华中科技大学 2025-2026学年　第 一 学期

微积分A答案　　试卷（模拟卷 ）

院(系) ________ 班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________

试卷卷面成绩						
题　号	一	二	三	四	五	小　计
得　分						

得 分

一、单项选择题(共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1. 下列极限值为1的是（　　）

(A) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$

(C) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$　　(D) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

答案：C

解：

$$
\begin{aligned}
A.\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\tan 2x\ln\tan x}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\tan 2x(\tan x-1)}\\
&= \exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{cosx}\frac{\sin 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin 2x}{\cos x\,(\cos x+\sin 2)}\right)\\
&= e^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B.\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x} &= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty} e^{x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}\\
&= \exp\left(\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}t^2\right)\right)\\
&= e
\end{aligned}
$$

装订线内不要答题

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

$$
\begin{aligned}
C.\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\tan x\ln\sin x}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\tan x(\sin x-1)}\\
&= \exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)\sin x}{\cos x}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos(\frac{\pi}{2}-x)-1)\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{t\to 0}\frac{(\cos t-1)\cos t}{\sin t}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t^2\cos t}{t}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{t\to 0}-\frac{1}{2}t\cos t\right)\\
&= e^0 = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D.\lim_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}}\\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}(\cos\sqrt{x}-1)}\\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2\frac{1}{x}\right)\\
&= e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

2. 设函数$f(x)=\begin{cases} x^k\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$($k$为常数)，若$f(x)$在$x=0$处可导但导数不连续，则$k$的取值范围为（　　）

(A) $k>1$　　(B) $1<k\leqslant 2$　　(C) $k>2$　　(D) $0<k\leqslant 1$

答案：B

解：$x\neq 0$时，$f'(x)=kx^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{k-2}\cos\dfrac{1}{x}$，

$x=0$时，由导数定义$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^k\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}$。

由于$f(x)$在$x=0$可导，上述极限存在，故$k-1>0\Rightarrow k>1$。

又因$f(x)$在$x=0$不连续，$k-2\leqslant 0\Rightarrow k\leqslant 2$。

综上，$1<k\leqslant 2$。

3. 设函数$f(x)$的二阶导数$f''(x)$在$x=a$处连续，且$f'(a)=0$，$f''(a)=0$，$f'''(a)\neq 0$，则下列说法正确的是（　　）

(A) $x=a$是$f(x)$的极小值点，也是拐点

(B) $x=a$不是$f(x)$的极小值点，但是拐点

(C) $x=a$不是$f(x)$的极小值点，也不是拐点

(D) $x=a$是$f(x)$的极小值点，但不是拐点

答案：B
解：虽然$f'(a)=0$，但由于$f''(a)=0$，故不是极值点；同时，由于$f'''(a)\neq 0$，故为拐点。

4. 已知函数$f(x)$在$x=a$处可导，且$f(a)\neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$的值为（　　）

(A) $e^{\frac{f(a)}{f'(a)}}$　(B) $(2)e^{f(a)f'(a)}$　(C) $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$　(D) $e^{f'(a)-\frac{1}{f(a)}}$

答案：C
解：令$t=\dfrac{1}{n}$，则：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{f(a+t)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{t}}\\ &= \lim_{t\to 0}\left[1+\frac{f(a+t)-f(a)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f(a+t)-f(a)}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}\frac{1}{f(a)}}\\ &= e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}\end{aligned}$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n}(1+\dfrac{2i}{n})=($　　$)$

(A) 0　(B) 2　(C) 3　(D) 4

答案：B
解：根据定积分的定义：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(1+\frac{2i}{n}) &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}(1+\frac{2i}{n})\\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 1+x\,dx\\ &= \frac{1}{4}(1+x)|_0^2\\ &= 2\end{aligned}$$

得 分

二、填空题(共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.)

