运 筹 学

Operations Research (OR)

讲师： 王 博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email： wb8517@hust.edu.cn QQ：2734802827

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

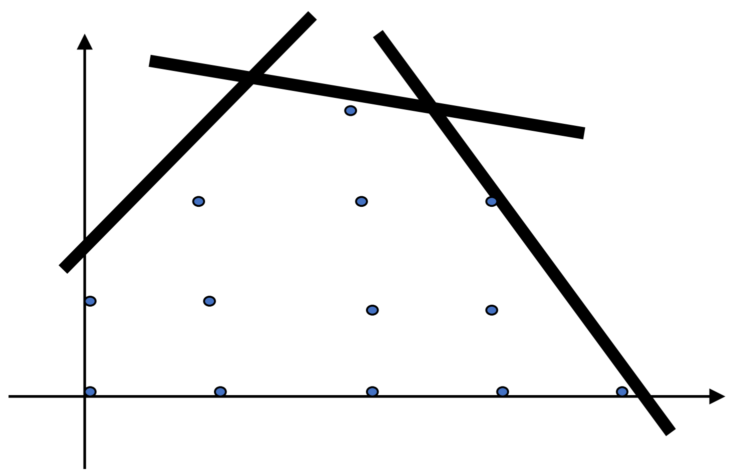
第6章 整数规划

第6章 整数规划

整数线性规划问题的提出

- 在前面讨论的线性规划问题中，有些最优解可能是分数或小数，但对于某些具体问题，常有要求解答必须是整数的情形(称为整数解)。
- 例如，所求解是机器的台数、完成工作的人数或装货的车数等，分数或小数的解答就不合要求。
- 我们称这样的问题为整数线性规划(integer linear programming)，简称IP。整数线性规划是最近几十年来发展起来的规划论中的一个分支。

> - 特征—变量整数性要求
> - 来源
>   问题本身的要求
>   引入的逻辑变量的需要
> - 性质—可行域是离散集合



整数线性规划问题的提出

- 整数线性规划中如果所有的变数都限制为(非负)整数，就称为纯整数线性规划(pure integer linear programming)或称为全整数线性规划(all integer linear programming)。
- 如果仅一部分变数限制为整数，则称为混合整数规划(mixed integer linear programming)。
  - 整数线性规划的一种特殊情形是0-1规划，它的变数取值仅限于0或1。

$$\min z = Cx \qquad s.t.\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0, x\text{为整数} \end{cases}$$

纯整数线性规划

$$\min z = Cx \qquad s.t.\begin{cases} Ax \geq b, & x = [x_i, x_j] \\ x_i \geq 0, & x_i\text{为整数} \\ x_j \geq 0, & x_j\text{为连续量} \end{cases}$$

混合整数线性规划

$$\min z = Cx \qquad s.t.\begin{cases} Ax \geq b \\ x_i = 0,1; \ i = 1,\dots,n \end{cases}$$

0-1规划

整数线性规划问题的提出

- 为了满足整数解的要求，初看起来，似乎只要把已得到的带有分数或小数的解经过“舍入化整”就可以了。
- 这常常并不可行，因为：
  - 化整后不见得是可行解；
  - 虽是可行解，但不一定是最优解。

- 例子：某集装箱运输公司，箱型标准体积$24m^3$，重量$13T$，现有两种货物可以装运，甲货物体积$5m^3$、重量$2T$、每件利润2000元；乙货物体积$4m^3$、重量$5T$、每件利润1000元，如何装运获利最多？

货物	体积（m^3/箱）	重量（T/箱）	利润（百元/箱）
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24	13	

$$\max z = 2000x_1 + 1000x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}$$

整数线性规划问题的提出

- 例子：某集装箱运输公司，箱型标准体积$24m^3$，重量$13T$，现有两种货物可以装运，甲货物体积$5m^3$、重量$2T$、每件利润2000元；乙货物体积$4m^3$、重量$5T$、每件利润1000元，如何装运获利最多？

货物	体积（m^3/箱）	重量（T/箱）	利润（百元/箱）
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24	13	

$$\max z = 2000x_1 + 1000x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

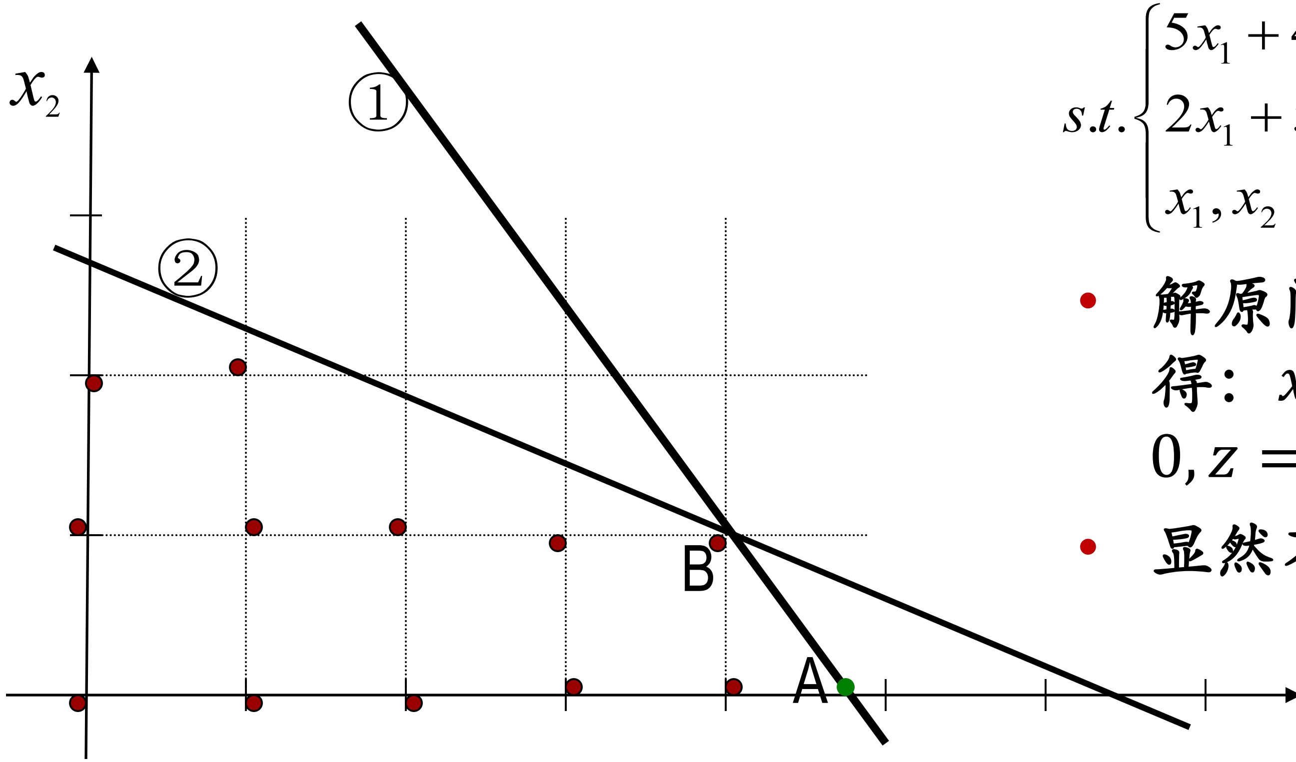
- 去掉整数约束，则问题成为前述的线性规划问题。
- 暂时不考虑这一条件：
  - 整数规划拿掉整数约束的问题称为与原问题相应的线性规划问题

整数线性规划问题的提出

- 例子：某集装箱运输公司，箱型标准体积$24m^3$，重量$13T$，现有两种货物可以装运，甲货物体积$5m^3$、重量$2T$、每件利润2000元；乙货物体积$4m^3$、重量$5T$、每件利润1000元，如何装运获利最多？

