



华中科技大学 2020~2021 学年第一学期

“ 微积分（一） ” 考试试卷(A 卷)

考试方式: 闭卷 考试日期: 2021.01.10 考试时长: 120 分钟

院 (系): _____ 专业班级: _____

学 号: _____ 姓 名: _____

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						

分 数	
评卷人	

一、单项选择题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分。）

1. 曲线 $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ 与 x 轴所围成的图形的面积可表示为

【 】.

- A. $\int_1^3 (x-1)(x-2)(x-3)dx$
 B. $-\int_1^3 (x-1)(x-2)(x-3)dx$
 C. $\int_1^2 (x-1)(x-2)(x-3)dx - \int_2^3 (x-1)(x-2)(x-3)dx$
 D. $\int_2^3 (x-1)(x-2)(x-3)dx - \int_1^2 (x-1)(x-2)(x-3)dx$

2. 设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数, a 为常数, 则下列必为周期函数的是 【 】.

- A. $\int_x^{x+a} f(t)dt$ B. $\int_a^{x+T} f(t)dt$ C. $\int_a^x f(t+T)dt$ D. $\int_a^x f(t)dt$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 【 】

- A. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$ B. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$
 C. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$ D. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

4. 设 $I_1 = \int_2^1 e^x dx$, $I_2 = \int_2^1 e^{x^2} dx$, $I_3 = \int_2^1 (1+x) dx$, 则【 】.

A. $I_1 > I_2 > I_3$ B. $I_3 > I_1 > I_2$ C. $I_1 > I_3 > I_2$ D. $I_2 > I_1 > I_3$

分 数	
评卷人	

二、填空题（每小题 5 分，4 个小题共 20 分。）

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx =$ _____ .

6. $\int_0^1 x(1-x)^{99} dx =$ _____ .

7. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $x \ln x$, 则 $\int x f'(x) dx =$ _____ .

8. $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx =$ _____ .

分 数	
评卷人	

三、计算题（每小题 8 分，4 个小题共 32 分，必须写出主要计算过程。）

9. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$.

10. 计算 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{1 - \cos x^2}$.

11. 计算 $I = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$.

12. 求 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx$.

分 数	
评卷人	

四、应用题（每小题 8 分，2 个小题共 16 分，必须写出主要过程。）

13. 计算抛物线 $y^2 = 4(x+1)$ 与 $y^2 = 4(1-x)$ 所围成的平面图形的面积。

14. 设 D 是由 $y = (x-1)^2$ 、 x 轴、 y 轴以及 $x=2$ 所围成的平面区域，求 D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积。

分 数	
评卷人	

五、综合题（每小题 8 分，2 个小题共 16 分，必须写出主要过程。）

15. 设 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续，且满足 $f(x) = \cos x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$ ，求 $f(x)$ 。

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， $f(x) > 0$ ，又 $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt$ ，试证：

$F(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 中有且仅有一个实根。