6.函数 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ $(x>0)$，求 $y(x)$ 在 $x=1$ 处切线的斜率_________

答案：$\dfrac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}\left(1+\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\right)$
解：求导得

$$y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right).$$

代入 $x=1$，注意 $\sqrt{1}=1$，$\sqrt{1+\sqrt{1}}=\sqrt{2}$，$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}=\sqrt{1+\sqrt{2}}$，于是

$$y'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}\left(1+\frac{3}{4\sqrt{2}}\right).$$

7. 把椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的上半部分绕 x 轴旋转一周得到一旋转椭球面，求这个旋转椭球面的表面积________

答案：$S=2\pi b^2+\dfrac{2\pi ab}{e}\arcsin e$，其中 $e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$ 为椭圆的离心率。
解：椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的上半部分的参数方程为

$$x=a\cos u,\quad y=b\sin u,\quad u\in[0,\pi].$$

所以有

$$\begin{aligned}
S&=2\pi\int_0^{\pi}b\sin u\sqrt{a^2\sin^2u+b^2\cos^2u}\,du\\
&=2\pi ab\int_0^{\pi}\sqrt{1-e^2\cos^2u}\sin u\,du\quad (\text{其中 } e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\text{ 为离心率})\\
&=\frac{2\pi ab}{e}\int_{-e}^{e}\sqrt{1-t^2}\,du\quad (\text{令 } t=e\cos u)\\
&=\frac{2\pi ab}{e}\left[\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\arcsin t\right]_{-e}^{e}\\
&=2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{e}\arcsin e.
\end{aligned}$$

8.求不定积分 $\displaystyle\int(\sin x)\ln(\tan x)\,dx=$ __________________

答案：$-\cos x\ln(\tan x)+\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|+C$

解：令 $u=\cos x$，则 $du=-\sin x\,dx$，于是

$$\int \sin x \ln(\tan x)\,dx = -\int \ln\left(\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\right) du.$$

分部积分，并利用 $\int \ln(\sqrt{1-u^2})\,du$ 与 $\int \ln u\,du$ 的结果，可得

$$\begin{aligned}\int \sin x \ln(\tan x)\,dx &= -\cos x \ln(\tan x) + \int \cos x \cdot \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx \\ &= -\cos x \ln(\tan x) + \int \frac{dx}{\sin x} \\ &= -\cos x \ln(\tan x) + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.\end{aligned}$$

9. 计算定积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\cdot\ln(\cos x)}{1+\sin x+\cos x}\,dx =$ ______

答案：$\ln 2-1$

解：利用对称性，令 $t=-x$，得

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\cdot\ln(\cos x)}{1+\sin x+\cos x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\cdot\ln(\cos t)}{1-\sin t+\cos t}\,dt.$$

将两式相加，分母有理化后化简，可得

$$2I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot\ln(\cos x)\,dx.$$

这是对称区间上的偶函数积分，故

$$2I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot\ln(\cos x)\,dx.$$

令 $u=\sin x$，则

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 \ln(\sqrt{1-u^2})\,du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-u^2)\,du \\ &= \frac{1}{2}\left[u\ln(1-u^2)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{u^2}{1-u^2}\,du\right]\end{aligned}$$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

计算得

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\left(0+2\int_0^1\left(-1+\frac{1}{1-u^2}\right)du\right)\\ &= \int_0^1\left(-1+\frac{1}{1-u^2}\right)du\\ &= -1+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\Big|_0^1\\ &= \ln 2-1\end{aligned}$$

10. 设正数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n=\dfrac{x_{n+1}}{\sqrt[4]{1-x_{n+1}}}$ $(n\geqslant 0)$。则 $A\equiv\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=$ ________; 再计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\ln n}(nx_n-A)=$ __________.

答案：$A=4$， $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\ln n}(nx_n-4)=-6$

解： **第一部分：证明** $A=4$

1. 变换递推关系 令

$$a_n=\frac{1}{x_n^4}>0.$$

由已知条件

$$x_n=\frac{x_{n+1}}{(1-x_{n+1})^{1/4}},$$

两边四次方得

$$x_n^4=\frac{x_{n+1}^4}{1-x_{n+1}}.$$

于是

$$\frac{1}{x_n^4}=\frac{1-x_{n+1}}{x_{n+1}^4}=\frac{1}{x_{n+1}^4}-\frac{1}{x_{n+1}^3},$$

