微积分知识串讲

谢悦晋

提高 2201 班
u202210333@hust.edu.cn

2024 年 1 月 8 日

考试要求

考试卷中不涉及以下内容：
一致连续，近似计算，欧拉积分，反常积分收敛判别法，欧拉方程，二阶线性方程的常数变易法，定积分和微分方程的物理学应用。微分方程组，用 $\varepsilon - N$ 语言论证极限问题。
提高卓越可以考 $\varepsilon - N$ 语言论证极限问题，反常积分收敛判别法，欧拉方程

常考题型

- 极限：单调有界/压缩映像，**Stolz 公式**，等价无穷小/泰勒公式，夹逼准则，洛必达准则 (**牢记洛必达准则的使用条件**，经常挖坑)，微分中值定理，导数定义，无穷求和转化为定积分
- 利用导数定义计算各阶函数值等
- 微分中值定理构造
- 高阶导数以及参数方程求导
- 渐近线，极值计算
- 导数与连续定义题

零散的知识点：无穷小的阶的计算，间断点的分类, 凹凸性、曲率

常用等价无穷小

$\sin x \sim x$; $\tan x \sim x$; $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$; $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$;
$e^x - 1 \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$; $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (\alpha \neq 0)$, $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

例题:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x \ln\left(1+\sin^2 x\right)}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^{n-p}}$

洛必达法则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;

(2) 存在 x_0 的某邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，$f'(x)$、$g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞)，

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty).$$

去心邻域内导数存在，极限存在，缺一不可！很容易挖坑！

12. 设 $f(x)$ 在点 a 的邻域内可导，且 $f(a)=f'(a)=1$，求 $l=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}\right)$

设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有二阶导数且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，求 $f(0), f'(0)$ 及 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$

Stolz 公式/求和型极限

1. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$$

2. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$$

3. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

4. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k}{n}\pi}{n+\frac{k}{n}}$$

泰勒公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2k-1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

常见的泰勒展开式要熟记，用于极限计算

在给选取给定点泰勒展开要会，是证明题重要工具

（2）设 $f(x)$ 在某个区间 I 上有直到 $n+1$ 阶的导数，则对任何 $x_0, x \in I$，存在介于 x_0, x 之间的 ξ，使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (6)$$

常常有 $x = x_0 + h, x_0 = \frac{a+b}{2}, x_0$(极小/大值点) 等各式展开方式

提醒一下 $o(x^n)$ 的意义：$\frac{o(x^n)}{x^n} \to 0, x \to 0$

泰勒公式

例题:

1. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$$

2. 例 11 设 $f(x)$ 在原点的邻域内二次可导,且
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=0,$$
求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+f(x)}{x^2}$.

3. 设 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$, $g(x)=cx^3$, 在 $x\to 0$ 时, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小, 求常数 a, b, c 的值

泰勒公式

例 13　设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二次可导，且 $|f(x)|\leqslant 1$, $|f''(x)|\leqslant 1\ (0\leqslant x\leqslant 2)$. 证明：$|f'(x)|\leqslant 2\ (0\leqslant x\leqslant 2)$.

为什么要给 [0,2], 在哪里泰勒展开?

微分中值定理

(1) 罗尔中值定理　如果函数 $f(x)$ 满足：

① 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；② 在开区间 (a,b) 内可导；③ $f(a)=f(b)$。

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。

(2) 拉格朗日中值定理　如果函数 $f(x)$ 满足：

① 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；② 在开区间 (a,b) 内可导。

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得等式

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{或} \quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \text{成立。}$$

(3) 柯西中值定理　如果函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 满足：

① 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；② 在开区间 (a,b) 内可导；③ 对任一 $x\in(a,b)$，$g'(x)\neq 0$。

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得等式 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 成立。

微分中值定理构造

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$。证明：对于任意的实数 λ，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。

证 先将中值等式中的 ξ 换为 x，则有 $f'(x)-\lambda(f(x)-x)=1$。再令 $y=f(x)$，则有微分方程

$$y'-\lambda y+\lambda x=1 \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}-\lambda y=1-\lambda x。\qquad (*)$$

这个一阶线性方程的通解为 $y=e^{\int\lambda dx}\left(\int(1-\lambda x)e^{-\int\lambda dx}dx+C\right)=e^{\lambda x}(xe^{-\lambda x}+C)$。

