导数与微分习题课

1. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是( ).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$ 存在　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

分析　极限式中若没有 a 点函数值信息，则函数在 a 点可以任意定义值不影响 B、C 极限存在但可以让函数在 a 点不连续，而连续是可导的必要条件. 故排除 B、C.

$$f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\overset{h=\frac{1}{\Delta x}}{=}\lim_{h\to+\infty} h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)],$$

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\overset{h=-\Delta x}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$

故选 D.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, x\le 1,\\ x^2,\quad x>1,\end{cases}$　则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的（　）.

(A)左、右导数都存在　(B)左导数存在,但右导数不存在

(C)左导数不存在,但右导数存在　(D)左、右导数都不存在

分析　函数仅有左连续，没有右连续,右导数也就不存在，排除 A、C. 再用定义知

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=2,$$

故选 B.

3. 设 $f(x)=2^x+|x|x^3$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为( ).

(A) 1,　(B) 2,　(C) 3,　(D) 4.

分析　指数函数有任意阶导数，只考虑 $g(x)=|x|x^3$ 在 $x=0$ 的高阶导数即可. 而

$$g(x)=\begin{cases} x^4, x\ge 0 \\ -x^4, x<0 \end{cases},$$

$$g'(x)=\begin{cases} 4x^3, x>0 \\ -4x^3, x<0 \end{cases},\qquad \text{注意 } g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|x^3}{x}=0\,,$$

所以 $g'(x)=4x^2|x|$．类似地 $g''(x)=12x|x|$， $g'''(x)=24|x|$， $g^{(4)}(0)$ 不存在，故选 C.

4. 设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$， 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的（ ）.

(A)充分必要条件　　(B) 充分条件但非必要条件

(C)必要条件但非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

分析 记 $g(x)=f(x)|\sin x|$，因 $F(x)=f(x)+g(x)$，只需考虑 $g(x)$ 在 0 点的可导条件.

$$g'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)|\sin x|}{x}=-f(0),\quad g'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)|\sin x|}{x}=f(0).$$

故 $g(x)$ 在 0 点可导的充分必要条件为 $f(0)=0$，选 A.

5. 设函数 $f(x)$ 满足 $|f(x)|\le x^2$， $x\in N(0,\delta)$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ ）.

(A)间断点　　(B)连续但不可导的点

(C)可导的点，且 $f'(0)=0$　　(D)可导的点，且 $f(x)$ 在 $N(0,\delta)$ 内连续

分析　由 $0\le|f(x)|\le x^2$，知 $f(0)=0$ 且 $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$，记 $x=0$ 是 $f(x)$ 的连续点。又

$$0\le\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le|x|,$$

所以 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$，即 $f'(0)=0$ 。故选 C.

注　$f(x)=x^2D(x)=\begin{cases} x^2, & x\text{为有理数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$，该函数在 $x=0$ 处可导. 但在邻域 $N(0,\delta)$ 内不能连续.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有连续的一阶导数, 且 $f'(1)=2$, 求 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{d}{dx}f(\cos\sqrt{x-1})$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(\cos\sqrt{x-1})\cdot\dfrac{-\sin\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$

$$=f'(\lim_{x\to 1^+}\cos\sqrt{x-1})\cdot\frac{-1}{2}=f'(1)\cdot\frac{-1}{2}=-1.$$

7. 设函数 $f(x)$ 在 a 点可导， $f(a)\neq 0$ ，求 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$.

解 先求

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left|f(a+\frac{1}{n})\right|-\ln\left|f(a)\right|}{\frac{1}{n}}$$

$$=\left\{\ln\left|f(x)\right|\right\}'\Big|_{x=a}=\frac{f'(a)}{f(a)},$$

或

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}-1\right)$$

$$=\frac{1}{f(a)}\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}=\frac{f'(a)}{f(a)},$$

原极限 l 为 $\exp\left(\dfrac{f'(a)}{f(a)}\right)$.