即

$$a_n=a_{n+1}-a_{n+1}^{3/4}. \tag{1}$$

2. 单调性与极限 由(1)知 $a_{n+1}>a_n$，故 $\{a_n\}$ 严格递增。若 a_n 有上界，则存在有限极限 $L>0$。在(1)中令 $n\to\infty$ 得

$$L=L-L^{3/4}\implies L^{3/4}=0,$$

矛盾。因此 $a_n\to+\infty$，从而 $x_n=a_n^{-1/4}\to 0$。

3. 引入辅助数列 令

$$c_n=a_n^{1/4}=\frac{1}{x_n}.$$

则 $c_n\to+\infty$。由(1)得

$$c_n^4=c_{n+1}^4-c_{n+1}^3,$$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

即

$$c_{n+1}^4 - c_n^4 = c_{n+1}^3. \tag{2}$$

左边因式分解：

$$(c_{n+1} - c_n)(c_{n+1} + c_n)(c_{n+1}^2 + c_n^2) = c_{n+1}^3.$$

故 $c_{n+1} > c_n$。

4. 证明 $c_n \sim \dfrac{n}{4}$ 由(2)得

$$c_{n+1}^3(c_{n+1} - 1) = c_n^4. \tag{3}$$

令 $r_n = \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$，则 $r_n > 1$，由(3)得

$$r_n^3 c_n^3 (r_n c_n - 1) = c_n^4,$$

即

$$r_n^3 (r_n c_n - 1) = c_n.$$

整理得

$$r_n^4 = 1 + \frac{r_n^3}{c_n}. \tag{4}$$

由于 $c_n \to +\infty$，由(4)知 $r_n \to 1$。将(4)重写为

$$(r_n - 1)(r_n + 1)(r_n^2 + 1) = \frac{r_n^3}{c_n}.$$

当 n 很大时，左边渐近于 $4(r_n - 1)$，右边渐近于 $1/c_n$。因此

$$r_n - 1 \sim \frac{1}{4c_n}. \tag{5}$$

从而

$$c_{n+1} - c_n = c_n(r_n - 1) \sim \frac{1}{4}.$$

由 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (c_{n+1} - c_n) = \frac{1}{4},$$

所以

$$c_n \sim \frac{n}{4}.$$

于是

$$x_n = \frac{1}{c_n} \sim \frac{4}{n},$$

从而得到

$$A = \lim_{n\to\infty} n x_n = 4.$$

第二部分：计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(nx_n-4)$

1. 精细渐近展开 令

$$r_n = 1+\delta_n,$$

其中 $\delta_n\to 0$。将 $r_n=1+\delta_n$ 代入(4)并展开：

$$(1+\delta_n)^4 = 1+4\delta_n+6\delta_n^2+O(\delta_n^3),$$
$$1+\frac{(1+\delta_n)^3}{c_n} = 1+\frac{1}{c_n}+\frac{3\delta_n}{c_n}+\frac{3\delta_n^2}{c_n}+O\left(\frac{\delta_n^3}{c_n}\right).$$

代入(4)得

$$4\delta_n+6\delta_n^2 = \frac{1}{c_n}+\frac{3\delta_n}{c_n}+O\left(\frac{\delta_n^2}{c_n}\right). \tag{6}$$

由(5)知 $\delta_n=\frac{1}{4c_n}+o\left(\frac{1}{c_n}\right)$。为确定下一项，设

$$\delta_n=\frac{1}{4c_n}+\eta_n,\quad 其中\ \eta_n=o\left(\frac{1}{c_n}\right).$$

代入(6)：

$$4\left(\frac{1}{4c_n}+\eta_n\right)+6\left(\frac{1}{4c_n}+\eta_n\right)^2=\frac{1}{c_n}+\frac{3}{c_n}\left(\frac{1}{4c_n}+\eta_n\right)+O\left(\frac{1}{c_n^3}\right).$$

展开左边：

$$\frac{1}{c_n}+4\eta_n+6\left(\frac{1}{16c_n^2}+\frac{\eta_n}{2c_n}+\eta_n^2\right)=\frac{1}{c_n}+4\eta_n+\frac{3}{8c_n^2}+\frac{3\eta_n}{c_n}+6\eta_n^2.$$

右边为

$$\frac{1}{c_n}+\frac{3}{4c_n^2}+\frac{3\eta_n}{c_n}+O\left(\frac{1}{c_n^3}\right).$$

