问题 1 设 $f(x)$ 定义于 $(-\infty,+\infty)$，$f(x)\neq 0$，满足 $\forall x,y,f(x+y)=f(x)f(y)$. 若 $f'(0)=\lambda\neq 0$，证明 $f(x)$ 处处可导，并求 $f(x)$.

分析 从一点可导来推证其它点的可导性只能用定义.

证明 由条件 $\forall x,y,f(x+y)=f(x)f(y)$ 知

$$f(0)=f^2(0),\quad f(x)=f^2(\frac{x}{2}),$$

因 $f(x)\neq 0$，故 $f(x)>0$，$f(0)=1$.

任给 x，因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)f(0)}{h}$$
$$=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f(x)f'(0)=\lambda f(x),$$

所以 $f(x)$ 处处可导，且 $f'(x)=\lambda f(x)$.

从 $\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}f(x)\right)'=\mathrm{e}^{-\lambda x}\left(f'(x)-\lambda f(x)\right)=0$ 可得 $\mathrm{e}^{-\lambda x}f(x)\equiv k$，又因 $f(0)=1$，故 $k=1$，$f(x)\equiv \mathrm{e}^{\lambda x}$.

问题 2 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导且 $f(a)\neq 0$，求极限

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$$

分析 由可导必连续知 $f(a+\frac{1}{n})\to f(a)\ (n\to\infty)$，极限式为 1^∞ 型未定式.

解 先求

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}-1\right)=\frac{1}{f(a)}\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}=\frac{f'(a)}{f(a)},$$

故 $l=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.