例 1 求 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的 n 阶导数（$n\geq 2$）.

解 $y^{(n)}=\left(x^{-1}\ln x\right)^{(n)}=(x^{-1})^{(n)}\ln x+\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k(x^{-1})^{(n-k)}(\ln x)^{(k)}$

$$=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\ln x+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}(\ln x-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}).$$

例 2 求 $y=x^{n-1}e^{1/x}$ 的 n 阶导数.

解 $n=1$ 时，$\left(e^{1/x}\right)'=-e^{1/x}/x^2$，

$n=2$ 时，$\left(xe^{1/x}\right)''=\left(e^{1/x}+x\cdot e^{1/x}\cdot\dfrac{-1}{x^2}\right)'=\left((1-\dfrac{1}{x})e^{1/x}\right)'=e^{1/x}/x^3$，

$n=3$ 时，$\left(x^2e^{1/x}\right)'''=\left((2x-1)e^{1/x}\right)''=\left((2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2})e^{1/x}\right)'=-e^{1/x}/x^4$，

假定 $n=k$ 时，$\left(x^{k-1}e^{1/x}\right)^{(k)}=(-1)^k e^{1/x}/x^{k+1}$ 成立，记 $u=x^{k-1}e^{1/x}$，则

$\left(x^k e^{1/x}\right)^{(k+1)}=\left(x\cdot u\right)^{(k+1)}=x\cdot u^{(k+1)}+(k+1)u^{(k)}$ （利用了莱布尼兹规则）

$$=x\left(u^{(k)}\right)'+(k+1)u^{(k)}$$

$=x\left((-1)^k e^{1/x}\dfrac{1}{x^{k+1}}\right)'+(k+1)(-1)^k e^{1/x}\dfrac{1}{x^{k+1}}$ （利用了归纳假设）

$$=(-1)^k x\left(-e^{1/x}\frac{1}{x^{k+3}}-e^{1/x}\frac{k+1}{x^{k+2}}\right)+(k+1)(-1)^k e^{1/x}\frac{1}{x^{k+1}}$$

$$=(-1)^{k+1}e^{1/x}/x^{k+2}.$$

综上 $\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)}=(-1)^n e^{1/x}/x^{n+1}$.

注 一般地可以证明 $\left(x^{n-1}f(\dfrac{1}{x})\right)^{(n)}=(-1)^n f^{(n)}(\dfrac{1}{x})/x^{n+1}$.