将通解表示为

$$e^{-\lambda x}(y-x)=C。\qquad (**)$$

取辅助函数为

$$F(x)=e^{-\lambda x}(f(x)-x)。\qquad (***)$$

此时 $F(1)=-e^{-\lambda}<0$，$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{\lambda}{2}}>0$。由零点定理可知，必有 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $F(\eta)=0$。因 $F(0)=0$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理的条件，从而存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $F'(\xi)=-\lambda e^{-\lambda\xi}[f(\xi)-\xi]+e^{-\lambda\xi}[f'(\xi)-1]=0$。两端同除 $e^{-\lambda\xi}$，可得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。

微分中值定理构造

注 求解单中值等式问题通常分为四步：

(1) 将中值等式中的 ξ 换为 x，并令 $y=f(x)$，可得到与之匹配的微分方程，如本例题中的(*)式；

(2) 解这个微分方程，并把通解表达为 $G(x,y)=C$ 的形式，如本例题中的(**)式；

(3) 令辅助函数为 $F(x)=G[x,f(x)]$，如本例题中的(***)式；

(4) 确定 $F(x)$ 满足罗尔中值定理的区间，则在这个区间内所求的中值等式成立。

微分中值定理求极限

例题：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$$

当出现类似 $\dfrac{F(f(x))-F(g(x))}{f(x)-g(x)}$ 这种形式的极限，可以考虑用微分中值定理求解

极值第三充分条件

设f(x)在 x_0 处n阶可导，且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=1,2,\ldots,n-1), f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geq 2)$，则

①当n为偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时,f(x)在 x_0 处取得极大值;

②当n为偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时,f(x)在 x_0 处取得极~~大~~小值;

出现多阶导数为 0 的情况要回判断极值!

没有细讲的知识点:

- 无穷小的阶的计算
- 间断点的分类
- 凹凸性，曲率，渐进线
- 参数方程求导以及高阶导数

常考题型

- 基本 (不) 定积分的计算
- 变上限积分
- 渐近线，极值计算
- 弧长，旋转体体积计算
- 反常积分敛散性的判断

不定积分公式表

要背！(1) 线性分解法;(2) **凑微分法**;(3) **积分换元法**;(4) **分部积分法**，基本积分方法熟练

(1) $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$；　(2) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$；

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+C$；　(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$；

(5) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)+C$；

(6) $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\right)+C$；

(7) $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x+\tan x|+C$；　(8) $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x-\cot x|+C$；

(9) $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|+C$；　(10) $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x|+C$。

有理积分

先把有理函数化成多项式与有理真分式之和；然后对有理真分式的分母作因式分解(实数范围)，分解成一次因式和二次不可约因式方幂的乘积；最后把真分式分解成一系列最简分式的和。最终归结为两种可以积出来的最简分式的积分：

$$(\text{I})\int\frac{1}{(x-a)^k}\mathrm{d}x;\quad (\text{II})\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x\quad (p^2-4q<0)。$$

(Ⅰ)显然可以积出来；(Ⅱ)可令 $t=x+\frac{p}{2}$，化为

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x=\int\frac{At+N}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t=A\int\frac{t}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t+N\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^k}。$$

上式的第一个积分可以积出来；第二个积分 $I_k=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^k}$，当 $k=1$ 容易计算，当 $k>1$，有递推公式 $I_k=\frac{1}{2(k-1)r^2}\left(\frac{t}{(t^2+r^2)^{k-1}}+(2k-3)I_{k-1}\right)$。因此也可以积出来。

① 若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$（关于 $\cos x$ 是奇函数），则可令 $t=\sin x$，如本例(2)；

② 若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$（关于 $\sin x$ 是奇函数），则可令 $t=\cos x$；

③ 若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，则可令 $t=\tan x$，如本例(3)。

三角有理积分：(1) 万能公式 (2) 根据上述法则判断是凑 sin, cos, tan 的哪一个

$R(u,v)$ 表示由 u,v 及常数经有限次的“+，−，×，÷”运算得到的二元函数(二元有理函数)。下列积分经给定的换元都可化为有理函数的积分：

(1) 三角函数的有理式的积分 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$。经过万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$，则有

