

矩阵的转置

A 的转置矩阵记为 A^T （或 A' ）

教材44页定义2.5

设 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n},$$

A 的转置矩阵 A^T 定义为

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m}.$$

矩阵的转置

例如矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

的转置矩阵为

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \\ 2 & c \end{pmatrix}.$$

转置满足的运算律

在运算可行的情况下，矩阵的转置满足下列运算律：

- ① $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$;
- ② $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$;
- ③ $(\lambda \mathbf{A})^T = \lambda(\mathbf{A}^T)$, λ 是数;
- ④ $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

利用归纳法由(4)可推出

$$(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k)^T = \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_{k-1}^T \cdots \mathbf{A}_1^T.$$

矩阵的转置

(4) 的分析:

- 设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$,
记 $AB = C = (c_{ij})_{m \times n}$, $B^T A^T = D = (d_{ij})_{n \times m}$.
- $(AB)^T = C^T$ 的 (i, j) 元是 $AB = C$ 的 (j, i) 元, 即 A 的第 j 行
与 B 的第 i 列对应元素乘积之和:

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^s a_{jk} b_{ki},$$

- 而 $B^T A^T = D$ 的 (i, j) 元 d_{ij} 是 B^T 的第 i 行与 A^T 的第 j 列对应
元素乘积之和, 即 B 的第 i 列与 A 的第 j 行对应元素乘积之
和:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^s b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^s a_{jk} b_{ki},$$

- 因此 $c_{ji} = d_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$), 所以 $C^T = D$, 也就是 $(AB)^T = B^T A^T$.

矩阵的转置

教材45页例2.7

已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 求 $(\mathbf{AB})^T$.

分析:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ -7 & -5 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

矩阵的行列式

教材47页定义2.8

设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶矩阵，称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为矩阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det \mathbf{A}$.

设 A, B 为 n 阶方阵， λ 为实数，则下列等式成立：

- ① $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$;
- ② $|\lambda A| = \lambda^n |\mathbf{A}|$;
- ③ $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

矩阵A的行列式的性质

仅证(3). 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times n}$, 构造 $2n$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & b_{11} & \cdots & b_{1n} & \\ \ddots & & \vdots & & \vdots & \\ -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|,$$

- 在 D 中, 以 b_{1j} 乘第 1 列, 以 b_{2j} 乘第 2 列, \dots , 以 b_{nj} 乘第 n 列, 都加到第 $n+j$ 列上 ($j = 1, 2, \dots, n$) , 有

$$D = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{vmatrix},$$

- 其中 $\mathbf{C} = (c_{ij})$, $c_{ij} = b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{nj}a_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, 故 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

矩阵的行列式

- 再对 D 的行作 $r_j \leftrightarrow r_{n+j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$)，有

$$D = (-1)^n \begin{vmatrix} -\mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{vmatrix},$$

- 再由例1.10，有

$$D = (-1)^n |-\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{C}| = (-1)^n (-1)^n |\mathbf{C}| = |\mathbf{AB}|. \text{ 得}$$

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

要点：

- 容易犯的一个错误是 $|\lambda\mathbf{A}| = \lambda|\mathbf{A}|$.
- 由(3)知，对于 n 阶方阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} ，不一定有 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ，但总有 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}|$.
- 利用初等矩阵可以给出 $|AB| = |A||B|$ 的另一个证明。

矩阵的行列式

教材48页例2.9

设 A 是 n 阶方阵，满足 $AA^T = E$ ，且 $|A| < 0$ ，求 $|A + E|$.

分析：

- $|AA^T| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}^T| = |E| = 1$, 故 $|\mathbf{A}|^2 = 1$. 由 $|A| < 0$, 得 $|\mathbf{A}| = -1$,
-

$$\begin{aligned}|A + E| &= |A + AA^T| = |A(E + A^T)| \\&= |A| \cdot |(E + A^T)| = -|(E + A)^T| = -|A + E|\end{aligned}$$

- 所以

$$2|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = 0,$$

即

$$|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = 0.$$

矩阵的逆

教材50页定义2.10

对于 n 阶方阵 A ,若存在 n 阶方阵 B , 满足

$$AB = BA = E,$$

则称方阵 A 可逆, 且称方阵 B 为 A 的逆矩阵。 A 的逆矩阵记为 A^{-1} .

