迭代数列的极限

例 1 设数列$\{x_n\}$满足 $x_1=\sqrt{a},\ (a>0)$，$x_n=\sqrt{x_{n-1}+a},\ (n>1)$，证明数列收敛并求其极限.

解 先证明数列收敛.

i）验证数列单调增加.事实上$x_1=\sqrt{a}<x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$,假设 $x_{k-1}<x_k\ (k>1)$,则

$$x_k=\sqrt{x_{k-1}+a}<\sqrt{x_k+a}=x_{k+1},$$

或
$$x_{k+1}-x_k=\sqrt{x_k+a}-\sqrt{x_{k-1}+a}=\frac{x_k-x_{k-1}}{\sqrt{x_k+a}+\sqrt{x_{k-1}+a}}>0,$$

由归纳法知数列$\{x_n\}$是单调增加的.

ii）验证数列有上界.由 $x_n^{\ 2}=x_{n-1}+a$，且数列为正值单增的，有

$$x_n=\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{a}{x_n}<1+\frac{a}{x_1}=1+\sqrt{a},$$

也可归纳证明：由$x_1=\sqrt{a}<1+\sqrt{a}$，假设$x_{k-1}<1+\sqrt{a}\quad(k>1)$ ，则

$$x_k=\sqrt{a+x_{k-1}}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=1+\sqrt{a}.$$

综上由单调有界准则知数列收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，（由极限的比较性质知 $l\geq\sqrt{a}$ ）. 对迭代式两边求极限有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_{n-1}+a}，\ 即\quad l=\sqrt{a+l}$$

解得 $l=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

另法 已知常数$l=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}(>1)$满足等式$l=\sqrt{a+l}$，下证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$.

$$|x_n-l|=\left|\sqrt{x_{n-1}+a}-\sqrt{l+a}\right|=\frac{|x_{n-1}-l|}{\sqrt{x_{n-1}+a}+\sqrt{l+a}}\qquad（有理化）$$

$$<\frac{|x_{n-1}-l|}{\sqrt{l+a}}=\frac{1}{l}|x_{n-1}-l|,$$

因此

$$\left|x_{n-1}-l\right|<\frac{1}{l}\left|x_{n-2}-l\right|,\quad \left|x_{n-2}-l\right|<\frac{1}{l}\left|x_{n-3}-l\right|,\quad \ldots\quad \left|x_2-l\right|<\frac{1}{l}\left|x_1-l\right|=\frac{1}{l}\left|\sqrt{a}-l\right|.$$

从而

$$\left|x_n-l\right|\le\frac{1}{l^{n-1}}\left|\sqrt{a}-l\right|,$$

因 $l>1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{l^{n-1}}|\sqrt{a}-l|=0$，故 $\forall\varepsilon>0$，n 充分大时，$\frac{1}{l^{n-1}}\left|\sqrt{a}-l\right|<\varepsilon$， 进而

$$|x_n-l|<\frac{1}{l^{n-1}}\left|x_1-l\right|<\varepsilon\ .$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$.

例 2 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=3, x_n=1+\frac{1}{x_{n-1}}, (n>1)$，求其极限.

解 已知常数 $l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}(>1)$ 满足等式 $l=1+\frac{1}{l}$，下证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$.

因

$$\left|x_n-l\right|=\left|1+\frac{1}{x_{n-1}}-(1+\frac{1}{l})\right|=\frac{\left|x_{n-1}-l\right|}{x_{n-1}l}\qquad \text{（显然 } x_n>1\text{）}$$

$$<\frac{1}{l}\left|x_{n-1}-l\right|\qquad \text{（接下来递推）}$$

$$<\frac{1}{l^2}\left|x_{n-2}-l\right|\cdots<\frac{1}{l^{n-1}}\left|x_1-l\right|$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{l^{n-1}}=0$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-l|=0$ ，进而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

注 $x_1=3, x_2=\frac{4}{3}, x_3=\frac{7}{4}, x_4=\frac{11}{7}$，因 $x_{n+1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{x_{n-1}}}$，也可以归纳证明此题中数列的奇子列为单调减，偶子列为单调增，因 $1<x_n\le 3$，故两子列都收敛.记极限分别为 a,b，