$$\max z = 2000x_1 + 1000x_2$$

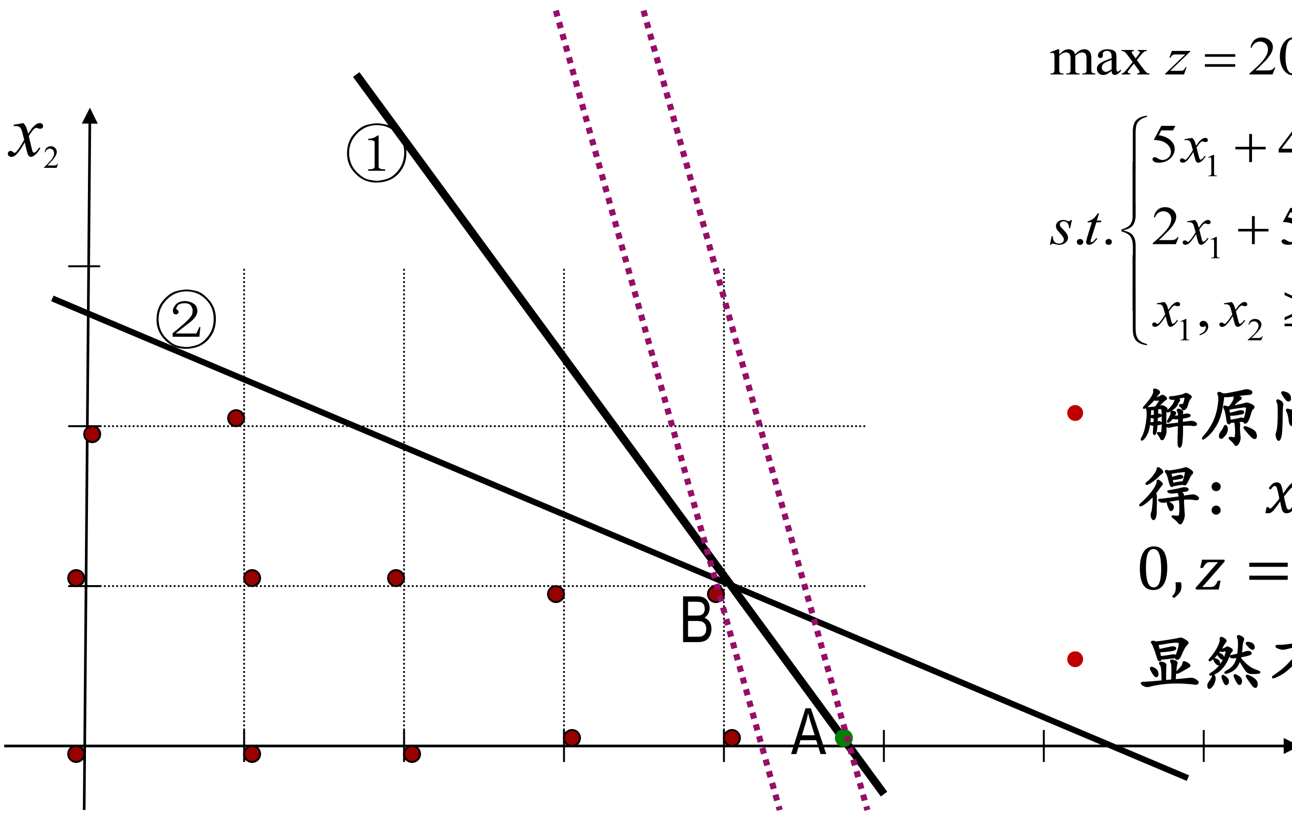
$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



- 解原问题的LP问题，得：$x_1 = 4.8, x_2 = 0, z = 96$。
- 显然不是可行解。

整数线性规划问题的提出

- $x_1 = 5, x_2 = 0$显然不是可行解，因为不满足第一个约束；
- $x_1 = 4, x_2 = 0$是可行解，$z = 80$；
- $x_1 = 4, x_2 = 1$是可行解，$z = 90$；<u>该解并不通过取整得到</u>。



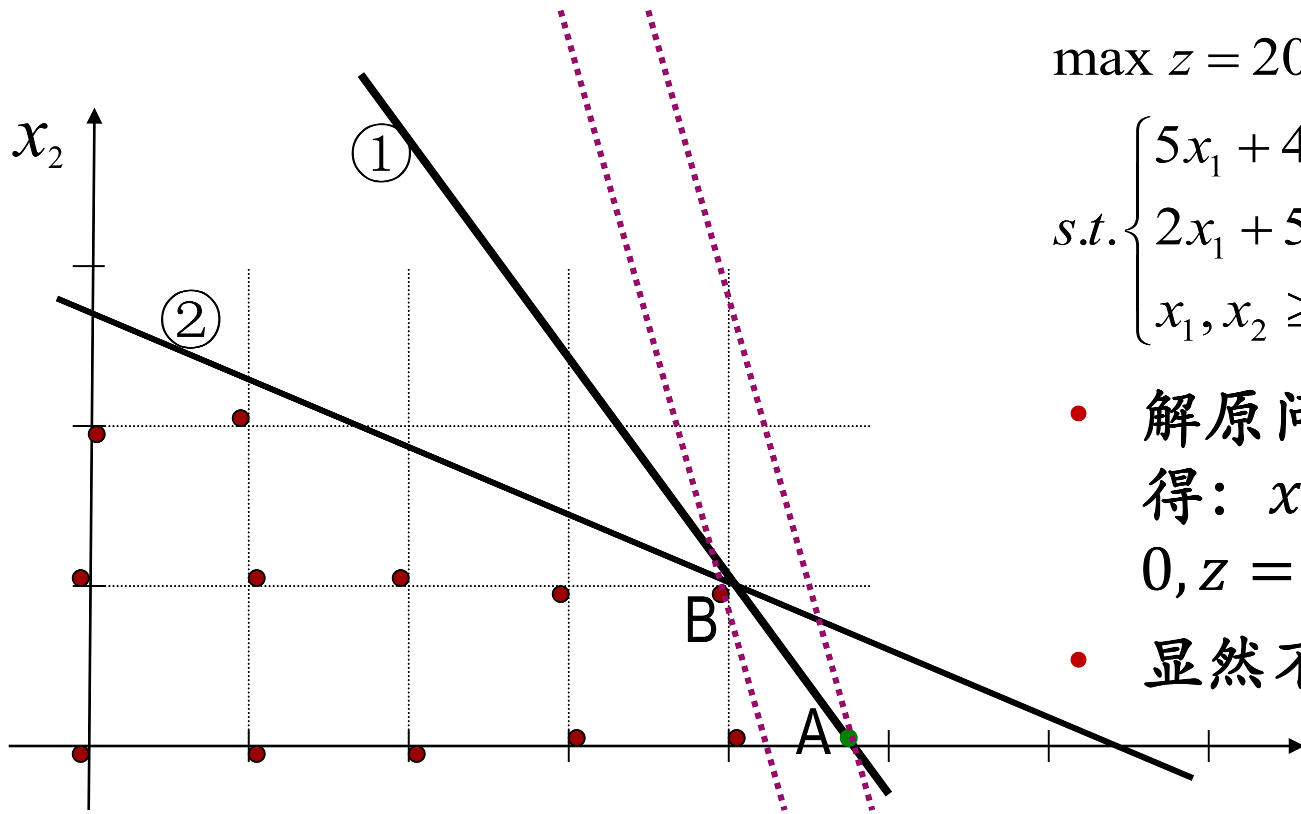
$$\max z = 2000x_1 + 1000x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

- 解原问题的LP问题，得：$x_1 = 4.8, x_2 = 0, z = 96$。
- 显然不是可行解。

整数线性规划问题的提出

- 纯整数规划可行解就是可行域中的整数点。
- 非整数点不是可行解。
- 非整数点对求解没有贡献，甚至可以切割掉，不影响IP的优化。
- IP问题的最优解不优于LP问题的最优解。



$$\max z = 2000x_1 + 1000x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

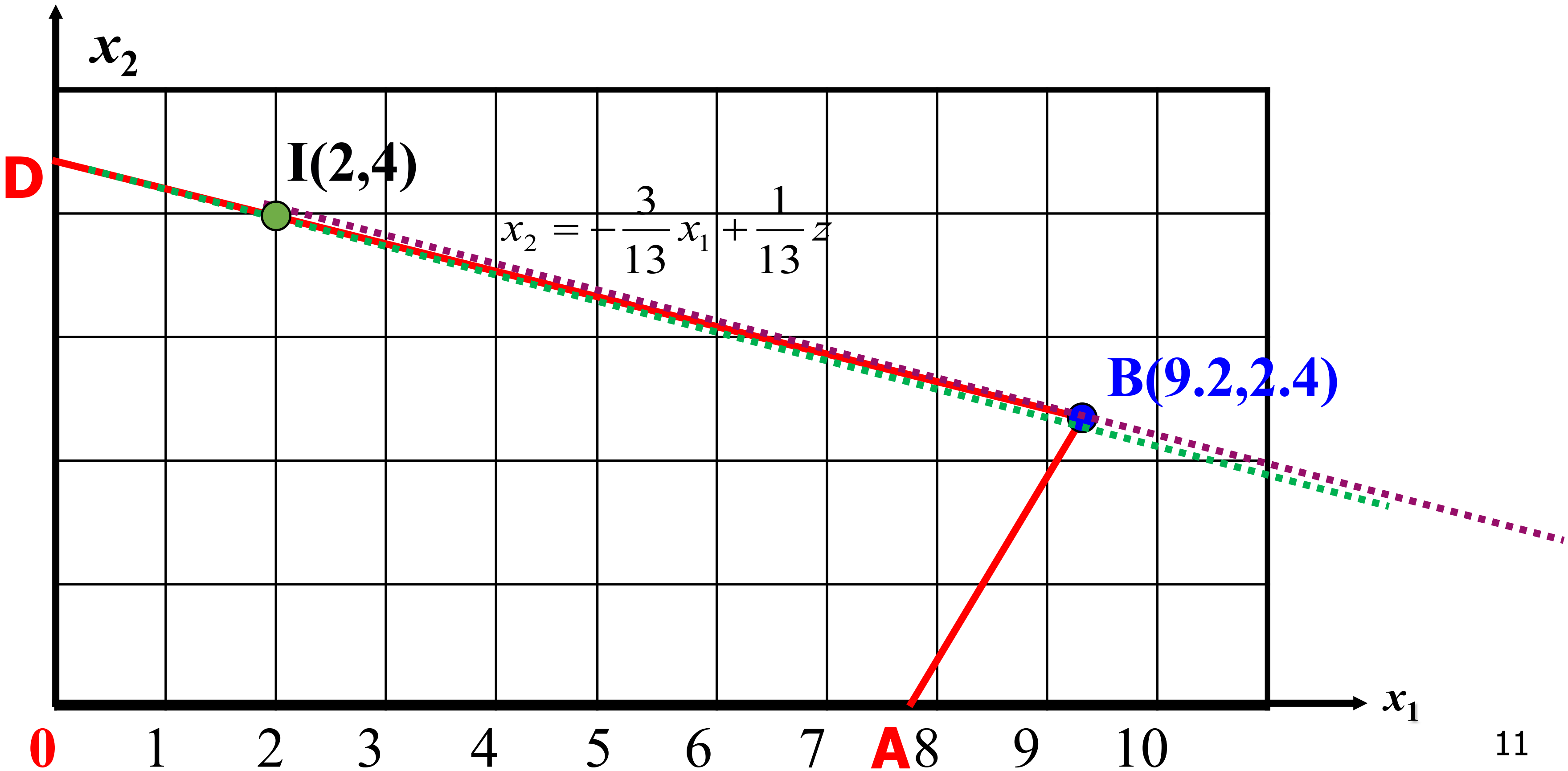
- 解原问题的LP问题，得：$x_1 = 4.8, x_2 = 0, z = 96$。
- 显然不是可行解。

