幂指式的极限 $\lim u^{v}=\exp\{\lim v\ln u\}$

(1) 若$u\to a\ (a>0), v\to b$,（a,b为常数）,则

$$\lim u^{v}=\exp\{b\ln a\}=a^{b}.$$

(2) 若$u\to 1, v\to\infty$,则幂指式u^{v}是典型未定式1^{∞}, 注意$u\to 1,\quad \ln u\sim u-1$，极限计算可简化为

$$\lim u^{v}=\exp\left\{\lim(v\cdot\ln u)\right\}=\exp\left\{\lim v\cdot(u-1)\right\}.$$

几个常用等价无穷小

$1-\cos□\sim\frac{1}{2}\cdot□^{2}\qquad \tan□-\sin□\sim\frac{1}{2}\cdot□^{3}\quad (□\to 0)$

$a^{□}-1\sim□\cdot\ln a\quad e^{□}-1\sim□$

$\ln(1+□)\sim□\qquad (1+□)^{\alpha}-1\sim\alpha\cdot□\quad (□\to 0)$

例 1 求解下列各题

（1）$l=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^{2}}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n}}$.

解 当$\theta=0$时，数列为常值列极限为 1；

当$\theta\neq 0$时（n充分大时，$\sin\frac{\theta}{2^{n}}\neq 0$）

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^{2}}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n}}\cdot\sin\frac{\theta}{2^{n}}}{\sin\frac{\theta}{2^{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta}{2^{n}\sin\frac{\theta}{2^{n}}}=\frac{\sin\theta}{\theta}.$$ （利用了$\sin\frac{\theta}{2^{n}}\sim\frac{\theta}{2^{n}}$）

综上 $l=f(\theta)=\begin{cases}\frac{\sin\theta}{\theta},\theta\neq 0,\\ 1,\qquad \theta=0.\end{cases}$

注 $f(\theta)$是处处连续的函数. 且$\left|f(\theta)\right|\le 1$

（2）$l=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\right]\cdot\frac{1}{x}$.

解 利用不等式

$$x-1<[x]\le x,$$

当 $x>0$ 时,

$$1-\frac{1}{x}=(x-1)\cdot\frac{1}{x}<[x]\cdot\frac{1}{x}\le 1,$$

而 $x<0$ 时,上面的不等式反向成立.

由 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})=1$ 及夹逼原理得所求极限为 1.

（3）$l=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2})^{cn}$. （$a,b,c$ 为常数）

解 $l=\exp\{\lim\limits_{n\to\infty}cn\ln(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2})\}$

$=\exp\{\lim\limits_{n\to\infty}cn(\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2})\}=\mathrm{e}^{ac}$.

（4）$l=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ $(a>0)$.

解 $l=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}\ln a}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n}\ln a=\ln a$. （利用了 $\mathrm{e}^{\square}-1\sim\square$）

注 一个**典型错误**如下

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{1+(a-1)}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n}\left(a-1\right)=a-1.$$

错误原因知道吗？

（5）$l=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_m}}{m})^n$ （$a_i>0,i=1,2,\cdots,m$） .

解 $l=\exp\{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\}$

$=\exp\{\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_m}}{m}-1)\}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_m}}{m}-1)$

$=\frac{1}{m}\left\{\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a_1}-1)+\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a_2}-1)+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a_m}-1)\right\}$

$=\frac{1}{m}\left\{\lim\limits_{n\to\infty}n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln a_1}-1)+\lim\limits_{n\to\infty}n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln a_2}-1)+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln a_m}-1)\right\}$

$$=\frac{1}{m}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_m)=\ln\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}$$

所以 $l=\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}$.

注 该题的另一个形式 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a_1{}^x+a_2{}^x+\cdots+a_m{}^x}{m}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}$ ，当幂次趋于零时，幂平均值变成了几何平均值

（6）$l=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{2x}}$

解 $l=\exp\{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{2x}\}$.

$$=\exp\{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}(\cos\sqrt{2x}-1)\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{2x})^2\right)\right\}=\mathrm{e}^{-1}.$$

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos(2x)}\cdot\sqrt[3]{\cos(3x)}}{x^2}$.