另法 利用 a 点函数的可微有 $f(a+\dfrac{1}{n})=f(a)+f'(a)\dfrac{1}{n}+o(\dfrac{1}{n})$ ，有

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}=\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{f(a)+f'(a)\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})}{f(a)}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{f'(a)}{f(a)}\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{f'(a)}{f(a)}\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right)=\frac{f'(a)}{f(a)}.$$

8. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)=0$，且 $f'_+(a), f'_-(b)$ 同号，则 $\exists\ c\in(a,b)$：$f(c)=0$.

证 不妨设 $f'_+(a)>0, f'_-(b)>0$. 利用极限的保号性,

由 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，知 $\exists x_1\in\left(a,a+\delta\right)$：$f(x_1)>f(a)=0$；
由 $f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$，知 $\exists x_2\in\left(b-\delta,b\right)$：$f(x_2)<f(b)=0$.
连续函数 $f(x)$ 在两点 x_1,x_2 取值异号，由零点定理知 $\exists\ c\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$：$f(c)=0$.

9. 设 $y-xe^{y-1}=1$，求 $y'(0)$，y''，$y''(0)$.

解 隐函数方程求导有 $y'-(e^{y-1}+x\cdot e^{y-1}\cdot y')=0$，即

$$y'=\frac{e^{y-1}}{1-xe^{y-1}},$$

当 $x=0$ 时 $y=1$， 故 $y'(0)=1$.

注意，隐函数导数有变化形式如 $y'=\dfrac{1}{e^{1-y}-x}$，$y'=\dfrac{e^{y-1}}{2-y}$ 等，选一个利于再求导的形式。

$$y''=\left(\frac{1}{e^{1-y}-x}\right)'=\frac{-(e^{1-y}-x)'}{(e^{1-y}-x)^2}=\frac{1+y'e^{1-y}}{(e^{1-y}-x)^2},$$

$y''(0)=2$.

10. 设曲线方程为 $\begin{cases}x=t^2+1\\ y=4t-t^2\end{cases}$ $(t>0)$，过点 $(-1,0)$ 作曲线的切线，求切线方程.

解 设切点为 $(t_0^2+1,\ \ 4t_0-t_0^2)$，

切线斜率 k 为 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t_0}=\dfrac{4-2t_0}{2t_0}=\dfrac{2-t_0}{t_0}$，

又用两点坐标得斜率k应为 $\dfrac{4t_0-t_0^2-0}{t_0^2+1-(-1)}=\dfrac{4t_0-t_0^2}{t_0^2+2}$,

解得$t_0=1$. 切点为$(2,3)$，切线为：$y=x+1$.

11. 设$\begin{cases}x=te^t,\\ ty+e^y=e,\end{cases}$求$\dfrac{dy}{dx}$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

解 注意$t=0,x=0,y=1$。 $x_t'=(t+1)e^t$， $x_t'\big|_{t=0}=1$；

由 $ty_t'+y+e^y y_t'=0$ 得 $y_t'=-\dfrac{y}{t+e^y}$， $y_t'\big|_{t=0}=-e^{-1}$；

所以 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{(t+1)e^t(t+e^y)}$， $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-e^{-1}$.

因为 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx})=\dfrac{d\dfrac{dy}{dx}}{dt}/x_t'$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=\left.\frac{-y_t'(t+1)e^t(t+e^y)+y\left\{(t+1)e^t(t+e^y)\right\}_t'}{(t+1)^2e^{2t}(t+e^y)^2}\right|_{t=0}/1,$$

求得 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=2e^{-1}+e^{-2}$.

12. 设$y=ke^x+c$，$k\neq 0$，其反函数为$x=\varphi(y)$，求$\varphi''(y)$.

