华中科技大学 2014-2015 学年第二学期

《线性代数》课程考试试卷 A 卷

一、判断题（2×8=16 分）（选择题为计算机阅卷，请使用 2B 铅笔规范填涂，填涂区域要丰满，不要使用划线，打勾，打叉等错误填涂方式）.

1. 设 A 为阶方阵（$n\geqslant3$），则对于任意数 K，有 $(KA)^*=KA^*$，A^* 为 A 的伴随矩阵。
2. 设 A 为 $m\times n$ 阶实矩阵，托 $A^TA=0$，则 $A=0$。
3. 设 n 阶方阵 A 与 B 相似，则对于任意的多项式 $f(\lambda)$，有 $f(A)$ 相似于 $f(B)$。
4. 若 n 阶行列式 D_n 的数值相同的元素大于 n^2-n 个，则行列式的值等于零。
5. 若齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解，则对应的非齐次线性方程组 $AX=b$ 有唯一解。、
6. 若 n 阶方阵 A 的特征值为 1 或 0，则 $A^2=A$。
7. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则 A 的任何一行都不是其余行的线性组合。
8. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶正定矩阵，则 A 的主对角线元素 $a_{ii}>0$，$i=1,2,\cdots,n$。

二、填空题（4 分×5=20 分）（请将答案填在答题卡指定的位置上）

1. $D_4=\begin{vmatrix}1&x&y&z\\x&1&0&0\\y&0&1&0\\z&0&0&1\end{vmatrix}=$__________.
2. 设矩阵 $A=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$，其中 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ 都是四维列向量，P 为四阶矩阵，若 $AP=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_1+a_4)$，则 $P=$_______.
3. 若 4 阶矩阵 A 的四个列向量 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ 满足 $a_1-a_2+a_3-a_4=0$，且秩 $A=3$，则线性方程组 $AX=0$ 的基础解系为__________.
4. 已知三阶方阵 A 的特征值为 1，-1，2，设 $B=A^3-5A^2$，则 $|B|=$_______.
5. 若二次型 $f=(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+4x_22+4x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是__________.

三、（8分）计算n阶行列式Dn=$\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$

四、（10分）已知3阶矩阵A的逆矩阵为：$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$。求$A$的伴随矩阵$A^*$的逆矩阵$(A^*)^{-1}$。

五、(12 分)已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$ 求参数 a，b 的取值，使得方程组

1. 有唯一解
2. 无解
3. 有无穷多解，并求通解

注：x 后的数字均为下标（用函数编辑器无法编辑下标）

六、(12 分)设矩阵 A= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 4 & b \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，λ=2 是 A 的二重特征值，是确定参数 a，b 及可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

七、（12 分）用正交变换 X=CY 化二次型 $f=(x_1,\ x_2,\ ,\ x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 为标准型。

八、（10 分）设 A，B 为 n 阶方阵，I 为单位矩阵，且 $A^2=B^2=I$，$|A|=-|B|$，证明矩阵（$A+B$）不可逆。