2021 ～2022 学年第一学期

“线性代数”课程考试试卷 (A 卷)

考试方式：闭卷　考试日期：2022.01.07　考试时长：150 分钟

院(系)：____________________　专业班级：____________________

学　号：____________________　姓　名：____________________

一、 判断题（2分×8=16分） **（判断题为计算机阅卷，请使用2B 铅笔规范填涂，填涂区域要丰满、不要使用划线、打勾、打叉等错误填涂方式）**

1. 设A,B均为n阶方阵且$6AB = 3A + 2B$，则$AB = BA$.
2. 设A为n阶方阵，则$(aA)^* = a^n A^*$，其中a为常数.
3. 已知n维列向量$\alpha = \left[\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}\right]^T$，则$A = I - 4\alpha\alpha^T$的列向量是$n$维向量空间的一组标准正交基.
4. 设A为n阶方阵，α为n维列向量，满足秩的等式：$r\left(\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}\right) = r(A)$，则齐次线性方程组$\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix} X = 0$ 只有零解
5. 若$A^2 = 0, A \neq 0$，则必不可相似于对角矩阵.
6. 设A为n阶方阵， $r(\lambda_0 I - A) = t$，则λ_0必为A的$n - t$重特征值.
7. 设A,B均为实对称矩阵，则存在正交矩阵Q，使得$Q^T A Q = B$的充分必要条件是A,B的特征多项式相同.
8. 若n阶实对称矩阵A正定，则A的主对角线上元素都大于 0.

二、 填空题（4 分×5=20 分）**（请将答案填写在答题卡指定位置上）**

1. 已知 3 维列向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$满足$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$，$\alpha_2, \alpha_3$线性无关，3 阶方阵$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$，则齐次线性方程组$AX = 0$的通解为 ______.
2. 设I为n阶单位阵，则$\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} =$ ______.
3. 设三维向量α在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的坐标为$[3, 2, 1]^T$，则$\alpha$在基$\beta_1 = \alpha_1$，$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$，$\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$下的坐标为______.
4. 若$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & a & -c \\ 2 & -c & b \end{bmatrix}$合同于$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则$A$的迹 $tr(A) =$______.
5. 二次型$f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + x_2 - x_3)(3x_1 - 2x_2 + 5x_3)$的正惯性指数为______.

三、（10 分）（**请将答案填写在答题卡指定位置上**）

$n(n\geq 2)$阶行列式$D=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$,

（1）求D；（2）求D的第一行元素对应的代数余子式之和$\sum_{j=1}^{n} A_{1j}$.

四、（10 分）（**请将答案填写在答题卡指定位置上**）

已知$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，且矩阵$X$满足：

$AXA+BXB=AXB+BXA+I$.

（1）求$(A-B)^{-1}$；（2）求X.

五、（12 分）（**请将答案填写在答题卡指定位置上**）

已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ ax_1+bx_2+5x_3-x_4=-1 \\ 2x_1+x_2+3x_3-3x_4=c \end{cases}$系数矩阵的秩为 2，且有解

（1） 求a,b,c的值及该非齐次线性方程组的通解.

（2） 该非齐次线性方程组有多少线性无关的解？说明理由.

六、（12 分）（**请将答案填写在答题卡指定位置上**）

设三阶实对称矩阵$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$有二重特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$,且满足:

$$\alpha_1-2\alpha_3=[-3,0,6]^T.$$

（1） 证明 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

（2） 求正交变换$X=CY$，将$f(x_1,x_2,x_3)=X^T(A+A^{-1})X$化为标准形.

七、（10 分）（**请将答案填写在答题卡指定位置上**）

已知A为三阶方阵，X_1,X_2为齐次方程$(I-A)X=0$的基础解系，且$|A-2I|=0$.

（1）证明A可以相似对角化;

（2）求$(A-I)(A-2I)$

八、（10 分）（**请将答案填写在答题卡指定位置上**）

设A为n阶实矩阵，证明A为正交矩阵的充要条件是：对任意$\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$, $(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)$. 其中$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$为$\mathbb{R}^n$中的内积.