高阶导数的莱布尼兹法则

$$\boxed{(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}}$$

证 $n=1$时，由导数计算的莱布尼兹规则知$(uv)'=u'v+uv'$成立.

假设对自然数n成立，$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$，则

$$(u\cdot v)^{(n+1)}=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}\right)'=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(u^{(k)}v^{(n-k)}\right)'$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(u^{(k+1)}v^{(n-k)}+u^{(k)}v^{(n-k+1)}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k u^{(k+1)}v^{(n-k)}+u^{(n+1)}v+uv^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k+1)}$$

$$=u^{(n+1)}v+\sum_{i=1}^{n}C_n^{i-1}u^{(i)}v^{(n-i+1)}+\sum_{k=1}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k+1)}+uv^{(n+1)}$$

$$=u^{(n+1)}v+\sum_{k=1}^{n}(C_n^{k-1}+C_n^k)u^{(k)}v^{(n-k+1)}+uv^{(n+1)}\ ,$$

利用组合恒等式$C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$得

$$(uv)^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k u^{(k)}v^{(n-k+1)}+uv^{(n+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k u^{(k)}v^{(n+1-k)}\ .$$

由数学归纳法知莱布尼兹法则对所有自然数成立！

应用举例

例 1 设 $y=e^x\sin x$，求 $y^{(n)}$.

解法一 由莱布尼兹法则可得 $y^{(n)}=\mathrm{e}^x\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\sin(x+\frac{k}{2}\pi)$.

解法二 （归纳法） $y'=\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x=\sqrt{2}\mathrm{e}^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$,

$$y''=\sqrt{2}\mathrm{e}^x\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}\mathrm{e}^x\cos(x+\frac{\pi}{4})$$

$$=(\sqrt{2})^2\mathrm{e}^x\sin\left((x+\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}\right),$$

由归纳法易得

$$y^{(n)}=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^x\sin(x+\frac{n}{4}\pi).$$

解法三 （利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ）

$$y=\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix})=\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{(1+i)x}-\mathrm{e}^{(1-i)x}),$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{2i}((1+i)^n\mathrm{e}^{(1+i)x}-(1-i)^n\mathrm{e}^{(1-i)x})$$

$$=\frac{\mathrm{e}^x}{2i}\left[\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}\right)^n\mathrm{e}^{ix}-\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^n\mathrm{e}^{-ix}\right]$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\frac{\mathrm{e}^x}{2i}\left[\mathrm{e}^{i(x+\frac{n\pi}{4})}-e^{-i(x+\frac{n\pi}{4})}\right]$$

$$=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^x\sin(x+\frac{n}{4}\pi).$$

注 这里得到三角恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin(x+\frac{k}{2}\pi)=(\sqrt{2})^n\sin(x+\frac{n}{4}\pi).$$

（用数学归纳法可直接证明该恒等式！）

例 2 设 $y=x^2\ln(1+x)$，求 $y^{(n)}(0)$ （$n\ge 2$） .

解 $y(0)=0$， $y'(0)=\{2x\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{1+x}\}\Big|_{x=0}=0$ ，

设 $u=x^2, v=\ln(1+x)$，则

$$v(0)=0，\ v^{(k)}=(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}\ （k\ge 1），$$

利用 Leibniz 规则， $n\ge 2$ 时，有

$$y^{(n)}=x^2v^{(n)}+n\cdot 2x\cdot v^{(n-1)}+C_n^2\cdot 2\cdot v^{(n-2)},$$

令 $x=0$，得 $y^{(n)}(0)=C_n^2\cdot 2\cdot v^{(n-2)}(0)=n(n-1)v^{(n-2)}(0)$，即

$$y''(0)=0，\ y^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}n(n-1)\cdot(n-3)!=(-1)^{n-1}\frac{n!}{n-2}\quad (n>2)$$

例 3 设 $y=\arctan x$，求 $y^{(n)}(0)$.

解 $y(0)=0, y'(0)=\dfrac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0}=1$.

对等式 $(1+x^2)y'=1$ 两边关于 x 求 n 阶导，

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+n\cdot 2x\cdot y^{(n)}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot y^{(n-1)}=0\ （n>1），$$

$n=1$ 时，上式即为 $(1+x^2)y''+2x\cdot y'=0$. 令 $x=0$ 得 $y''(0)=0$，且

$$y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0)\quad （n>1）.$$

由 $y(0)=0, y'(0)=1$ 得

$$y^{(2k)}(0)=0，\ y^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!.$$

恒等式

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(x+\frac{k\pi}{2}) = (\sqrt{2})^n \sin(x+\frac{n\pi}{4})}$$

的归纳证明：

$n=1$时,等式为 $\sin x+\sin(x+\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 是显然成立的.

设等式对正整数 n 时成立,即

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(x+\frac{k\pi}{2}) = (\sqrt{2})^n \sin(x+\frac{n\pi}{4}),$$

则

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \sin(x+\frac{k\pi}{2}) = \sin x + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k \sin(x+\frac{k\pi}{2}) + \sin(x+\frac{n+1}{2}\pi)$$

$$= \sin x + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \sin(x+\frac{k\pi}{2}) + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} \sin(x+\frac{k\pi}{2}) + \sin(x+\frac{n+1}{2}\pi)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(x+\frac{k\pi}{2}) + \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \sin(x+\frac{(i+1)\pi}{2}) + \sin(x+\frac{n+1}{2}\pi)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(x+\frac{k\pi}{2}) + \sum_{i=0}^{n} C_n^i \sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{i\pi}{2})$$

$$= (\sqrt{2})^n \sin(x+\frac{n\pi}{4}) + (\sqrt{2})^n \sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{4})$$

$$= (\sqrt{2})^n \left\{ \sin(x+\frac{n\pi}{4}) + \cos(x+\frac{n\pi}{4}) \right\} = (\sqrt{2})^{n+1} \sin(x+\frac{(n+1)\pi}{4}).$$