在极限计算中，微分中值公式的使用常能大大降低计算量， 从下面的极限计算问题可见其功效.

问题一 求极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$.

解 因为分母 $g(x)=\tan x-\sin x=\tan x\cdot(1-\cos x)\sim\dfrac{1}{2}x^3$，

也有

$$\tan(\sin x)-\sin(\sin x)\sim\frac{1}{2}(\sin x)^3\sim\frac{1}{2}x^3,$$

所以对分子作拆分

$$f(x)=\big(\tan(\tan x)-\tan(\sin x)\big)+\big(\tan(\sin x)-\sin(\sin x)\big).$$

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3/2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^3}+2\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2\xi\cdot(\tan x-\sin x)}{x^3}+1$$ (中值 ξ 介于 $\tan x$ 与 $\sin x$ 之间)

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}+1$$ (当 $x\to 0$ 时，由迫敛性知 $\xi\to 0$，进而 $\sec^2\xi\to 1$)

$$=1+1=2.$$

问题二 求极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x+e^{\tan x})^{\frac{1}{x}}-(\tan x+e^{\sin x})^{\frac{1}{x}}}{x^3}$.

解 注意

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(\sin x+e^{\tan x})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+e^{\tan x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{e^{\tan x}-1}{x}\right)=2\ ,$$

同理 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(\tan x+e^{\sin x})=2$.

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(\sin x+e^{\tan x})}-e^{\frac{1}{x}\ln(\tan x+e^{\sin x})}}{x^3}$$ (对函数 e^t 用微分中值公式)

$$=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\xi}\cdot\frac{\frac{1}{x}\ln(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x})-\frac{1}{x}\ln(\tan x+\mathrm{e}^{\sin x})}{x^3}$$

（中值 ξ 介于 $\frac{1}{x}\ln(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x})$ 与 $\frac{1}{x}\ln(\tan x+\mathrm{e}^{\sin x})$ 之间）

（由迫敛性知中值 $\xi\to 2$ ）

$$=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x})-\ln(\tan x+\mathrm{e}^{\sin x})}{x^4}$$ （对函数 $\ln t$ 用微分中值公式）

$$=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\eta}\cdot\frac{(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x})-(\tan x+\mathrm{e}^{\sin x})}{x^4}$$ （中值 $\eta\to 1$ ）

$$=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}-\tan x-(\mathrm{e}^{\sin x}-\sin x)}{x^4}$$ （对函数 e^t-t 用微分中值公式）

$$=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{\zeta}-1\right)\cdot\frac{\tan x-\sin x}{x^4}$$ （中值介于 $\sin x$ 与 $\tan x$ 之间，$\zeta\to 0$，$\frac{\zeta}{x}\to 1$ ）

$$=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\zeta}-1}{\zeta}\cdot\frac{\zeta}{x}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{x^3}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2\ .$$