消去公共项 $1/c_n$，比较 $O(1/c_n^2)$ 和 $O(\eta_n/c_n)$ 项：

$$4\eta_n+\frac{3}{8c_n^2}+\frac{3\eta_n}{c_n}=\frac{3}{4c_n^2}+\frac{3\eta_n}{c_n}+o\left(\frac{1}{c_n^2}\right),$$

简化为

$$4\eta_n=\frac{3}{4c_n^2}-\frac{3}{8c_n^2}+o\left(\frac{1}{c_n^2}\right)=\frac{3}{8c_n^2}+o\left(\frac{1}{c_n^2}\right).$$

于是

$$\eta_n=\frac{3}{32c_n^2}+o\left(\frac{1}{c_n^2}\right).$$

因此

$$\delta_n=\frac{1}{4c_n}+\frac{3}{32c_n^2}+o\left(\frac{1}{c_n^2}\right). \tag{7}$$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

现在，

$$c_{n+1}-c_n=c_n\delta_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{32c_n}+o\left(\frac{1}{c_n}\right). \tag{8}$$

2. 求和得到 c_n 的渐近式 对(8)从 $k=1$ 到 $n-1$ 求和得

$$c_n=c_1+\frac{n-1}{4}+\frac{3}{32}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{c_k}+\sum_{k=1}^{n-1}o\left(\frac{1}{c_k}\right).$$

由于 $c_k\sim k/4$，有

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{c_k}\sim 4\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\sim 4\ln n,$$

余项被吸收。故存在常数 C 使得

$$c_n=\frac{n}{4}+\frac{3}{8}\ln n+C+o(1). \tag{9}$$

3. 计算 nx_n-4 由 $x_n=1/c_n$ 及(9)，

$$x_n=\frac{1}{\frac{n}{4}+\frac{3}{8}\ln n+C+o(1)}=\frac{4}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{3\ln n}{2n}+\frac{4C}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

利用展开 $(1+\varepsilon)^{-1}=1-\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots$，其中 $\varepsilon=\frac{3\ln n}{2n}+\frac{4C}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$，得

$$nx_n=4\left[1-\left(\frac{3\ln n}{2n}+\frac{4C}{n}\right)+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\right]=4-\frac{6\ln n}{n}-\frac{16C}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

于是

$$nx_n-4=-\frac{6\ln n}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{10}$$

4. 计算最终极限 由(10)，

$$\frac{n}{\ln n}(nx_n-4)=-6+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\longrightarrow -6\quad (n\to\infty).$$

得 分

三、计算题(共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分)

11. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2\right]$

解: 利用定积分的定义，得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2\right]&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n}\right)^2\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\cdot\frac{k}{n}-\frac{1}{n}\right)^2\\&=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2n}\right)^2\\&=4\int_0^1 x^2\,dx\\&=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

12. 已知$y=\int_1^{x^2}e^{-(t-1)^2}dt+2x^2$,计算$\left.\frac{d^2x}{dy^2}\right|_{x=1}$

解: 由微积分基本定理:
$y=f'(x)=2xe^{-(x^2-1)^2}+4x, f''(x)=(2-8x^2(x^2-1))e^{-(x^2-1)^2}+4$
代入$x=1:f'(1)=6,f''(1)=6$.由反函数求导法则:
$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f'(x)},\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$
代入$x=1$得$\left.\frac{d^2x}{dy^2}\right|_{x=1}=-\frac{1}{36}$.

13. 设函数$F(x)=\int_0^x\frac{t^{2025}}{1+t^2}\,dt$，$f(x)=e^{-x}F(x)$，$n\in\mathbb{N}_+$.
(1)求$F^{(n)}(0)$，$n\leqslant 2025$.
(2)求$f^{(n)}(0)$，$n\leqslant 2025$.

