《线性代数》2021 秋 A 答案

一、 判断题（2 分×8=16 分）

1. √　2. ×　3. √　4. ×　5. √　6. ×　7. √　8. √

二、 填空题（4 分×5=20 分）

1. $k(1,2,3)^T, k \in \mathbb{R}$
2. $\begin{pmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{pmatrix}$
3. $(1,1,1)^T$
4. 9
5. 1

三、（10 分）

(1) $D = (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$= (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$　　3 分

$= (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}.$　　5 分

(2) $\sum_{j=1}^{n} A_{1j} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$　　3 分

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^{n-1}.$　　5 分

四、（10 分）

(1)　$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　2 分

由初等行变换，有$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 5 分

(2) 由$AXA+BXB=AXB+BXA+I$有$(A-B)X(A-B)=I$, 2 分

所以，$X=((A-B)^{-1})^2$ 4 分

$$=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$ 5 分

五、(12 分)

(1)解: 因为$r(A)=2$，所以$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&5&-1\\2&3&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\b&5&-1\\1&3&3\end{vmatrix}=0$,（或直接用初等变换）

所以，$a=4,b=3$. 4 分

由于非齐次线性方程组$AX=b$系数矩阵的秩为 2，且有解，

所以，$r(A|b)=r(A)=2$.

对增广矩阵作行初等变换，

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\2&1&3&-3&c\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&c-1\end{array}\right),$$

所以，$c=1$, 6 分

且通解 $X=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$. 8 分

(2)取非齐次线性方程组$AX=b$的一个特解β, 其导出组非齐次线性方程组$AX=0$的基础解系α_1,α_2,

则$\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2$为$AX=b$的三个线性无关解， 2 分

且$AX=b$的任意解都可以由$\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2$线性表出，

所以$AX=b$有 3 个线性无关解. 4 分

六、(12 分)

(1)证明：$\alpha_1-2\alpha_3=[-3,0,6]^T$，即$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$,

所以$\lambda_3=-3$为A的特征值，对应的特征向量为$X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$. 2 分

由于A为实对称矩阵，所以$\lambda_1=\lambda_2=2$对应的特征向量与X_3正交，

解齐次线性方程组$x_1-2x_3=0$,

得到其基础解系$X_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, 且$X_1$与$X_2$正交， 4 分

将X_1,X_2,X_3标准化，得

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \varepsilon_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}, \varepsilon_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},$$

取$Q=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, 则$Q$正交且$Q^TAQ=diag\{2,2,-3\}$,

所以，$A=Qdiag\{2,2,-3\}Q^T=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$. 6 分

(2) 由$A=Qdiag\{2,2,-3\}Q^T$，有$A^{-1}=Qdiag\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right\}Q^T$, 2 分

所以$Q^TAQ=diag\left\{\frac{5}{2},\frac{5}{2},-\frac{10}{3}\right\}$, 4 分

对应的正交变换$X=QY$. 6 分

七、（10 分）

(1) 证明：因为X_1,X_2为齐次方程$(I-A)X=0$的基础解系，

所以 1 为A的特征值，且有 2 个线性无关的特征向量X_1,X_2， 2 分

又$|A-2I|=0$，2 也是A的特征值，对应有一个线性无关的特征向量X_3， 4 分

所以，3 阶方阵A有 3 个线性无关的特征向量，A可以相似对角化. 5 分

(2) 解：取$P=(X_1,X_2,X_3)$, 则P可逆，且$P^{-1}AP=diag\{1,1,2\}$, 2 分

所以，$P^{-1}(A-I)(A-2I)P=(P^{-1}AP-I)(P^{-1}AP-2I)$ 4 分

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0.$$ 5 分

八、（10 分）

证明：

必要性：若A为正交矩阵，则$A^TA = AA^T = I$, 2 分

所以对任意$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$,

$(A\alpha, A\beta) = (A\alpha)^T(A\beta) = \alpha^TA^TA\beta = \alpha^T\beta = (\alpha, \beta)$. 5 分

充分性：若对任意$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, (A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$. （1）

取$\mathbb{R}^n$的一组标准正交基$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$，令$B = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$，

则$B^TB = BB^T = I$，所以B为正交矩阵， 2 分

再取$\xi_i = A\varepsilon_i, i = 1,2, \cdots, n$，由（1），$\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$也为$\mathbb{R}^n$的一组标准正交基，

令$C = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，则$C$也为正交矩阵， 4 分

因为 $A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \cdots, A\varepsilon_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$,

所以 $A = CB^{-1} = CB^T$，A为正交矩阵. 5 分