

# 2024 ~2025 学年第 一 学期

## 《微积分 (B)》课程考试(A 卷)参考解答

### 一. 单项选择题(每小题 3 分, 6 个小题共 18 分, 将结果涂在答题卡上.)

1. 当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  是【     】.

- A. 无界的但不是无穷大量
- B. 无穷大量
- C. 有界的但不是无穷小量
- D. 无穷小量

解析: 取  $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ ,  $y_n = \frac{1}{2n\pi}$ , 则  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n \rightarrow 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$ ,

$f(x_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $f(y_n) = 0$ , 于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0$ .

故当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  是无界的但不是无穷大量. 故答案: A

2. 设  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  均为非负数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$ , 则【     】

- A. 对任意正整数  $n$ , 有  $a_n < b_n$
- B. 对任意正整数  $n$ , 有  $b_n < c_n$
- C. 数列  $\{a_n \cdot c_n\}$  发散
- D. 数列  $\{b_n \cdot c_n\}$  发散

解析: 根据数列极限的比较性质可知 A,B 都不对 (将“任意”改为“充分大的”, 就对了).

取  $a_n = \sin \frac{1}{n}$ ,  $c_n = n$ , 显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ , 但

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ , 数列  $\{a_n \cdot c_n\}$  收敛, 故 C 不对.

对于 D, 假设  $\{b_n \cdot c_n\}$  收敛, 因  $c_n = \frac{b_n c_n}{b_n}$ , 由收敛数列商的运算规则得数列  $\{c_n\}$  收敛, 与已

知条件矛盾, 因而  $\{b_n \cdot c_n\}$  发散. 故答案: D

3. 设  $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ ,  $f'''(x_0) > 0$ , 则【     】

- A.  $f'(x_0)$  是  $f'(x)$  的极大值
- B.  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极大值

- C.  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极小值      D.  $(x_0, f(x_0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点

解析：因  $f'''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$ ，所以在  $x_0$  的某邻域内， $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$

当  $x > x_0$  时,  $f''(x) > 0$ , 从而  $f'(x)$  单调递增, 因而  $f'(x) > f'(x_0) = 0$

当  $x < x_0$  时,  $f''(x) < 0$ , 从而  $f'(x)$  单调递减, 因而  $f'(x) > f'(x_0) = 0$

故  $(x_0, f(x_0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点,  $f'(x_0)$  是  $f'(x)$  的极小值,  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内单调

递增,  $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值. 故答案为: D.

4. 若  $f'(2x) = e^{-x}$ , 且  $f(0) = 1$ , 则  $\int f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$  【 】

A.  $3x - e^{-\frac{x}{2}} + C$

C.  $3x + 4e^{-\frac{x}{2}} + C$

解析：因  $f'(2x) = e^{-x} = e^{-\frac{1}{2} \cdot 2x}$ ，所以  $f'(u) = e^{-\frac{1}{2}u}$

解析：因  $f'(2x) = e^{-x} = e^{-\frac{1}{2} \cdot 2x}$ ，所以  $f'(u) = e^{-\frac{1}{2}u}$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int e^{-\frac{1}{2}x} dx = -2e^{-\frac{1}{2}x} + C_1, \text{ 又 } f(0) = 1, \text{ 故可得 } C_1 = 3$$

$$f(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x} + 3, \quad \int f(x) dx = \int \left( 3 - 2e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx = 3x + 4e^{-\frac{1}{2}x} + C$$

故答案：C

5. 设函数  $f(x)$  二阶可导, 且  $f''(x) < 0, f(0) = 0$ , 则【 】

A.  $f(2) < 2f(1)$       B.  $f(2) > 2f(1)$

c.  $2f(2) < f(1)$       d.  $2f(2) > f(1)$

解析：对  $f(x)$  在  $[0,1]$  和  $[1,2]$  上应用拉格朗日中值公式得

$$f(1) - f(0) = f'(\xi), \quad f(2) - f(1) = f'(\eta), \quad \xi \in (0, 1), \quad \eta \in (1, 2)$$

因  $f''(x) < 0$ , 所以  $f'(x)$  在  $[0, 2]$  上严格单调递减, 于是有  $f'(\xi) > f'(\eta)$

即有  $f(1) - f(0) > f(2) - f(1)$ , 又  $f(0) = 0$ , 故  $2f(1) > f(2)$ , 答案为 A.

