

## 2023 ~2024 学年第 一 学期

### 《微积分（一）》课程考试试卷(A 卷)

#### 一. 单项选择题(每小题 3 分, 6 个小题共 18 分, 将结果涂在答题卡上.)

1. 下列函数在其定义域上无界的是【    】

- A.  $x^2 D(x)$  ( $D(x)$  为迪尼克雷函数)    B.  $\tan(\sin x)$     C.  $\frac{\sin x}{x}$     D. 符号函数  $\operatorname{sgn}(x)$

解答:  $x^2 D(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ , 显然定义域上无界.

$$x \in R, |\sin x| \leq 1, |\tan x(\sin x)| \leq \frac{\pi}{4}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ , 所以  $\frac{\sin x}{x}$  在  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上有界.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \text{ 显然在定义域中有界.}$$

故选 A

2. 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$  的斜渐近线为【    】

- A.  $y = -x$     B.  $y = -x + 1$     C.  $y = x$     D.  $y = x + 1$

解答:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right) = 0$ ,  $y = 0$  为水平渐近线

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right) = \infty$ ,  $x = 0$  为垂直渐近线

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$$

斜渐近线为  $y = x$ .

故选 C

3. 通解为  $y = (C_1 + C_2 x)e^x + x$  (其中  $C_1, C_2$  为任意常数) 的微分方程是【 】.

- A.  $y'' - y' = 1$     B.  $y'' - y = 0$     C.  $y'' - 2y' + y = e^x$     D.  $y'' - 2y' + y = x - 2$ .

解答: 由线性微分方程通解的结构,  $(C_1 + C_2 x)e^x$  是一个齐次方程的通解,  $y = x$  是一个相应非齐次方程的特解, 所以选项 B 不对; 从  $(C_1 + C_2 x)e^x$  知  $e^x$  对应的是齐次方程的二重特征根  $r = 1$ , 即特征方程为  $r^2 - 2r + 1 = 0$ , 相应的二阶齐次方程为  $y'' - 2y' + y = 0$ , 所以在 CD 中选择. 将特解  $y = x$  分别代入选项 C、D, 可确定 D 是正确答案.  
答案为 D.

4. 设  $f(x)$  在  $x = x_0$  的某个邻域内有定义, 则下列命题

- ①若  $f'(x_0)$  存在, 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  连续.  
②若  $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$  都存在, 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  连续.  
③若  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$  都存在, 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  连续.

其中正确的个数是

- A. 1    B. 2    C. 3    D. 0

解答: 由导数与连续之间的关系得①②是正确的

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -x + 1, & x < 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1,$$

因而  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在, 从而  $f(x)$  在  $x = 0$  不连续, 故 C 不对.

故答案为: B

5. 设  $f(x)$  在  $x = 1$  的某邻域内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x+1) + e^{x^2})}{x^2} = 2$ , 则  $x = 1$  是  $f(x)$  的【 】.

- A. 驻点且为极大值点    B. 驻点且为极小值点  
C. 不可导点    D. 可导点但不是驻点

解答: 由条件得  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(f(x+1) + e^{x^2}) = 0$ , 于是由连续性有  $\ln(f(1) + 1) = 0$ , 因而  $f(1) = 0$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x+1) + e^x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) + e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+1)}{x^2} + \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right) = 2$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} = 1$ , 由极限的保号性得  $\forall x \in N(0, \delta), f(x+1) > 0 = f(1)$ , 故  $x=1$  是极小值点

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+1) - f(1)}{x}}{\frac{x}{x}} = 1, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) - f(1)}{x} = 0, \text{ 因而 } f'(1) = 0.$$

故答案为: B.

$$6. \text{ 设 } M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x dx, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x + \sin^3 x) dx, P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \cos x - \sin^2 x) dx, \text{ 则 } \quad \text{【 } \quad \text{】}$$

A.  $M > N > P$       B.  $N > P > M$       C.  $N > M > P$       D.  $M > P > N$

$$\text{解: 由对称性 } M = 0, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{4}{3} > 0, P = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx < 0$$

所以  $N > M > P$ . 故答案为: C.

## 二、填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

$$7. \text{ 设曲线 } y = f(x) \text{ 与 } y = x^2 - x + 1 \text{ 在点 } (2, 3) \text{ 处有公共切线, 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( f\left(2 - \frac{1}{n}\right) - 3 \right) = \underline{\quad}.$$

解: 由题中条件可得  $f(2) = 3, f'(2) = (2x - 1)|_{x=2} = 3$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(2 - \frac{1}{n}\right) - 3 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(2 - \frac{1}{n}\right) - f(2)}{\frac{1}{n}} = -f'(2) = -3.$$

$$8. y = f(x) \text{ 满足 } y' = (1 - y)y^\alpha (\alpha > 0), \text{ 若曲线 } y = f(x) \text{ 的一个拐点为 } \left(t, \frac{1}{2}\right), \text{ 则 } \alpha = \underline{\quad}.$$

$$\text{解析: } \frac{d^2 y}{dx^2} = (\alpha - (1 + \alpha)y)(1 - y)y^{2\alpha-1}, \text{ 由题意 } \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=t} = 0, y(t) = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \left( \alpha - (1 + \alpha) \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^{2\alpha} = 0, \text{ 解得 } \alpha = 1.$$

$$9. \text{ 已知 } f(x) \text{ 的一个原函数是 } e^{-x}, \text{ 则 } \int_{-\frac{1}{2}}^0 x f(2x) dx = \underline{\quad}.$$

