

# 矩阵的转置

$A$ 的转置矩阵记为 $A^T$  (或 $A'$ )

## 教材44页定义2.5

设 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n},$$

$A$ 的转置矩阵 $A^T$  定义为

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m}.$$

# 矩阵的转置

例如矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

的转置矩阵为

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \\ 2 & c \end{pmatrix}.$$

# 转置满足的运算律

在运算可行的情况下，矩阵的转置满足下列运算律：

- ①  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ ;
- ②  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ ;
- ③  $(\lambda \mathbf{A})^T = \lambda(\mathbf{A}^T)$ ,  $\lambda$ 是数;
- ④  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ .

利用归纳法由(4)可推出

$$(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k)^T = \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_{k-1}^T \cdots \mathbf{A}_1^T.$$

# 矩阵的转置

## (4)的分析: .

- 设  $A = (a_{ij})_{m \times s}$ ,  $B = (b_{ij})_{s \times n}$ ,  
记  $AB = C = (c_{ij})_{m \times n}$ ,  $B^T A^T = D = (d_{ij})_{n \times m}$ .
- $(AB)^T = C^T$  的  $(i, j)$  元是  $AB = C$  的  $(j, i)$  元, 即  $A$  的第  $j$  行与  $B$  的第  $i$  列对应元素乘积之和:

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^s a_{jk} b_{ki},$$

- 而  $B^T A^T = D$  的  $(i, j)$  元  $d_{ij}$  是  $B^T$  的第  $i$  行与  $A^T$  的第  $j$  列对应元素乘积之和, 即  $B$  的第  $i$  列与  $A$  的第  $j$  行对应元素乘积之和:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^s b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^s a_{jk} b_{ki},$$

- 因此  $c_{ji} = d_{ij} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$ , 所以  $C^T = D$ , 也就是  $(AB)^T = B^T A^T$ .

## 矩阵的转置

教材45页例2.7

$$\text{已知 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{求 } (\mathbf{AB})^T.$$

分析:

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ -7 & -5 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

# 矩阵的行列式

## 教材47页定义2.8

设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是 $n$ 阶矩阵, 称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为矩阵 $A$ 的行列式, 记作 $|A|$ 或 $\det \mathbf{A}$ .

设 $A, B$ 为 $n$ 阶方阵,  $\lambda$ 为实数, 则下列等式成立:

- ①  $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$ ;
- ②  $|\lambda A| = \lambda^n |\mathbf{A}|$ ;
- ③  $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ .

# 矩阵A的行列式的性质

仅证(3). 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times n}$ , 构造 $2n$  阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|,$$

- 在 $D$ 中, 以 $b_{1j}$ 乘第1列, 以 $b_{2j}$ 乘第2列,  $\cdots$ , 以 $b_{nj}$ 乘第 $n$ 列, 都加到第 $n+j$ 列上 ( $j = 1, 2, \cdots, n$ ), 有

$$D = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{vmatrix},$$

- 其中 $\mathbf{C} = (c_{ij})$ ,  $c_{ij} = b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{nj}a_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ ,  
故 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ .

# 矩阵的行列式

- 再对 $D$ 的行作 $r_j \leftrightarrow r_{n+j}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) , 有

$$D = (-1)^n \begin{vmatrix} -\mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{vmatrix},$$

- 再由例1.10, 有

$$D = (-1)^n |-\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{C}| = (-1)^n (-1)^n |\mathbf{C}| = |\mathbf{AB}|. \text{ 得}$$

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

## 要点:

- 容易犯的一个错误是 $|\lambda \mathbf{A}| = \lambda |\mathbf{A}|$ .
- 由(3)知, 对于 $n$ 阶方阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , 不一定有 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ , 但总有 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}|$ .
- 利用初等矩阵可以给出 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ 的另一个证明。

# 矩阵的行列式

## 教材48页例2.9

设 $A$ 是 $n$ 阶方阵, 满足 $AA^T = E$ , 且 $|A| < 0$ , 求 $|A + E|$ .

