华中科技大学 2024～2025 学年第一学期

" 线性代数 "考试试卷（A 卷）

考试方式 闭卷 考试时间 2025 年 1 月 12 日上午 考试时长 150 分钟

一、（16 分）判断题（2 分×8=16 分）（判断题为计算机阅卷，请使用 2B 铅笔规范填涂，填涂区域要丰满、不要使用划线、打勾、打叉等错误填涂方式）

1. 设 A，B 都是 n 阶实对称矩阵，并且 A 与 B 的特征值均大于 0，则 $A+B$ 的特征值也大于 0.

2. 设 A 为 n 阶幂等矩阵，即 $A^2 = A$, 则 $\mathrm{tr}(A) = n - \mathrm{r}(A)$，其中 $\mathrm{tr}(A)$ 为 A 的迹，r 表示秩.

装

3. 线性方程组 $AX=0$ 的解都是 $BX=0$ 的解，且 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$，则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

订

线

4. 2025 维向量空间是 2025 个线性无关的 2025 维向量生成的空间.

5. 若两个同阶可逆阵 A，B 有相同的特征值，则 A，B 相似.

6. 若线性方程组 $AX=0$ 中，方程的个数少于未知变量的个数，则方程组 $AX=0$ 必有非零解.

7. 设 n 阶方阵 A 的第一行可由其余 $n-1$ 个行向量线性表示，则 A 的伴随矩阵 A^* 的秩不会超过 1.

8. 若矩阵 A，B，C 满足 $A=BC$，且$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$，则 A 的列向量形成的向量组和 B 的列向量形成的向量组等价.

二、（20 分）填空题（4 分×5=20 分）**（请将答案填写在答题卡指定位置上）**

1. 设三阶方阵 A 的三个特征值为 $1,2,3$，则 $\mathrm{tr}(A+A^{-1})=$____________ .

2. 已知将 3 阶可逆阵 A 的第 1 行的 3 倍加到第 3 行得矩阵 B，则 $AB^{-1}=$____________ .

3. A，B，C 均为矩阵 ，$A=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}$，且$(AC)^{-1}=-(CB)^{-1}$，则 $|B|=$____________ .

4. 已知空间中两点$A(1,0,-1),B(1,-2.0)$，记O为原点，以 OA，OB 为边作平行四边形$OACB$，则$|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2=$________________，其中$|\cdot|$表示向量的长度.

5. 二次型$f(x_1,x_2)=x_1^2+ax_1x_2+4x_2^2$经过正交变换变为$f(y_1,y_2)=4y_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，则 a,b 分别为______________ .

三、（10 分）设矩阵$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$，3 阶方阵$X$满足方程$A^*X=AX+A^{-1}+I_3$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，求矩阵$X$.

四、（10 分）设向量组$\alpha_1=[1,2,-1,1]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=[2,\ 3,-2,\ 0]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=[0,3,1,5]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=[-1,4,\ 1,11]^{\mathrm{T}}$，求

（1）由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$生成的向量空间 V 的维数；

（2）在上面向量组中选一组基，并将剩余的向量用你选择的基线性表示.

五、（12 分）已知$\alpha=\begin{bmatrix}2\\k\\-1\end{bmatrix}$是$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}$的特征向量，试求：

（1）常数 k 的值，（2）正交变换 $X=CY$, 将二次型$f=X^TA^{-1}X$化为标准型.

六、（12 分）已知空间直角坐标系中三平面的方程分别为：

$$\pi_1:\ x+y+z=1,$$

$$\pi_2:\ x+\lambda y-z=3,$$

$$\pi_3:\ \lambda x+y+z=2-\lambda,$$

（1）当λ取何值时，这三个平面交于一点？交于一直线？没有公共交点？

（2）当它们交于一直线时，求直线的方程.

七、（**10** 分）设A是$n(n>1)$阶方阵，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是n维列向量. 若

$$A\xi_1=\xi_2,\ A\xi_2=2\xi_3,\cdots,A\xi_{n-1}=(n-1)\xi_n,\ A\xi_n=0,\ \xi_n\neq 0.$$

（1）证明：$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$线性无关；

（2）A能否相似对角化？说明理由.

八、（**10** 分）设$D(x)=\begin{vmatrix} x_1+x & a+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & x_2+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & b+x & x_3+x & \cdots & a+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b+x & b+x & b+x & \cdots & x_n+x \end{vmatrix}$，其中$a,b,x_1,x_2,\cdots,x_n$都是给定的实数，且满足$a\neq b$.

（1）证明：$D(x)$是关于x的不超过一次的多项式；

（2）令$D=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix}$，$f(x)=(x_1-x)(x_2-x)\cdots(x_n-x)$，证明：

$$D=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$