微分中值等式问题证明中的辅助函数

用罗尔定理证题，关键是构造辅助函数.

问题一 设函数 $f(x),g(x)$ 可微，且 $f(a)=f(b)=0$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0.$$

分析 结论等价于在中值点 ξ 处成立等式

$$\boxed{f'(x)+f(x)g'(x)=0}\ ,\qquad (*)$$

或
$$f'(x)\mathrm{e}^{g(x)}+f(x)\mathrm{e}^{g(x)}g'(x)=0\ ,$$

即
$$\left\{f(x)\mathrm{e}^{g(x)}\right\}'\Big|_{x=\xi}=0.$$

故构造辅助函数

$$\boxed{F(x)=f(x)\mathrm{e}^{g(x)}}\ ,\qquad (**)$$

用罗尔定理即可证明结论.

以下皆为问题一的特例.

例 1 设函数 $f(x)$ 可微，且 $f(a)=f(b)=0$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\lambda f(\xi).$$

分析 让 $g'(x)=-\lambda$，取 $g(x)=-\lambda x$，辅助函数为 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

例 2 设函数 $f(x)$ 可微，证明 $\exists\xi\in(0,\pi)$，使

$$f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi.$$

分析 让 $g'(x)=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，取 $g(x)=\ln\sin x, x\in(0,\pi)$，辅助函数为

$$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\ln\sin x}=f(x)\sin x.$$

依循以下方式也可找到辅助函数：

$$f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi \iff f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0 \iff \left\{f(x)\sin x\right\}'\Big|_{\xi}=0.$$

例 3 设函数 $f(x)$ 可微，且 $f(1)=0$，证明对正整数 m,n， $\exists\xi\in(0,1)$，使

$$nf'(\xi)=-mf(\xi)/\xi .$$

分析　让 $g'(x)=\dfrac{m}{nx}$，取 $g(x)=\dfrac{m}{n}\ln x, x\in(0,1)$，辅助函数为

$$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\frac{m}{n}\ln x}=f(x)\cdot\sqrt[n]{x^m} .$$

也可循以下方式找到辅助函数：

$$nf'(\xi)=-mf(\xi)/\xi \Leftrightarrow f'(\xi)\xi^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}\xi^{\frac{m}{n}-1}f(\xi)=0$$

$$\Leftrightarrow \left\{f(x)\cdot x^{\frac{m}{n}}\right\}'\Big|_{\xi}=0 .$$

例 4 设函数 $f(x)$ 可微，且 $f(1)=0$，证明 $\exists\xi\in(0,1)$，使

$$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi) .$$

分析　让 $g'(x)=-1+\dfrac{1}{x}$，取 $g(x)=-x+\ln x, x\in(0,1)$，辅助函数为

$$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x+\ln x}=f(x)\cdot x\mathrm{e}^{-x} .$$

你能熟练给出下面的辅助函数吗？

中值点 ξ 处 $f'(x)+f(x)g'(x)=0$	辅助函数 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{g(x)}$	
$xf'(x)+f(x)=0$	$F(x)=xf(x)$	
$xf'(x)-f(x)=0$	$F(x)=f(x)/x$	$g'(x)=-\dfrac{1}{x}$，$g(x)=-\ln x$
$xf'(x)+kf(x)=0,$	$F(x)=x^k f(x)$	$g'(x)=\dfrac{k}{x}$，$g(x)=k\ln x$
$f'(x)h(x)+f(x)h'(x)=0$	$F(x)=f(x)h(x)$	
$f'(x)h(x)-f(x)h'(x)=0$	$F(x)=f(x)/h(x)$	$g'(x)=-\dfrac{h'(x)}{h(x)},g(x)=-\ln h(x)$
$f'(x)+kf(x)=0$	$F(x)=\mathrm{e}^{kx}f(x)$	
$(1+x^2)f'(x)+2xf(x)=0$	$F(x)=(1+x^2)f(x)$	

练习

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f'(0)=0$，试证存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

分析 记 $h(x)=f'(x)$，结论为

$$(1-\xi)h'(\xi)-2h(\xi)=0,$$

或 $$(1-\xi)^2h'(\xi)+2(1-\xi)(-1)h(\xi)=0.$$

辅助函数为 $F(x)=(1-x)^2f'(x)$.

2. 设 $f(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$，证明：

（1）存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

（2）对实数 λ，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$.

分析 记 $h(x)=f(x)-x$，用零点定理可证明（1）. 而（2）的结论能写为

$h'(\xi)-\lambda h(\xi)=0$，辅助函数为 $F(x)=e^{-\lambda x}h(x)$.