# 华中科技大学 2024～2025 学年第一学期
# “线 性 代 数 ” 考试试卷(A 卷)参考答案（及评分标准）

## 一、判断题（每小题 2 分，共 16 分）

1. √ 2. x 3. √ 4. x 5. x 6. √ 7. √ 8. √

## 二、填空题（5 小题，共 20 分）

1. $\underline{7\frac{5}{6}}$ 2. $\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ 3. $\underline{-2}$ 4. $\underline{14}$ 5. $\underline{a = \pm 4,\ b = 1}$

## 三、（10 分）

整理得，$X = (|A|I - A^2)^{-1}(I + A)$ …5 分

其中$|A| = 2$，$|A|I - A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$(|A|I - A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

故$X = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. …10 分

## 四、（10 分）

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ …5 分

（1） 故$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是一组极大线性无关组，故空间 $V$ 的维数为 3. …8 分

（2） 比如：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是一组基， $\alpha_4 = 11\alpha_1 - 6\alpha_2$. …10 分

## 五、（12 分）

（1）解法 1

$\alpha$满足$A\alpha = \lambda\alpha$，即$(\lambda I - A)\alpha = 0$，

故$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ k \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - k + 1 = 0 \\ -2 + k\lambda + 1 = 0 \\ -2 - k - \lambda = 0 \end{cases}$

解得$k = -1$，$\lambda = -1$. … 5 分

（2）

令$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$

故$\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=2.$

当$\lambda_1=\lambda_2=-1$，其特征向量为$(-I-A)X=0$的非零解，

$$-I-A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}，\text{基础解系为}\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

注（1）解法 2: $k=-1$时，$\alpha=-\alpha_1-\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$是$A$和$A^{-1}$的特征向量.

当$\lambda_3=2$，其特征向量为$(2I-A)X=0$的非零解，

$$2I-A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}，\text{基础解系为}\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}.$$

令$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$，$\beta_3=\alpha_3$

令$\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{bmatrix},\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$, …10 分

令$C=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]$， 经过正交变换 $X=CY$,

$f=X^TA^{-1}X=-y_1^2-y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2.$ …12 分

六、**（12 分）**

（ 1 ） $[A\ \vdots\ b]=$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & -1 & 3\\ \lambda & 1 & 1 & 2-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2\lambda-4\end{bmatrix}$$

若$r(A)=r([A\ \vdots\ b])=3$, 即$\lambda\neq\pm1$ 交于一点；

若$r(A)=r([A\ \vdots\ b])<3$, 即$\lambda=1$ 交于一条直线；

若$r(A)\neq r([A\ \vdots\ b])$，即$\lambda=-1$，没有公共交点； …8 分

（2）当$\lambda=1$时，

$$[A\ \vdots\ b]\xrightarrow{\text{行初等变换}}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -2\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

直线方程为$\begin{cases}x+y=2\\ z=-1\end{cases}$. …12 分

七、（10 分）

（1）证明：令$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n=0$, （*）

则$A^{n-1}(k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n)=0$

即$k_1A^{n-1}\xi_1+k_2A^{n-1}\xi_2+\cdots+k_nA^{n-1}\xi_n=0$

由条件，$A^{n-1}\xi_i=0, \quad i=2,\dots,n$

则$k_1A^{n-1}\xi_1=0$，即$k_1(n-1)!\,\xi_n=0$

由于$\xi_n\neq 0$，故$k_1=0$.

$k_1=0$代入（*）式，得$k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n=0$

类似，$A^{n-2}(k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n)=0$, 可得$k_2=0$.

同理可得$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，即证$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$线性无关. …5 分

（2）由题意，

$$A[\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1},\xi_n]=[\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1},\xi_n]\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n-1&0\end{bmatrix},$$

由（1）知，$[\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1},\xi_n]$可逆，

故 $A$ 相似于 $B=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n-1&0\end{bmatrix}$，且 $\mathrm{r}(B)=n-1$.

令$|\lambda I-B|=0$，得$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$，

且 $\dim N(B)=n-\mathrm{r}(B)=n-(n-1)=1$,

即 $B$线性无关的特征向量只有 1 个，没有 $n$ 个，

故 $B$不能相似对角阵，

故 $A$ 也不能相似对角阵. … 10 分

八、（10 分）证明

（1）解法 1

$$D(x)=\begin{vmatrix}1 & b+x & b+x & \cdots & b+x\\ 0 & x_1+x & a+x & \cdots & a+x\\ 0 & b+x & x_2+x & \cdots & a+x\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & b+x & b+x & \cdots & x_n+x\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & b+x & b+x & \cdots & b+x\\ -1 & x_1-b & a-b & \cdots & a-b\\ -1 & 0 & x_2-b & \cdots & a-b\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-b\end{vmatrix}_{n+1},$$

按照第一行展开，即证$D(x)$是关于$x$的不超过一次的多项式.

另证：

$$D(x)=\begin{vmatrix}x_1+x & a+x & a+x & \cdots & a+x\\ b-x_1 & x_2-a & 0 & \cdots & 0\\ b-x_1 & b-a & x_3-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b-x_1 & b-a & b-a & \cdots & x_n-a\end{vmatrix},$$

按照第一行展开，即证$D(x)$是关于$x$的不超过一次的多项式. …5 分

（2）$D(0)=D$，设$D(x)=D+xc$

由$D(x)$表达式，有$D(-b)=(x_1-b)(x_2-b)\cdots(x_n-b)=f(b)$，

且$D(-a)=(x_1-a)(x_2-a)\cdots(x_n-a)=f(a)$，

又$D(-b)=\ D-bc,$

$D(-a)=\ D-ac,$

故$aD(-b)=a\ \ D-abc,$

且$bD(-a)=\ bD-abc,$

联立上述两式，且由$a\neq b$，得

$$D=\frac{aD(-b)-bD(-a)}{a-b}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}\ .$$

即证. …10 分