例如, 对矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

因 $AB = BA = E$, 故 B 是 \mathbf{A} 的逆矩阵.

问题：如何求逆矩阵？

- 根据定义
- 利用伴随矩阵
- 利用初等行变换

伴随矩阵

目标：利用伴随矩阵求逆矩阵

教材48页定义2.9

若 A 为 n 阶方阵，行列式 $|A|$ 的各元素的代数余子式 A_{ij} 构成的如下方阵：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad (2-11)$$

称为 A 的**伴随矩阵**.

要点：伴随矩阵 \mathbf{A}^* 的 (i, j) 元是矩阵 \mathbf{A} 的 (j, i) 元的代数余子式.

伴随矩阵

例子

求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

分析: \mathbf{A} 的伴随矩阵为:

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

问题: 为什么要如此定义伴随矩阵?

伴随矩阵

重要定理（教材49页定理2.1）

对伴随矩阵，有如下结论成立：

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}.$$

分析：由行列式按行展开的定理及其推论，得

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

故

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\mathbf{A}|\end{pmatrix} = |\mathbf{A}|\mathbf{E},$$

类似地，可证 $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$ ，故 $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$.

伴随矩阵

性质

- $(\mathbf{A}^T)^* = (\mathbf{A}^*)^T$;
- $(k\mathbf{A})^* = k^{n-1} \mathbf{A}^*$, k 为数.

矩阵的逆

方法一：利用伴随矩阵

重要定理（教材51页定理2.2）

n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$. 且在 $|A| \neq 0$ 时，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*. \quad (2-12)$$

其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

分析：

- 充分性. 设 A 的伴随矩阵为 A^* , 则由伴随矩阵的性质, 有

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

因为 $|A| \neq 0$, 故有 $A \cdot \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{|A|} A^* \cdot A = E$, 从而 A 可逆, 且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$.

- 必要性. 由于 A 可逆, 即存在 A^{-1} , 使 $A^{-1}A=E$, 故 $|AA^{-1}| = |E| = 1$, 有 $|A^{-1}| \cdot |A| = 1$, 所以 $|A| \neq 0$.

矩阵的逆

重要定义

- 当矩阵的行列式不为零时，称该矩阵为非奇异矩阵或非退化矩阵；
- 当矩阵的行列式为零时，称该矩阵为奇异矩阵 或退化矩阵.

要点： 定理2.2表明，矩阵 A 可逆， $|A| \neq 0$ 与矩阵 A 非奇异，这三者是等价的.

矩阵的逆

教材51页例2.11

求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可逆的充要条件，在可逆时求其逆矩阵.

分析：由于 $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 所以矩阵 A 可逆的充要条件是 $ad - bc \neq 0$. 此时 A 的逆矩阵为：

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

矩阵的逆

教材51页例2.12

求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

分析：按定理，只需要求出 A 的行列式与伴随矩阵. 由例2.10，已求得 A 的伴随矩阵，因 $|\mathbf{A}| = -22$ ，于是

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = -\frac{1}{22} \begin{pmatrix} -11 & 5 & -7 \\ 11 & -1 & -3 \\ 11 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

要点：如果根据公式(2-12)计算逆矩阵，计算量很大，因此该公式主要用于理论推导和计算低阶矩阵及特殊矩阵的逆矩阵，本章第5节将讨论求逆矩阵的一般方法.

矩阵的逆

方法二：利用定义的变形

教材51页性质2.1

如果 A 是可逆的，则 A 的逆矩阵唯一。

分析：设 B, C 都是 A 的逆矩阵，即 $AB = BA = E, AC = CA = E$ ，则

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

因此，在 A 可逆时，可用 A^{-1} 来表示 A 的逆矩阵，即若 $AB = BA = E$ ，则 $B = A^{-1}$.

