2016-2017 学年度第二学期

《线性代数》考试试题（A）卷

院系__________ 专业班级________________ 学号______________ 姓名____________

考试时间：2017 年 5 月 13 日

一、判断题 （2 分×8=16 分） （判断题为计算机阅卷，请使用 2B 铅笔规范填涂，填涂区域要丰满、不要使用划线、打勾、打叉等错误填涂方式）

1. 设 A 是 n 阶方阵，如果 A 的行列式非零，则对任意的 $1\le k\le n$，A 一定有一个非零的 k 阶子式.

2. 两个同型矩阵等价当且仅当它们有相同的秩.

3. 任意一个可逆矩阵均可经过有限次行初等变换变为单位矩阵.

4. 若两个 n 阶方阵 A,B 相似，那么对任意的多项式 $f(x)$，均有 $f(A)$ 相似于 $f(B)$.

5. 设 $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n,\\ 1\le j\le n}}$ 是 n 阶方阵，$\{\lambda_i:1\le i\le n\}$ 是 A 的特征值，则有 $\sum\limits_{1\le i\le n}{\lambda_i}^2=\sum\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{1\le j\le n}{a_{ij}}^2$.

6. 设向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性无关，则向量组 $\{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$ 也线性无关.

7. 设 A 是实对称矩阵，如果 A 的特征值均为 0，则 $A=0$.

8. 设 A 是 n 阶实矩阵，则 A^TA 是正定矩阵，其中 A^T 表示 A 的转置.

二、填空题（4 分×5=20 分）（请将答案填写在答题卡指定位置上）

1. 设 $\alpha=(1,-1,1)^T,\beta=(1,1,1)^T$，$A=\alpha\beta^T$， 那么 $A^n=$____________.

2. 设 A,B 是两个三阶可逆矩阵，如果将 A 的第一行乘以 5 加到第三行上就得到矩阵 B，则 $AB^{-1}=$____________.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&5&9\\0&2&8\\0&0&2\end{pmatrix}$， 多项式 $f(x)=x^3-x+2$。则 $f(A)$ 的行列式为____________.

4. 设 5×4 阶矩阵 A 的列向量表示为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其秩为 4. 设向量 $\beta=\alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_3$，那么线性方程组 $AX=\beta$ 的解为______________.

5. 如果矩阵 $A=\begin{pmatrix}t&1&2\\1&1&0\\2&0&t-1\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 t 的取值范围为______________.

三、（8 分）（请将答案填写在答题卡指定位置上）

计算$n+1$阶行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}$，其中$a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n.$

四、（12 分）（请将答案填写在答题卡指定位置上）

考虑线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3 \end{cases},$$

其中λ是参数. 问该方程组

(1). 当λ取什么值时有唯一解？

(2). 当λ取什么值时无解？当λ取什么值时有无穷多个解？当有无穷多个解时，求出其通解.

五、（10 分）（请将答案填写在答题卡指定位置上）

设三阶方阵A的特征值为 1，1，－1，属于它们的特征向量分别是$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. 求矩阵$A$.

六、（12 分）（请将答案填写在答题卡指定位置上）

用正交变换将三维空间中的二次曲面$2xy+2yz+2zx=1$化为标准方程，给出使用的正交变换矩阵，并指出曲面的类型.

七、（10 分）（请将答案填写在答题卡指定位置上）

设A是一个$m\times n$矩阵，b是一个m维非零列向量. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$是齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，$\beta$是非齐次线性方程组$AX=b$的一个特解.

(1). 证明：$\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$是$AX=b$的$t+1$个线性无关的解.

(2). 问$AX=b$有可能有$t+2$个线性无关的解吗？说明理由.

八、（12 分）证明题（请将答案填写在答题卡指定位置上）

设A是n阶方阵，满足$A^2-2A-3I=0$. 证明：

(1). A是可逆的，

(2). A可相似对角化.