对数不等式（I）

对数不等式

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}.$$

可以验证数列 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 严格单增， $y_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 严格单减.

$$x_n=1\cdot\underbrace{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})}_{n}<\left(\frac{1+(1+\frac{1}{n})+\cdots+(1+\frac{1}{n})}{n+1}\right)^{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=x_{n+1},$$

$$\frac{1}{y_n}=1\cdot\underbrace{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\cdots\frac{n}{n+1}}_{n+1}<\left(\frac{1+\frac{n}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}}{n+2}\right)^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}},$$

且都有极限 e. 所以有 $(1+\frac{1}{n})^n<\mathrm{e}<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$，取对数即得

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}.$$

或者对 $f(x)=\ln x$ 使用微分中值公式

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(n+1)-\ln n=f'(\xi)\cdot\big((n+1)-n\big)=\frac{1}{\xi}\ ,\qquad \xi\in(n,n+1)$$

得到

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}.$$

应用

（1） 试证明数列 $\gamma_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 收敛.

证 $\gamma_{n+1}-\gamma_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n$

$$=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0,\qquad \text{（利用}\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})\text{）}$$

表明 $\{\gamma_n\}$ 单调减少.

下证数列$\{\gamma_n\}$有下界。

$$\gamma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})-\ln n \qquad （利用\frac{1}{k}>\ln(1+\frac{1}{k})）$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)-\ln k\right)-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0，$$

即数列$\{\gamma_n\}$有下界 0.

综上数列单减有下界必收敛.

注 $\{\gamma_n\}$的极限称为欧拉常数γ，其值约为0.577，目前不知γ是有理数还是无理数!

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma_n=\ln n+\gamma+\varepsilon_n，$$

这里ε_n为无穷小. $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\ln n\quad(n\to\infty)$.

（2）设 $b_n=H_{2n}-H_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

解法一 利用对数不等式$\frac{1}{j+1}<\ln(1+\frac{1}{j})<\frac{1}{j}$，得

$$\ln(1+\frac{1}{n+k})<\frac{1}{n+k}<\ln(1+\frac{1}{n+k-1})\quad，$$

或
$$\ln(n+k+1)-\ln(n+k)<\frac{1}{n+k}<\ln(n+k)-\ln(n+k-1)\ .$$

故

$$\ln\frac{2n+1}{n+1}=\ln(n+n+1)-\ln(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<\ln(n+n)-\ln n=\ln 2\ .$$

利用迫敛性可得极限为$\ln 2$.

解法二 $b_n=H_{2n}-H_n=\ln(2n)+\gamma+\varepsilon_{2n}-(\ln n+\gamma+\varepsilon_n)$ （这里ε_n为无穷小）

$\to\ln 2$.

解法三 （学习了积分学后，利用定积分定义）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2\ .$$