2016-2017学年度第二学期《线性代数》考试试题（A）卷

参考答案

一、选择题 (2分×8=16分)

1、对　2、对　3、对　4、对　5、错　6、对　7、对　8、错

二、填空题 (4分×5=20分)

(1). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(2). $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -5 & & 1 \end{pmatrix}$　(3). 128　(4). $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$　(5). $t > 3$

三、（8分）

解：（方法一） 对所有的$1 \le i \le n$，将第i行元素乘以$-\frac{c_i}{a_i}$均加至第一行，得到

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 - \frac{b_1c_1}{a_1} - \frac{b_2c_2}{a_2} - \cdots - \frac{b_nc_n}{a_n} & b_1 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} = \left(a_0 - \frac{b_1c_1}{a_1} - \frac{b_2c_2}{a_2} - \cdots - \frac{b_nc_n}{a_n}\right)a_1a_2\cdots a_n.$$

解：（方法二）按最后一行展开得到

$$D_{n+1} = a_nD_n + (-1)^{n+2}c_n \begin{vmatrix} b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & \end{vmatrix} = a_nD_n + (-1)^{n+2}c_n(-1)^{n+1}b_na_1a_2\cdots a_{n-1}.$$

所以由递推即得

$$D_{n+1} = \left(a_0 - \frac{b_1c_1}{a_1} - \frac{b_2c_2}{a_2} - \cdots - \frac{b_nc_n}{a_n}\right)a_1a_2\cdots a_n.$$

四、（12分）

解：分别用A和$\widetilde{A}$表示系数矩阵和增广矩阵。

（1）.方程组由唯一解当且仅当$r(A) = r(\widetilde{A}) = 3$。由于系数矩阵$A$是三阶方阵，所以等价于$r(A) = 3$，即$A$是满秩矩阵或可逆矩阵。从而

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & 1 & 2\\ \lambda & \lambda-1 & 1\\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)\neq 0。$$

所以$\lambda\neq 0$,　$\lambda\neq 1$.

（2）.考虑$\lambda=0$的情形。对方程组的增广矩阵做行初等变换：

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

所以系数矩阵和增广矩阵的秩不同，从而无解。

（3）考虑$\lambda=1$的情形。对方程组的增广矩阵做行初等变换：

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 6 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以系数矩阵和增广矩阵的秩相同，且小于未知数的个数，从而有无穷多解。此时的同解方程组为：

$$\begin{cases}x_1 \quad + \; x_3=1\\ \quad x_2-2x_3=-3\end{cases}\text{解之得，}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x_3\\ -3+2x_3\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}x_3。$$

所以原方程中的通解为

$$\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}x_3\text{，其中 }x_3\text{ 可取任意数。}$$

五、（10 分）

解：由于 3 阶矩阵A有三个相性无关的特征向量，所以A可相似对角化。若取矩阵

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$。计算$P^{-1}$得$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$。所以

$$A=P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-3&0&4\\-2&1&2\\-2&0&3\end{pmatrix}。$$

六、（12 分）

解：二次型对应的对称矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

(1). 求 A 的特征多项式及特征值。

$$|\lambda I-A|=(\lambda-2)(\lambda+1)^2.$$

所以，特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1.$

(2). 求 $\lambda_1=2$ 所对应的特征向量，即求解线性方程组 $(2I-A)X=0$ 的非零解。

解线性方程组 $(2I-A)X=0$ 得基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 并将其单位化得 $\beta_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

(3). 求 $\lambda_2=\lambda_3=-1.$ 所对应的特征向量，即求解线性方程组 $(-I-A)X=0$ 的非零解。

解线性方程组 $(-I-A)X=0$ 得基础解系为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.利用 Gram-Schmidt

正交化方法将其正交化，单位化得 $\beta_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$.