分析:

- $|AA^T| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}^T| = |E| = 1$ , 故 $|\mathbf{A}|^2 = 1$ . 由 $|A| < 0$ , 得 $|\mathbf{A}| = -1$ ,

- 

$$\begin{aligned}|A + E| &= |A + AA^T| = |A(E + A^T)| \\ &= |A| \cdot |(E + A^T)| = -|(E + A)^T| = -|A + E|\end{aligned}$$

- 所以

$$2|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = 0,$$

即

$$|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = 0.$$

# 矩阵的逆

## 教材50页定义2.10

对于 $n$ 阶方阵 $A$ ,若存在 $n$ 阶方阵 $B$ , 满足

$$AB = BA = E,$$

则称方阵 $A$ 可逆, 且称方阵 $B$ 为 $A$ 的逆矩阵。  $A$  的逆矩阵记为 $A^{-1}$ .

例如, 对矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

因 $AB = BA = E$ , 故 $B$ 是 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵.

问题: 如何求逆矩阵?

- 根据定义
- 利用伴随矩阵
- 利用初等行变换

# 伴随矩阵

**目标：** 利用伴随矩阵求逆矩阵

## 教材48页定义2.9

若 $A$ 为 $n$ 阶方阵，行列式 $|A|$ 的各元素的代数余子式 $A_{ij}$ 构成的如下方阵：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad (2-11)$$

称为 $A$ 的**伴随矩阵**。

**要点：** 伴随矩阵 $A^*$ 的 $(i,j)$ 元是矩阵 $A$ 的 $(j,i)$ 元的代数余子式。

# 伴随矩阵

## 例子

求矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  的伴随矩阵.

**分析：**  $\mathbf{A}$  的伴随矩阵为：

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**问题：** 为什么要如此定义伴随矩阵？

# 伴随矩阵

## 重要定理（教材49页定理2.1）

对伴随矩阵，有如下结论成立：

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}.$$

**分析：** 由行列式按行展开的定理及其推论，得

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

故

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\mathbf{A}| \end{pmatrix} = |\mathbf{A}|\mathbf{E},$$

类似地，可证 $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$ ，故 $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$ 。

## 性质

- $(\mathbf{A}^T)^* = (\mathbf{A}^*)^T$ ;
- $(k\mathbf{A})^* = k^{n-1}\mathbf{A}^*$ ,  $k$ 为数.

# 矩阵的逆

方法一： 利用伴随矩阵

重要定理（教材51页定理2.2）

$n$ 阶方阵 $A$ 可逆的充分必要条件是 $|\mathbf{A}| \neq 0$ . 且在 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*. \quad (2-12)$$

其中 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵.

分析:

- 充分性. 设 $A$ 的伴随矩阵为 $\mathbf{A}^*$ , 则由伴随矩阵的性质, 有

$$A\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*A = |\mathbf{A}| E.$$

因为 $|\mathbf{A}| \neq 0$ , 故有 $\mathbf{A} \cdot \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ , 从而 $A$ 可逆, 且 $A^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*$ .

- 必要性. 由于 $A$ 可逆, 即存在 $A^{-1}$ , 使 $A^{-1}A = E$ , 故 $|\mathbf{A}A^{-1}| = |E| = 1$ , 有 $|A^{-1}| \cdot |\mathbf{A}| = 1$ , 所以 $|\mathbf{A}| \neq 0$ .

# 矩阵的逆

## 重要定义

- 当矩阵的行列式不为零时，称该矩阵为**非奇异矩阵**或**非退化矩阵**；
- 当矩阵的行列式为零时，称该矩阵为**奇异矩阵**或**退化矩阵**。

**要点：**定理2.2表明，矩阵 $A$ 可逆， $|A| \neq 0$ 与矩阵 $A$ 非奇异，这三者是等价的。

# 矩阵的逆

## 教材51页例2.11

求矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  可逆的充要条件, 在可逆时求其逆矩阵.

**分析:** 由于  $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ , 所以矩阵  $A$  可逆的充要条件是  $ad - bc \neq 0$ . 此时  $A$  的逆矩阵为:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

# 矩阵的逆

## 教材51页例2.12

求矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  的逆矩阵.

**分析：**按定理，只需求出  $A$  的行列式与伴随矩阵. 由例2.10，已求得  $A$  的伴随矩阵，因  $|\mathbf{A}| = -22$ ，于是

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = -\frac{1}{22} \begin{pmatrix} -11 & 5 & -7 \\ 11 & -1 & -3 \\ 11 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

**要点：**如果根据公式(2-12)计算逆矩阵，计算量很大，因此该公式主要用于理论推导和计算低阶矩阵及特殊矩阵的逆矩阵，本章第5节将讨论求逆矩阵的一般方法.

# 矩阵的逆

**方法二：** 利用定义的变形

## 教材51页性质2.1

如果 $A$ 是可逆的，则 $A$ 的逆矩阵唯一。

**分析：** 设 $B, C$ 都是 $A$ 的逆矩阵，即 $AB = BA = E$ ， $AC = CA = E$ ，则

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

因此，在 $A$ 可逆时，可用 $A^{-1}$ 来表示 $A$ 的逆矩阵，即若 $AB = BA = E$ ，则 $B = A^{-1}$ 。

# 矩阵的逆

## 教材52页推论

若  $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$  (或  $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$ ) , 则  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ .

**分析:** 因  $|\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{AB}| = |\mathbf{E}| = 1$ , 故  $|\mathbf{A}| \neq 0$ , 从而  $\mathbf{A}^{-1}$  存在. 于是

$$\mathbf{B} = \mathbf{EB} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}.$$

**意义:** 要判断  $\mathbf{A}$  可逆, 不必像定义那样验证  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$ , 只需验证  $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ , 或  $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$  即可.

# 矩阵的逆

## 教材52页例2.13

设 $A$ 可逆, 且 $A^*B = A^{-1} + B$ , 证明 $B$ 可逆, 当 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 时, 求 $B$ .

分析:

- 由 $A^*B = A^{-1} + B = A^{-1} + EB$ , 得 $(A^* - E)B = A^{-1}$ .  
两边同时左乘 $A$ , 可得 $A(A^* - E)B = AA^{-1}$ , 即 $(|A|E - A)B = E$ , 则 $B$ 可逆, 且 $B = (|A|E - A)^{-1}$ .
- $|A|E - A = \begin{pmatrix} 8 & & \\ & 8 & \\ & & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

按逆矩阵的运算性质和求逆公式, 易得

$$B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# 矩阵的逆

## 教材54页例2.15

设方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \mathbf{O}$ , 证明 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A} + 2\mathbf{E}$ 都可逆, 并求 $\mathbf{A}^{-1}$ 和 $(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})^{-1}$ .

分析:

- 由已知可得 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = 2\mathbf{E}$ , 从而有

$$\mathbf{A} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{E},$$

于是可知 $\mathbf{A}$ 可逆, 且 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{E})$ .

- 同样由 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = 2\mathbf{E}$ 可得

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 6\mathbf{E} = -4\mathbf{E},$$

即 $(\mathbf{A} + 2\mathbf{E}) \cdot \frac{1}{4}(3\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{E}$ , 故

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})^{-1} = \frac{1}{4}(3\mathbf{E} - \mathbf{A}).$$

# 矩阵的逆

**重点：** 求解矩阵方程  $AX = B$

对  $n$  元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \quad \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2-13)$$

记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

则(2-13)可表示为:  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . (2-14)

## 矩阵的逆

对 (2-13), 若  $D = |\mathbf{A}| \neq 0$ , 则  $\mathbf{A}^{-1}$  存在, (2-14) 两边同时左乘  $\mathbf{A}^{-1}$ , 即  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\mathbf{b}$ , 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

比较等式两端, 得

$$x_j = \frac{1}{D}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n) = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

这就是克拉默法则.

# 矩阵的逆

## 问题

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}, B = (E + A)^{-1}(A - E). \text{求 } (E + B)^{-1}.$$

**要点：** 逆矩阵的性质

# 矩阵的逆

## 教材54页性质2.2

设 $A, B$ 均为同阶可逆方阵, 数 $\lambda \neq 0$ , 则下面结论成立:

- $A^{-1}$ 亦可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
- $\lambda A$ 亦可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ ;
- $AB$ 亦可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ;  
从而, 若 $A = B$ , 则 $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ , 一般地有  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ . 记 $A^{-n} = (A^{-1})^n$ .
- $A^T$ 亦可逆, 且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ;
- $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$ .

# 矩阵的逆

**分析：**①因 $A$ 可逆，故 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ ，从而 $\mathbf{A}^{-1}$ 也可逆，且 $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ 。

②因 $(\lambda A) \cdot \frac{1}{\lambda} A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \mathbf{E}$ ，故 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ 。

③因 $(\mathbf{A}\mathbf{B})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ ，所以 $\mathbf{A}\mathbf{B}$ 可逆，且 $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ 。

④因 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ ，故 $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{E}^T$ ，从而 $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{E}$ ，于是 $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ 。

⑤因 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ ，从而 $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{E}| = 1$ ，得 $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$ 。