6. 下列反常积分收敛的是【 】.

A.  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

B.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

B.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$

D.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

解析:  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \int_e^{+\infty} \ln x d \ln x = \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_e^{+\infty} = +\infty$ , 所以  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$  发散

$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln |\ln x| \Big|_e^{+\infty} = +\infty$ , 所以  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$  发散

$\int_e^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln x}} d \ln x = 2\sqrt{\ln x} \Big|_e^{+\infty} = +\infty$ , 所以  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$  发散

$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^2} d \ln x = -\frac{1}{\ln x} \Big|_e^{+\infty} = 1$ , 所以  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$  收敛

故答案为: D

## 二、填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 设函数  $y = f(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$  确定, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3 \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解: 由题意可得  $x=2$  时,  $t=1$ , 此时  $y=3$ , 从而有  $f(2)=3$ .

$$\frac{dy}{dt} = 4 - 2t, \frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dx} = \frac{4-2t}{2t} = \frac{2-t}{t}, \frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = 1, \text{ 即 } f'(2) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = f'(2) = 1.$$

8. 设函数  $f(x) = \int_0^{3x} e^{-t^2} dt + 2$ ,  $g(x)$  是  $f(x)$  的反函数, 则  $g'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解:  $f(0) = 2, f'(x) = 3e^{-9x^2}, f'(0) = 3$

$$g'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}.$$

9. 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(x) dx$ , 则  $\int_0^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解析: 设  $\int_0^1 f(x)dx = a$ , 则  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + a\sqrt{1-x^2}$ , 于是有

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{1+x^2} + a\sqrt{1-x^2} \right) dx = a,$$

$$\text{而 } \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x^2} + a\sqrt{1-x^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 a\sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}a$$

$$\text{故有 } a = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}a, \quad a = \frac{\pi}{4-\pi}, \quad \text{即 } \int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4-\pi}.$$

10. 连续曲线段  $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 的弧长为\_\_\_\_\_.

解:  $y' = \sqrt{\sin x}$

$$s = \int_0^\pi \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^\pi \sqrt{1+\sin x} dx = \int_0^\pi (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) dx$$

$$= \left( -2\cos \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \right) \Big|_0^\pi = 2 - (-2) = 4.$$

### 三. 计算题 (每小题 7 分, 6 个小题共 42 分, 必须写出主要计算过程.)

11. 求曲线  $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$  ( $x > 1$ ) 的渐近线.

解: 函数在  $(1, +\infty)$  内有定义.

因  $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \infty$ , 所以  $x=1$  为曲线的铅直 (垂直) 渐近线.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x\sqrt{\frac{x}{x-1}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1}{1/x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x-1)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

故曲线的斜渐近线为  $y = x + \frac{1}{2}$ .

当  $x > 1$  曲线连续, 故没有其他的铅直渐进线, 且曲线没有水平渐进线.

12. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2n + \frac{4}{n}} + \dots + \frac{1}{2n + \frac{n^2}{n}} \right)$

$$\begin{aligned} \text{解: } & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2n + \frac{4}{n}} + \dots + \frac{1}{2n + \frac{n^2}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n + \frac{k^2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \frac{k^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \\ & = \int_0^1 \frac{1}{2+x^2} dx \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

13. 设方程  $e^{xy} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^y \sqrt{4-t^2} dt = 1$  可确定函数  $y = y(x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$ .

解: 将  $x=0$  代入方程得  $\frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^y \sqrt{4-t^2} dt = 0$ , 因此得  $y=1$

方程两边关于  $x$  求导得

$$e^{xy} (y + xy') + \frac{1}{\sqrt{3}} y' \sqrt{4-y^2} = 0 \quad (*)$$

将  $x=0, y=1$  代入方程 (\*) 得  $y'(0)=-1$ , 即  $\frac{dy}{dx}|_{x=0}=-1$

14. 求方程  $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$  的积分曲线  $y = y(x)$ , 使其在点  $(0,1)$  处的切线与曲线

$y = x^2 - 3x + 1$  在该点的切线重合.