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t。$$

代入到积分表达式中可将该积分化为有理函数的积分。

(2) 三角函数代换法

若积分形式为 $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{d}x\,(a>0)$，则取换元 $x=a\sin t$；

若积分形式为 $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\mathrm{d}x\,(a>0)$，则取换元 $x=a\tan t$；

若积分形式为 $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\mathrm{d}x\,(a>0)$，则取换元 $x=a\sec t$。

经上述代换，相应的积分都可以化为三角函数有理式的积分。

(3) 某些根式的换元法　下列积分经给定的换元都可化为有理函数的积分。

若积分形式为 $\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$，则取换元 $u=\sqrt[n]{ax+b}$；

若积分形式为 $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$，则取换元 $u=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$；

若积分形式为 $\int R(\sqrt[p]{x},\sqrt[q]{x})\mathrm{d}x$，则取换元 $x=u^n$，其中 n 是 p,q 的最小公倍数。

不定积分例题

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$;
2. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$;
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x$;
5. $\displaystyle\int x\arctan x\mathrm{d}x$(反对幂指三)
6. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

定积分的计算方法

主要手段：牛顿-莱布尼兹公式, 分部积分公式

小技巧：

1. 利用奇偶性、周期性化简

(1) 对称奇偶性(偶倍奇零) 设 $f(x)$ 可积，积分区间关于原点对称，则：

如果 $f(x)$ 是偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，则

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\delta} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-\delta}^{0} f(x)\mathrm{d}x;$$

如果 $f(x)$ 是奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$，则

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\mathrm{d}x = 0。$$

(2) 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上以 T 为周期的连续周期函数，则对任何实数 a, b，恒有

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x。$$

定积分的计算方法

2.Wallis 公式

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{N为正偶数}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & \text{N为大于1的正奇数}\end{cases}$$

非常好用的公式，熟记!

3. **区间再现公式及三角函数推论**

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b (f(x)+f(a+b-x))dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)dx$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

例题:

1. $\int_0^{\pi}\sin^5 x\sqrt{1-\sin^2 x}dx$
2. $\int_0^{\pi}x\sin^3 xdx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^3x}{sinx+cosx}dx$
4. $\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

变上限积分

掌握变上限积分的求导法则，变上限积分会出现在极限计算，证明题，微分方程求解等各类题目中：

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\phi(x)]\phi'(x)$$

若 $F(x)=\int_a^x f(t,x)dt$，则需要先换元把 $f(x,t)$ 中的 x 消去，不能直接求导！

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{\sin x^3}=$
2. 若 $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = xe^{-x}$，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$
3. 求 $F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$ 的导数
4. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且满足方程 $\displaystyle\int_0^x (e^x-2e^t)f(t)\mathrm{d}t = e^x(x^2-2x)$，求$f(x)$的表达式.

反常积分的敛散性/计算

用牛顿莱布尼兹公式计算/判断敛散性

1. 求反常积分$I=\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{x^2}dx.$
2. 判断敛散性：$\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$

敛散性判别方法：**A-D 判别法**，Cauthy 准则，比较判别法 (提高卓越的同学务必掌握，基本必考)

微分方程

掌握课本上关于微分方程各种解法：

1. 分离变量方程
2. 一阶线性微分方程

(3) 一阶线性方程　标准形式为$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$，其中 $P(x),Q(x)$ 均为连续函数。该方程的通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$。

3. 伯努利方程

(4) 伯努利方程　标准形式为$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$，其中 $P(x),Q(x)$ 均为连续函数，$\alpha\neq 0,1$。

方程两端同除 y^{α}，凑微分可得$\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{d(y^{1-\alpha})}{dx}+P(x)y^{1-\alpha}=Q(x)$。令 $z=y^{1-\alpha}$ 可化为一阶线性方程 $\frac{dz}{dx}+(1-\alpha)P(x)z=(1-\alpha)Q(x)$。

微分方程的解法

4. 齐次方程

方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$通常称为齐次方程. 作函数变换$u = \frac{y}{x}$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

于是

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u) - u. \tag{6.1.6}$$

(1) 若$f(u) - u = 0$, 得k个实根$u_1, u_2, \cdots, u_k$, 则$y = u_1 x, y = u_2 x, \cdots, y = u_k x$都是原方程的解.