# 矩阵的逆

## 例子

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}, B = (E + A)^{-1}(A - E). \text{ 求 } (E + B)^{-1}.$$

分析:

$$\begin{aligned} E + B &= E + (E + A)^{-1}(A - E) \\ &= (E + A)^{-1}(E + A) + (E + A)^{-1}(A - E) \\ &= (E + A)^{-1}(2A). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} (E + B)^{-1} &= (2A)^{-1}((E + A)^{-1})^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(A)^{-1}(E + A) = \frac{1}{2}(A^{-1} + E). \end{aligned}$$

# 矩阵的逆

## 教材54页例2.16

证明：当方阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可逆时，有

$$(1) (\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*;$$

$$(2) (\mathbf{A}^k)^* = (\mathbf{A}^*)^k, \quad k \text{ 为正整数};$$

$$(3) |\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}.$$

**分析：**(1) 由 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \neq 0$ 可知 $\mathbf{AB}$ 可逆，故 $(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}| \mathbf{E}$ ，从而

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^* &= (\mathbf{AB})^{-1} |\mathbf{AB}| \mathbf{E} = |\mathbf{AB}| (\mathbf{AB})^{-1} \\ &= |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{B}| \mathbf{B}^{-1} \cdot |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}| \frac{1}{|\mathbf{B}|} \mathbf{B}^* \cdot |\mathbf{A}| \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*. \end{aligned}$$

(2) 由(1)直接可得.

(3) 因 $\mathbf{A}$ 可逆，有 $|\mathbf{A}| \neq 0$ ，因 $\mathbf{AA}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{E}$ ，从而 $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^n$ ，即得

$$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}.$$

# 分块矩阵

**方法三：** 利用行（列）变换求逆矩阵

**方法三的原理：**

- 分块矩阵
- 初等矩阵与初等行（列）变换

# 分块矩阵

将矩阵 $A$ 用若干条纵线和横线分成若干个小矩阵，每个小矩阵称为 $A$ 的**子块**，以子块为元素的矩阵称为**分块矩阵**。

## 例子

令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ 。将 $A$ 按如下方式分块

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right), \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中  $A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ ,  $A_{12} = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix}$ ,  
 $A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ,  $A_{22} = \begin{pmatrix} a_{34} \end{pmatrix}$  为 $A$ 的子块。

# 分块矩阵

## 常用分块方法

设 $\mathbf{A}$ 是一个 $m \times n$ 矩阵,

- (按列分块)把矩阵的每一列看成是一个 $m \times 1$ 的小矩阵 $\alpha_j$ , 于是 $\mathbf{A}$ 可以写成

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n);$$

- (按行分块)把矩阵的每一行看成是一个 $1 \times n$ 的小矩阵 $\beta_i$ , 于是 $\mathbf{A}$ 可以写成

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

# 分块矩阵

## 掌握本节的要点:

在满足一定条件下, 分块矩阵的运算满足的运算律。

### (1) 分块矩阵的和与数乘

设矩阵  $A$  与  $B$  为同型矩阵, 采用同样的分块法, 有

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix},$$

其中  $A_{ij}$  与  $B_{ij}$  均为同型矩阵. 则

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2r} + B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & A_{s2} + B_{s2} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}.$$

## 分块矩阵的数乘

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \lambda A_{s2} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

### (2) 分块矩阵的转置

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & A_{2r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}.$$

# 分块矩阵的乘积

**要点：**矩阵**A**的列的分法必须与矩阵**B**的行的分法一致。

常用结论(教材59页)

设  $\mathbf{A} = (a_{ik})_{sn}$ ,  $\mathbf{B} = (b_{kj})_{nm}$ , 把  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  分成一些小矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1l} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{t1} & \mathbf{A}_{t2} & \cdots & \mathbf{A}_{tl} \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{l1} & \mathbf{B}_{l2} & \cdots & \mathbf{B}_{lr} \end{pmatrix} \end{matrix},$$

其中每个  $\mathbf{A}_{ij}$  是  $s_i \times n_j$  小矩阵, 每个  $\mathbf{B}_{ij}$  是  $n_i \times m_j$  小矩阵, 则

$$\mathbf{AB} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \cdots & \mathbf{C}_{1r} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_{t1} & \mathbf{C}_{t2} & \cdots & \mathbf{C}_{tr} \end{pmatrix} \end{matrix}, \text{ 其中}$$

$$\mathbf{C}_{pq} = \mathbf{A}_{p1}\mathbf{B}_{1q} + \mathbf{A}_{p2}\mathbf{B}_{2q} + \cdots + \mathbf{A}_{pl}\mathbf{B}_{lq} = \sum_{k=1}^l \mathbf{A}_{pk}\mathbf{B}_{kq}$$

# 分块矩阵

举例说明:

设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

我们对 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 进行不同形式的划分, 来进行 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的基本运算.