解 分子 $=1-\exp\{\ln\cos x+\frac{1}{2}\ln\cos(2x)+\frac{1}{3}\ln\cos(3x)\}$ （利用了 $\mathrm{e}^{\square}-1\sim\square$）

$$\sim-\{\ln\cos x+\frac{1}{2}\ln\cos(2x)+\frac{1}{3}\ln\cos(3x)\}.$$

原式 $=-\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}+\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos(2x)}{x^2}+\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos(3x)}{x^2}\right)$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x^2}-\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-1}{x^2}$ (利用了 $\ln u\sim u-1\quad(u\to 1)$）

$=(1+2+3)/2=3$.

（8）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$,确定常数 a,b 的值.

解 若 $a\neq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{1-x^{-1}+x^{-2}}-a)=\infty$,

与条件矛盾，故 $a=1$.

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{1-x^{-1}+x^{-2}}-1)$ （利用 $(1+\square)^{\alpha}-1\sim\alpha\cdot\square\quad(\square\to 0)$ ）

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{2}\left(-x^{-1}+x^{-2}\right)=-\frac{1}{2}$,

所以 $b=-\frac{1}{2}$.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}-x\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\left(\sqrt[n]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_n}{x})}-1\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\left(\exp\{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_n}{x})\}-1\right)$

$=\frac{1}{n}\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\left(\ln(1+\frac{a_1}{x})+\ln(1+\frac{a_2}{x})+\cdots+\ln(1+\frac{a_n}{x})\right)$

$=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

或原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\left(\sqrt[n]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_n}{x})}-1\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{n}\left((1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_n}{x})-1\right)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} n\tan(\pi\sqrt{n^2+1})$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n\tan(\pi(\sqrt{n^2+1}-n))$

$$=\lim_{n\to\infty} n\tan\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{1+\sqrt{n^{-2}+1}}=\frac{\pi}{2}.$$

(11) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ （$a>0$）.

解 原式 $=a^a\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{x\ln x-a\ln a}-1}{x-a}=a^a\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x\ln x-a\ln a}{x-a}$

$$=a^a\{\lim_{x\to a}\frac{x\ln x-a\ln x}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{a\ln x-a\ln a}{x-a}\}$$

$$=a^a\{\ln a+a\lim_{x\to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{x-a}\}=a^a\{\ln a+a\lim_{x\to a}\frac{\frac{x}{a}-1}{x-a}\}$$

$$=a^a(\ln a+1).$$

（12） 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)=0$，确定 p 的范围.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x+1}}\cdot x^p\left(e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^p\cdot(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x(x+1)},$$

由条件知 $p<2$.

练习（1）$\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{n}(\tan\dfrac{x}{\sqrt{n}}-\sin\dfrac{x}{\sqrt{n}})$. （答案 $\dfrac{1}{2}x^3$）

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e^{\sin x}}-e^{e^x}}{\sin x-x}$. （答案 e）

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$.　　（答案$\dfrac{1}{4}n(n+1)$）

（4）$\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}-x)^{\frac{1}{\sin x}}$.　　（答案$e^{-1}$）

（5）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.　　（提示：$1-\sqrt[k]{x}\sim\dfrac{1}{k}(1-x)$,答案$\dfrac{1}{n!}$）

（6）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.　　（提示：和差化积，极限为 0）

（7）设$a_0\in(-1,1)$，$a_n=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}a_{n-1}}$,$n\geq 1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_1a_2\cdots a_n$.

（提示：令$a_0=\cos\theta,\theta\in(0,\pi)$，则$a_n=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，变化为例 1.）

（8）$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{x^x-e^e}{x-e}$.　　（答案为$2e^e$）

例 2　设$x_0=\alpha\in R$, $x_n=\sin x_{n-1},n\geq 1$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　$x_1=\sin\alpha\in[-1,1]$, 分三个情形:

①若$x_1=0$, 则$x_n\equiv 0(n>1)$, 极限为 0.

