数列极限的柯西收敛准则、柯西命题

与施笃兹定理

一 柯西收敛准则

数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \quad \forall m, n > N : | x_m - x_n | < \varepsilon .$$

二 数列极限的柯西命题

(*Cauchy*) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

分析 记$\alpha_n = a_n - a$，则$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}$，只需证明

“若$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} = 0$.”

证明 由$\{\alpha_n\}$收敛知$\{\alpha_n\}$为有界数列，即$\exists M > 0, |\alpha_n| \le M$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$，所以

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \forall n > N_1, \quad |\alpha_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

当$n > N_1$时，

$$\left| \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} \right| \le \frac{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_{N_1}|}{n} + \frac{|\alpha_{N_1+1}| + \cdots + |\alpha_n|}{n}$$

$$\le \frac{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_{N_1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n - N_1}{n}$$

$$\le \frac{N_1 M}{n} + \frac{\varepsilon}{2},$$

因为$n > \dfrac{2N_1 M}{\varepsilon}$时，$\dfrac{N_1 M}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$，所以取$N = \max\left\{N_1, \left[\dfrac{2N_1 M}{\varepsilon}\right]\right\}$，$\forall n > N$，必有

$$\left| \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} - 0 \right| \le \varepsilon .$$

综上所述有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} = 0 .$$

三 数列极限的 *Stolz* 定理

定理 1 ($\frac{0}{0}$型) 设 $\{x_n\}$ 严格单减，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$， $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = l \text{（有限或无穷），}$$

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = l$. 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}.$$

定理 2 ($\frac{\infty}{\infty}$型) 设 $\{x_n\}$ 严格单增，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = l \text{（有限或无穷），}$$

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = l$. 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}.$$

用 Stolz 定理可直接得到柯西命题.

令 $x_n = n, y_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则 x_n 严格单增且 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

应用 *Stolz* 定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a,$$

即 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

利用 *Stolz* 定理（也称 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$ 为 *Stolz* 公式）求极限举例.

例 1 求极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ （p 为正整数）.

解 令 $x_n=n^{p+1}, y_n=1^p+2^p+\cdots+n^p$，则 x_n 严格单增且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}$$ (用二项式定理)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n^{p+1}+C_{p+1}^1n^p+C_{p+1}^2n^{p-1}+\cdots+1)-n^{p+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{C_{p+1}^1n^p+C_{p+1}^2n^{p-1}+\cdots+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^p}{p+1+C_{p+1}^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n^p}}=\frac{1}{p+1},$$

由施笃兹定理知，

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\frac{1}{p+1}.$$

例 2 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n+a_{n-1}q+a_{n-2}q^2+\cdots+a_1q^{n-1}\right)$ （$0<q<1$）.

解 令 $p=\frac{1}{q}(>1)$， 则

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p}{p^n}$$ （用 *Stolz* 公式）

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p)-(a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p)}{p^n-p^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_np^n}{p^n-p^{n-1}}=\frac{p}{p-1}\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{1-q}a.$$

例 3 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e}$，求极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n+1)}$.

解 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n+1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1})}{\ln(n+1)-\ln n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})^n}=1.$$