矩阵的逆

教材52页推论

若 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ (或 $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$)， 则 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

分析： 因 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{AB}| = |\mathbf{E}| = 1$ ， 故 $|\mathbf{A}| \neq 0$ ， 从而 \mathbf{A}^{-1} 存在。于是

$$\mathbf{B} = \mathbf{EB} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}.$$

意义： 要判断 A 可逆，不必像定义那样验证 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$ ， 只需验证 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ ， 或 $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$ 即可。

矩阵的逆

教材52页例2.13

设 A 可逆，且 $A^*B = A^{-1} + B$ ，证明 B 可逆，当 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 时，求 B .

分析：

- 由 $A^*B = A^{-1} + B = A^{-1} + EB$ ，得 $(A^* - E)B = A^{-1}$.
两边同时左乘 A ，可得 $A(A^* - E)B = AA^{-1}$ ，即 $(|A|E - A)B = E$ ，则 B 可逆，且 $B = (|A|E - A)^{-1}$

- $|A|E - A = \begin{pmatrix} 8 & & \\ & 8 & \\ & & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

按逆矩阵的运算性质和求逆公式，易得

$$B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵的逆

教材54页例2.15

设方阵 \mathbf{A} 满足 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \mathbf{O}$, 证明 \mathbf{A} 和 $\mathbf{A} + 2\mathbf{E}$ 都可逆, 并求 \mathbf{A}^{-1} 和 $(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})^{-1}$.

分析:

- 由已知可得 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = 2\mathbf{E}$, 从而有

$$\mathbf{A} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{E},$$

于是可知 \mathbf{A} 可逆, 且 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{E})$.

- 同样由 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = 2\mathbf{E}$ 可得

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 6\mathbf{E} = -4\mathbf{E},$$

即 $(\mathbf{A} + 2\mathbf{E}) \cdot \frac{1}{4}(3\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{E}$, 故

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})^{-1} = \frac{1}{4}(3\mathbf{E} - \mathbf{A}).$$

矩阵的逆

重点：求解矩阵方程 $AX = B$

对 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2-13)$$

记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

则 (2-13) 可表示为: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. (2-14)

矩阵的逆

对 (2-13) , 若 $D = |\mathbf{A}| \neq 0$, 则 \mathbf{A}^{-1} 存在, (2-14) 两边同时左乘 \mathbf{A}^{-1} , 即 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\mathbf{b}$, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

比较等式两端, 得

$$x_j = \frac{1}{D}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n) = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

这就是克拉默法则.

矩阵的逆

问题

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = (E+A)^{-1}(A-E)$. 求 $(E+B)^{-1}$.

要点： 逆矩阵的性质

矩阵的逆

教材54页性质2.2

设 A, B 均为同阶可逆方阵，数 $\lambda \neq 0$ ，则下面结论成立：

- A^{-1} 亦可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$ ；
- λA 亦可逆，且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ ；
- AB 亦可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ；

从而，若 $A = B$ ，则 $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ ，一般地有 $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. 记 $A^{-n} = (A^{-1})^n$.

- A^T 亦可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ；
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

矩阵的逆

- 分析：**①因 A 可逆，故 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ ，从而 \mathbf{A}^{-1} 也可逆，且 $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
- ②因 $(\lambda A) \cdot \frac{1}{\lambda}A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \mathbf{E}$ ，故 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.
- ③因 $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$ ，所以 AB 可逆，且 $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
- ④因 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ ，故 $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{E}^T$ ，从而 $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{E}$ ，于是 $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.
- ⑤因 $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$ ，从而 $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{AA}^{-1}| = |\mathbf{E}| = 1$ ，得 $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$.

矩阵的逆

例子

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = (E+A)^{-1}(A-E)$. 求 $(E+B)^{-1}$.

