华中科技大学 2019～2020 学年第二学期

“线性代数”考试试卷(B 卷)

考试方式：__闭卷__　考试日期：__2020.09.23__　考试时长：__150__　分钟

院（系）：＿＿＿＿＿＿＿＿　专业班级：＿＿＿＿＿＿＿＿

学　　号：＿＿＿＿＿＿＿＿　姓　　名：＿＿＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

一、判断题（（2 分×8=16 分）正确的打“√”，错误的打“×”）

（　　）1. 设 A 是一个矩阵，I 是单位矩阵. 若 $A^TA=I$，则 A 是可逆矩阵.

（　　）2. 任何一个可逆矩阵都可表示为有限多个初等矩阵的乘积.

（　　）3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均是 n 维实向量. 如果 α_1 可由 α_2,α_3 线性表示，但 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关， 则 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

（　　）4. 设 A,B 都是 n 阶方阵，则关于矩阵的秩，有如下关系：$r(AB)=r(BA)$.

（　　）5. 两个具有相同特征值的同阶实对称矩阵必相似.

（　　）6. 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$（其中 $a_n\neq 0, n\geq 1$）是一个 n 次多项式. 设 A 是一个方阵，并且满足 $f(A)=0$. 若 $a_0\neq 0$，则 A 可逆.

（　　）7. 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，B 是一个 m 阶方阵. 若矩阵 A 的秩为 m，且 $BA=0$，则 $B=0$.

（　　）8. 设 A 是一个 n 阶实矩阵，R^n 表示 n 维实向量的全体. 如果对任意的 $\beta\in R^n$，线性方程组 $AX=\beta$ 均有解，则 A 的行列式非零.

得　分	
评卷人	

二、填空题（（4 分×5=20 分）将答案填在指定的横线上）

1. 设 A 是 n 阶方阵，A 的行列式 $|A|=2$，则行列式 $|A^*+6A^{-1}|=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

2. 如果向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$ 可以用行初等变换化为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&5&-2\\0&1&1&3&4\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则 α_5 和向量 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 之间的一种线性关系为 ____________________.

3. 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&2\\1&2&3\end{pmatrix}$，记其特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则 $\lambda_1^{\ 2}+\lambda_2^{\ 2}+\lambda_3^{\ 2}=$__________.

4. 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 为齐次线性方程组 $AX=O$ 的基础解系，则 $\lambda\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$ 也是 $AX=O$ 的基础解系的充要条件是________________.

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+kx_2^{\ 2}+2x_1x_2+k^2x_3^{\ 2}$ 正定，则 k 的取值范围为__________.

得　分	
评卷人	

三、计算 n 阶行列式的值（8 分）

$$D_n=\begin{vmatrix}x&-1&&&&\\&x&-1&&&\\&&x&-1&&\\&&&\ddots&\ddots&\\&&&&x&-1\\a_n&a_{n-1}&\cdots&\cdots&a_2&a_1+x\end{vmatrix}$$

得　分	
评卷人	

四、(12 分)

问 a 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - a x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + a x_3 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases},$$

有唯一解，无解，有无穷多解？在有无穷多解的情况下，求其通解.

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

五、（12 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3+ax_3^2$，通过正交变换化为标准形 $g(y_1,y_2,y_3)=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$. 求 a 及所使用的正交变换矩阵.

得　分	
评卷人	

六、（12 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 可相似对角化，求 a 的取值范围.

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

七、（10 分）

设矩阵 A 为方阵，且 $(I+A)$ 可逆，记 $f(A)=(I+A)^{-1}(I-A)$，证明 $I+f(A)$ 可逆并求其逆.

得　分	
评卷人	

八、（10 分）

设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，其中 $m\geq n$. 证明： A 的秩等于 n 当且仅当存在 $n\times m$ 矩阵 B ，使得 $BA=I$ ，其中 I 是 n 阶单位矩阵.