解：首先，

$$F'(x)=\frac{x^{2025}}{1+x^2},\quad F''(x)=\frac{2025x^{2024}(1+x^2)-2x^{2026}}{(1+x^2)^2},$$

所以 $F(0)=F'(0)=F''(0)=0$。
对 $f(x)=e^{-x}F(x)$ 利用 Leibniz 公式，再代入 $x=0$ 得

$$f^{(n)}(0)=e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kF^{(k)}(x)\Bigg|_{x=0}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kF^{(k)}(0).$$

欲求 $F^{(k)}(0)$，对 $(1+x^2)F'(x)=x^{2025}$ 两边求 $k-1$ 阶导数，并利用 Leibniz

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

公式，得

$$(1+x^2)F^{(k)}(x)+2(k-1)xF^{(k-1)}(x)+(k-1)(k-2)F^{(k-2)}(x)=(x^{2025})^{(k-1)},$$

代入 $x=0$，并注意到 $k\leqslant n\leqslant 2025$，得

$$F^{(k)}(0)=-(k-1)(k-2)F^{(k-2)}(0).$$

以此递推，得

$$\boxed{F^{(2k)}(0)=\cdots=(-1)^{k-1}(2k-1)!F''(0)=0},$$

$$\boxed{F^{(2k+1)}(0)=\cdots=(-1)^{k}(2k)!F'(0)=0},$$

因此，

$$\boxed{f^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kF^{(k)}(0)=0}.$$

14.求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\,dx$

解：令 $t=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$，则

$$x=\frac{2(t^2+1)}{t^2-1},$$
$$dx=-\frac{8t}{(t^2-1)^2}\,dt.$$

因此

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\,dx&=\int\frac{1}{\frac{2(t^2+1)}{t^2-1}}\cdot t\cdot\left(-\frac{8t}{(t^2-1)^2}\right)dt\\
&=\int\frac{t^2-1}{2(t^2+1)}\cdot t\cdot\left(-\frac{8t}{(t^2-1)^2}\right)dt\\
&=\int\frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,dt\\
&=2\int\left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\,dt\\
&=2\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\arctan t\right]+C\\
&=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-2\arctan t+C.
\end{aligned}$$

将 $t=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$ 代回，得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}}{1-\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}}\right| - 2\arctan\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}\right| - 2\arctan\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+C \\
&= \ln\left|\frac{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})^2}{(x-2)-(x+2)}\right| - 2\arctan\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+C \\
&= \ln\left|\frac{x+2\sqrt{x^2-4}+x}{-4}\right| - 2\arctan\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+C \\
&= \ln|x+\sqrt{x^2-4}| - \ln 2 - 2\arctan\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+C.
\end{aligned}$$

或者进一步化简为

$$\boxed{\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)+C}.$$

15. 设$I_n = n\displaystyle\int_1^a \frac{1}{1+x^n}\,dx$，其中$a>1$，求$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$

解: 记 $b=\dfrac{1}{a}$，则 $0<b<1$，作变量替换：$x=\dfrac{1}{t}$，得

$$I_n = n\int_b^1 \frac{t^{n-1}}{t(1+t^n)}\,dt = \int_b^1 \frac{d[\ln(1+t^n)]}{t}.$$

利用分部积分，得

$$I_n = \ln 2 - \frac{\ln(1+b^n)}{b} + \int_b^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\,dt. \tag{1}$$

当 $b\leqslant t\leqslant 1$ 时，有不等式

$$0\leqslant \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\leqslant t^{n-2},$$

所以

$$0\leqslant \int_b^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\,dt \leqslant \int_b^1 t^{n-2}\,dt = \frac{1-b^{n-1}}{n-1}.$$

显然，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-b^{n-1}}{n-1}=0$。根据夹逼准则，可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_b^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\,dt = 0.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+b^n)}{b}=0$，故由（1）式得

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} I_n=\ln 2}.$$

得 分

四、应用题(共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分)

16.设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-1-ax-\frac{1}{2}a^2x^2}{x^3}, & x\neq 0,\\ b, & x=0\end{cases}$$

其中 a 为非零常数，b 为常数。

(1)求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

(2)讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性及间断点类型

解：(1)**方法一：泰勒公式法**

利用 e^u 在 $u\to 0$ 时的泰勒展开式（带佩亚诺余项）：

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+o(u^3)$$

令 $u=ax$ （$x\to 0$ 时 $u\to 0$），代入得：

$$e^{ax}=1+ax+\frac{a^2x^2}{2}+\frac{a^3x^3}{6}+o(x^3)$$

代入分子化简：

$$e^{ax}-1-ax-\frac{1}{2}a^2x^2=\frac{a^3x^3}{6}+o(x^3)$$

因此：

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a^3x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}=\frac{a^3}{6}$$

