1. 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，（ $a>0$ ），试证对实数 λ，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\lambda\xi^{\lambda-1}(f(b)-f(a))=(b^{\lambda}-a^{\lambda})f'(\xi).$$

提示 $\lambda=0$ **时，等式自然成立；** $\lambda\neq 0$ **时，用柯西中值定理有** $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^{\lambda}-a^{\lambda}}=\dfrac{f'(\xi)}{\lambda\xi^{\lambda-1}}$.

或者对辅助函数

$$F(x)=(x^{\lambda}-a^{\lambda})(f(b)-f(a))-(b^{\lambda}-a^{\lambda})(f(x)-f(a))$$

用罗尔中值定理.

2. 设可微函数 $f(x)$ 满足 $f(a)=f(b)=1$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)+f(\xi)=1$.

提示 对函数 $\mathrm{e}^x f(x)$， e^x，使用柯西中值定理

$$\frac{\mathrm{e}^b f(b)-\mathrm{e}^a f(a)}{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}=\left.\frac{(\mathrm{e}^x f(x))'}{(\mathrm{e}^x)'}\right|_{x=\xi}.$$

3. 设可微函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0, f(1)=1$，证明存在 $\xi_i\in(0,1)$， $i=1,2,\cdots,n$ 使得

$$\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\cdots+\frac{\lambda_n}{f'(\xi_n)}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$

其中 $\lambda_i>0$，中值 ξ_i 两两不同.

提示 记 $\Lambda=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$， $\mu_k=(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)/\Lambda$，**则**

$$0<\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_{n-1}<1.$$

利用介值定理

存在 $c_1\in(0,1)$，使 $f(c_1)=\mu_1$；

存在 $c_2\in(c_1,1)$，使 $f(c_2)=\mu_2$ ；

-------;

存在 $c_{n-1}\in(c_{n-2},1)$，使 $f(c_{n-1})=\mu_{n-1}$.

即 $0<c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}<1$，在 n 个子区间 $[0,c_1],[c_1,c_2],\cdots,[c_{n-1},1]$ 上使用微分中值公式

$$\exists\xi_i\in(c_{i-1},c_i)，使\ \frac{f(c_i)-f(c_{i-1})}{f'(\xi_i)}=c_i-c_{i-1}，（c_0=0,\quad c_1=1）$$

即

$$\frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{f'(\xi_i)} = \frac{\lambda_i / \Lambda}{f'(\xi_i)} = c_i - c_{i-1} ,$$

故

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i / \Lambda}{f'(\xi_i)} = \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i-1}) = 1 .$$