

华中科技大学 2025-2026学年 第一学期

微积分A 试卷（模拟卷）

院(系) _____ 班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____

试卷卷面成绩						
题 号	一	二	三	四	五	小 计
得 分						

得分

一、单项选择题(共5小题, 每小题3分, 共15分)

自觉遵守考试规则, 诚信考试, 绝不作弊

1. 下列极限值为1的是 ()
- (A) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$ (B) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$
 (C) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$ (D) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$
2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (k 为常数), 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导但导数不连续, 则 k 的取值范围为 ()
- (A) $k > 1$ (B) $1 < k \leq 2$ (C) $k > 2$ (D) $0 < k \leq 1$
3. 设函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 且 $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, 则下列说法正确的是 ()
- (A) $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 也是拐点
 (B) $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极小值点, 但是拐点
 (C) $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极小值点, 也不是拐点
 (D) $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 但不是拐点
4. 已知函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 且 $f(a) \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right]^n$ 的值为 ()
- (A) $e^{\frac{f(a)}{f'(a)}}$ (B) $(2)e^{f(a)f'(a)}$ (C) $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$ (D) $e^{f'(a) - \frac{1}{f(a)}}$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right) = (\quad)$

(A) 0

(B) 2

(C) 3

(D) 4

得分

二、填空题(共5小题, 每小题4分, 共20分.)

6. 函数 $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ ($x > 0$), 求 $y(x)$ 在 $x = 1$ 处切线的斜率 _____

7. 把椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的上半部分绕 x 轴旋转一周得到一旋转椭球面, 求这个旋转椭球面的表面积 _____

8. 求不定积分 $\int (\sin x) \ln(\tan x) dx = \text{_____}$

9. 计算定积分 $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot \ln(\cos x)}{1 + \sin x + \cos x} dx = \text{_____}$

10. 设正数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n = \frac{x_{n+1}}{\sqrt[4]{1 - x_{n+1}}} (n \geq 0)$. 则 $A \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \text{_____}$; 再计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln n} (nx_n - A) = \text{_____}$.

得分

三、计算题(共5小题, 每小题7分, 共35分)

11. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} [1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2]$

12. 已知 $y = \int_1^{x^2} e^{-(t-1)^2} dt + 2x^2$, 计算 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=1}$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

13. 设函数 $F(x) = \int_0^x \frac{t^{2025}}{1+t^2} dt$, $f(x) = e^{-x} F(x)$, $n \in \mathbb{N}_+$.

- (1) 求 $F^{(n)}(0)$, $n \leq 2025$.
- (2) 求 $f^{(n)}(0)$, $n \leq 2025$.

14. 求不定积分 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} dx$

15. 设 $I_n = n \int_1^a \frac{1}{1+x^n} dx$, 其中 $a > 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$

得分

四、应用题(共2大题，每小题8分，共16分)

16. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - 1 - ax - \frac{1}{2}a^2x^2}{x^3}, & x \neq 0, \\ b, & x = 0 \end{cases}$$

其中 a 为非零常数， b 为常数。求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

17. 设平面图形 D 由曲线 $y = x^2$ 、直线 $x = 0$ 、 $x = a$ ($a > 0$) 及 x 轴围成。 V_x 、 V_y 分别是 D 绕 x 轴、 y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y = 4V_x$ ，求常数 a 的值。

得分

五、证明题(共2大题，每小题7分，共14分)

18. 设 f 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可微，且已知

$$M_0 = \sup\{|f(x)| \mid x \in (0, +\infty)\}, \quad M_2 = \sup\{|f''(x)| \mid x \in (0, +\infty)\}$$

为有限数。证明 $M_1 = \sup\{|f'(x)| \mid x \in (0, +\infty)\}$ 也是有限数，并满足不等式

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

19. 下面是法国著名数学家埃尔米特(Hermite, 又译作厄米)对 π 为无理数的证明，请你阅读并对证明过程中的三个重要步骤给出证明：

使用反证法，设 π 为有理数，即 $\pi = \frac{u}{v}$ ，这里 u, v 是互素的整数

考虑数列 $I_n = \frac{v^{2n}}{n!} \int_0^\pi x^n (\pi - x)^n \sin x dx$ ，请证明

(1) $I_n > 0$ ，且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ ；

(2) $I_0 = 2$, $I_1 = 4v^2$;

(3) 用分部积分法证明 I_n 的递推公式

$$I_n = 2v^2(2n-1)I_{n-1} - v^4\pi^2 I_{n-2} = 2v^2(2n-1)I_{n-1} - u^2v^2 I_{n-2}$$

由此可知 I_n 均为正整数，但这与(1)矛盾，故假设不成立， π 是无理数。