



华中科技大学 2021~2022 学年第一学期

“微积分（一）”考试试卷(A 卷)

考试方式: 闭卷 考试日期: 2022.01.03 考试时长: 150 分钟

一、单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上。）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界， $\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是【 】

- A. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. B. 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.
C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛. D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

2. 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2}{x^n + 1}$ 的间断点及类型是【 】.

- A. $x = -1$ 是第二类间断点 B. $x = 1$ 是第二类间断点
C. $x = \pm 1$ 均是第一类间断点 D. $x = \pm 1$ 均是第二类间断点

3. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时，与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是【 】.

- A. $1 - e^{\sqrt{x}}$ B. $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$ C. $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ D. $1 - \cos \sqrt{x}$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是【 】

- A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$. B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.
C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在. D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

5. 曲线 $y = x \ln(e + \frac{1}{x})$ ($x > 0$) 的渐近线条数为【 】.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6. 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$ ，则 $F(x)$ 【 】.

- A. 为正常数 B. 为负常数 C. 恒为零 D. 不为常数

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 对应于 $t=1$ 处的法线方程为_____ .

8. 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$) 的拐点是_____.

9. 曲线 $y = \ln \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$) 的弧长为_____.

10. $y = 2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是_____.

三、计算题 (每小题 7 分, 6 个小题共 42 分, 必须写出主要计算过程.)

11. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + x - 3}{x - 1} = b$, 求常数 a, b 的值.

12. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $f(x) = x^2 - x \cdot f(2) + 2 \int_0^1 f(x) dx$, 求 $f(x)$.

13. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i}$.

14. 计算定积分 $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$, $\lambda > 0$, 求 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$.

16. 求微分方程 $xy' + y - e^x = 0$, $y(2) = 1$ 的特解.

四、综合题 (每小题 7 分, 2 个小题共 14 分, 必须写出主要过程.)

17. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$, 求 $f^{(n)}(0)$ 的值 ($n \geq 2$).

18. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y \geq 0$, 又该抛物线与直线 $x=1$ 及 x 轴围成平面图形的面积为 $\frac{1}{3}$, 求 a, b, c 使该图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V 最小.

五、证明题 (每小题 5 分, 2 个小题共 10 分, 必须写出主要过程.)

19. 证明方程 $\ln x = \frac{x}{e} - 2021$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内只有两个不同的实根.

20. 设 $f''(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续且 $|f''(x)| \leq M$, $f(1) = 0$, 证明: $\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{3}$.