问题 试证恒等式 ：$\arctan a-\arctan b=\arctan\frac{a-b}{1+ab}$ （$a>0,b>0$），

并证明$S_n=\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{2k^2}<\frac{\pi}{4}$.

证 记$\alpha=\arctan a\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta=\arctan b\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\alpha-\beta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.而

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{a-b}{1+ab},$$

故$\alpha-\beta=\arctan\frac{a-b}{1+ab}$，即$\arctan a-\arctan b=\arctan\frac{a-b}{1+ab}$.

注意$\arctan\frac{1}{2k^2}=\arctan\frac{(2k+1)-(2k-1)}{1+(2k+1)(2k-1)}=\arctan(2k+1)-\arctan(2k-1)$ ，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{2k^2}=\sum_{k=1}^{n}\left[\arctan(2k+1)-\arctan(2k-1)\right]$$

$$=\arctan(2n+1)-\arctan 1<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

课堂问题 讨论函数$y=f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$的有界性，并求函数$f(x)$的最大值。

解 显然$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}>0$， 注意$1+x^4\geq 2x^2$，又有

$$f(x)=\frac{1}{1+x^4}+\frac{x^2}{1+x^4}<1+\frac{1}{2},$$

故$f(x)$有界.

令$1+x^2=t$，则$t\geq 1$.

$$y=f(x)=\frac{t}{t^2-2t+2}=\frac{1}{t+\frac{2}{t}-2},$$

由平均值不等式知$t+\frac{2}{t}\geq 2\sqrt{2}$，且在$t=\sqrt{2}$时等式成立。故

$$y=f(x)\leq\frac{1}{2\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2},$$

函数最大值$f_{\max}$为$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，在$x=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$时取得。