(2) 若$f(u) - u \neq 0$, 则由(6.1.6)式得

$$\int \frac{1}{f(u) - u}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + C.$$

5. 可降阶的微分方程

(1) 形如 $y^{(n)} = f(x)$的方程。通过 n 次积分即可求出这类方程的通解。

(2) 形如 $F(x, y', y'') = 0$ 的方程(不显含未知函数 y)。令 $y' = p(x)$，则该方程可化为一阶方程 $F(x, p, p') = 0$。

(3) 形如 $F(y, y', y'') = 0$ 的方程(不显含自变量 x)。将 y 看成自变量，令 $y' = p(y)$，则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$。该方程化为一阶方程 $F\left(y, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = 0$。

6. 参数方法解微分方程

例题

1. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.
2. $yy'' + (y')^2 = 0$.
3. $y - (y')^5 - (y')^3 - y' - 5 = 0$.

常微分方程

现在将关于二阶方程的结论推广到一般线性齐次方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0, \tag{5}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常系数,$n\geqslant 2$.与方程(2)对应,方程(5)的特征方程是

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0, \tag{6}$$

称方程(6)的根为特征根.每个特征根对应方程(5)的一定的解,依情况分述于下.

1° 单重实特征根 λ 对应方程(5)的解 $y=\mathrm{e}^{\lambda x}$(与前述的情形 1 对照).

2° $k(k\geqslant 2)$重实特征根对应方程(5)的 k 个解 $y_1,y_2,\cdots,y_k$:$y_j=x^{j-1}\mathrm{e}^{\lambda x}(1\leqslant j\leqslant k)$(对照情形 2).

3° 单重共轭复根 $\lambda=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ 对应方程(5) 的一对解 $y_1=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, y_2=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$(对照情形 3).

4° $k(k\geqslant 2)$重共轭复根 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ 对应方程(5)的 k 对解 $x^{j-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, x^{j-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ $(1\leqslant j\leqslant k)$.

注6.1.27 关于常系数非齐次线性微分方程(6.1.21)的特解的另一求法——待定系数法:

(1) 如果$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, 其中$P_m(x)$是关于$x$的$m$次多项式, α为实常数. 则常系数非齐次线性微分方程(6.1.21)有一特解

$$y^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x},$$

注6.1.27

其中$Q_m(x)$是关于x的系数待定的m次多项式, k是特征方程(6.1.23)的特征根α的重数(当α不是特征根时, $k=0$).

(2) 如果

$$f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}[P_{m_1}(x)\cos\beta x+Q_{m_2}(x)\sin\beta x],$$

其中$P_{m_1}(x),Q_{m_2}(x)$分别是关于x的m_1,m_2次多项式, α,β为实常数. 则常系数非齐次线性微分方程(6.1.21)有一特解

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\alpha x}[\bar{P}_m(x)\cos\beta x+\bar{Q}_m(x)\sin\beta x],$$

其中$\bar{P}_m(x),\bar{Q}_m(x)$是关于$x$的系数待定的$m=\max\{m_1,m_2\}$次多项式, k是特征方程(6.1.23)的特征根$\alpha\pm\beta\mathrm{i}$的重数(当$\alpha\pm\beta\mathrm{i}$不是特征根时, $k=0$).

例题:

1.$y''-2y'-3y=3x+1.$

2.$y''-5y'=-5x^2+2x.$

3.$y'''+3y''+3y'+y=\mathrm{e}^{-x}(x+5)$

4.$y''-2y'+3y=\mathrm{e}^{-x}\cos x.$

关于证明题

你可能需要掌握以下知识:

1. 连续性:介质定理,最值定理
2. 导数:导数的介质性,**合适的泰勒展开**,K 值法
3. 积分:**Cauthy-Schwarz 不等式**,**积分第一中值定理**,**变上限积分证明不等式**

eg1: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,$f'(a)=f'(b)=0$,证明:存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(a)-f(b)|$

eg2: 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上单调递减的连续函数,则有 $\int_a^b(x-a)^3f(x)dx\leq\frac{(b-a)^3}{4}\int_a^b f(x)dx$,

eg3: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的导数,$f(a)=0$ 证明: $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$

祝大家取得满意的成绩！