



华中科技大学 2019~2020 学年第一学期

“微积分（一）”考试试卷(A 卷)解答

一. 单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上。）

1. 设 $0 < a_n < 1$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, 则以下数列中无界的是【 C 】.

- A. $\{a_n^2\}$ B. $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ C. $\left\{\tan \frac{\pi a_n}{2}\right\}$ D. $\{\ln a_n\}$

2. 已知 $f(2)=3, f'(2)=5$, 则极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2+h)-9}{h} =$ 【 A 】.

- A. 30 B. 10 C. 6 D. 0

3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导, 则以下说法中错误的是【 B 】.

- A. $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上有界 B. $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上有连续的导数
C. $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上连续 D. $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上可积

4. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1+e^x)$ 一共有【 D 】条渐近线.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) < 0$, 则以下不等式中一定成立的是【 B 】.

- A. $f(1)+f(3) > 2f(2)$ B. $f(1)+f(3) < 2f(2)$
C. $f(1)+f(2) > 2f(3)$ D. $f(1)+f(2) < 2f(3)$

6. 微分方程 $y' - \frac{y}{2x} = 0$ 满足初值条件 $y(1) = 2$ 的特解为【 A 】.

- A. $2\sqrt{x}$ B. $1+\sqrt{x}$ C. $1+x$ D. $\sqrt{x+3}$

二. 填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) =$ _____.

解 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}$ 或 $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

8. 设函数 $y = x^2 - x$. 在 $x = 2, \Delta x = 0.01$ 时, 微分 $dy =$ _____.

解 $dy = y'(2)\Delta x = 0.03$.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \sqrt{3+t^2} dt}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x \sqrt{3 + \sin^4 x}}{2x} = \sqrt{3}$.

10. 曲线 $y = 1 - x^4$ 与 x 轴所围成图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 $S = \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = \frac{8}{5}$.

三. 基本计算题 (每小题 7 分, 6 个小题共 42 分, 必须写出主要计算过程。)

11. 已知当 $x \rightarrow 0$, $u = e^{3x} - ax^2 - (1+bx)\cos x$ 是与 x^3 同阶的无穷小. 求常数 a, b 的值.

解 $e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3),$

所以 $u = (3-b)x + (5-a)x^2 + \frac{9+b}{2}x^3 + o(x^3) \sim cx^3$.

必然有 $a = 5, b = 3$.

12. 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值.

解 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

令 $f'(x) = 0$, 得到函数在开区间 $(-2, 2)$ 内的驻点为 $x = -1$.

直接计算有 $f(-2) = 3, f(2) = -17, f(-1) = 10$.

故在区间 $[-2, 2]$ 上函数的最大值为 10、最小值为 -17.

13. 求不定积分 $I = \int \frac{e^{5x}}{e^{2x} + 1} dx$.

解 令 $u = e^x$,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{u^4}{u^2 + 1} du = \int \left(u^2 - 1 + \frac{1}{u^2 + 1}\right) du \\ &= \frac{u^3}{3} - u + \arctan u + C = \frac{e^{3x}}{3} - e^x + \arctan e^x + C. \end{aligned}$$

14. 求定积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

$$\text{解 } I = x \tan x \left|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x dx \right.$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln \cos x \left|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right.$$

$$\text{或 } \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}, \quad \frac{\pi}{4} + \ln \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

15. 判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ 的敛散性, 若收敛求其值.

解法一 令 $x = \tan t$, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx &= \int_0^{\pi/4} \csc t dt \\ &= \ln |\csc t - \cot t| \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \ln(\sqrt{2}-1) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1-\cos t}{\sin t} = +\infty \end{aligned}$$

原反常积分发散.

解法二 令 $x = 1/t$, 有

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = \ln(t + \sqrt{t^2+1}) \Big|_1^{+\infty} = +\infty.$$

原反常积分发散.

解法三 $\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \sim \frac{1}{x}$, $x \rightarrow 0$, 积分 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ 发散, 故 $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ 发散.

16. 求微分方程 $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}$ 满足初值条件 $y(2)=0, y'(2)=1$ 的特解.

解 令 $y' = p(y)$, 原方程化为

$$p \frac{dp}{dy} = \frac{\sin y}{\cos^3 y}.$$

分离变量以后积分得

$$\frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2 \cos^2 y} + C_1.$$

代入初始条件得 $C_1 = 0$. 注意到当 $y = 0, p = 1$, 故 $p = \frac{1}{\cos y}$, 亦即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

再次分离变量积分得到 $x = \sin y + C_2$, 代入初始条件得 $C_2 = 2$.

所求解为 $x = \sin y + 2$ 或 $y = \arcsin(x - 2)$.

四. 应用题 (每小题 7 分, 2 个小题共 14 分, 必须写出主要过程。)

17. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 讨论 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 的连续性(需说明理由).

解 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ 时, $f'(x) = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$.

$$\text{又 } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

又有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x)}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

从而成立 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$. 所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

18. 求曲线 $y = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3}$ 对应于 $1 \leq x \leq 4$ 弧段的长度.

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

$$\text{弧微分 } ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{故曲线长度为 } s &= \frac{1}{2} \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx \\ &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

五. 综合题 (每小题 5 分, 2 个小题共 10 分, 必须写出主要过程。)

19. 设 n 为正整数. 求方程 $(x+1)^{2n} = x^{2n} + 1$ 所有的实根. 证明你的结论.

解 显然方程有实根 $x = 0$.

设 $f(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 1$. 因 t^{2n-1} 为严格单增函数,

$$f'(x) = 2n((x+1)^{2n-1} - x^{2n-1}) > 0.$$

所以 $f(x)$ 为严格单增函数, 因此原方程只有唯一实根 $x = 0$.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续的导数. 证明:

$$f(x) \leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx, x \in [a, b].$$

证 根据积分中值定理, $\exists \xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f(\xi) + \int_{\xi}^x f'(t) dt \right| \leq |f(\xi)| + \left| \int_{\xi}^x f'(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx. \end{aligned}$$