解 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{y'}=\dfrac{1}{ke^x}=\dfrac{1}{k}e^{-x}$，

$$\varphi''(y)=\frac{d}{dy}(\frac{1}{k}e^{-x})=\left(\frac{1}{k}e^{-x}\right)'/y'=\frac{-1}{k}e^{-x}/(ke^x)$$

$$=\frac{-1}{k^2e^{2x}}.$$

注 事实上反函数为 $x=\varphi(y)=\ln\dfrac{y-c}{k}$，$\varphi'(y)=\dfrac{1}{y-c}$，$\varphi''(y)=\dfrac{-1}{(y-c)^2}$.

13. 设$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ ax^2+bx+c, & x\geq 0\end{cases}$, $f''(0)$存在, 确定常数a,b,c.

解 $f''(0)$ 存在 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $N(0,\delta)$ 内存在，且 $f'(x)$ 在 0 点连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 0 点连续，且 $f(x)$ 在 $N(0,\delta)$ 内也连续.

（1）由 0 点连续得 $f(0+)=f(0-)\Rightarrow c=1$。

（2）注意 $f'(x)=\begin{cases} e^x, x<0 \\ 2ax+b, x>0 \end{cases}$，有 $f'(0+)=b, f'(0-)=1$。

由 $f'(x)$ 在 0 点连续得 $f'(0+)=f'(0-)=f'(0)\Rightarrow b=1, f'(0)=1$。

（3）又 $f''(0)$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(2ax+1)-1}{x}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

14. 若 $f(1)=1$, $xf'(x)+2f(x)=0$, 求 $f(2)$.

解 方程可变为

$$x^2f'(x)+2xf(x)=0，即 \left(x^2f(x)\right)'=0.$$

故 $x^2f(x)=C$. 由 $f(1)=1$ 知 $C=1$, 故 $f(2)=1/4$.

注 若 $x>0,\alpha>1$ 时，$xf'(x)+\alpha f(x)=0$，则 $\left(x^\alpha f(x)\right)'=0$.

15. 若 $f(x)$，$x\in(0,+\infty)$ 满足 $\forall x,y>0$，$f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f'(1)=1$，求 $f(x)$.

解 易得 $f(1)=0$，而

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f[x(1+h/x)]-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h/x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h/x)-f(1)}{h}=f'(1)\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}, \end{aligned}$$

所以 $f(x)=\ln x+C$, 由 $f(1)=0$ 得 $C=0$. 即 $f(x)=\ln x$.

16. 设 $y=\cos^4 x+\sin^4 x$，求 $y^{(n)}$（$n>1$）.

解 $y=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2(2x)=1-\dfrac{1}{4}(1-\cos 4x)$,

$n>1$，$y^{(n)}=\dfrac{1}{4}\left(\cos(4x)\right)^{(n)}=4^{n-1}\cos(4x+\dfrac{n\pi}{2})$.

17. 求 $y=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数.（$n>2$）

解 记 $u=x^2$，它的三阶以上的导数为零，记 $v=\ln(1+x)$，

$$v^{(k)}=[\ln(1+x)]^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},\ k=1,2,\cdots,$$

用莱布尼茨公式：$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$ 有

$$y^{(n)}=x^2v^{(n)}(x)+2nxv^{(n-1)}(x)+n(n-1)v^{(n-2)}(x).$$

所以 $y^{(n)}(0)=n(n-1)v^{(n-2)}(0)$

$$=(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}.$$

18. 设 $y=\arcsin x$，求 $y^{(n)}(0)\quad(n>1)$.

解 因 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，有 $(1-x^2)y'^2=1$，求导有

$$-2xy'^2+(1-x^2)2y'y''=0,$$

化简得

$$-xy'+(1-x^2)y''=0.$$

上式两边再求 n 阶导数得

$$-(xy^{(n+1)}+ny^{(n)})+(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}=0\quad（n>1）$$

令 $x=0$ 得

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)\quad,$$

故 $y^{(2m)}(0)=0$，$m=0,1,2\cdots$

$y'(0)=1$，$y^{(2m+1)}(0)=[(2m-1)!!]^2, m=1,2,\cdots.$