

1. 描述函数无界的定义, 并说明 $y = x \sin x$ 是无界函数.

解 函数 $f(x), x \in D$ 有界可以定义为

$$\exists M > 0, \forall x \in D, |f(x)| \leq M.$$

因此函数 $f(x), x \in D$ 无界是指

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in D: |f(x_0)| > M.$$

对函数 $y = x \sin x$, 取 $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 则有

$$f(x_k) = x_k \sin x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

$\forall M > 0$, 总可取得 k_0 使得 $\frac{\pi}{2} + 2k_0\pi > M$, 即有 $f(x_{k_0}) > M$.

因此函数无界.

2. 定义在闭区间上的函数一定有界吗?

答 不一定. 如

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $[0, 1]$ 上处处有定义, 但无界. 注意这个函数不是初等函数!

3. 说明幂指函数 $x^{\sin x}, x > 0$ 为初等函数.

解 $x > 0, x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln x}$

它是 e^u 与 $u = \sin x \cdot \ln x$ 的复合, 因此它是初等函数.

4. 验证恒等式 $\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x \equiv \frac{\pi}{2}, x \in (-\infty, \infty).$$

证明 只证第一个等式. 令 $\alpha = \arccos x \in [0, \pi]$, 这时 $\frac{\pi}{2} - \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 而

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha = x,$$

所以 $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arcsin x$, 移项为 $\arcsin x + \alpha \equiv \frac{\pi}{2}$, 即 $\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2}$.