整数线性规划问题的提出

- 例2，整数规划问题：

$$\max z = 3x_1 + 13x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \le 40 \\ 11x_1 - 8x_2 \le 82 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

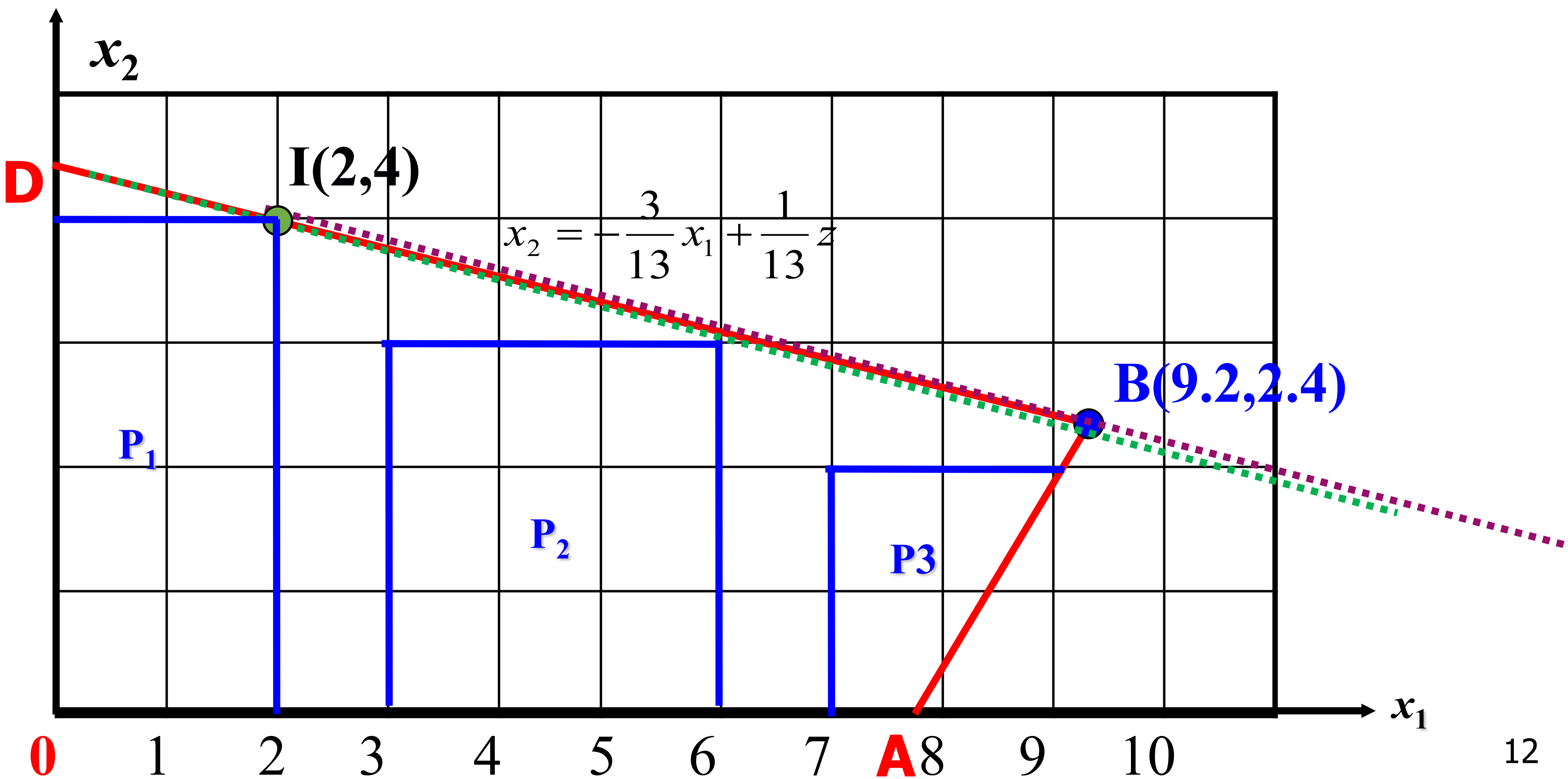


整数线性规划问题的提出

- 例2，整数规划问题：

$$\max z = 3x_1 + 13x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \le 40 \\ 11x_1 - 8x_2 \le 82 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



运 筹 学

Operations Research (OR)

讲师： 王 博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email： wb8517@hust.edu.cn QQ：2734802827

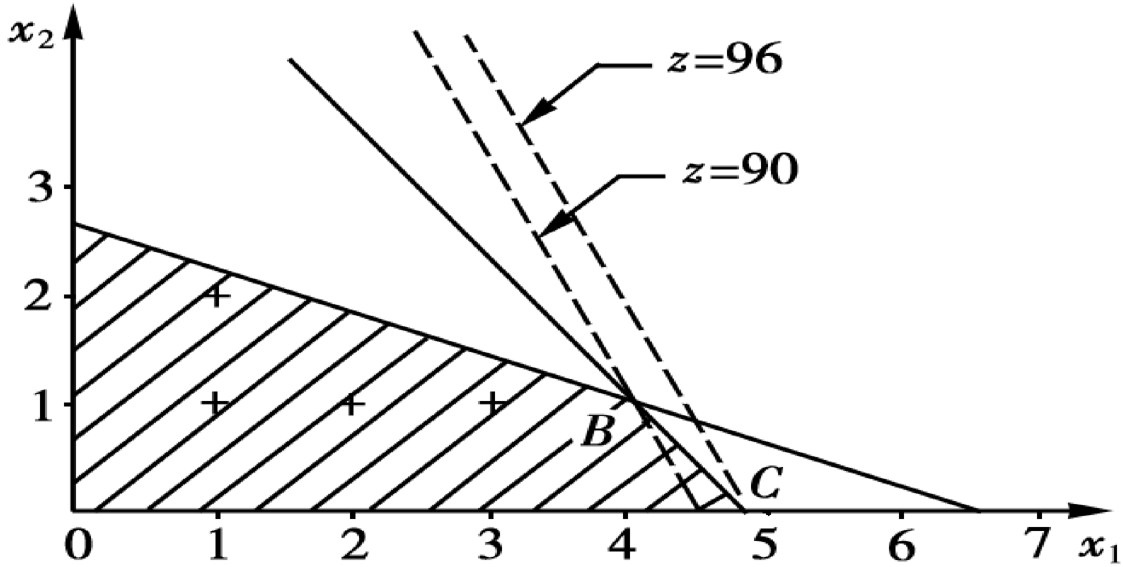
華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第6章 整数规划

第6章 整数规划

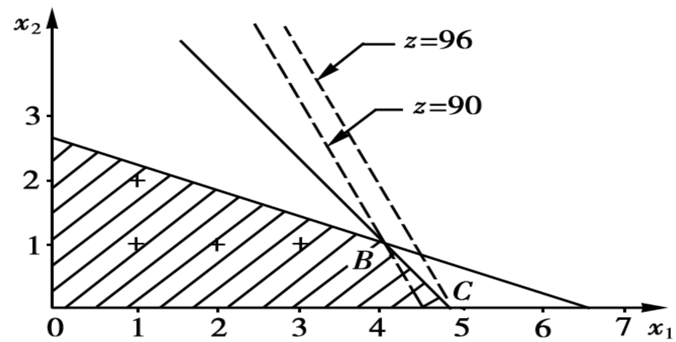
分支定界法

- 在求解整数线性规划时，如果可行域是有界的，首先容易想到的方法就是穷举变量的所有可行的整数组合，就像在下图中画出所有“+”号的点那样，然后比较它们的目标函数值以定出最优解：



- 对于小型的问题，变量数很少，可行的整数组合数也是很小时，这个方法是可行的，也是有效的。

分支定界法



- 在上一节的例子中，x_1 所能取的整数值为0、1、2、3、4共5个；x_2所能取的整数值为0、1、2共3个，它的组合(不都是可行的)数是3×5=15个，穷举法还是勉强可用的。
- 对于大型的问题，可行的整数组合数是很大的。例如将n项任务指派n个人去完成，不同的指派方案共有$n!$种，当$n = 10$，这个数就超过300万；当$n = 20$，这个数就超过2×1018，如果一一计算，就是用每秒百万次的计算机，也要几万年的功夫，很明显，解这样的题，穷举法是不可取的。
- 所以我们的方法一般应是仅检查可行的整数组合的一部分，就能定出最优的整数解。分支定界解法 (branch and bound method)就是其中的一个.

