几个基本不等式

1 贝努利不等式（Bernoulli inequality）

设 $x_i, i=1,2,\cdots,n$ 同号，且 $x_i > -1$，则

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \ge 1+\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ ,}$$

特别地 $x > -1$ 时，$(1+x)^n \ge 1+nx$.

证 （用数学归纳法）$n=1$ 时，不等式以等式成立.

假设对正整数 n，不等式 $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \ge 1+\sum_{i=1}^{n} x_i$ 成立，则

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i) = (1+x_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \ge (1+x_{n+1})(1+\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

$$= 1+x_{n+1}+\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot x_{n+1}) \text{ ,} \qquad (\text{因 } x_i x_{n+1} \ge 0)$$

$$\ge 1+x_{n+1}+\sum_{i=1}^{n} x_i = 1+\sum_{i=1}^{n+1} x_i$$

故对所有正整数 n，贝努利不等式成立.

特别地 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x > -1$ 时，$(1+x)^n \ge 1+nx$.

注 当 $x \ge 0$ 时，可由二项式定理

$$(1+x)^n = 1+nx+C_n^2 x^2+\cdots+x^n$$

直接给出不等式 $(1+x)^n \ge 1+nx$.

2 平均值不等式 (Inequality of arithmetic and geometric means)

设 $a_i, i=1,2,\cdots,n$ 为正数，则

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \text{ .}$$

（A-G 不等式：$G_n \le A_n$， 即几何平均值不超过算术平均值）

证 （用数学归纳法）$n=1$ 时，不等式以等式成立.

假设对 n 个正数，不等式 $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ 成立，下证对 $n+1$ 个正数，不等式也成立.

不妨设 a_{n+1} 是 $n+1$ 个正数中最大者，记 $A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$，则 $A\le a_{n+1}$，由归纳假设有

$\prod_{i=1}^{n}a_i\le A^n$ ，

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots a_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{nA+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{(n+1)A+(a_{n+1}-A)}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$=\left(A+\frac{a_{n+1}-A}{n+1}\right)^{n+1}=A^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}(\frac{a_{n+1}}{A}-1)\right)^{n+1}$$

$$\ge A^{n+1}\left\{1+(n+1)\cdot\frac{1}{n+1}(\frac{a_{n+1}}{A}-1)\right\}$$ （利用了贝努利不等式 $(1+x)^n\ge 1+nx$， $x>-1$）

$$=A^n\cdot a_{n+1}\ge\prod_{i=1}^{n}a_i\cdot a_{n+1}=\prod_{i=1}^{n+1}a_i\ ,$$

即 $\sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n+1}a_i}\le\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}a_i$.

综上对所有正整数平均值不等式成立.

注 令 $a_i=\frac{1}{b_i}$，则有 $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}b_i^{-1}}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i^{-1}$，即

$$\frac{n}{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}}\le\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}$$ （调和平均值不超过几何平均值）

3 柯西不等式 (Cauchy inequality)

给定实数 $a_i,b_i,i=1,2,\cdots,n$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right).$$ （积和方不超过方和积）

证明只需注意到实数 t 的二次多项式 $\sum_{i=1}^{n}(a_it+b_i)^2$ 总是非负，即

$$\sum_{i=1}^{n}(a_it+b_i)^2=(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)t^2+2(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)t+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\ge 0\ ,$$

其判别式 $\Delta=4\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-4\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$ 必小于或等于零.