②若$x_1\in(0,1]$, 则$x_2=\sin x_1<x_1$,　且$x_n=\sin x_{n-1}<x_{n-1}(n>1)$,

即数列单调递减有下界零, 故极限存在.　设极限为l,

对$x_n=\sin x_{n-1}$两边求极限得

$$l=\sin l,$$

从而$l=0$.

③$x_1<0$时, 同理求得$l=0$.

综上极限为 0.

练习　设$x_1=a>0,y_1=b>0,a<b$,且

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},\quad y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n),$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

分析 问题中的递推公式互相关联,且平均值不等式可用,考虑单调有界准则.

证 由于 $x_n > 0,\quad y_n > 0$,且

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \geq \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1},$$

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n x_n} = x_n,$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \leq \frac{1}{2}(y_n + y_n) = y_n,$$

可知 $\{x_n\}$ 为单调增加数列, $\{y_n\}$ 为单调减少数列,且 $a \leq x_n \leq y_n \leq b$,故数列 $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ 极限都存在,设极限分别为 A, B,对 $y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ 两边取极限得 $B = (A+B)/2$,故 $A = B$.

注 此题变化为: $x_1 = a > 0, y_1 = b > 0, a < b$,且

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

例 3 设 $x_0 = a, x_1 = b > a, x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 因 $x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{x_{n+1} - x_n}{2} = (-\frac{1}{2})^2 (x_n - x_{n-1})$ （递推）

$$= \cdots\cdots = (-\frac{1}{2})^{n+1}(x_1 - x_0),$$

$$x_{n+2} - x_1 = \sum_{k=0}^{n}(x_{k+2} - x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n}(-\frac{1}{2})^{k+1}(b-a) = \frac{-\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})^{n+2}}{1 - (-\frac{1}{2})}(b-a)$$

$$\to -\frac{1}{3}(b-a),$$

所以 $x_n \to \frac{a+2b}{3}$.

另法 因 $x_{n+2} + \frac{x_{n+1}}{2} = x_{n+1} + \frac{x_n}{2} = x_n + \frac{x_{n-1}}{2} = \cdots\cdots = x_1 + \frac{x_0}{2}$,

有

$$x_n = -\frac{1}{2}x_{n-1} + c,$$

这里 $c = \frac{1}{2}a + b$.

记$l=\dfrac{a+2b}{3}$，注意到$l=-\dfrac{1}{2}l+c$，下证$x_n\to\dfrac{a+2b}{3}$.

因

$$|x_n-l|=\frac{1}{2}|x_{n-1}-l|=\frac{1}{2^2}|x_{n-2}-l|\cdots=\frac{1}{2^n}|x_0-l|\to 0,$$

故$x_n\to l=\dfrac{a+2b}{3}$.

例 4 求下列函数的间断点并判断类型：

（1） $f(x)=\dfrac{|x|(x-\pi)}{\sin x}$.

解 间断点有$x=k\pi,k$为整数.

因为$f(0^-)=\pi,f(0^+)=-\pi$， 所以0是跳跃间断点;

因为$\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=\pi\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\pi}{\sin(\pi-x)}=-\pi,$ 所以π是可去间断点;

$k\neq 0,1$时，$x=k\pi$是第二类间断点.

思考 间断点将实轴分成子区间, 函数仅在区间$(0,\pi)$上有界!

（2） $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

无定义的点$x=1$及$x=0$. 因为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\infty,$$

故$x=0$是$f(x)$的无穷间断点. 又由于

$f(1^-)=0$ ， （因$\dfrac{x}{1-x}\to+\infty$，$e^{\frac{x}{1-x}}\to+\infty$）

$f(1^+)=1/\lim\limits_{x\to 1^+}(1-e^{\frac{x}{1-x}})=1$ ，（因$\dfrac{x}{1-x}\to-\infty$，$e^{\frac{x}{1-x}}\to 0$）

故$x=1$是$f(x)$的跳跃间断点.

例 5　设 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续, $\forall x>0$, $f(x)=f(x^2)$,试证： $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 取常值.

证　$\forall x>0$,

$$f(x)=f(\sqrt{x})=f(x^{\frac{1}{4}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}}),$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}})=f(1),$$

即 $f(x)$ 恒等于 $f(1)$.