分支定界法思路:

- 设有最大化的整数线性规划问题A，与它相应的线性规划为(松弛)问题B，从解问题B开始，若其最优解不符合A的整数条件，那么B的最优目标函数必是A的最优目标函数z^*的上界，记作$\bar{Z}$;
- 而A的任意可行解的目标函数值将是z^*的一个下界$\underline{Z}$;
- 分支定界法就是将B的可行域分成子区域(称为分支)的方法，逐步减小上界$\bar{Z}$和增大下界$\underline{Z}$，最终求到最优解z^*。

原问题的松弛问题:

- 任何整数规划(IP)，凡放弃某些约束条件(如整数要求)后，所得到的问题都称为IP的松驰问题。
- 最通常的松驰问题是放弃变量的整数性要求，此时整数规划的解集是其对应的松弛问题解集的子集。
- 整数规划求最大化时，松弛问题的最优解是其解的上界；整数规划求最小化时，松弛的最优解是其解的下界。

一般求解对应的松驰问题，可能会出现下面几种情况：

- 若所得的最优解的各分量恰好是整数，则这个解也是原整数规划的最优解，计算结束；
- 若松驰问题无可行解，则原整数规划问题也无可行解，计算结束；
- 若松驰问题有最优解，但其各分量不全是整数，则这个解不是原整数规划的最优解。可以用分支定界法求解：

分支的方法：

- 任选一不符合整数条件的变量x_r，其值为b_r，构造两个约束条件$x_r \le [b_r]$和$x_r \ge [b_r]+1$，代入原问题。[ ]表示向下取整。
- 将约束条件代入原问题，可以得到两个后继整数规划问题：

$$\max z = CX \qquad s.t.\begin{cases} AX = b \\ x \ge 0, x\text{取整数值} \end{cases}$$

$$\max z = CX \qquad s.t.\begin{cases} AX = b \\ x_r \le [b_r] \\ x \ge 0, x\text{取整数值} \end{cases}$$

$$\max z = CX \qquad s.t.\begin{cases} AX = b \\ x_r \ge [b_r]+1 \\ x \ge 0, x\text{取整数值} \end{cases}$$

定界的方法：

- 以每个后继问题为一分支，标明求(松弛问题的)解的结果。在各分支中找出最优目标函数值作为新的上(下)界。
- 从解满足整数条件的各分支中，找出最优目标函数值作为下(上)界，用它来判断分支是保留还是剪支。

剪支的方法：

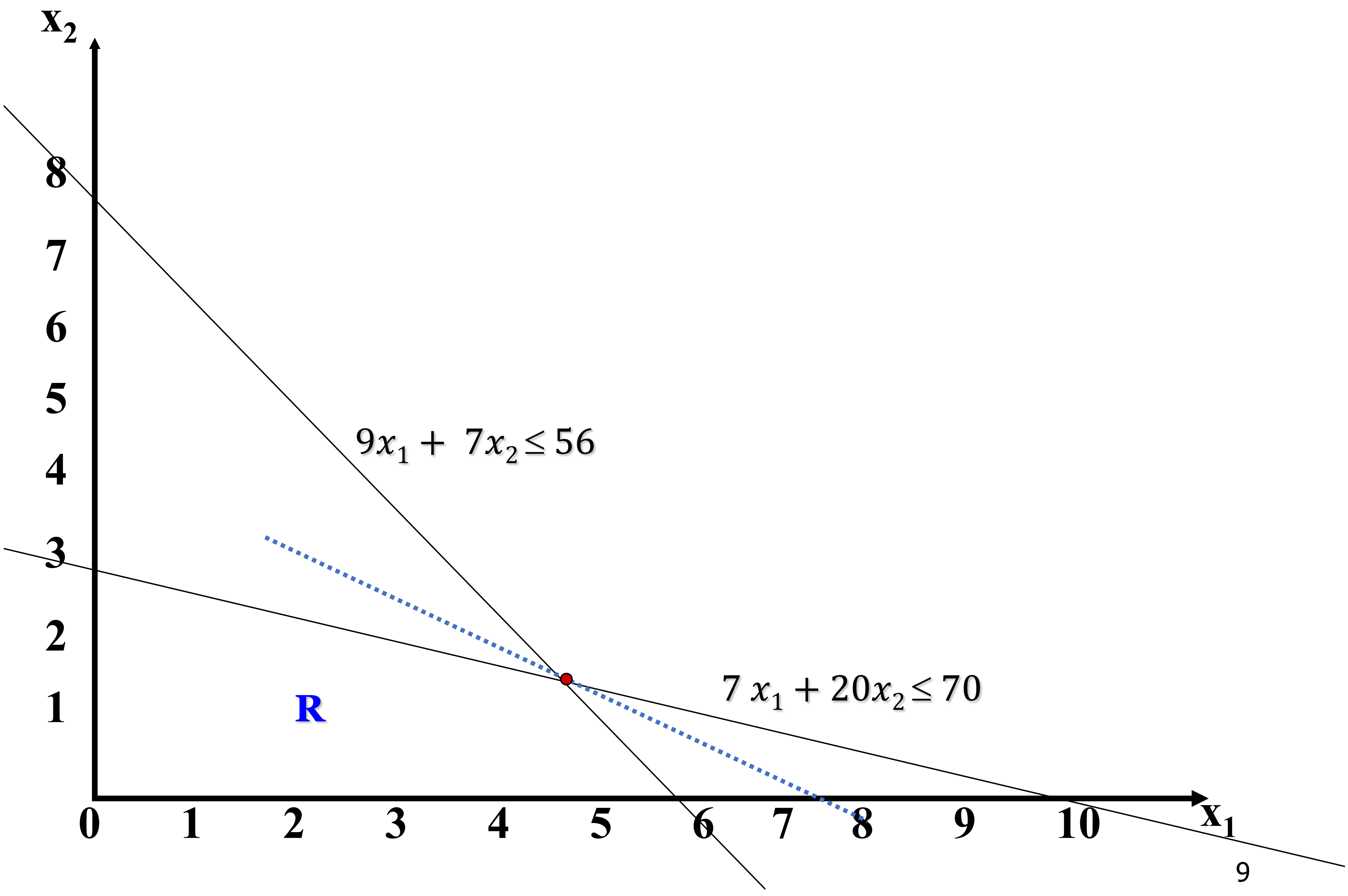
- 把所有分支的最优值与下(上)界值比较，剪掉所有不优的分支。对于不符合整数条件的分支，重复分支定界，直到获得$\bar{Z}=\underline{Z}$。

例1：用分支定界法求解整数规划问题：

$$\max z = 40x_1 + 90x_2 \quad (1)$$

$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56, & (2) \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70, & (3) \\ x_1, x_2 \ge 0, & (4) \\ x_1, x_2\text{为整数值。} & (5) \end{cases}$$

- (1)--(5)构成原问题，整数规划A
- (1)--(4)是原问题对应的松弛问题，线性规划B



x_2
8
7
6
5
4
3
2
1
$9x_1 + 7x_2 \leq 56$
$7x_1 + 20x_2 \leq 70$
R
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x_1

分支定界法

例1：用分支定界法求解整数规划问题：

$$\max z = 40x_1 + 90x_2 \quad (1) \quad B$$

$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56, & (2) \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70, & (3) \\ x_1, x_2 \ge 0, & (4) \\ \cancel{x_1, x_2\text{为整数值。}} & (5) \end{cases}$$

- 解：先不考虑约束(5)，解(1)—(4)构成的松弛问题的线性规划B，得最优解：$x_1 = 4.81, x_2 = 1.82, z_0 = 356$;

$$\begin{cases} \bar{Z} = 356 \\ \underline{Z} = 0 \end{cases}$$

- 首先注意其中一个非整数变量的解，如x_1，在问题B的解中$x_1 = 4.81$。于是对原问题增加两个约束条件:

$$x_1 \le 4, \quad x_1 \ge 5$$

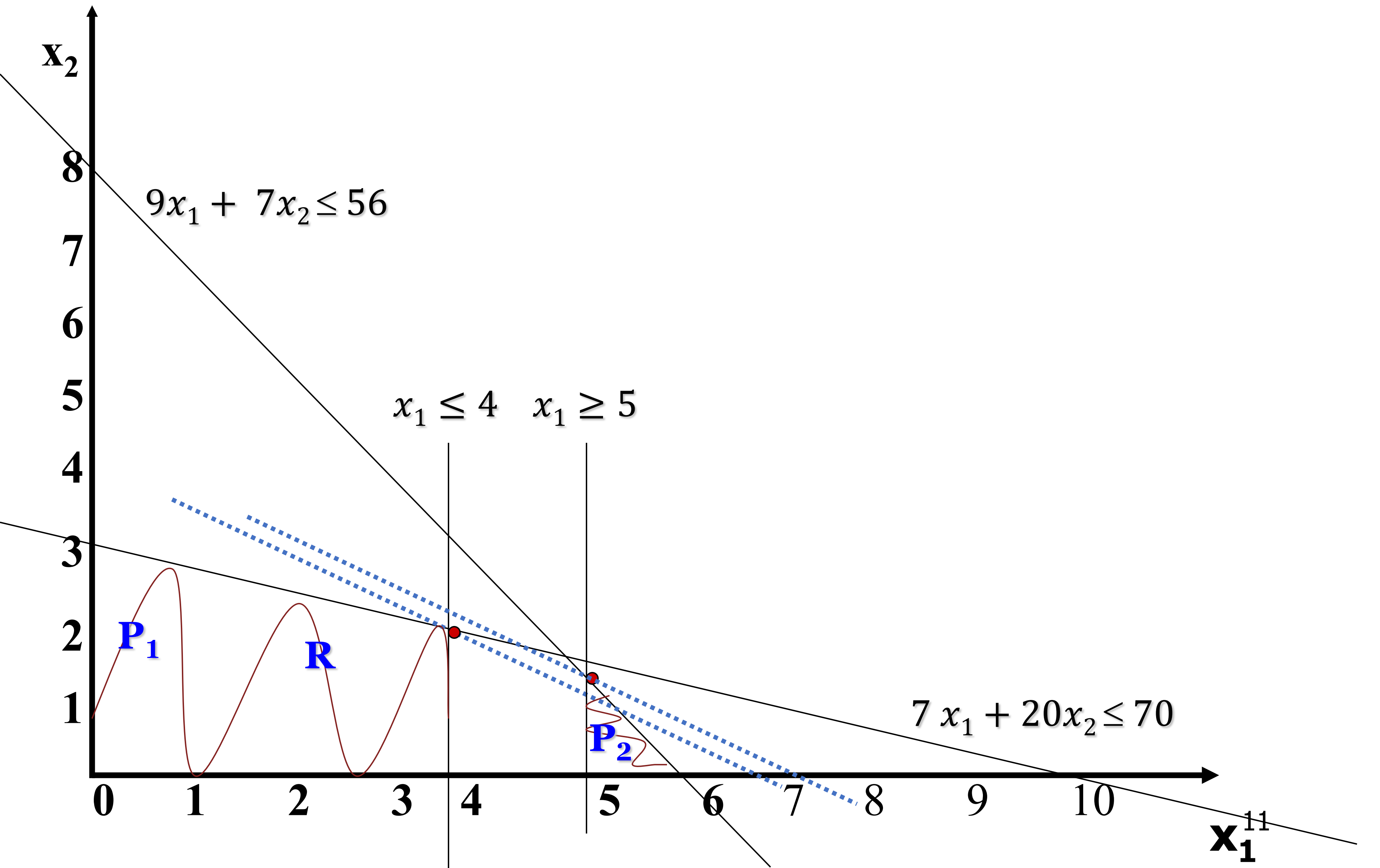
- 得到两个后继规划问题：

$$\max z = 40x_1 + 90x_2 \quad B_1$$

$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56, \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70, \\ x_1 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2\text{为整数值。} \end{cases}$$

$$\max z = 40x_1 + 90x_2 \quad B_2$$

$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56, \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70, \\ x_1 \ge 5 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2\text{为整数值。} \end{cases}$$



x_2
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
x_1
$9x_1 + 7x_2 \leq 56$
$x_1 \leq 4$
$x_1 \geq 5$
P_1
R
P_2
$7x_1 + 20x_2 \leq 70$

$$\max z = 40x_1 + 90x_2 \quad (1)$$

$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56, & (2) \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70, & (3) \\ x_1, x_2 \ge 0, & (4) \\ x_1, x_2\text{为整数值。} & (5) \end{cases}$$

- **解**：求解两个后继规划问题，得到新的解：

问题B：
$x_1 = 4.81, x_2 = 1.82$
$z_0 = 356$

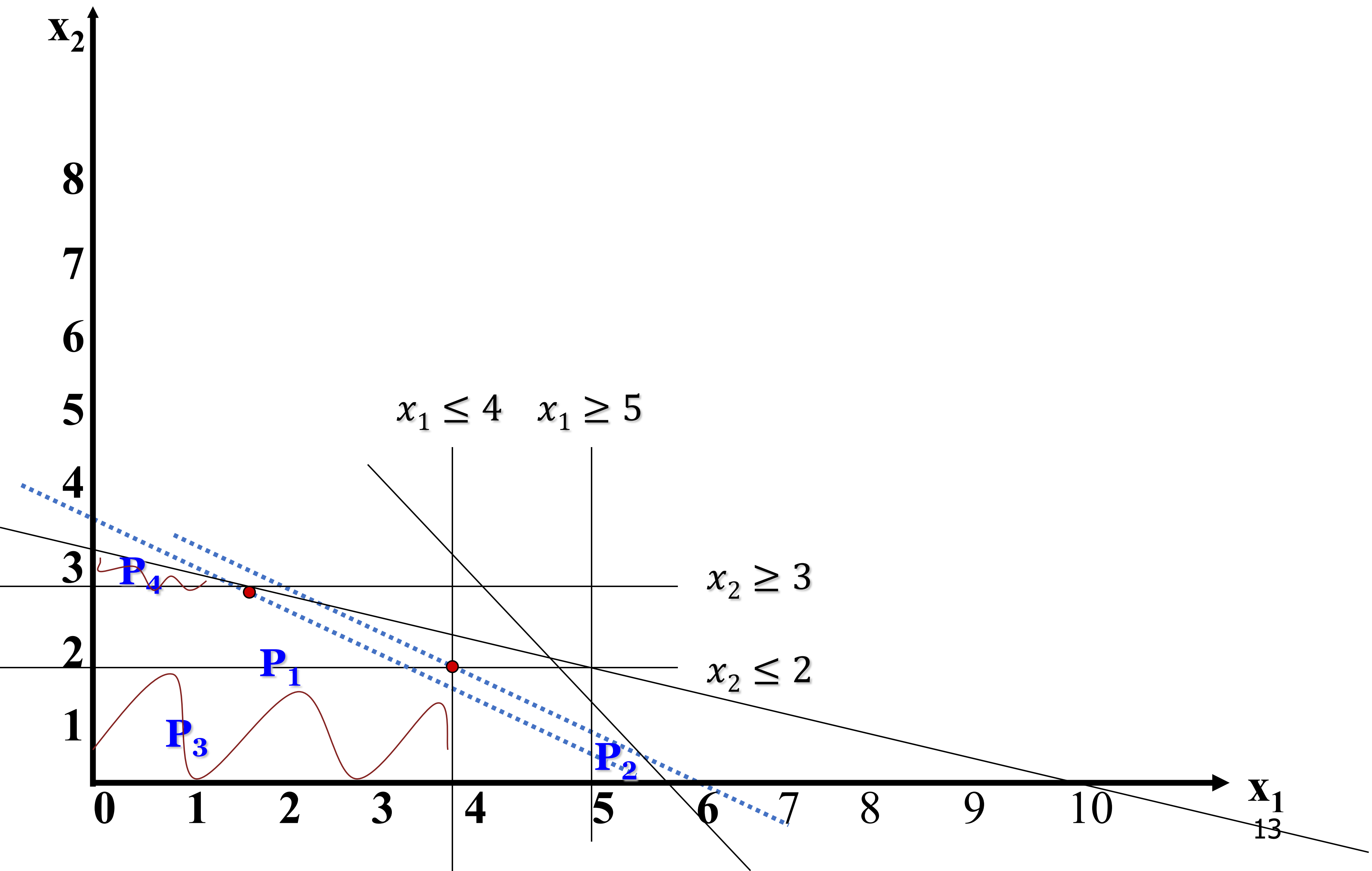
$x_1 \le 4$ $\qquad$ $x_1 \ge 5$

问题B_1（P_1）：
$x_1 = 4, \boxed{x_2 = 2.1}$
$z_1 = 349$

问题B_2（P_2）：
$x_1 = 5, x_2 = 1.57$
$z_2 = 341$

←还没有得到整数解

- 此时：$z_1 > z_2$，更新原问题的上界$\bar{Z}$，令$\bar{Z} = z_1 = 349$;
- 因为还没有找到整数解，问题的下界不变，$\underline{Z} = 0$;
- $z_1 > z_2$，因此先从分支B_1开始继续分支(这里更可能找到z^*)：
- 构造约束条件$x_2 \le 2, x_2 \ge 3$，得到的后继问题标记为B_3和B_4。
- **注意**！是对B_1增加约束，而不是对原问题！



x_2
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x_1
$x_1 \leq 4$
$x_1 \geq 5$
$x_2 \geq 3$
$x_2 \leq 2$
P_1
P_2
P_3
P_4

