# 迫敛性

例 1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$.

解 记数列为 $x_n$，利用 $(2k-1)(2k+1)\le(2k)^2$ 可得

$$x_n{}^2=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdots\frac{(2k-1)^2}{(2k)^2}$$

$$=\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdots\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\cdots\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\frac{1}{2n+1},$$

所以 $0<x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，由迫敛性知所求极限为 $0$.

例 2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$（$a>1$）.

解 $0<\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{[a]}\cdot\frac{a}{[a]+1}\cdots\frac{a}{n}$,

在 $n$ 充分大时（具体地 $n>[a]+1$ 时，$\frac{a}{[a]+1}\cdot\frac{a}{[a]+2}\cdots\frac{a}{n-1}\cdot\frac{a}{n}<\frac{a}{n}$）有

$$0<\frac{a^n}{n!}<\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{[a]}\cdot\frac{a}{n}=\frac{a^{[a]+1}}{[a]!}\cdot\frac{1}{n},$$

由迫敛性知所求极限为 $0$.

注 记 $x_n=\frac{a^n}{n!}$，则 $n$ 充分大时 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a}{n+1}<1$，即正数列 $\{x_n\}$ 从某项起单减有界，故收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\frac{a}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=l\cdot0=0$ .

例 3 利用不等式

$$(1+\frac{1}{n})^n<\mathrm{e}<(1+\frac{1}{n})^{n+1},$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$ .

解 不等式 $(1+\frac{1}{n})^n<\mathrm{e}<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 可变化为对数不等式

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}.$$

利用对数不等式将 $\frac{1}{n+k}$ 放大缩小，有

$$\ln(1+\frac{1}{n+k})<\frac{1}{n+k}<\ln(1+\frac{1}{n+k-1})\ ,$$

即

$$\ln(n+k+1)-\ln(n+k)<\frac{1}{n+k}<\ln(n+k)-\ln(n+k-1)\ .$$

连锁消去求和得

$$\ln(n+n+1)-\ln(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<\ln(n+n)-\ln n=\ln 2\ ,$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\ln 2$，利用迫敛性可得所求极限为 $\ln 2$.

**例 4** 已知 $x_n\le a\le y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

**证** 已知条件 $x_n\le a\le y_n$ 可变化为

$0\le a-x_n\le y_n-x_n$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$ 及迫敛性得

$$\lim_{n\to\infty}(a-x_n)=0.$$

注意 $x_n=a-(a-x_n)$，$y_n=x_n+(y_n-x_n)$，利用收敛数列的四则运算得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=a.$$

**例 5** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1^{\alpha}}+\frac{1}{n+2^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n+n^{\alpha}})$ （$\alpha>1$).

**解** 利用均值不等式有

$$n+k^{\alpha}\ge 2\sqrt{nk^{\alpha}}\ ,$$

则

$$0<x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^{\alpha}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{n}\cdot k^{\alpha/2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}k^{-\alpha/2}\ ,$$

而用 Stolz 定理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{-\alpha/2}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{-\alpha/2}-\sum_{k=1}^{n-1}k^{-\alpha/2}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-\alpha/2}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{n^{\alpha/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{n^{(\alpha-1)/2}}=0\ .$$

由追敛性知 $x_n\to 0$.