

2021 ~2022 学年第一学期
“线性代数”课程考试试卷 (A 卷)



考试方式: 闭卷 考试日期: 2022.01.07 考试时长: 150 分钟
院(系): _____ 专业班级: _____
学 号: _____ 姓 名: _____

一、 判断题 (2分×8=16分) (判断题为计算机阅卷, 请使用2B 铅笔规范填涂, 填涂区域要丰满、不要使用划线、打勾、打叉等错误填涂方式)

1. 设 A, B 均为 n 阶方阵且 $6AB = 3A + 2B$, 则 $AB = BA$.
2. 设 A 为 n 阶方阵, 则 $(aA)^* = a^n A^*$, 其中 a 为常数.
3. 已知 n 维列向量 $\alpha = \left[\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2} \right]^T$, 则 $A = I - 4\alpha\alpha^T$ 的列向量是 n 维向量空间的一组标准正交基.
4. 设 A 为 n 阶方阵, α 为 n 维列向量, 满足秩的等式: $r(\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}) = r(A)$, 则齐次线性方程组 $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}X = 0$ 只有零解.
5. 若 $A^2 = 0, A \neq 0$, 则必不可相似于对角矩阵.
6. 设 A 为 n 阶方阵, $r(\lambda_0 I - A) = t$, 则 λ_0 必为 A 的 $n - t$ 重特征值.
7. 设 A, B 均为实对称矩阵, 则存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = B$ 的充分必要条件是 A, B 的特征多项式相同.
8. 若 n 阶实对称矩阵 A 正定, 则 A 的主对角线上元素都大于 0.

二、 填空题 (4 分×5=20 分) (请将答案填写在答题卡指定位置上)

1. 已知 3 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$, α_2, α_3 线性无关, 3 阶方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 则齐次线性方程组 $AX = 0$ 的通解为 _____.
2. 设 I 为 n 阶单位阵, 则 $\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = _____$.
3. 设三维向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $[3, 2, 1]^T$, 则 α 在基 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 下的坐标为 _____.
4. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & a & -c \\ 2 & -c & b \end{bmatrix}$ 合同于 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 的迹 $tr(A) = _____$.
5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + x_2 - x_3)(3x_1 - 2x_2 + 5x_3)$ 的正惯性指数为 _____.

三、(10分) (请将答案填写在答题卡指定位置上)

$$n(n \geq 2) \text{ 阶行列式 } D = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix},$$

(1) 求 D ; (2) 求 D 的第一行元素对应的代数余子式之和 $\sum_{j=1}^n A_{1j}$.

四、(10分) (请将答案填写在答题卡指定位置上)

$$\text{已知 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 且矩阵 } X \text{ 满足:}$$

$$AXA + BXB = AXB + BXA + I.$$

(1) 求 $(A - B)^{-1}$; (2) 求 X .

五、(12分) (请将答案填写在答题卡指定位置上)

$$\text{已知非齐次线性方程组} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ ax_1 + bx_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = c \end{cases} \text{ 系数矩阵的秩为 } 2, \text{ 且有解}$$

(1) 求 a, b, c 的值及该非齐次线性方程组的通解.

(2) 该非齐次线性方程组有多少线性无关的解? 说明理由.

六、(12分) (请将答案填写在答题卡指定位置上)

设三阶实对称矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 有二重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 且满足:

$$\alpha_1 - 2\alpha_3 = [-3, 0, 6]^T.$$

$$(1) \text{ 证明 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(2) 求正交变换 $X = CY$, 将 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T(A + A^{-1})X$ 化为标准形.

七、(10分) (请将答案填写在答题卡指定位置上)

已知 A 为三阶方阵, X_1, X_2 为齐次方程 $(I - A)X = 0$ 的基础解系, 且 $|A - 2I| = 0$.

(1) 证明 A 可以相似对角化;

(2) 求 $(A - I)(A - 2I)$.

八、(10分) (请将答案填写在答题卡指定位置上)

设 A 为 n 阶实矩阵, 证明 A 为正交矩阵的充要条件是: 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, $(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$. 其中 $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta$ 为 \mathbb{R}^n 中的内积.