- **解**： 求解B_3和B_4：

问题B：
$x_1 = 4.81, x_2 = 1.82$
$z_0 = 356$

$x_1 \leq 4$

问题B_1（P_1）：
$x_1 = 4, \boxed{x_2 = 2.1}$
$z_1 = 349$

$x_1 \geq 5$

问题B_2（P_2）：
$x_1 = 5, x_2 = 1.57$
$z_2 = 341$

$x_2 \leq 2$

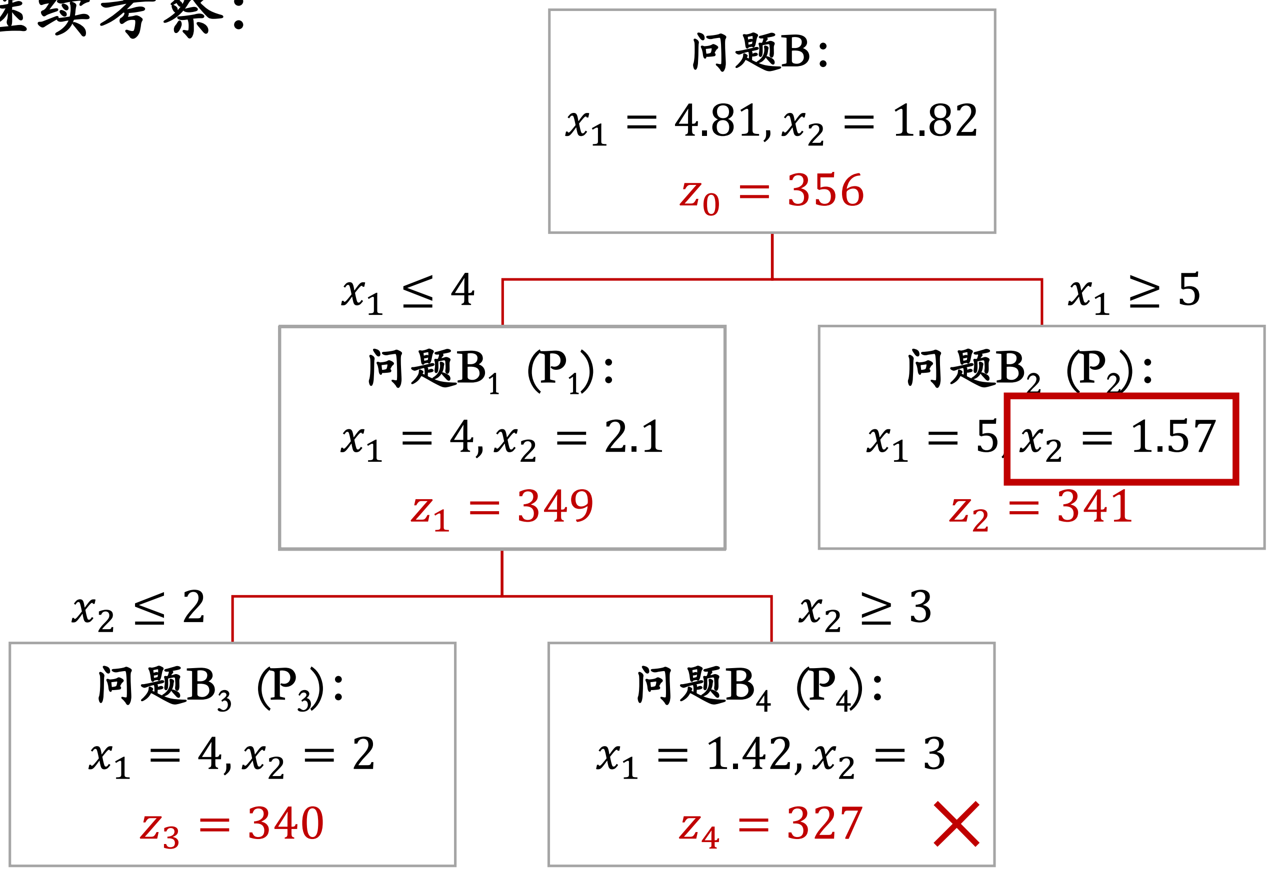
问题B_3（P_3）：
$x_1 = 4, x_2 = 2$
$z_3 = 340$

$x_2 \geq 3$

问题B_4（P_4）：
$x_1 = 1.42, x_2 = 3$
$z_4 = 327$ ×

- 检查分支B_2，B_3，B_4的解，决定上界$\bar{Z} = z_2 = 341$;
- 由满足整数条件的B_3更新原问题的下界$\underline{Z}$，$\underline{Z} = z_3 = 340$;
- 分支B_4的解z_4已经小于当前下界$\underline{Z} = z_3$了，因此B_4剪支(×)。

- **解**：继续考察：



- 分支B_2决定了上界$\bar{Z} = z_2 = 341 \neq \underline{Z}$，因此还需要继续考察；
- 由B_2的非整数解构造两个约束条件：$x_2 \le 1, x_2 \ge 2$；
- 对B_2增加这两个约束条件，得到后继规划问题B_5和B_6，求解

- **解**：继续考察：

问题B：
$x_1 = 4.81, x_2 = 1.82$
$z_0 = 356$

$x_1 \le 4$

问题B_1（P_1）：
$x_1 = 4, x_2 = 2.1$
$z_1 = 349$

$x_1 \ge 5$

问题B_2（P_2）：
$x_1 = 5, x_2 = 1.57$
$z_2 = 341$

$x_2 \le 2$

问题B_3（P_3）：
$x_1 = 4, x_2 = 2$
$z_3 = 340$

$x_2 \ge 3$

问题B_4（P_4）：
$x_1 = 1.42, x_2 = 3$
$z_4 = 327$ ×

$z_4 \le z_3$，×

$x_2 \le 1$

问题B_5（P_5）：
$x_1 = 5.44, x_2 = 1$
$z_5 = 308$ ×

$x_2 \ge 2$

问题B_6（P_6）：
无可行解 ×

无可行解，×

- 检查分支B_3，B_5，B_6的解，决定上界$\bar{Z} = z_3 = 340$；
- B_5解不优，剪支；
- B_6无可行解，剪支。
- 得到$\bar{Z} = \underline{Z} = z^* = 340$，$x_1^* = 4, x_2^* = 2$。

分支定界法解题步骤可以归纳如下 (针对max问题)：

- 将要求解的整数线性规划问题称为问题A;
- 将与它相应的线性规划问题称为问题B;
- (1)解问题B，可能得到以下几种情况:
  1. B没有可行解，这时A也没有可行解，则停止。
  2. B有最优解，并符合问题A的整数条件，B的最优解即为A的最优解，则停止。
  3. B有最优解，但不符合问题A的整数条件，记它的目标函数值为$\bar{Z}$。
- (2) 用观察法找问题A的一个整数可行解，一般可取$X = 0$来试探求得其目标函数值，并记作$\underline{Z}$。
- 用z^*表示问题A的最优目标函数值，此时可以知道：

$$\underline{Z} \le z^* \le \bar{Z}$$

按照分支定界剪支的顺序进行迭代：

- 分支：在B的最优解中任选一个不符合整数条件的变量x_r，其值为b_r，以$[b_r]$表示小于b_r的最大整数。
- 构造两个约束条件 $x_r \leq [b_r]$ 和 $x_r \geq [b_r]+1$ ，分别加入原问题A，得到两个后继规划问题B_1和B_2。不考虑整数条件求解B_1和B_2 。
- 定界：以每个后继问题为一分支，标明求解的结果，与其他问题的解的结果中，找出最优目标函数值最大者作为新的上界$\bar{Z}$。从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值为最大者作为新的下界$\underline{Z}$，若无可行解，仍令$\underline{Z}=0$。
- 比较与剪支：各分支的最优目标函数中若有小于$\underline{Z}$者，则剪掉这支(用×表示)即以后不再考虑了。若大于$\underline{Z}$，且不符合整数条件，则从分支与定界开始重复，一直到最后得到$\bar{Z}=\underline{Z}=z^*$为止。
- 此时z^*所对应的满足正数条件的解就是问题A的最优整数解X^*。

运 筹 学

Operations Research (OR)

讲师： 王 博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email： wb8517@hust.edu.cn QQ：2734802827

第6章 整数规划

第6章 整数规划

割平面法

整数线性规划问题的可行域是整数点集(离散的点的集合)。

用分支定界法求解整数线性规划问题，若变量数目很大，其计算工作量也是相当可观的。

割平面解法的思路是:

- 首先不考虑变量x_i是整数这一条件，仍然是用解线性规划的方法去解整数线性规划问题。
- 若得到非整数的最优解, 可以增加一个能割去该非整数最优解的线性约束条件(或称为割平面)，将原可行域切割掉一部分，这部分只包含非整数解，没有切割掉任何整数可行解。

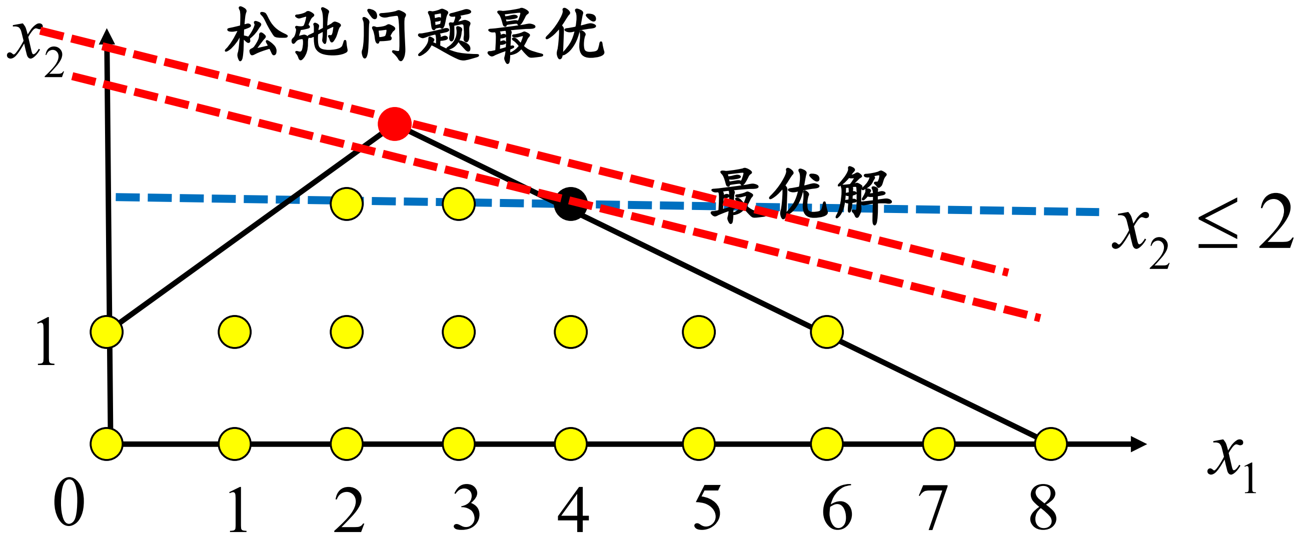
割平面法的核心就是指出怎样找到适当的割平面(不见得一次就找到)，使切割后最终得到这样的可行域，其一个有整数坐标的顶点(vertex)恰好是问题的最优解。