解:  $f(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}$ , 令  $u = 2x$ , 则

$$\int xf(2x)dx = \frac{1}{4} \int uf(u)du = \frac{1}{4} \int ude^{-u} = \frac{1}{4}(u+1)e^{-u} + C$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 xf(2x)dx = \frac{1}{4}$$

10. 位于曲线  $y = xe^{-x} (0 \leq x < +\infty)$  下方、 $x$  轴上方的无界图形的面积为 \_\_\_\_\_ .

$$\text{解: } A = \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

### 三. 计算题 (每小题 7 分, 6 个小题共 42 分, 必须写出主要计算过程.)

11. 设  $y = y(x)$  由方程  $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$  确定, 求  $y'(0)$ ,  $y''(0)$ .

解: 由方程得  $x = 0$  时,  $y = 0$ . (1 分)

方程两边关于  $x$  求导得

$$(e^y + 6x)y' + 6y + 2x = 0, \quad (3 \text{ 分})$$

令  $x = 0$  得  $y'(0) = 0$ . (4 分)

关于  $x$  再求导得

$$(e^y + 6x)y'' + e^y(y')^2 + 12y' + 2 = 0, \quad (6 \text{ 分})$$

将  $x = 0, y'(0) = 0$  代入得  $y''(0) = -2$ . (7 分)

12. 设  $f(x) = e^x \ln(1+x) - x(1 + \frac{1}{2}x)$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 求  $f(x)$  的主部及阶数.

解: 由泰勒公式得

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) - x(1 + \frac{1}{2}x) \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim \frac{1}{3}x^3 (x \rightarrow 0), \quad (5 \text{ 分})$$

故  $f(x)$  的主部为  $\frac{1}{3}x^3$ , 阶数为 3. (7 分)

13. 求极限  $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}}{x \sin x^2} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt$ .

解: 令  $u = x - t$ , 则  $\int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \int_0^x \sin u^2 du$

(3 分)

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin u^2 du}{x^3}$$

(5 分)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

(7 分)

14. 求极限  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]$

解:  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln(1+x) dx$

(3 分)

$$= x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{1+x} dx$$

(5 分)

$$= 2 \ln 2 - 1$$

(7 分)

15. 设  $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1-t} dt$ , 求  $I = \int_0^1 (x-1)f(x) dx$ .

解:  $f'(x) = \frac{\sin x}{1-x}$ ,  $f(0) = 0$

(2 分)

$$I = \int_0^1 (x-1)f(x) dx = \frac{(x-1)^2}{2} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2} f'(x) dx$$

$$= - \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2} f'(x) dx$$

(4 分)

$$= \int_0^1 \frac{x-1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1) d(-\cos x)$$

$$= \frac{1}{2} \left( -(x-1) \cos x \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \cos x dx$$

(6 分)

$$= \frac{1}{2}(\sin 1 - 1).$$

(7 分)

16. 若曲线  $y = f(x)$  是  $y'' + 2y' - 3y = 4e^x$  的一条积分曲线, 此曲线过点  $A(0,1)$ , 且在点  $A(0,1)$  处的切线的倾斜角为  $\frac{3\pi}{4}$ , 求  $f(x)$ .

解: 由题意得  $y(0) = 1, y'(0) = \tan \frac{3}{4}\pi = -1$  (1 分)

方程对应的齐次方程的特征方程为

$$r^2 + 2r - 3 = 0, \text{ 特征根 } r_1 = -3, r_2 = 1$$

对应的线性齐次方程通解为:  $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$  ( $C_1, C_2$  为常数) (3 分)

$\lambda = 1$  为特征方程的特征单根, 故可设线性非齐次方程的特解为  $y^* = A x e^x$ ,  $A$  为待定常数, 代入线性非齐次方程得  $4A = 4, A = 1$ , 特解为  $y = x e^x$ .

原方程的通解为  $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + x e^x$  (5 分)

将初始条件代入解得  $C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = \frac{1}{4}$

$$y = \frac{3}{4} e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x + x e^x.$$

(7 分)

#### 四. 综合题 (每小题 7 分, 2 个小题共 14 分, 必须写出主要过程.)

17. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导, 其反函数存在为  $g(x)$ , 若

$$\int_0^{f(x)} g(t) dt + \int_0^x f(t) dt = x e^x - e^x + 1,$$

求  $f(x)$ .

解 在所给方程两边对  $x$  求导, 得

$$g(f(x))f'(x) + f(x) = x e^x,$$

由于  $g(f(x)) = x$ , 上式变为  $x f'(x) + f(x) = x e^x$ .