方法二：洛必达法则

因 $x\to 0$ 时分子分母均趋于 0，满足 $\dfrac{0}{0}$ 型条件，连续三次求导：

1. 第一次：

$$\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}-a-a^2x}{3x^2}\quad (\text{仍为 }\frac{0}{0}\text{ 型})$$

2. 第二次：

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^2e^{ax}-a^2}{6x}\quad (\text{仍为 }\frac{0}{0}\text{ 型})$$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

3. 第三次：

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^3e^{ax}}{6}=\frac{a^3}{6}$$

两种方法均得到：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{a^3}{6}$。

(2)根据函数在某点连续的定义：$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$。

- 已知 $f(0)=b$，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{a^3}{6}$；
- 当 $b=\dfrac{a^3}{6}$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，满足连续性定义，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；
- 当 $b\neq\dfrac{a^3}{6}$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{a^3}{6}$（极限存在且为有限值），但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

由间断点分类定义：极限存在但不等于函数值的间断点为可去间断点，因此此时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点。

结论：

$$f(x)\text{ 在 }x=0\text{ 处 }\begin{cases}\text{连续}, & b=\dfrac{a^3}{6}\\ \text{不连续（可去间断点）}, & b\neq\dfrac{a^3}{6}\end{cases}$$

17.设平面图形 D 由曲线 $y=x^2$、直线 $x=0$、$x=a$（$a>0$）及 x 轴围成。V_x、V_y 分别是 D 绕 x 轴、y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=4V_x$，求常数 a 的值。

解：

步骤1：计算绕 x 轴旋转的体积 V_x

绕 x 轴旋转体体积公式：$V_x=\pi\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2dx$

代入曲线 $y=x^2$、区间 $[0,a]$：

$$V_x=\pi\int_0^a(x^2)^2dx=\pi\int_0^a x^4dx=\pi\cdot\frac{x^5}{5}\bigg|_0^a=\frac{\pi a^5}{5}$$

步骤2：计算绕 y 轴旋转的体积 V_y

绕 y 轴旋转时，使用圆盘法。垂直于 y 轴的截面是圆盘，圆盘的半径为对应 y 处的 x 值（即 $x=\sqrt{y}$）。

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

圆盘法体积公式（绕 y 轴，y 为积分变量）：

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} [x(y)]^2 dy$$

由 $y = x^2$ 得 $x = \sqrt{y}$，$y \in [0, a^2]$ 代入公式：

$$V_y = \pi \int_0^{a^2} (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^{a^2} y dy$$

计算定积分：

$$\pi \cdot \frac{y^2}{2}\bigg|_0^{a^2} = \pi \left(\frac{(a^2)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{\pi a^4}{2}$$

步骤3: 根据 $V_y = 4V_x$ 求 a

代入体积表达式列方程：

$$\frac{\pi a^4}{2} = 4 \cdot \frac{\pi a^5}{5}$$

约去 π（$\pi \neq 0$），两边同乘10消去分母：

$$5a^4 = 8a^5$$

因 $a > 0$，两边除以 a^4（$a^4 \neq 0$）：

$$5 = 8a \implies a = \frac{5}{8}$$

答案： $a = \frac{5}{8}$

得 分

五、证明题(共 2 大题，每小题 7 分，共 14 分)

18. 设 f 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可微，且已知

$$M_0 = \sup\{|f(x)| \mid x \in (0, +\infty)\}, \quad M_2 = \sup\{|f''(x)| \mid x \in (0, +\infty)\}$$

为有限数。证明 $M_1 = \sup\{|f'(x)| \mid x \in (0, +\infty)\}$ 也是有限数，并满足不等式

$$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

证：写出 Taylor 展开式：

$$f(x+t)=f(t)+f'(x)t+\frac{f''(\xi)}{2}t^2,$$

其中 $x,t>0,\xi\in(x,x+t)$。由此有估计

$$|tf'(x)|\leqslant|f(x+t)-f(x)-\frac{t^2}{2}f''(\xi)|\leqslant 2M_0+\frac{t^2}{2}M_2.$$

