2022-1 期末试题

一、单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上.）

1. 若 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当 $\Delta x \to 0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是与 Δx【　　】的无穷小 .

A. 高阶　　B. 低阶　　C. 同阶　　D. 等价

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导的充分条件是【　　】.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}$ 存在　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}$ 存在

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{\sqrt[3]{x}}$ 存在　　D. $\lim\limits_{x\to\infty} xf(\dfrac{1}{x})$ 存在

3. 下列关于数列的描述中，正确的是【　　】.

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

B. 若 $\{x_n y_n\}$ 有界，则必有 $\{x_n\}$ 有界或 $\{y_n\}$ 有界

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

D. 若有区间 I 内的数列 x_n，使 $|f(x_n)|$ 无界，则 $f(x)$ 在区间 I 上无界

4. 设 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内可导, 且 $f'(x)>0$, 若 $f(a)=0$，则在区间 $(a,+\infty)$ 内有【　　】.

A. $f(x)\ge 0$　　B. $f(x)>0$　　C. 不能确定 $f(x)$ 的符号　　D. $f(x)$ 单调趋向于 $+\infty$

5. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$, 则下列结论成立的是【　　】.

A. $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0)\ne 0$　　B. $f'(0)$ 不存在

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值　　D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{(1+\dfrac{1^2}{n^2})(1+\dfrac{2^2}{n^2})\cdots(1+\dfrac{n^2}{n^2})}$ 等于【　　】.

A. $\int_1^2 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$　　B. $2\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$　　C. $\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$　　D. $2\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上.）

7. 当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $(1+x)^{x^2}-1$ 的阶数是____________.

8. 曲线 $\cot(x+y+\frac{\pi}{4})=e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

9. 若 $\int_0^x f(t)dt = xe^{-x}$，则 $\int_1^{+\infty}\frac{f(\ln x)}{x}dx =$________.

10. 曲线 $y=\int_0^x \tan t dt (0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的弧长 $s=$________.

三、计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程.）

11. 求曲线 $C: y = x\arctan x \quad (x>0)$ 的渐近线.

12. 设 $f(x)$ 在点 a 的邻域内可导, 且 $f(a)=f'(a)=1$, 求 $l=\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{\int_a^x f(t)dt}\right)$.

13. 求 $I=\int\frac{1}{x(x^n+1)}dx$，$n$ 为正整数.

14. 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x+y^4}$ 的通解.

15. 设 $f(x)=\int_x^1 \sin t^2 dt$，计算 $I=\int_0^1 f(x)dx$..

16. 求 $F(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^x e^{-t}\sin t dt$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内的极值.

四. 综合题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程. ）

17. 已知函数 $f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^2}dt+\int_{x^2}^1\sqrt{1+t}dt$，讨论方程 $f(x)=0$ 的实根个数.

18. 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x)dt = -\frac{x^3}{3}-x^2$，求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

五. 证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程. ）

19. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $g(x)\ge 0, f(x)>0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx=\int_0^1 g(x)dx.$$

20. 设 $f(x)$ 在 $\left[0,2\right]$ 上二阶可导，且 $f'(0)=f'(2)=0$，试证：存在 $\xi\in(0,2)$，使

$$|f''(\xi)|\ge|f(2)-f(0)|.$$