



华中科技大学 2019~2020 学年第一学期  
“微积分 (一)” 考试试卷(A 卷)

考试方式: 闭卷 考试日期: 2109.12.31 考试时长: 150 分钟

院(系): \_\_\_\_\_ 专业班级: \_\_\_\_\_  
学号: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_

一、单项选择题 (每小题 3 分, 6 个小题共 18 分, 将结果涂在答题卡上。)

1. 设  $0 < a_n < 1$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ , 则以下数列中无界的是【 】.

- A.  $\{a_n^2\}$       B.  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$       C.  $\left\{\tan \frac{\pi a_n}{2}\right\}$       D.  $\{\ln a_n\}$

2. 已知  $f(2) = 3, f'(2) = 5$ , 则极限  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2+h)-9}{h} =$  【 】.

- A. 30      B. 10      C. 6      D. 0

3. 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a,b]$  上可导, 则以下说法中错误的是【 】.

- A.  $f(x)$  必在  $[a,b]$  上有界      B.  $f(x)$  必在  $[a,b]$  上有连续的导数  
C.  $f(x)$  必在  $[a,b]$  上连续      D.  $f(x)$  必在  $[a,b]$  上可积

4. 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$  一共有【 】条渐近线.

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

5. 设函数  $f(x)$  二阶可导, 且  $f''(x) < 0$ , 则以下不等式中一定成立的是【 】.

- A.  $f(1) + f(3) > 2f(2)$       B.  $f(1) + f(3) < 2f(2)$   
C.  $f(1) + f(2) > 2f(3)$       D.  $f(1) + f(2) < 2f(3)$

6. 微分方程  $y' - \frac{y}{2x} = 0$  满足初值条件  $y(1) = 2$  的特解为【 】.

- A.  $2\sqrt{x}$       B.  $1 + \sqrt{x}$       C.  $1 + x$       D.  $\sqrt{x+3}$

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 设函数  $y = x^2 - x$ . 在  $x = 2, \Delta x = 0.01$  时，微分  $dy = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \sqrt{3+t^2} dt}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 曲线  $y = 1 - x^4$  与  $x$  轴所围成图形的面积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程。）

11. 已知当  $x \rightarrow 0$ ,  $u = e^{3x} - ax^2 - (1+bx)\cos x$  是与  $x^3$  同阶的无穷小. 求常数  $a, b$  的值.

12. 求  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  在区间  $[-2, 2]$  上的最大值与最小值.

13. 求不定积分  $I = \int \frac{e^{5x}}{e^{2x} + 1} dx$ .

14. 求定积分  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ .

15. 判定反常积分  $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} dx$  的敛散性，若收敛求其值.

16. 求微分方程  $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}$  满足初值条件  $y(2) = 0, y'(2) = 1$  的特解.

四、应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程。）

17. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , 讨论  $f'(x)$  在点  $x = 0$  的连续性(需说明理由).

18. 求曲线  $y = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3}$  对应于  $1 \leq x \leq 4$  的弧段长度.

五、综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程。）

19. 设  $n$  为正整数，求方程  $(x+1)^{2n} = x^{2n} + 1$  所有的实根. 并证明你的结论.

20. 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有连续的导数. 证明:

$$f(x) \leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx, \quad x \in [a, b].$$