这样就得到

$$|f'(x)|\leqslant\frac{2M_0}{t}+\frac{1}{2}tM_2.$$

这对每个 $x\in(0,+\infty)$ 成立。取上确界，就有

$$M_1\leqslant\frac{2M_0}{t}+\frac{t}{2}M_2. \qquad (*)$$

因此 M_1 为有限数。由于这对每个 $t>0$ 成立，为了得到最好的估计，可以取

$$t=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}},$$

使右边的和达到最小，代入 (*) 式得

$$M_1\leqslant 2\sqrt{M_0M_2}.$$

19.下面是法国著名数学家埃尔米特(Hermite,又译作厄米)对π为无理数的证明，请你阅读并对证明过程中的三个重要步骤给出证明：

使用反证法，设π为有理数，即$\pi=\dfrac{u}{v}$，这里u,v是互素的整数

考虑数列$I_n=\dfrac{v^{2n}}{n!}\displaystyle\int_0^\pi x^n(\pi-x)^n\sin x\,dx$，请证明

(1) $I_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$;

(2) $I_0=2,\quad I_1=4v^2$;

(3) 用分部积分法证明I_n的递推公式

$$I_n=2v^2(2n-1)I_{n-1}-v^4\pi^2I_{n-2}=2v^2(2n-1)I_{n-1}-u^2v^2I_{n-2}$$

由此可知I_n均为正整数，但这与(1)矛盾，故假设不成立，π是无理数.

证：(1) $\forall x\in(0,\pi)$，有

$$0<x^n(\pi-x)^n\sin x\leqslant(x(\pi-x))^n\leqslant(\frac{x+\pi-x}{2})^{2n}\leqslant(\frac{\pi}{2})^{2n}$$

故有

$$0<I_n\leqslant\frac{v^{2n}}{n!}\int_0^\pi x^n(\pi-x)^n\sin x\,dx\leqslant\frac{1}{n!}(\frac{\pi v}{2})^{2n}$$

由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

(2) $I_0=\int_0^\pi \sin x\,dx=2;$

$I_1=v^2\int_0^\pi x(\pi-x)\sin x\,dx=v^2\int_0^\pi x(\pi-x)\,d(-\cos x)$

$=v^2(-x(\pi-x)\cos x|_0^\pi+\int_0^\pi(\pi-2x)\cos x\,dx)=v^2\int_0^\pi(\pi-2x)\cos x\,dx$

$=v^2\int_0^\pi(\pi-2x)\,d(\sin x)=v^2((\pi-2x)\sin x|_0^\pi+\int_0^\pi 2\sin x\,dx)=4v^2.$

(3) 与(2)类似，用两次分部积分法可以算得

$$\int_0^\pi x^n(\pi-x)^n\sin x\,dx$$
$$=2n\int_0^\pi x^{n-1}(\pi-x)^{n-1}\sin x\,dx-n(n-1)\int_0^\pi x^{n-2}(\pi-x)^{n-2}(\pi-2x)^2\sin x\,dx$$

其中$\int_0^\pi x^{n-2}(\pi-x)^{n-2}(\pi-2x)^2\sin x\,dx$

$$=\int_0^\pi x^{n-2}(\pi-x)^{n-2}(\pi^2-4x(\pi-x))^2\sin x\,dx$$
$$=\pi^2\int_0^\pi x^{n-2}(\pi-x)^{n-2}\sin x\,dx-4\int_0^\pi x^{n-1}(\pi-x)^{n-1}\sin x\,dx$$

带入原式有

$$\int_0^\pi x^n(\pi-x)^n\sin x\,dx$$
$$=2n(2n-1)\int_0^\pi x^{n-1}(\pi-x)^{n-1}\sin x\,dx-n(n-1)\pi^2\int_0^\pi x^{n-2}(\pi-x)^{n-2}\sin x\,dx$$

因此 $I_n=2v^2(2n-1)I_{n-1}-v^4\pi^2I_{n-2}$

将$\pi=\dfrac{u}{v}$代入就得到 $I_n=2v^2(2n-1)I_{n-1}-u^2v^2I_{n-2}.$