练习　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,且 $\forall x>0$, $f(x)=f(2x)$,证明： $f(x)$ 是常数.

例 6 设 a_i 为常数，若不等式

$$\left|a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx\right|\le|x|,$$

对所有 $x\in R$ 成立, 证明常数 a_i 必满足

$$\left|a_1+2a_2+\cdots+na_n\right|\le 1.$$

证　由条件知

$$\left|a_1\frac{\sin x}{x}+a_2\frac{\sin 2x}{x}+\cdots+a_n\frac{\sin nx}{x}\right|\le 1,$$

对所有 $x(\neq 0)$ 成立，利用极限比较性得

$$\lim_{x\to 0}\left|a_1\frac{\sin x}{x}+a_2\frac{\sin 2x}{x}+\cdots+a_n\frac{\sin nx}{x}\right|\le 1,$$

注意 $\frac{\sin kx}{x}\to k\quad(x\to 0)$，即有

$$\left|a_1+2a_2+\cdots+na_n\right|\le 1.$$

例 7 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$. 试证存在 $x_0\in[0,1]$, 使得

$$f(x_0)=f(x_0+\frac{1}{3}).$$

证　作辅助函数 $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{3})$，则 $g(x)\in C[0,\frac{2}{3}]$.

计算知 $g(0)+g(\frac{1}{3})+g(\frac{2}{3})=0$.

若 $g(0), g(\frac{1}{3}), g(\frac{2}{3})$ 中某个为零, 则结论自明.

若 $g(0), g(\frac{1}{3}), g(\frac{2}{3})$ 都不为零, 必有两个异号, 由零点定理知结论成立.

练习题：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$. 证明存在 $x_0 \in [0,1]$, 使得 $f(x_0)=f(x_0+\frac{1}{n}), n>2$.

例 8　设 a,b,c 为正数, 试证 $\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3}=0$ 恰有两根.

证　原方程与

$$a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)=0$$

同解.

令 $f(x)=a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)$, 则

$$f(1)=2a>0, f(2)=-b<0, f(3)=2c>0,$$

由零点定理知 $f(x)$ 在 $(1,2)(2,3)$ 内分别有零点.

又因为函数 $f(x)$ 为二次函数,至多有两个零点，故 $f(x)$ 恰有两零点.

例 9　设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续,且 $f(a^+)=A, f(b^-)=B$,证明函数 $f(x)$ 有界.

证　法一　作辅助函数（将 f 延拓）

$$F(x)=\begin{cases} f(x), x\in(a,b), \\ A, \quad x=a, \\ B, \quad x=b. \end{cases}$$

则它在闭区间上是连续的,所以有界,从而 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

法二　$f(a^+)=A, f(b^-)=B$ ，利用极限的局部有界性质，函数 $f(x)$ 在 $(a,a+\delta),(b-\delta,b)$ 内有界(取 $\delta: a+\delta<b-\delta$),而在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上函数 $f(x)$ 连续必然有界,综上 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

例 10　设 $f(x)\in C[a,b]$ ，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$ ，试证明存在 $\eta\in[a,b]$ 使

$$f(\eta)=\frac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}.\text{（}\lambda_i\text{为正数）}$$

证 由条件知 $f(x)$ 存在最大值 M 与最小值 m，而

$$m\le\frac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}\le M,$$

由介值定理知存在 $\eta\in[a,b]$，$f(\eta)=\dfrac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$.

例 11 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{a^x-1}=A\quad(a>0,a\neq 1)$，$A$ 为有限数，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解 $x\to 0$ 时，$a^x-1\sim x\ln a$，由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{a^x-1}=A$ 知:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{a^x-1}\cdot(a^x-1)=A\cdot 0=0}$$

$x\to 0$ 时，$\ln(1+\dfrac{f(x)}{\sin x})$ 为无穷小，且有 $\ln(1+\dfrac{f(x)}{\sin x})\sim\dfrac{f(x)}{\sin x}\sim\dfrac{f(x)}{x}$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{a^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x\ln a}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2\ln a},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=A\ln a$.