解: 由题意得  $y(0)=1, y'(0)=(2x-3)|_{x=0}=-3$

对应齐次方程的特征方程为  $r^2 - 3r + 2 = 0$ , 特征根  $r_1=1, r_2=2$

对应齐次方程的通解为  $Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ .

$\lambda=1$  是特征方程的单根, 故原微分方程的特解可设为  $y^* = axe^x$ , 代入微分方程得

$-ae^x = 2e^x$ , 即  $a=-2$ , 故原方程特解为  $y^* = -2xe^x$ , 通解为

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2xe^x.$$

因  $y(0)=1$ , 所以得  $C_1 + C_2 = 1 \quad (1)$

又  $y'(0)=-1$ ,  $y'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} - 2e^x - 2xe^x$ , 于是有  $C_1 + 2C_2 = -1 \quad (2)$

联立 (1) (2) 解得  $C_1 = 3, C_2 = -2$

故所求积分曲线为  $y(x) = (3-2x)e^x - 2e^{2x}$ .

15. 设  $f(x) = \int_0^x e^{-t^2+2t} dt$ , 求  $I = \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$ .

解:  $f'(x) = e^{-x^2+2x}, f(0) = 0$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx = \frac{(x-1)^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x-1)^3}{3} f'(x) dx = - \int_0^1 \frac{(x-1)^3}{3} f'(x) dx \\ &= - \int_0^1 \frac{(x-1)^3}{3} e^{-x^2+2x} dx = -\frac{1}{6} \int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1} d(x-1)^2 \\ &= \frac{e}{6} \int_0^1 ue^{-u} du \quad (\text{令 } u = (x-1)^2) \\ &= \frac{e}{6} \left( -ue^{-u} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-u} du \right) = \frac{e}{6} \left( -e^{-1} - e^{-u} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{6}(e-2). \end{aligned}$$

16. 设函数  $f(x) = \int_0^1 |t^3 - x^3| dt \quad (0 \leq x \leq 1)$ , 求  $f(x)$  的最值.

$$\begin{aligned} \text{解: } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时, } f(x) &= \int_0^1 |t^3 - x^3| dt = \int_0^x |t^3 - x^3| dt + \int_x^1 |t^3 - x^3| dt \\ &= \int_0^x (x^3 - t^3) dt + \int_x^1 (t^3 - x^3) dt = \left( x^3 t - \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^x + \left( \frac{t^4}{4} - x^3 t \right) \Big|_x^1 \\ &= \frac{3}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$f'(x) = 6x^3 - 3x^2$ , 令  $f'(x) = 0, x \in (0,1)$ , 即  $6x^3 - 3x^2 = 0$ , 解得驻点为  $x = \frac{1}{2}$ .

$$f(0) = \frac{1}{4}, f(1) = \frac{3}{4}, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{32}.$$

比较得  $f(x)$  在  $[0,1]$  上的最小值为  $\frac{7}{32}$ , 最大值为  $\frac{3}{4}$ .

四. 综合题 (每小题 7 分, 2 个小题共 14 分, 必须写出主要过程.)

17. 设  $f(x)$  连续,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \tan x}{x} = 1$ ,  $F(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ , 求  $F'(x)$ , 并讨论  $F'(x)$  的连续性.

解: 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \tan x}{x} = 1$  得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ , 从而有  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

又  $f(x)$  连续, 所以  $f(0) = 0$ , 由此得  $f'(0) = 2$ .

$$\text{令 } u = xt, \text{ 则 } x \neq 0 \text{ 时, } F(x) = \int_0^1 f(xt) dt = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du$$

$$F(0) = \int_0^1 f(0) dt = f(0) = 0,$$

$$\text{因此 } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$x \neq 0, F'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) dx}{x^2} = \frac{f(x)}{x} - \frac{\int_0^x f(u) dx}{x^2},$$

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) dx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{2x} = \frac{1}{2} f'(0) = 1$$

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{\int_0^x f(u) dx}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{x} - \frac{\int_0^x f(u) dx}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) dx}{x^2} = \frac{1}{2} f'(0) = 1 = F'(0).$$

所以  $F'(x)$  在  $x=0$  连续, 又  $x \neq 0$  时,  $F'(x)$  连续, 因此  $F'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续 .

