^x g(t) dt, x \in [0, a],$

则 $F(0) = 0$, 且对于 $x \in [0, a]$, 有

$$F'(x) = \int_0^x f(t)g(t) dt + xf(x)g(x) - f(x) \int_0^x g(t) dt - g(x) \int_0^x f(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x [f(t)g(t) + f(x)g(x) - f(x)g(t) - g(x)f(t)] dt \\
&= \int_0^x [f(t)(g(t) - g(x)) + f(x)(g(x) - g(t))] dt \\
&= \int_0^x [(f(t) - f(x))(g(t) - g(x))] dt. \tag{4分}
\end{aligned}$$

由 $f(x)$ 、 $g(x)$ 单调增加知, 在 $[0, a]$ 上有 $(f(t) - f(x))(g(t) - g(x)) \geq 0$, 从而 $F'(x) \geq 0$, $F(x)$ 在 $[0, a]$ 上单调增加, 所以 $F(a) \geq F(0) = 0$, 即

$$a \int_0^a f(x)g(x) dx \geq \int_0^a f(x) dx \int_0^a g(x) dx. \tag{5分}$$

20. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$(b-a)^2 |f''(\xi)| \geq 4 |f(b) - f(a)|.$$

证明: 将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 分别在 $x=a$ 及 $x=b$ 展开成泰勒公式为:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + f'(a)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \quad \xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2}),$$

$$\text{即 } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2;$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + f'(b)\left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2!} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \quad \xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b),$$

$$\text{即 } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2!} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2. \tag{2分}$$

两式相减得

$$f(b) - f(a) = \left(\frac{f''(\xi_2)}{2!} - \frac{f''(\xi_1)}{2!} \right) \left(\frac{a-b}{2} \right)^2,$$

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} (|f''(\xi_2)| + |f''(\xi_1)|). \tag{4分}$$

取 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$, 则

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \cdot 2|f''(\xi)|, \quad \text{即 } (b-a)^2 |f''(\xi)| \geq 4 |f(b) - f(a)|. \tag{5分}$$