2022 -1 期末试题解答

一、单项选择题

1.C　2.D　3.D　4.C　5.C　6.C

二、填空题

7. 3　8. $y=-\dfrac{2}{3}x$　9. 0　10. $\ln(1+\sqrt{2})$.

三. 基本计算题

11. 曲线 $y=x\arctan x$ 无垂直渐近线.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\arctan x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-1,$$

所以曲线 $C: y=x\arctan x\quad(x>0)$ 仅有斜渐近线 $y=\dfrac{\pi}{2}x-1$.

12. 解法 1　$$l=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)}{(x-a)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+(x-a)f(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{(x-a)(f(\xi)+f(x))}\quad(\xi \text{ 介于 } a \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{1}{f(\xi)+f(x)}=\frac{f'(a)}{2f(a)}=\frac{1}{2}.$$

解法 2　$$l=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)}{(x-a)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+(x-a)f(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}+f(x)},$$

因 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，故 $l=\dfrac{f'(a)}{2f(a)}=\dfrac{1}{2}$.

注 这题不能两次使用洛必达法则，因为 $f'(x)$ 没有连续性这一条件！

解法 3　记 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(a)=0,F'(a)=F''(a)=1$，

$$F(x)=(x-a)+\frac{1}{2}(x-a)^2+o((x-a)^2)\ ,\ F(x)\sim x-a\quad (x\to a)\ ,$$

$$l=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-(x-a)}{(x-a)F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{2}(x-a)^2+o((x-a)^2)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}.$$

13. 解法 1 $I=\int\frac{(x^n+1)-x^n}{x(x^n+1)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^{n-1}}{x^n+1}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{n}\ln|x^n+1|+C$.

解法 2 令 $t=x^n$，则 $\mathrm{d}t=nx^{n-1}\mathrm{d}x,\quad \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{nt}\mathrm{d}t$.

$$I=\frac{1}{n}\int\frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C\ .$$

14. 方程变形为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{2x}{y}=y^3$.

由一阶线性非齐次微分方程的通解公式得

$$x=\mathrm{e}^{-\int(-\frac{2}{y})\mathrm{d}y}(C+\int y^3\cdot\mathrm{e}^{\int(-\frac{2}{y})\mathrm{d}y}\mathrm{d}y)=y^2(C+\int y^3\cdot\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y)=y^2(C+\frac{1}{2}y^2)$$

15. $f(1)=0,f'(x)=-\sin x^2$.

$$I=xf(x)|_0^1-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\sin x^2\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-\cos 1)\ .$$

16. $F'(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin x$，令 $F'(x)=0$ 得 $x=0$ 为 $F(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内的唯一驻点，

$F''(x)=\mathrm{e}^{-x}(\cos x-\sin x)$， $F''(0)=1>0$，

所以 $x=0$ 为 $F(x)$ 的极小值点.

$$F(0)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-t}\cos t|_{-\frac{\pi}{2}}^0-\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\mathrm{e}^{-t}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=-1-(\mathrm{e}^{-t}\sin t|_{-\frac{\pi}{2}}^0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t)=-1-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-F(0)\ ,$$

所以 $F(0)=-\frac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ 为 $F(x)$ 的极小值，无极大值.

四．综合题

17. $f'(x)=\sqrt{1+x^2}-2x\sqrt{1+x^2}=(1-2x)\sqrt{1+x^2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$.

当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 严格单调增，$f(x)=0$ 在 $(-\infty,\dfrac{1}{2}]$ 至多只有一个实根，

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 严格单调减，$f(x)=0$ 在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 至多只有一个实根.

又 $f(-1)=\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t=-2\int_0^1\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t<0$，

$$f(0)=\int_1^0\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_0^1\sqrt{1+t}\mathrm{d}t=\int_0^1(\sqrt{1+t}-\sqrt{1+t^2})\mathrm{d}t>0，$$

因而在 $(-1,0)$ 内有唯一实根，

$$f(1)=\int_1^1\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_1^1\sqrt{1+t}\mathrm{d}t=0，$$

故 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,\dfrac{1}{2}]$ 及 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 各有唯一的一个实根，从而 $f(x)=0$ 有两个实根.

18. 令 $u=x-t$，则 $\int_0^x f(t-x)\mathrm{d}x=\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u$，

则方程两边关于 x 求导得 $\quad f(-x)=-x^2-2x$，

因而 $\quad f(x)=-x^2+2x$.

所求旋转体体积 $V_y=2\pi\int_0^2 x(-x^2+2x)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^2(-x^3+2x^2)\mathrm{d}x$

$$=2\pi(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3)\Big|_0^2=\frac{8}{3}\pi.$$

五．证明题

19. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有最大值 M 和最小值 m.

因 $f(x)>0$，所以 $M\ge m>0$．又 $g(x)\ge 0$，故由定积分的比较性质得

$$\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{m}\mathrm{d}x\le\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x\le\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{M}\mathrm{d}x，$$

即 $$\sqrt[n]{m}\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\le\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x\le\sqrt[n]{M}\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1$，由夹挤准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$.

20. 注意条件 $f'(0)=f'(2)=0$，将 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 和 $x_0=2$ 分别展开成一阶泰勒公式：

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)x^2,\qquad \xi_1\text{ 介于 } x \text{ 与 } 0 \text{ 之间} \qquad ①$$

$$f(x)=f(2)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(x-2)^2,\quad \xi_2\text{ 介于 } x \text{ 与 } 2 \text{ 之间} \qquad ②$$

②式减去①式得

$$f(2)-f(0)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-2)^2,$$

令 $x=1$ 得

$$f(2)-f(0)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)-\frac{1}{2}f''(\xi_2),$$

从而有

$$|f(2)-f(0)|\le\frac{1}{2}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)\le\max(|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|)$$

取 $|f''(\xi)|=\max(|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|)$ 得证.