极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$的证明

证法一 由 A-G 不等式知

$$\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1}_{n-2}}\le\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}},$$

即

$$\boxed{\sqrt[n]{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}}.$$

$\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon \qquad (*),$$

因为$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\dfrac{2}{\sqrt{n}}$，只要$\dfrac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$即可，也就是$n>\dfrac{4}{\varepsilon^2}$时（*）式成立.

取$N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right]$，当$n>N$时，都有$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$成立.

综上所述，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证法二 记$\lambda_n=\sqrt[n]{n}-1(\ge 0)$，则$n=(1+\lambda_n)^n$，由二项式定理可得

$$n=(1+\lambda_n)^n=1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2+\cdots+\lambda_n^n\ge 1+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2,$$

即

$$0\le\lambda_n=\sqrt[n]{n}-1\le\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \qquad \left(\text{即 }\boxed{\sqrt[n]{n}\le 1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}\right).$$

$\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon \qquad (*),$$

因为$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$，只要$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}<\varepsilon$即可，也就是$n>\dfrac{2}{\varepsilon^2}$时（*）式成立.

取$N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right]$，当$n>N$时，都有$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$成立.

综上所述，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证法三 $n\ge 2$ 时，利用二项式定理有

$$(1+t)^n+(1-t)^n=(1+nt+C_n^2t^2+\cdots+t^n)+(1-nt+C_n^2t^2-\cdots+(-1)^nt^n)$$

$$=2\left(1+C_n^2t^2+C_n^4t^4+\cdots\right)$$

$$\ge 2\left(1+C_n^2t^2\right)=2+n(n-1)t^2.$$

令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，有 $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n+\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n\ge 2+n(n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=n+1$，即

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n\ge n+1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n>n,$$

从而

$$\boxed{\sqrt[n]{n}<1+\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

$\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon \qquad (*),$$

因为 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，只要 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$ 即可，也就是 $n>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$ 时（*）式成立.

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]$，当 $n>N$ 时，都有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立.

综上所述，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

注 这里三个不等式

$$\boxed{\sqrt[n]{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}},}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{n}\le 1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}},}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{n}<1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

是不断改进的关系！