这个方法是R.E.Gomory提出来的，所以又称为Gomory的割平面法。以下只讨论纯整数线性规划的情形。

例：求解下面的整数规划问题：

$$\max z = x_1 + 4x_2$$
$$s.t.\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

$$\max z = x_1 + 4x_2$$
$$s.t.\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



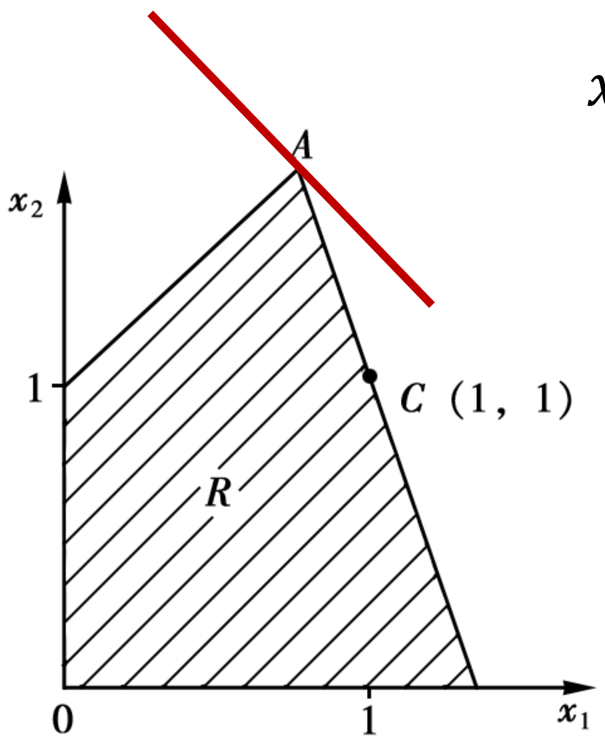
可用一个约束割去松弛问题最优解，不改变可行集

例1：求解 $\max z = x_1 + x_2 \quad (1)$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, & (2) \\ 3x_1 + x_2 \le 4, & (3) \\ x_1, x_2 \ge 0, & (4) \\ x_1, x_2 \text{为整数值。} & (5) \end{cases}$$

放松整数条件(5)，容易求得相应的线性规划的最优解：

$$x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = \frac{7}{4}, z^* = \frac{10}{4}$$

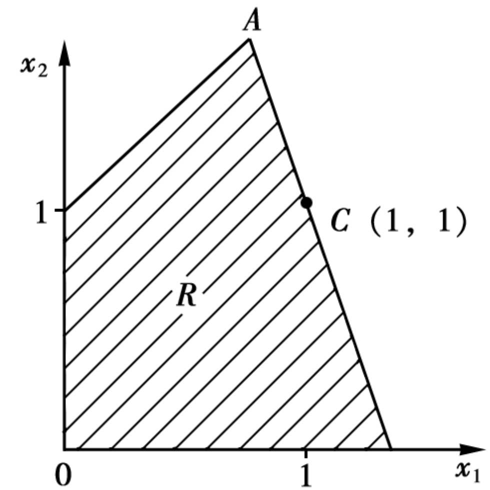


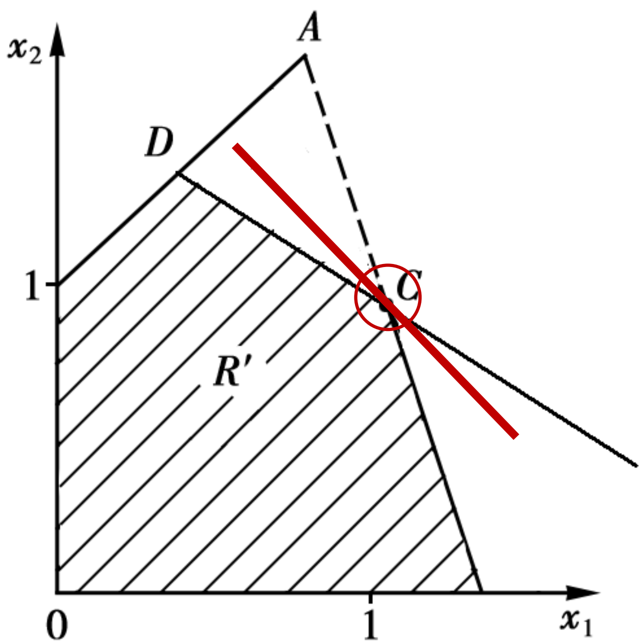
- 该解即左图可行域R的极点A，
- 但不满足整数条件。

割平面法

例1：求解 $\max z = x_1 + x_2 \quad (1)$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, & (2) \\ 3x_1 + x_2 \le 4, & (3) \\ x_1, x_2 \ge 0, & (4) \\ x_1, x_2 \text{为整数值。} & (5) \end{cases}$$





- 现设想，如能找到像CD那样的直线去切割域R，去掉三角形域ACD，可以得到新的可行域R'，
- 具有整数坐标的C点(1，1)就是域R'的一个极点，
- 在域R'上求解(1)—(4)，得到的最优解又恰巧在C点，就能得到原问题的整数解。

$$\max z = x_1 + x_2 \quad (1)$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, & (2) \\ 3x_1 + x_2 \le 4, & (3) \\ x_1, x_2 \ge 0, & (4) \\ x_1, x_2\text{为整数值。} & (5) \end{cases}$$

解：在原问题的前两个不等式中增加非负松弛变量x_3、x_4，使两式变成等式约束：

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad (6)$$

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 4, \quad (7)$$

不考虑条件(5)，用单纯形法求解：

		c					
		c_j		1	1	0	0
	C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
初始计算表	0	x_3	1	−1	1	1	0
	0	x_4	4	3	1	0	1
	c_j-z_j		0	1	1	0	0
最终计算表	1	x_1	3/4	1	0	−1/4	1/4
	1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
	c_j-z_j		−5/2	0	0	−1/2	−1/2

割平面法

可从最终计算表中得到非整数变量对应的关系式：

$$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4}$$

$$x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{4}$$

	c_j			1	1	0	0
	C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
初始计算表	0	x_3	1	-1	1	1	0
	0	x_4	4	3	1	0	1
	c_j-z_j		0	1	1	0	0
最终计算表	1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4
	1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
	c_j-z_j		-5/2	0	0	-1/2	-1/2

可从最终计算表中得到非整数变量对应的关系式：

$$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4}$$
$$x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{4}$$

为了得到整数最优解。将上式变量的系数和常数项都分解成整数和非负真分数两部分之和，

$$(1+0)x_1 + (-1+\frac{3}{4})x_3 + (0+\frac{1}{4})x_4 = 0 + \frac{3}{4}$$
$$(1+0)x_2 + (0+\frac{3}{4})x_3 + (0+\frac{1}{4})x_4 = 1 + \frac{3}{4}$$

然后将整数部分与分数部分分开，移到等式左右两边，得到：

$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - (\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4)$$
$$x_2 - 1 = \frac{3}{4} - (\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4)$$

利用等式约束：

$$x_1 - x_3 = \boxed{\frac{3}{4} - (\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4)}$$

可以构造割平面约束：

$$\frac{3}{4} - (\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4) \leq 0$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad (6)$$

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 4, \quad (7)$$

解释：考虑约束条件(6)，(7)：

- x_1, x_2, x_3, x_4满足非负整数(松弛变量调整成整数)，则：
- 等式左右均为整数，右边在$x_3 = x_4 = 0$的情况下取3/4，不满足整数条件，要保证是整数，只能右边≤ 0。
- 此时，原问题A的最优解在割平面$\frac{3}{4} - (\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4) = 0$的一边，而所有整数解在割平面的另一边，即满足$\frac{3}{4} - (\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4) \leq 0$的一侧。

利用等式约束：

$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - (\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4)$$

可以构造割平面约束：

$$\frac{3}{4} - (\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4) \leq 0$$

即：

$$-3x_3 - x_4 \leq -3 \quad (8)$$

用割平面约束(8)代替原问题整数条件，继续求解。

- 此时需要增加松弛变量x_5，得到$-3x_3 - x_4 + x_5 = -3$。
- 将这个新的约束方程代入原问题的最终计算表中：

割平面法

			c_j	1	1	0	0
	C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
初始计算表	0	x_3	1	−1	1	1	0
	0	x_4	4	3	1	0	1
	c_j-z_j		0	1	1	0	0
最终计算表	1	x_1	3/4	1	0	−1/4	1/4
	1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
	c_j-z_j		−5/2	0	0	−1/2	−1/2

