2024-2025 学年第一学期线性代数考试试卷

（回忆版）

考试方式：闭卷　　　　　考试时间：2025.1.12　8:30-11:00

一、判断题（每题 2 分，共 16 分）

1. 设 A、B 都是 n 阶实对称矩阵，并且 A 与 B 的特征值均大于 0，则 $A+B$ 的特征值也大于 0.
2. 设 A 为 n 阶幂等矩阵（即 $A^2=A$），则 $\mathrm{tr}(A)=n-r(A)$.（$\mathrm{tr}(A)$ 为 A 的迹，r 为秩）
3. 线性方程组 $AX=O$ 的解都是 $BX=O$ 的解，且 $r(A)=r(B)$，则 $AX=O$ 与 $BX=O$ 同解.
4. 2025 维向量空间是 2025 个线性无关的 2025 维向量生成的空间.
5. 若两个同阶可逆阵 A、B 有相同的特征值，则 A、B 相似.
6. 若线性方程组 $AX=O$ 中，方程的个数少于未知变量的个数，则方程组 $AX=O$ 必有非零解.
7. 设 n 阶方阵 A 的第一行可由其余 $n-1$ 个行向量线性表示，则 A 的伴随矩阵 A^* 的秩不会超过 1.
8. 若矩阵 A、B、C 满足 $A=BC$，且 $r(A)=r(B)$，则 A 的列向量形成的向量组和 B 的列向量形成的向量组等价.

二、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设三阶方阵 A 的三个特征值为 1、2、3，则 $\mathrm{tr}(A+A^{-1})=$__________.
2. 已知将三阶可逆阵 A 的第 1 行的 3 倍加到第 3 行得矩阵 B，则 $AB^{-1}=$__________.
3. A、B、C 均为矩阵，$A=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}$，且 $(AC)^{-1}=-(CB)^{-1}$，则 $|B|=$__________.
4. 已知空间中两点 $A(1,0,-1)$、$B(1,-2,0)$，记 O 为原点，以 OA、OB 为边作平行四边形 $OACB$，则 $|\overline{OC}|^2+|\overline{AB}|^2=$__________.（$|\cdot|$ 表示向量的长度）
5. 二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+ax_1x_2+4x_2^2$ 经过正交变换变为 $f(y_1,y_2)=4y_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，则 a、b 分别为__________.

三、（10 分）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$，三阶方阵 X 满足方程 $A^*X=AX+A^{-1}+I_3$，求矩阵 X.

（A^*为 A 的伴随矩阵）

四、（10 分）

设向量组$\alpha_1=[1,2,-1,1]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=[2,3,-2,0]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=[0,3,1,5]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=[-1,4,1,11]^{\mathrm{T}}$.

求：（1）由 α_1、α_2、α_3、α_4生成的向量空间 V 的维数；

（2）在上面的向量组中选择一组基，并将剩余的向量用这组基线性表示.

五、（12 分）

已知$\alpha=\begin{bmatrix}2\\k\\-1\end{bmatrix}$是$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量.

求：（1）常数 k 的值；

（2）正交变换 $X=CY$，将二次型 $f=X^{\mathrm{T}}A^{-1}X$ 化为标准型.

六、（12 分）

已知空间直角坐标系中三平面的方程分别为：

$$\begin{aligned}\pi_1&:\ x+y+z=1,\\ \pi_2&:\ x+\lambda y-z=3,\\ \pi_3&:\ \lambda x+y+z=2-\lambda.\end{aligned}$$

问：（1）λ 取何值时，这三个平面：①交于一点；②交于一直线；③没有公共交点；

（2）当它们交于一直线时，求直线的方程.

七、（10 分）

设 A 是 n（n>1）阶方阵，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是 n 维列向量. 若：

$$A\xi_1=\xi_2,\quad A\xi_2=2\xi_3,\quad \cdots,\quad A\xi_{n-1}=(n-1)\xi_n,\quad A\xi_n=0,\quad \xi_n\neq 0.$$

（1）证明：$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$线性无关；

（2）A 能否相似对角化？说明理由.

八、（10 分）

设 $D(x)=\begin{vmatrix} x_1+x & a+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & x_2+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & b+x & x_3+x & \cdots & a+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b+x & b+x & b+x & \cdots & x_n+x \end{vmatrix}$，其中 $a, b, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是给定的实数，且满足 $a \neq b$.

（1）证明：$D(x)$是关于 x 的不超过一次的多项式；

（2）令 $D=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix}$，$f(x)=(x_1-x)(x_2-x)\cdots(x_n-x)$，证明：

$$D=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$