18. 设曲线  $y = y(x)$  是第一象限内的连续曲线, 点  $A(0,1), B(1,0)$  分别为曲线与  $y$  轴及  $x$  轴的交

点, 点  $M(x, y)$  为曲线  $AB$  上的任意一点, 过  $M(x, y)$  作  $x$  轴的垂线, 与  $x$  轴交于点  $C, O$  为坐

标原点. 设梯形  $OCMA$  的面积与曲边三角形  $CBM$  的面积和为  $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}$ , 求  $y = y(x)$  与  $y$  轴及

$x$  轴所围成的平面图形绕  $y$  轴旋转一周所得的旋转体的体积.

解: 由题意可得

$$x \frac{1+y}{2} + \int_x^1 y(t) dt = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}$$

方程两边关于  $x$  求导, 得  $\frac{1+y}{2} + \frac{y'x}{2} - y = \frac{x^2}{2}$ .

整理得  $y' - \frac{1}{x}y = x - \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ )

$$\text{通解 } y = e^{-\int \left(-\frac{1}{x}\right) dx} \left( C + \int \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{\int \left(-\frac{1}{x}\right) dx} dx \right) = x \left( C + x + \frac{1}{x} \right), x > 0$$

将  $y(1)=0$  代入得,  $C = -2$ , 故  $y = x^2 - 2x + 1$ .

所求体积为

$$V_y = \int_0^1 2\pi x(x^2 - 2x + 1) dx = 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

## 五、证明题(每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0$ ,  $f(2) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$ ,

证明:  $\exists \xi \in (0, 2)$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .

证明: 由  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0$  可得  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 0$ , 又  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续,

故有  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 0$ , 于是  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0$ .

由积分中值定理可得  $f(2) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx = 2f(\eta) \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) = f(\eta)$ ,  $\eta \in [1, \frac{3}{2}]$

$f(x)$  在  $[\eta, 2]$  上满足罗尔定理的条件, 故  $\exists \eta_1 \in (\eta, 2)$ , 使得  $f'(\eta_1) = 0$ .

$f(x)$  在  $(0, 2)$  内二阶可导, 故  $f'(x)$  在  $[\frac{1}{2}, \eta_1] \subset (0, 2)$  上可导, 且连续, 应用罗尔定理得

$\exists \xi_1 \in (\frac{1}{2}, \eta_1) \subset (0, 2)$ , 使得  $f''(\xi_1) = 0$ .

20. 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上有连续的二阶导数, 且  $|f''(x)| \leq 1$ , 证明:

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{24}.$$

证明: 将  $f(x)$  在  $x = \frac{1}{2}$  展开成泰勒公式为

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2, \quad (\xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } \frac{1}{2} \text{ 之间}) \\ \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right)dx + \int_0^1 f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)dx + \int_0^1 \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = f\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^1 \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ \text{故 } \int_0^1 f(x)dx - f\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \left| \int_0^1 f(x)dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{f''(\xi)}{2!} \right| \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{24}.$$

另证: 将原函数  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  在  $x = \frac{1}{2}$  处展开成泰勒公式

$$F(x) = F\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}f''(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right)^3. \quad (\xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } \frac{1}{2} \text{ 之间})$$

令  $x = 0, x = 1$  得

$$0 = F(0) = F\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}f'\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{48}f''(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < \frac{1}{2},$$

$$F(1) = F\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}f'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{48}f''(\xi_2), \quad \frac{1}{2} < \xi_2 < 1,$$

以上两式相减得

$$F(1) - F(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{48}(f''(\xi_1) + f''(\xi_2)),$$

$$\text{即 } \int_0^1 f(x)dx - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{48}(f''(\xi_1) + f''(\xi_2)).$$

$$\text{由题设条件 } |f''(x)| \leq 1 \text{ 易得 } \left| \int_0^1 f(x)dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{24}.$$