分析:

$$\begin{aligned} E + B &= E + (E + A)^{-1}(A - E) \\ &= (E + A)^{-1}(E + A) + (E + A)^{-1}(A - E) \\ &= (E + A)^{-1}(2A). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} (E + B)^{-1} &= (2A)^{-1}((E + A)^{-1})^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(A)^{-1}(E + A) = \frac{1}{2}(A^{-1} + E). \end{aligned}$$

矩阵的逆

教材54页例2.16

证明：当方阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 可逆时，有

$$(1) (\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*;$$

$$(2) (\mathbf{A}^k)^* = (\mathbf{A}^*)^k, k \text{ 为正整数};$$

$$(3) |\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}.$$

分析：(1) 由 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \neq 0$ 可知 \mathbf{AB} 可逆，故 $(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}| \mathbf{E}$ ，从而

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= (\mathbf{AB})^{-1} |\mathbf{AB}| \mathbf{E} = |\mathbf{AB}| (\mathbf{AB})^{-1} \\&= |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{B}| \mathbf{B}^{-1} \cdot |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1} \\&= |\mathbf{B}| \frac{1}{|\mathbf{B}|} \mathbf{B}^* \cdot |\mathbf{A}| \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由(1)直接可得。

(3) 因 \mathbf{A} 可逆，有 $|\mathbf{A}| \neq 0$ ，因 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$ ，从而 $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^n$ ，即得

$$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}.$$

分块矩阵

方法三：利用行（列）变换求逆矩阵

方法三的原理：

- 分块矩阵
- 初等矩阵与初等行（列）变换

分块矩阵

将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成若干个小矩阵，每个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的矩阵称为分块矩阵。

例子

令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$. 将 A 按如下方式分块

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right), \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix}$,
 $\mathbf{A}_{21} = (a_{31} \ a_{32} \ a_{33})$, $\mathbf{A}_{22} = (a_{34})$ 为 A 的子块。

分块矩阵

常用分块方法

设 \mathbf{A} 是一个 $m \times n$ 矩阵,

- (按列分块) 把矩阵的每一列看成是一个 $m \times 1$ 的小矩阵 α_j ,
于是 \mathbf{A} 可以写成

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \cdots, \quad \alpha_n);$$

- (按行分块) 把矩阵的每一行看成是一个 $1 \times n$ 的小矩阵 β_i ,
于是 \mathbf{A} 可以写成

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

分块矩阵

掌握本节的要点：

在满足一定条件下，分块矩阵的运算满足的运算律。

(1) 分块矩阵的和与数乘

设矩阵 A 与 B 为同型矩阵，采用同样的分块法，有

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 均为同型矩阵。则

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2r} + B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & A_{s2} + B_{s2} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的数乘

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \lambda A_{s2} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

(2) 分块矩阵的转置

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & A_{2r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的乘积

要点：矩阵**A**的列的分法必须与矩阵**B** 的行的分法一致.

常用结论(教材59页)

设 $\mathbf{A} = (a_{ik})_{sn}$, $\mathbf{B} = (b_{kj})_{nm}$, 把 \mathbf{A}, \mathbf{B} 分成一些小矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \\ s_1 & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1l} \\ s_2 & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2l} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ s_t & \mathbf{A}_{t1} & \mathbf{A}_{t2} & \cdots & \mathbf{A}_{tl} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \\ n_1 & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ n_2 & \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n_l & \mathbf{B}_{l1} & \mathbf{B}_{l2} & \cdots & \mathbf{B}_{lr} \end{pmatrix},$$

其中每个 \mathbf{A}_{ij} 是 $s_i \times n_j$ 小矩阵, 每个 \mathbf{B}_{ij} 是 $n_i \times m_j$ 小矩阵, 则

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \\ s_1 & \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \cdots & \mathbf{C}_{1r} \\ s_2 & \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ s_t & \mathbf{C}_{t1} & \mathbf{C}_{t2} & \cdots & \mathbf{C}_{tr} \end{pmatrix}, \text{ 其中}$$

$$\mathbf{C}_{pq} = \mathbf{A}_{p1}\mathbf{B}_{1q} + \mathbf{A}_{p2}\mathbf{B}_{2q} + \cdots + \mathbf{A}_{pl}\mathbf{B}_{lq} = \sum_{k=1}^l \mathbf{A}_{pk}\mathbf{B}_{kq}$$

