

2024 ~2025 学年第 一 学期

《微积分 (B)》课程考试(A 卷)参考解答

一. 单项选择题(每小题 3 分, 6 个小题共 18 分, 将结果涂在答题卡上.)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 是【 】.

- A. 无界的但不是无穷大量 B. 无穷大量
C. 有界的但不是无穷小量 D. 无穷小量

解析: 取 $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi}$, 则 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$,

$$f(x_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad f(y_n) = 0, \quad \text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0.$$

故当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 是无界的但不是无穷大量. 故答案: A

2. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$, 则【 】

- A. 对任意正整数 n , 有 $a_n < b_n$ B. 对任意正整数 n , 有 $b_n < c_n$
C. 数列 $\{a_n \cdot c_n\}$ 发散 D. 数列 $\{b_n \cdot c_n\}$ 发散

解析: 根据数列极限的比较性质可知 A,B 都不对 (将“任意”改为“充分大的”, 就对了).

取 $a_n = \sin \frac{1}{n}, c_n = n$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$, 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1, \quad \text{数列 } \{a_n \cdot c_n\} \text{ 收敛, 故 C 不对.}$$

对于 D, 假设 $\{b_n \cdot c_n\}$ 收敛, 因 $c_n = \frac{b_n c_n}{b_n}$, 由收敛数列商的运算规则得数列 $\{c_n\}$ 收敛, 与已知条件矛盾, 因而 $\{b_n \cdot c_n\}$ 发散. 故答案: D

3. 设 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) > 0$, 则【 】

- A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值 B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

D. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

解析: 因 $f'''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$, 所以在 x_0 的某邻域内, $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$

当 $x > x_0$ 时, $f''(x) > 0$, 从而 $f'(x)$ 单调递增, 因而 $f'(x) > f'(x_0) = 0$

当 $x < x_0$ 时, $f''(x) < 0$, 从而 $f'(x)$ 单调递减, 因而 $f'(x) > f'(x_0) = 0$

故 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极小值, $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调递增, $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值. 故答案为: D.

4. 若 $f'(2x) = e^{-x}$, 且 $f(0) = 1$, 则 $\int f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 【 】

A. $3x - e^{\frac{-x}{2}} + C$

B. $3x - 2e^{\frac{-x}{2}} + C$

C. $3x + 4e^{\frac{-x}{2}} + C$

D. $3x - 4e^{\frac{-x}{2}} + C$

解析: 因 $f'(2x) = e^{-x} = e^{\frac{-1}{2} \cdot 2x}$, 所以 $f'(u) = e^{\frac{-1}{2}u}$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int e^{\frac{-1}{2}x} dx = -2e^{\frac{-1}{2}x} + C_1, \text{ 又 } f(0) = 1, \text{ 故可得 } C_1 = 3$$

$$f(x) = -2e^{\frac{-1}{2}x} + 3, \int f(x)dx = \int \left(3 - 2e^{\frac{-1}{2}x} \right) dx = 3x + 4e^{\frac{-1}{2}x} + C$$

故答案: C

5. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) < 0, f(0) = 0$, 则 【 】

A. $f(2) < 2f(1)$

B. $f(2) > 2f(1)$

C. $2f(2) < f(1)$

D. $2f(2) > f(1)$

解析: 对 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 和 $[1, 2]$ 上应用拉格朗日中值公式得

$$f(1) - f(0) = f'(\xi), f(2) - f(1) = f'(\eta), \xi \in (0, 1), \eta \in (1, 2)$$

因 $f''(x) < 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $[0, 2]$ 上严格单调递减, 于是有 $f'(\xi) > f'(\eta)$

即有 $f(1) - f(0) > f(2) - f(1)$, 又 $f(0) = 0$, 故 $2f(1) > f(2)$, 答案为 A.

6. 下列反常积分收敛的是【 】.

A. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$

D. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^2} dx$

解析: $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \int_e^{+\infty} \ln x d \ln x = \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_e^{+\infty} = +\infty$, 所以 $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ 发散

$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln |\ln x| \Big|_e^{+\infty} = +\infty$, 所以 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ 发散

$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} d \ln x = 2 \sqrt{\ln x} \Big|_e^{+\infty} = +\infty$, 所以 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$ 发散

$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^2} dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^2} d \ln x = -\frac{1}{\ln x} \Big|_e^{+\infty} = 1$, 所以 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^2} dx$ 收敛

故答案为: D

二、填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3 \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 由题意可得 $x = 2$ 时, $t = 1$, 此时 $y = 3$, 从而有 $f(2) = 3$.

$$\frac{dy}{dt} = 4 - 2t, \frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dx} = \frac{4-2t}{2t} = \frac{2-t}{t}, \frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = 1, \text{ 即 } f'(2) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(2 + \frac{1}{n}\right) - f(2)}{\frac{1}{n}} = f'(2) = 1.$$

8. 设函数 $f(x) = \int_0^{3x} e^{-t^2} dt + 2$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 则 $g'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: $f(0) = 2, f'(x) = 3e^{-9x^2}, f'(0) = 3$

$$g'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}.$$

9. 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(x) dx$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: 设 $\int_0^1 f(x)dx = a$, 则 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + a\sqrt{1-x^2}$, 于是有

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} + a\sqrt{1-x^2} \right) dx = a,$$

$$\text{而 } \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} + a\sqrt{1-x^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 a\sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}a$$

$$\text{故有 } a = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}a, \quad a = \frac{\pi}{4-\pi}, \quad \text{即 } \int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4-\pi}.$$

10. 连续曲线段 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt$ ($0 \leq x \leq \pi$) 的弧长为_____.