所以二次型 $2xy+2yz+2zx$ 所对应的标准型为 $2X^2-Y^2-Z^2$.所使用的正交变换为

$$P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\quad\text{也可为}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$（每一列的符号全改变也对）

原方程确定的图形的形状与 $2X^2-Y^2-Z^2=1$ **确定的图形形状一样，所以也为双叶双曲面。**

七、（10 分）

证明：(1). 设有常数 $c_0,c_1,\cdots,c_t$ 使得

$$c_0\beta+c_1(\beta+\alpha_1)+\cdots+c_t(\beta+\alpha_t)=0. \qquad (*)$$

等式两边同时左乘以 A 得：

$$c_0b+c_1b+\cdots+c_tb=0.$$

由于 $b\neq 0$，所以得到

$$c_0+c_1+\cdots+c_t=0. \qquad (**)$$

将其代入(*)式得

$$c_1\alpha_1+\cdots+c_t\alpha_t=0.$$

由于 α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_t 线性无关，所以 $c_1=\cdots=c_t=0$. 再代入(**)式，也得 $c_0=0$. 得证。

(2). 不可能有 $t+2$ 个线性无关的解。若不然，假设 β_0，$\beta_1,\cdots$，β_{t+1} 是 $AX=b$ 的 $t+2$ 个线性无关的解。则

$$\beta_1-\beta_0,\ \beta_2-\beta_0,\cdots,\ \beta_{t+1}-\beta_0$$

是齐次方程组 $AX=0$ 的解。由于 $AX=0$ 只有 t 个线性无关的解，所以

$$\beta_1-\beta_0,\ \beta_2-\beta_0,\cdots,\ \beta_{t+1}-\beta_0$$

线性相关。于是存在不全为 0 的数 $c_1,c_2,\cdots,c_{t+1}$ 使得

$$c_1(\beta_1-\beta_0)+c_2(\beta_2-\beta_0)+\cdots+c_{t+1}(\beta_{t+1}-\beta_0)=0.$$

从而有

$$c_1\beta_1+c_2\beta_2+\cdots+c_{t+1}\beta_{t+1}-(c_1+c_2+\cdots+c_{t+1})\beta_0=0.$$

由于其中的系数 c_1，$c_2,\cdots$，$c_{t+1},-(c_1+c_2+\cdots+c_{t+1})$ 不全为 0，这与 β_0，$\beta_1,\cdots$，β_{t+1} 线性无关矛盾。从而得证。

八、（12 分）

证明：(1). 由条件知，A 的特征向量满足 $\lambda^2-2\lambda-3=0$。所以，$\lambda=3$，$or\quad \lambda=-1$. 从而 A 可逆。

(2). 为证明 A 可相似对角化，来确定 A 的线性无关的特征向量的个数，等价与确定 A 的所有特征值的几何重数。

(i). $\lambda=3$ 和 $\lambda=-1$ 均为 A 的特征值.

特征值 $\lambda=3$ 的几何重数为：

$$n-r(3I-A)；$$

特征值 $\lambda=3$ 的几何重数为：

$$n-r(-I-A)=n-r(I+A)。$$

由条件 $A^2-2A-3I=0$ 得到

$$(A-3I)(A+I)=0。 \qquad (***)$$

所以，一方面

$$r(A-3I)+r(A+I)\le n,$$

另一方面

$$r(A-3I)+r(A+I)=r(A-3I)+r(-A-I)\ge r(A-3I-A-I)=r(-2I)=n.$$

从而 $r(A-3I)+r(A+I)=n$. 所以 A 的线性无关的特征向量的个数为

$$n-r(3I-A)+n-r(I+A)=n.$$

所以 A 可相似对角化。

(ii). $\lambda=3$ 是 A 的特征值，而 $\lambda=-1$ 不是 A 的特征值. 此时 $\lambda=3$ 的几何重数为

$$n-r(3I-A)。$$

由于 $\lambda=-1$ 不是 A 的特征值，所以行列式 $|-I-A|\neq 0$，从而 $(I-A)$ 是可逆矩阵。由(***)式得 $(A-3I)=0$。所以 A 的线性无关的特征向量的个数为

$$n-r(3I-A)=n.$$

所以 A 可相似对角化。

(iii). $\lambda=-1$ 是 A 的特征值，而 $\lambda=3$ 不是 A 的特征值. 用与(ii)完全相同的论证方式可证。