分块矩阵

举例说明：

设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

我们对 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 进行不同形式的划分，来进行 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的基本运算。

分块矩阵

划分一：把A与B分别分划成4个 2×2 小矩阵：

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{E}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

现在对矩阵A, B进行乘积运算，把这些小矩阵看作数一样来处理，按乘法运算规则，有

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{11} + \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{12} + \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

计算可得 $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$

分块矩阵

划分二：把A与B按下列形式划分成4个小矩阵：

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

按这种划分进行乘法运算，即

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

此时所有的小矩阵乘积运算都是没有定义的。

分块矩阵

(4) 分块对角矩阵

设方阵 A 的分块矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix},$$

除主对角线上的子块不为零子块外，其余子块都为零矩阵，且 $A_i(i = 1, 2, \dots, m)$ 为方阵，则 A 称为**分块对角矩阵**（或**准对角矩阵**）。

分块矩阵

具有同样分法的同阶分块对角矩阵的和、差、积仍是同类型分块对角矩阵，其运算法则类似于对角矩阵相应的运算法则。设有与 A 同阶的分块对角矩阵

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_m \end{pmatrix},$$

其中 A_i 与 $B_i(i = 1, 2, \dots, m)$ 均为对应同阶方阵，则有

分块矩阵

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_1 \pm B_1 & & & \\ & A_2 \pm B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \pm B_m \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & & & \\ & A_2 B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m B_m \end{pmatrix}.$$

它们还是分块对角矩阵.

分块对角矩阵的行列式与逆矩阵

分块对角矩阵的行列式为

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}_1| \ |\mathbf{A}_2| \ \cdots \ |\mathbf{A}_m|.$$

当 $|\mathbf{A}_i| \neq 0$ 时，有 $|\mathbf{A}| \neq 0$ ，从而可知 \mathbf{A} 可逆，且

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & & & \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m^{-1} \end{pmatrix}.$$

分块矩阵

教材60页例2.17

求 \mathbf{A}^2 , 其中矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

分析: 将 \mathbf{A} 分块为分块对角矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{A}_2 & \\ & & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix}$, 则

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^2 & & \\ & \mathbf{A}_2^2 & \\ & & \mathbf{A}_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & & & \\ & 2 & 2 & \\ & 2 & 2 & \\ & & & 4 & -4 & 1 \\ & & & 0 & 4 & -4 \\ & & & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

分块矩阵

教材61页例2.18

设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

分析: $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, $A_1 = (4)$,
 $A_1^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

于是有

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

分块矩阵

教材62页例2.19

求矩阵

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rr} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

的逆矩阵，其中 \mathbf{A}, \mathbf{B} 分别是 k 阶和 r 阶的可逆矩阵， \mathbf{C} 是 $r \times k$ 矩阵， \mathbf{O} 是 $k \times r$ 零矩阵。

分块矩阵

分析： 因为 $|D| = |A| |B|$, 所以当 A, B 可逆时, D 也可逆. 设

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & E_r \end{pmatrix},$$

这里 E_k, E_r 分别表示 k 阶和 r 阶单位矩阵. 乘出来并比较等式两边, 得

分块矩阵

$$\begin{cases} \mathbf{AX}_{11} = \mathbf{E}_k, \\ \mathbf{AX}_{12} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{CX}_{11} + \mathbf{BX}_{21} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{CX}_{12} + \mathbf{BX}_{22} = \mathbf{E}_r. \end{cases}$$

由第①, ②式得 $\mathbf{X}_{11} = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{X}_{12} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{O} = \mathbf{O}$,

代入第④式, 得 $\mathbf{X}_{22} = \mathbf{B}^{-1}$,

代入第③式, 得

$$\mathbf{BX}_{21} = -\mathbf{CX}_{11} = -\mathbf{CA}^{-1}, \quad \mathbf{X}_{21} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{CA}^{-1}.$$

因此

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$