

## 《线性代数》2021 秋 A 答案

一、 判断题 (2 分×8=16 分)

1. ✓ 2. ✗ 3. ✓ 4. ✗ 5. ✓ 6. ✗ 7. ✓ 8. ✓

二、 填空题 (4 分×5=20 分)

1.  $k(1,2,3)^T, k \in \mathbb{R}$

2.  $\begin{pmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{pmatrix}$

3.  $(1,1,1)^T$

4. 9

5. 1

三、 (10 分)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad D &= (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \\
 &= (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \quad 3 \text{ 分} \\
 &= (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}. \quad 5 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \sum_{j=1}^n A_{1j} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \quad 3 \text{ 分} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^{n-1}. \quad 5 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

四、 (10 分)

$$(1) \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2 \text{ 分}$$

由初等行变换, 有  $(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  5 分

(2) 由  $AXA + BXB = AXB + BXA + I$  有  $(A - B)X(A - B) = I$ , 2 分

所以,  $X = ((A - B)^{-1})^2$  4 分

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 5 \text{ 分}$$

五、(12 分)

(1) 解: 因为  $r(A) = 2$ , 所以  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 5 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ , (或直接用初等变换)

所以,  $a = 4, b = 3$ . 4 分

由于非齐次线性方程组  $AX = b$  系数矩阵的秩为 2, 且有解,

所以,  $r(A|b) = r(A) = 2$ .

对增广矩阵作行初等变换,

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \end{array} \middle| \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ c \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 2 \\ -3 \\ c-1 \end{array} \right),$$

所以,  $c = 1$ , 6 分

$$\text{且通解 } X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad 8 \text{ 分}$$

(2) 取非齐次线性方程组  $AX = b$  的一个特解  $\beta$ , 其导出组非齐次线性方程组  $AX = 0$  的基础解系  $\alpha_1, \alpha_2$ ,

则  $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2$  为  $AX = b$  的三个线性无关解, 2 分

且  $AX = b$  的任意解都可以由  $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2$  线性表出,

所以  $AX = b$  有 3 个线性无关解. 4 分

六、(12 分)

(1) 证明:  $\alpha_1 - 2\alpha_3 = [-3, 0, 6]^T$ , 即  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

文印欢迎您

所以 $\lambda_3 = -3$ 为 $A$ 的特征值, 对应的特征向量为 $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ . 2分

由于 $A$ 为实对称矩阵, 所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 对应的特征向量与 $X_3$ 正交,  
解齐次线性方程组 $x_1 - 2x_3 = 0$ ,

得到其基础解系 $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 且 $X_1$ 与 $X_2$ 正交, 4分

将 $X_1, X_2, X_3$ 标准化, 得

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

取 $Q = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ , 则 $Q$ 正交且 $Q^T A Q = \text{diag}\{2, 2, -3\}$ ,

所以,  $A = Q \text{diag}\{2, 2, -3\} Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ . 6分

(2) 由 $A = Q \text{diag}\{2, 2, -3\} Q^T$ , 有 $A^{-1} = Q \text{diag}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\} Q^T$ , 2分

所以 $Q^T A Q = \text{diag}\left\{\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{10}{3}\right\}$ , 4分

对应的正交变换 $X = QY$ . 6分

## 七、(10分)

(1) 证明: 因为 $X_1, X_2$ 为齐次方程 $(I - A)X = 0$ 的基础解系,

所以 1 为 $A$ 的特征值, 且有 2 个线性无关的特征向量 $X_1, X_2$ , 2分

又 $|A - 2I| = 0$ , 2 也是 $A$ 的特征值, 对应有一个线性无关的特征向量 $X_3$ , 4分

所以, 3 阶方阵 $A$ 有 3 个线性无关的特征向量,  $A$ 可以相似对角化. 5分

(2) 解: 取 $P = (X_1, X_2, X_3)$ , 则 $P$ 可逆, 且 $P^{-1}AP = \text{diag}\{1, 1, 2\}$ , 2分

所以,  $P^{-1}(A - I)(A - 2I)P = (P^{-1}AP - I)(P^{-1}AP - 2I)$  4分

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad 5 \text{分}$$

## 八、(10分)

证明：

必要性：若 $A$ 为正交矩阵，则 $A^T A = AA^T = I$ ， 2分

所以对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(A\alpha, A\beta) = (A\alpha)^T (A\beta) = \alpha^T A^T A\beta = \alpha^T \beta = (\alpha, \beta). \quad 5 \text{ 分}$$

充分性：若对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ ,  $(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$ . (1)

取 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ , 令 $B = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ ,

则 $B^T B = BB^T = I$ , 所以 $B$ 为正交矩阵， 2分

再取 $\xi_i = A\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 由 (1),  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ 也为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基,

令 $C = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , 则 $C$ 也为正交矩阵， 4分

因为  $A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \dots, A\varepsilon_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,

所以  $A = CB^{-1} = CB^T$ ,  $A$ 为正交矩阵. 5分