# 分块矩阵

**划分一：**把 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 分别划分成4个 $2 \times 2$  小矩阵：

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \mathbf{B} = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{E}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

现在对矩阵 $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ 进行乘积运算, 把这些小矩阵看作数一样来处理, 按乘法运算规则, 有

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{11} + \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{12} + \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{计算可得} \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

# 分块矩阵

**划分二：** 把 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 按下列形式划分成4个小矩阵：

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \mathbf{B} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix},$$

按这种划分进行乘法运算，即

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

此时所有的小矩阵乘积运算都是没有定义的。

# 分块矩阵

## (4) 分块对角矩阵

设方阵 $A$ 的分块矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix},$$

除主对角线上的子块不为零子块外，其余子块都为零矩阵，且 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$  为方阵，则 $A$ 称为分块对角矩阵 (或准对角矩阵).

# 分块矩阵

具有同样分法的同阶分块对角矩阵的和、差、积仍是同类型分块对角矩阵，其运算法则类似于对角矩阵相应的运算法则。设有与 $A$ 同阶的分块对角矩阵

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_m \end{pmatrix},$$

其中 $A_i$ 与 $B_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 均为对应同阶方阵，则有

# 分块矩阵

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_1 \pm B_1 & & & \\ & A_2 \pm B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \pm B_m \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & & & \\ & A_2 B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m B_m \end{pmatrix}.$$

它们还是分块对角矩阵.

# 分块对角矩阵的行列式与逆矩阵

分块对角矩阵的行列式为

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}_1| |\mathbf{A}_2| \cdots |\mathbf{A}_m|.$$

当 $|\mathbf{A}_i| \neq 0$ 时, 有 $|\mathbf{A}| \neq 0$ , 从而可知 $\mathbf{A}$ 可逆, 且

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & & & \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m^{-1} \end{pmatrix}.$$

# 分块矩阵

教材60页例2.17

求  $\mathbf{A}^2$ , 其中矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

**分析:** 将  $\mathbf{A}$  分块为分块对角矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{A}_2 & \\ & & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix}$ , 则

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^2 & & \\ & \mathbf{A}_2^2 & \\ & & \mathbf{A}_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & & & & & \\ & 2 & 2 & & & \\ & 2 & 2 & & & \\ & & & 4 & -4 & 1 \\ & & & 0 & 4 & -4 \\ & & & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

# 分块矩阵

教材61页例2.18

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 求 } A^{-1}.$$

**分析：**  $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, A_1 = (4),$

$$A_1^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right), A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

于是有

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

## 教材62页例2.19

求矩阵

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rr} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

的逆矩阵，其中 $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ 分别是 $k$ 阶和 $r$ 阶的可逆矩阵， $\mathbf{C}$ 是 $r \times k$ 矩阵， $\mathbf{O}$ 是 $k \times r$ 零矩阵。

# 分块矩阵

**分析：** 因为 $|\mathbf{D}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$ , 所以当 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可逆时,  $\mathbf{D}$ 也可逆. 设

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_k & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_r \end{pmatrix},$$

这里 $\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_r$ 分别表示 $k$ 阶和 $r$ 阶单位矩阵. 乘出来并比较等式两边, 得

## 分块矩阵

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{X}_{11} = \mathbf{E}_k, \\ \mathbf{A}\mathbf{X}_{12} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{C}\mathbf{X}_{11} + \mathbf{B}\mathbf{X}_{21} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{C}\mathbf{X}_{12} + \mathbf{B}\mathbf{X}_{22} = \mathbf{E}_r. \end{cases}$$

由第①, ②式得 $\mathbf{X}_{11} = \mathbf{A}^{-1}$ ,  $\mathbf{X}_{12} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{O} = \mathbf{O}$ ,

代入第④式, 得 $\mathbf{X}_{22} = \mathbf{B}^{-1}$ ,

代入第③式, 得

$$\mathbf{B}\mathbf{X}_{21} = -\mathbf{C}\mathbf{X}_{11} = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{X}_{21} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}.$$

因此

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$