

《线性代数》2021 秋 A 答案

一、 判断题 (2 分×8=16 分)

1. \checkmark 2. \times 3. \checkmark 4. \times 5. \checkmark 6. \times 7. \checkmark 8. \checkmark

二、 填空题 (4 分×5=20 分)

1. $k(1,2,3)^T, k \in \mathbb{R}$

2. $\begin{pmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{pmatrix}$

3. $(1,1,1)^T$

4. 9

5. 1

三、 (10 分)

$$\begin{aligned} (1) \quad D &= (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \\ &= (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} & 3 \text{ 分} \\ &= (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}. & 5 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sum_{j=1}^n A_{1j} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} & 3 \text{ 分} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^{n-1}. & 5 \text{ 分} \end{aligned}$$

四、 (10 分)

$$(1) \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2 \text{ 分}$$

由初等行变换, 有 $(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 5 分

(2) 由 $AXA + BXB = AXB + BXA + I$ 有 $(A-B)X(A-B) = I$, 2 分

所以, $X = ((A-B)^{-1})^2$ 4 分

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 5 \text{ 分}$$

五、(12 分)

(1) 解: 因为 $r(A) = 2$, 所以 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 5 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$, (或直接用初等变换)

所以, $a = 4, b = 3$. 4 分

由于非齐次线性方程组 $AX = b$ 系数矩阵的秩为 2, 且有解,

所以, $r(A|b) = r(A) = 2$.

对增广矩阵作行初等变换,

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & c \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-1 \end{array} \right),$$

所以, $c = 1$, 6 分

$$\text{且通解 } X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad 8 \text{ 分}$$

(2) 取非齐次线性方程组 $AX = b$ 的一个特解 β , 其导出组非齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系 α_1, α_2 ,

则 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2$ 为 $AX = b$ 的三个线性无关解, 2 分

且 $AX = b$ 的任意解都可以由 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2$ 线性表出,

所以 $AX = b$ 有 3 个线性无关解. 4 分

六、(12 分)

(1) 证明: $\alpha_1 - 2\alpha_3 = [-3, 0, 6]^T$, 即 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$,

所以 $\lambda_3 = -3$ 为 A 的特征值, 对应的特征向量为 $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. 2 分

由于 A 为实对称矩阵, 所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 对应的特征向量与 X_3 正交,
解齐次线性方程组 $x_1 - 2x_3 = 0$,

得到其基础解系 $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 且 X_1 与 X_2 正交, 4 分

将 X_1, X_2, X_3 标准化, 得

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

取 $Q = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, 则 Q 正交且 $Q^T A Q = \text{diag}\{2, 2, -3\}$,

所以, $A = Q \text{diag}\{2, 2, -3\} Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 6 分

(2) 由 $A = Q \text{diag}\{2, 2, -3\} Q^T$, 有 $A^{-1} = Q \text{diag}\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\} Q^T$, 2 分

所以 $Q^T A Q = \text{diag}\{\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{10}{3}\}$, 4 分

对应的正交变换 $X = QY$. 6 分

七、(10 分)

(1) 证明: 因为 X_1, X_2 为齐次方程 $(I - A)X = 0$ 的基础解系,

所以 1 为 A 的特征值, 且有 2 个线性无关的特征向量 X_1, X_2 , 2 分

又 $|A - 2I| = 0$, 2 也是 A 的特征值, 对应有一个线性无关的特征向量 X_3 , 4 分

所以, 3 阶方阵 A 有 3 个线性无关的特征向量, A 可以相似对角化. 5 分

(2) 解: 取 $P = (X_1, X_2, X_3)$, 则 P 可逆, 且 $P^{-1}AP = \text{diag}\{1, 1, 2\}$, 2 分

所以, $P^{-1}(A - I)(A - 2I)P = (P^{-1}AP - I)(P^{-1}AP - 2I)$ 4 分

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad 5 分$$

八、(10 分)

证明:

必要性: 若 A 为正交矩阵, 则 $A^T A = A A^T = I$, 2 分

所以对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$,

$$(A\alpha, A\beta) = (A\alpha)^T (A\beta) = \alpha^T A^T A \beta = \alpha^T \beta = (\alpha, \beta). \quad 5 \text{ 分}$$

充分性: 若对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, $(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$. (1)

取 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$, 令 $B = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$,

则 $B^T B = B B^T = I$, 所以 B 为正交矩阵, 2 分

再取 $\xi_i = A\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$, 由 (1), $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ 也为 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基,

令 $C = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, 则 C 也为正交矩阵, 4 分

因为 $A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \dots, A\varepsilon_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$,

所以 $A = C B^{-1} = C B^T$, A 为正交矩阵. 5 分