若  $x = 0$ , 则  $f(0) = 0$ ;

若  $x \neq 0$ , 则上式变为  $f'(x) + \frac{1}{x} f(x) = e^x$ ,



因此,  $f(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} (\int e^x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C) = \frac{1}{x} (\int x e^x dx + C) = \frac{1}{x} (x e^x - e^x + C)$ ,

由  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 有  $0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [e^x + \frac{C - e^x}{x}]$ , 从而  $C=1$ , 于是

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ \frac{1}{x}(x e^x - e^x + 1), & x \neq 0. \end{cases}$$

18. 设函数  $f(x) = ax + \frac{3}{2}bx^2$  在区间  $(0,1)$  内大于零, 其中  $a, b$  为未知常数, 曲线  $y = f(x)$  与直线  $x=1, y=0$  所围成的区域  $D$  的面积为 2. 求  $a, b$  的值, 使得  $D$  绕  $x$  轴旋转一周得到的旋转体的体积最小, 并求出最小值.

解: 由题意得

$$\int_0^1 (ax + \frac{3}{2}bx^2) dx = 2, \text{ 从而得 } a+b=4, \text{ 即 } a=4-b.$$

$$\text{所以 } f(x) = (4-b)x + \frac{3}{2}bx^2, \quad (2 \text{ 分})$$

$D$  绕  $x$  轴旋转一周得到的旋转体的体积

$$V = \int_0^1 \pi \left( (4-b)x + \frac{3}{2}bx^2 \right)^2 dx = \left( \frac{16}{3} + \frac{b}{3} + \frac{b^2}{30} \right) \pi \quad (4 \text{ 分})$$

$$V' = \left( \frac{1}{3} + \frac{b}{15} \right) \pi, \text{ 令 } V' = 0, \text{ 得 } b = -5, \text{ 于是 } a = 9, V = \frac{9}{2} \pi,$$

$$V''(-5) = \frac{\pi}{15} > 0, \text{ 体积的最小值存在, 故 } a=9, b=-5 \text{ 时, 旋转体体积最小值为 } \frac{9}{2} \pi.$$

(7 分)

## 五、证明题(每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设函数  $f(x), g(x)$  在区间  $[0, a]$  上连续且单调增加, 其中  $a > 0$ . 证明

$$a \int_0^a f(x)g(x)dx \geq \int_0^a f(x)dx \int_0^a g(x)dx.$$

证 构造函数  $F(x) = x \int_0^x f(t)g(t)dt - \int_0^x f(t)dt \int_0^x g(t)dt, x \in [0, a],$

则  $F(0) = 0$ , 且对于  $x \in [0, a]$ , 有

$$F'(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt + x f(x)g(x) - f(x) \int_0^x g(t)dt - g(x) \int_0^x f(t)dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^x [f(t)g(t) + f(x)g(x) - f(x)g(t) - g(x)f(t)]dt \\
 &= \int_0^x [f(t)(g(t) - g(x)) + f(x)(g(x) - g(t))]dt \\
 &= \int_0^x [(f(t) - f(x))(g(t) - g(x))]dt. \quad (4 \text{ 分})
 \end{aligned}$$

由  $f(x)$ 、 $g(x)$  单调增加知, 在  $[0, a]$  上有  $(f(t) - f(x))(g(t) - g(x)) \geq 0$ , 从而  $F'(x) \geq 0$ ,  $F(x)$  在  $[0, a]$  上单调增加, 所以  $F(a) \geq F(0) = 0$ , 即

$$a \int_0^a f(x)g(x)dx \geq \int_0^a f(x)dx \int_0^a g(x)dx. \quad (5 \text{ 分})$$

20. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有二阶导数, 且  $f'(a) = f'(b) = 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$(b-a)^2 |f''(\xi)| \geq 4 |f(b) - f(a)|.$$

证明: 将  $f(\frac{a+b}{2})$  分别在  $x=a$  及  $x=b$  展开成泰勒公式为:

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + f'(a)(\frac{b-a}{2}) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(\frac{b-a}{2})^2, \quad \xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2}),$$

$$\text{即 } f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(\frac{b-a}{2})^2;$$

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(b) + f'(b)(\frac{a-b}{2}) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(\frac{a-b}{2})^2, \quad \xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b),$$

$$\text{即 } f(\frac{a+b}{2}) = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(\frac{a-b}{2})^2. \quad (2 \text{ 分})$$

两式相减得

$$f(b) - f(a) = \left( \frac{f''(\xi_2)}{2!} - \frac{f''(\xi_1)}{2!} \right) \left( \frac{a-b}{2} \right)^2,$$

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} (|f''(\xi_2)| + |f''(\xi_1)|). \quad (4 \text{ 分})$$

取  $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$ , 则

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \cdot 2 |f''(\xi)|, \quad \text{即 } (b-a)^2 |f''(\xi)| \geq 4 |f(b) - f(a)|. \quad (5 \text{ 分})$$