解: $y' = \sqrt{\sin x}$

$$s = \int_0^\pi \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^\pi \sqrt{1+\sin x} dx = \int_0^\pi \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx$$

$$= \left(-2\cos \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \right) \Big|_0^\pi = 2 - (-2) = 4.$$

三. 计算题 (每小题 7 分, 6 个小题共 42 分, 必须写出主要计算过程.)

11. 求曲线 $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ ($x > 1$) 的渐近线.

解: 函数在 $(1, +\infty)$ 内有定义.

因 $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \infty$, 所以 $x=1$ 为曲线的铅直 (垂直) 渐近线.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x\sqrt{\frac{x}{x-1}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1}{1/x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{2(x-1)}{1/x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

故曲线的斜渐近线为 $y = x + \frac{1}{2}$.

当 $x > 1$ 曲线连续, 故没有其他的铅直渐近线, 且曲线没有水平渐近线.

12. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2n + \frac{4}{n}} + \dots + \frac{1}{2n + \frac{n^2}{n}} \right)$

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2n + \frac{4}{n}} + \dots + \frac{1}{2n + \frac{n^2}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n + \frac{k^2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \frac{k^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2 + x^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

13. 设方程 $e^{xy} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^y \sqrt{4-t^2} dt = 1$ 可确定函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$.

解: 将 $x=0$ 代入方程得 $\frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^y \sqrt{4-t^2} dt = 0$, 因此得 $y=1$

方程两边关于 x 求导得

$$e^{xy}(y + xy') + \frac{1}{\sqrt{3}} y' \sqrt{4-y^2} = 0 \quad (*)$$

将 $x=0, y=1$ 代入方程 (*) 得 $y'(0) = -1$, 即 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = -1$

14. 求方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$ 的积分曲线 $y = y(x)$, 使其在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - 3x + 1$ 在该点的切线重合.

解: 由题意得 $y(0) = 1, y'(0) = (2x - 3) \Big|_{x=0} = -3$

对应齐次方程的特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 特征根 $r_1 = 1, r_2 = 2$

对应齐次方程的通解为 $Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

$\lambda = 1$ 是特征方程的单根, 故原微分方程的特解可设为 $y^* = axe^x$, 代入微分方程得

$-ae^x = 2e^x$, 即 $a = -2$, 故原方程特解为 $y^* = -2xe^x$, 通解为

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2x e^x.$$

因 $y(0) = 1$, 所以得 $C_1 + C_2 = 1$ (1)

又 $y'(0) = -1$, $y'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} - 2e^x - 2x e^x$, 于是有 $C_1 + 2C_2 = -1$ (2)

联立 (1) (2) 解得 $C_1 = 3, C_2 = -2$

故所求积分曲线为 $y(x) = (3 - 2x)e^x - 2e^{2x}$.

15. 设 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2+2t} dt$, 求 $I = \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$.

解: $f'(x) = e^{-x^2+2x}$, $f(0) = 0$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx = \frac{(x-1)^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x-1)^3}{3} f'(x) dx = - \int_0^1 \frac{(x-1)^3}{3} f'(x) dx \\ &= - \int_0^1 \frac{(x-1)^3}{3} e^{-x^2+2x} dx = - \frac{1}{6} \int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1} d(x-1)^2 \\ &= \frac{e}{6} \int_0^1 u e^{-u} du \quad (\text{令 } u = (x-1)^2) \\ &= \frac{e}{6} \left(-u e^{-u} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-u} du \right) = \frac{e}{6} \left(-e^{-1} - e^{-u} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{6} (e - 2). \end{aligned}$$

16. 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^3 - x^3| dt$ ($0 \leq x \leq 1$), 求 $f(x)$ 的最值.

解: $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = \int_0^1 |t^3 - x^3| dt = \int_0^x |t^3 - x^3| dt + \int_x^1 |t^3 - x^3| dt$

$$\begin{aligned} &= \int_0^x (x^3 - t^3) dt + \int_x^1 (t^3 - x^3) dt = \left(x^3 t - \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^x + \left(\frac{t^4}{4} - x^3 t \right) \Big|_x^1 \\ &= \frac{3}{2} x^4 - x^3 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$f'(x) = 6x^3 - 3x^2$, 令 $f'(x) = 0, x \in (0, 1)$, 即 $6x^3 - 3x^2 = 0$, 解得驻点为 $x = \frac{1}{2}$.

$$f(0) = \frac{1}{4}, f(1) = \frac{3}{4}, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{32}.$$

比较得 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值为 $\frac{7}{32}$, 最大值为 $\frac{3}{4}$.

