

牛顿二项式定理

Binomial theorem

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i & (= \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i}) \\&= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^i a^{n-i} b^i + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n & (C_n^{n-i} = C_n^i)\end{aligned}$$

证 (用数学归纳法) $n=1$ 时, 等式 $(a+b)^1 = a^1 + b^1$ 显然成立.

假设对正整数 n 成立等式 $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i$, 则

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^{i+1} \\&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^n C_n^i a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i a^{n-i} b^{i+1} + b^{n+1} & (\text{在第二个 } \Sigma \text{ 式中用指标符号 } j \text{ 替换 } i+1) \\&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^n C_n^i a^{n+1-i} b^i + \sum_{j=1}^n C_n^{j-1} a^{n+1-j} b^j + b^{n+1} & (\text{两个 } \Sigma \text{ 式再用同一指标符号}) \\&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^n (C_n^i + C_n^{i-1}) a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} & (\text{利用恒等式 } C_{n+1}^i = C_n^i + C_n^{i-1}) \\&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^n C_{n+1}^i a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i a^{n+1-i} b^i.\end{aligned}$$

由数学归纳法, 二项展开式对所有正整数都成立.

注 1 证明的两个关键是**和式指标变化与组合数恒等式**.

注 2 组合数恒等式 $C_{n+1}^i = C_n^i + C_n^{i-1}$ 成立的理由如下:

从 $n+1$ 个不同的球 (其中一个球有特别标记) 中取 i 个球的方法总数为 C_{n+1}^i .

取球方法可区分为两大类, 一类为不取标记球, 即从 n 个未标记球中取 i 个球, 方法数为 C_n^i ; 另一类为取中标记球并再从 n 个未标记球中取 $i-1$ 个球, 方法数为 C_n^{i-1} .

注 3 后续学习中高阶导数的莱布尼兹公式 $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}$ 也是如二项式定理

一样归纳证明的!