则由 $x_{2k+1}=1+\frac{1}{x_{2k}}, x_{2k}=1+\frac{1}{x_{2k-1}}$ 两边求极限有

$$a=1+\frac{1}{b}, b=1+\frac{1}{a}$$

解得 $a=b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 即数列的奇子列与偶子列收敛到相同值 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 3　设 $x_0 = a$，$x_1 = b > a$，$x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1} + x_n}{2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解　因 $x_{n+2} - x_{n+1} = -\dfrac{x_{n+1} - x_n}{2} = (-\dfrac{1}{2})^2 (x_n - x_{n-1}) = \cdots = (-\dfrac{1}{2})^{n+1} (x_1 - x_0)$

$$x_n - x_1 = \sum_{k=0}^{n-2} (x_{k+2} - x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-2} (-\frac{1}{2})^{k+1} (b-a) = \frac{-\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})^n}{1 - (-\frac{1}{2})} (b-a)$$

$$\to -\frac{1}{3}(b-a)$$

所以　$x_n \to \dfrac{a+2b}{3}$.

另法　因

$$x_{n+2} + \frac{x_{n+1}}{2} = x_{n+1} + \frac{x_n}{2} \quad = x_n + \frac{x_{n-1}}{2} = \cdots = x_1 + \frac{x_0}{2}$$

即 $x_n + \dfrac{1}{2} x_{n-1} = c$，$c = \dfrac{1}{2} a + b$.

记 $l = \dfrac{a+2b}{3}$，（$l + \dfrac{1}{2} l = c$）下证 $x_n \to \dfrac{a+2b}{3}$.

因 $|x_n - l| = \dfrac{1}{2} |x_{n-1} - l| = \dfrac{1}{2^2} |x_{n-2} - l| \cdots = \dfrac{1}{2^n} |x_0 - l| \to 0$

易得 $x_n \to \dfrac{a+2b}{3}$.

例 4　设正数列 $\{x_n\}$ 满足　$x_n \le x_{n-1} + \dfrac{1}{n^2}, (n > 1)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明　因　$x_n \le x_{n-1} + \dfrac{1}{n^2} < x_{n-1} + \dfrac{1}{(n-1)n} = x_{n-1} + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$，

即　$x_n + \dfrac{1}{n} < x_{n-1} + \dfrac{1}{n-1} \qquad (n > 1)$

表明数列 $\left\{x_n + \dfrac{1}{n}\right\}$ 是单减的且有下界 0，故 $\left\{x_n + \dfrac{1}{n}\right\}$ 收敛，又 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$，从而 $\{x_n\}$ 收敛.

例 5　设 $x_1 = \sqrt{7}, x_2 = \sqrt{7 - \sqrt{7}}, x_3 = \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7}}}, x_4 = \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{7}}}}, \cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解　数列 $\{x_n\}$ 满足如下迭代关系：$n \ge 1$ 时

$x_{2n+1}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_{2n-1}}}, x_1=\sqrt{7}$；$x_{2n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_{2n}}}, x_2=\sqrt{7-\sqrt{7}}$.

显然$\{x_n\}$为有界数列（可以归纳出：$\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}\le x_n\le\sqrt{7}$），考虑$\{x_n\}$的奇偶子列的极限.

假如奇子列$\{x_{2n-1}\}_1^\infty$收敛于l（利用极限性质应有$l\in[\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}},\sqrt{7}]$），对$x_{2n+1}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_{2n-1}}}$两边求极限有$l=\sqrt{7-\sqrt{7+l}}$，解得$l=2$.

（事实上，上式两边平方有$l^2=7-\sqrt{7+l}$，记$7-l^2=t$，则$\sqrt{7+l}=t(\ge 0)$，从而$7+l=t^2$，$7-l^2=t$，相减得$l^2+l=t^2-t$即$(l+t)(l-t+1)=0$，故$t=l+1$，进而$l^2+l-6=0$，$l=2$）

下证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=2$.

$$|x_{2n+1}-2|=|\sqrt{7-\sqrt{7+x_{2n-1}}}-2|=\frac{|3-\sqrt{7+x_{2n-1}}|}{\sqrt{7-\sqrt{7+x_{2n-1}}}+2}$$

$$\le\frac{|3-\sqrt{7+x_{2n-1}}|}{2}=\frac{|x_{2n-1}-2|}{2(3+\sqrt{7+x_{2n-1}})}\le\frac{1}{6}|x_{2n-1}-2|$$

$$\le\frac{1}{6^2}|x_{2n-3}-2|\le\cdots\le\frac{1}{6^n}|x_1-2|,$$

因$\frac{1}{6^n}|x_1-2|\to 0(n\to\infty)$，故$x_{2n+1}\to 2(n\to\infty)$.

同样可以证明$x_{2n}\to 2(n\to\infty)$.

综上$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.