四. 综合题 (每小题 7 分, 2 个小题共 14 分, 必须写出主要过程.)

17. 设 $f(x)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \tan x}{x} = 1$, $F(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 求 $F'(x)$, 并讨论 $F'(x)$ 的连续性.

解: 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \tan x}{x} = 1$ 得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 从而有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

又 $f(x)$ 连续, 所以 $f(0) = 0$, 由此得 $f'(0) = 2$.

令 $u = xt$, 则 $x \neq 0$ 时, $F(x) = \int_0^1 f(xt)dt = \frac{1}{x} \int_0^x f(u)du$

$$F(0) = \int_0^1 f(0)dt = f(0) = 0,$$

$$\text{因此 } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(u)du, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$x \neq 0, F'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)dx}{x^2} = \frac{f(x)}{x} - \frac{\int_0^x f(u)dx}{x^2},$$

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)dx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{2x} = \frac{1}{2} f'(0) = 1$$

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{\int_0^x f(u)dx}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{\int_0^x f(u)dx}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)dx}{x^2} = \frac{1}{2} f'(0) = 1 = F'(0).$$

所以 $F'(x)$ 在 $x=0$ 连续, 又 $x \neq 0$ 时, $F'(x)$ 连续, 因此 $F'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

18. 设曲线 $y = y(x)$ 是第一象限内的连续曲线, 点 $A(0,1), B(1,0)$ 分别为曲线与 y 轴及 x 轴的交点, 点 $M(x, y)$ 为曲线 AB 上的任意一点, 过 $M(x, y)$ 作 x 轴的垂线, 与 x 轴交于点 C, O 为坐

标原点. 设梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积和为 $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}$, 求 $y = y(x)$ 与 y 轴及

x 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

解: 由题意可得

$$x \frac{1+y}{2} + \int_x^1 y(t) dt = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}$$

方程两边关于 x 求导, 得 $\frac{1+y}{2} + \frac{y'x}{2} - y = \frac{x^2}{2}$.

整理得 $y' - \frac{1}{x}y = x - \frac{1}{x} \quad (x > 0)$

$$\text{通解 } y = e^{-\int(\frac{1}{x})dx} \left(C + \int \left(x - \frac{1}{x} \right) e^{\int(\frac{1}{x})dx} dx \right) = x \left(C + x + \frac{1}{x} \right), x > 0$$

将 $y(1)=0$ 代入得, $C=-2$, 故 $y=x^2-2x+1$.

所求体积为

$$V_y = \int_0^1 2\pi x(x^2-2x+1)dx = 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

五、证明题(每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0$, $f(2) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$,

证明: $\exists \xi \in (0, 2)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

证明: 由 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0$ 可得 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 0$, 又 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续,

$$\text{故有 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 0, \text{ 于是 } f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0.$$

由积分中值定理可得 $f(2) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx = 2f(\eta) \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) = f(\eta)$, $\eta \in [1, \frac{3}{2}]$

$f(x)$ 在 $[\eta, 2]$ 上满足罗尔定理的条件, 故 $\exists \eta_1 \in (\eta, 2)$, 使得 $f'(\eta_1) = 0$.

$f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 故 $f'(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, \eta_1] \subset (0, 2)$ 上可导, 且连续, 应用罗尔定理得

$\exists \xi_1 \in (\frac{1}{2}, \eta_1) \subset (0, 2)$, 使得 $f''(\xi_1) = 0$.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数, 且 $|f''(x)| \leq 1$, 证明:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{24}.$$

证明: 将 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 展开成泰勒公式为

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2, \quad (\xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } \frac{1}{2} \text{ 之间})$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right) dx + \int_0^1 f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_0^1 \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = f\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^1 \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \end{aligned}$$

$$\text{故 } \int_0^1 f(x) dx - f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx$$

$$\text{于是 } \left| \int_0^1 f(x) dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{f''(\xi)}{2!} \right| \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{24}.$$

另证: 将原函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处展开成泰勒公式

$$F(x) = F\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} f''(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right)^3. \quad (\xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } \frac{1}{2} \text{ 之间})$$

令 $x=0, x=1$ 得

$$0 = F(0) = F\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} f'\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{48} f''(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < \frac{1}{2},$$

$$F(1) = F\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} f'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{48} f''(\xi_2), \quad \frac{1}{2} < \xi_2 < 1,$$

以上两式相减得

$$F(1) - F(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{48} (f''(\xi_1) + f''(\xi_2)),$$

$$\text{即 } \int_0^1 f(x) dx - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{48} (f''(\xi_1) + f''(\xi_2)).$$

$$\text{由题设条件 } |f''(x)| \leq 1 \text{ 易得 } \left| \int_0^1 f(x) dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{24}.$$