

1. 描述函数无界的定义，并说明  $y = x \sin x$  是无界函数.

解 函数  $f(x), x \in D$  有界可以定义为

$$\exists M > 0, \forall x \in D, |f(x)| \leq M.$$

因此函数  $f(x), x \in D$  无界是指

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in D : |f(x_0)| > M.$$

对函数  $y = x \sin x$ , 取  $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , 则有

$$f(x_k) = x_k \sin x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

$\forall M > 0$ , 总可取得  $k_0$  使得  $\frac{\pi}{2} + 2k_0\pi > M$ , 即有  $f(x_{k_0}) > M$ .

因此函数无界.

2. 定义在闭区间上的函数一定有界吗?

答 不一定. 如

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在  $[0, 1]$  上处处有定义, 但无界. 注意这个函数不是初等函数!

3. 说明幂指函数  $x^{\sin x}, x > 0$  为初等函数.

解  $x > 0, x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln x}$

它是  $e^u$  与  $u = \sin x \cdot \ln x$  的复合, 因此它是初等函数.

4. 验证恒等式  $\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x \equiv \frac{\pi}{2}, x \in (-\infty, \infty).$$

证明 只证第一个等式. 令  $\alpha = \arccos x \in [0, \pi]$ , 这时  $\frac{\pi}{2} - \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , 而

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha = x,$$

所以  $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arcsin x$ , 移项为  $\arcsin x + \alpha \equiv \frac{\pi}{2}$ , 即  $\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2}$ .