- 代入$-3x_3 - x_4 + x_5 = -3$：

		$c_j \rightarrow$	1	1	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
1	x_1	3/4	1	0	−1/4	1/4	0	
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4	0	
0	x_5	−3	0	0	$\boxed{-3}$	−1	1	
		$c_j - z_j$	0	0	−1/2	−1/2	0	

		$c_j \to$	1	1	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
1	x_1	3/4	1	0	−1/4	1/4	0	
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4	0	
0	x_5	−3	0	0	[−3]	−1	1	
		$c_j - z_j$	0	0	−1/2	−1/2	0	

- x_5作为换出变量，x_3作为换入变量

		$c_j \to$	1	1	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
1	x_1	1	1	0	0	1/3	−1/12	
1	x_2	1	0	1	0	0	1/4	
0	x_3	1	0	0	1	1/3	−1/3	
		$c_j - z_j$	0	0	0	−1/3	−1/6	

- x_1, x_2均为整数值，得到了原问题A的最优解

注意，割平面约束(8)：

$$-3x_3 - x_4 \le -3 \quad (8) \qquad -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad (6)$$

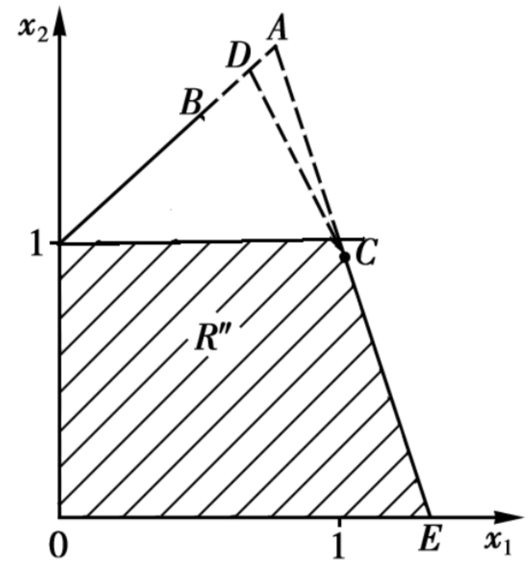
$$3x_1 + x_2 + x_4 = 4, \quad (7)$$

如果用x_1, x_2表示，由(6) (7)两式可以得到：

$$3(1 + x_1 - x_2) + (4 - 3x_1 - x_2) \ge 3$$

$$即：x_2 \le 1$$

- 这就是(x_1，x_2)平面内形成新的可行域，即包括平行于x_1轴的直线 $x_2 = 1$ 和这直线下的可行区域，整数点也在其中，没有切割掉。直观地表示在右图中。
- 从解题步骤看，这一步不是必须的。



总结一下求割平面约束的步骤：

- 令x_i是相应线性规划最优解中为分数值的一个基变量，由单纯形表的最终表得到：

$$x_i + \sum_k a_{ik} x_k = b_i \qquad \text{(i)}$$

其中$i \in Q, k \in K$，Q是基变量下标集合，K是非基变量下表集合。

- 将b_i和a_{ik}都分解成整数部分N与非负真分数f之和，即

$$b_i = N_i + f_i, \quad \text{其中} 0 < f_i < 1$$
$$a_{ik} = N_{ik} + f_{ik}, \quad \text{其中} 0 \le f_{ik} < 1$$

- 而N表示不超过b的最大整数，例如$b = -2.35, N = -3, b = 0.65$。
- 代入(i)式，得到 $$x_i + \sum_k N_{ik} x_k - N_i = f_i - \sum_k f_{ik} x_k$$
- 因此割平面约束就是： $$f_i - \sum_k f_{ik} x_k \le 0$$

割平面约束的有效性：

- 令 $$\Delta_i(X) = x_i + \sum_k N_{ik} x_k - N_i = f_i - \sum_k f_{ik} x_k$$
- (1) 对于松弛问题最优解$X^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$，由于非基变量$x_k = 0$，所以$\Delta_i(X^*) = f_i > 0$
- (2) 对于原问题的任意可行整数解X，$f_i - \sum_k f_{ik} x_k$必为整数
- 又已知$0 < f_i < 1$，$0 \le f_{ik} < 1$，因此$\sum_k f_{ik} x_k \ge 0$，可知

$$f_i - \sum_k f_{ik} x_k < 1,$$

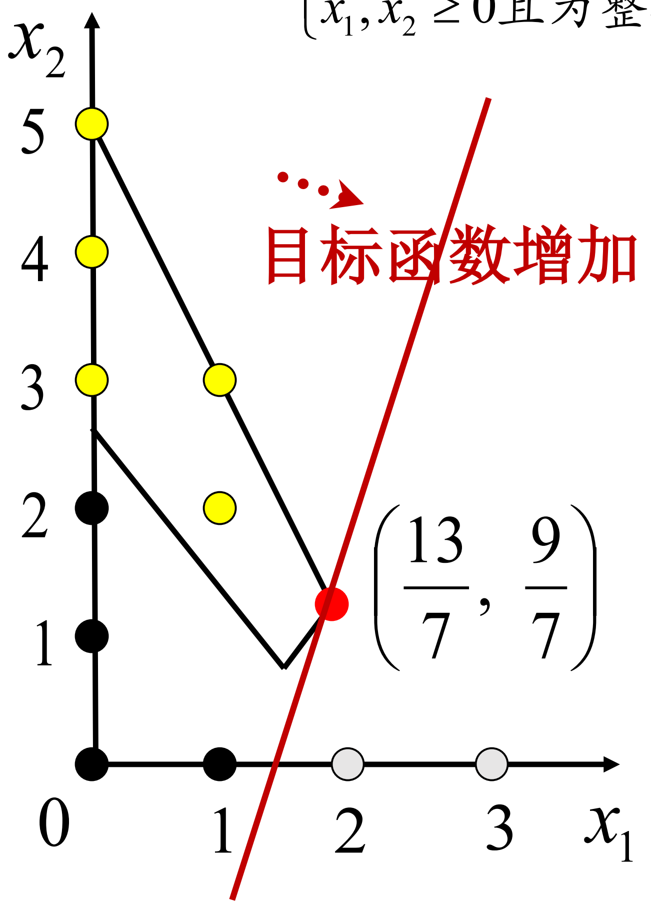
故而对于所有可行整数解(满足约束条件)，存在$f_i - \sum_k f_{ik} x_k \le 0$

- 于是，松弛问题最优解满足$\Delta_i(X^*) > 0$，原问题的任意可行解X满足$\Delta_i(X) \le 0$，即X^*和X被$\Delta_i(X^*) = 0$分隔开来。

例2：求解

$$\max z = 3x_1 - x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数值。} \end{cases}$$

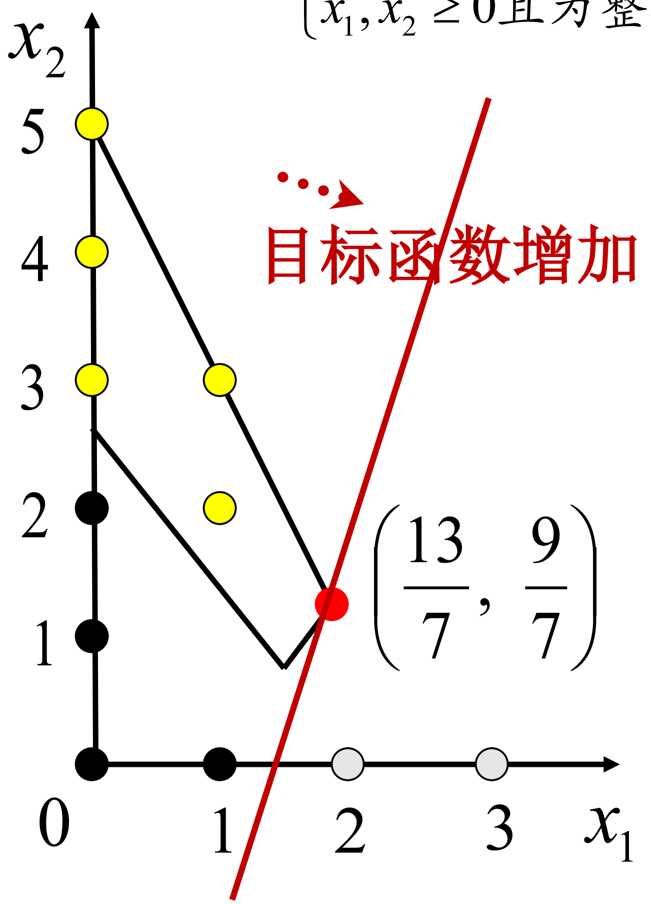
$$\max z = 3x_1 - x_2 - Mx_6$$
$$\Rightarrow s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_4 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ x_1, \ldots, x_6 \ge 0 \end{cases}$$



- 松弛问题的可行集和最优解如图所示
- 最优解不满足整数约束。

例2：求解
$$\max\ z=3x_1-x_2$$
$$s.t.\begin{cases}3x_1-2x_2\le 3,\\ 5x_1+4x_2\ge 10,\\ 2x_1+x_2\le 5,\\ x_1,x_2\ge 0\text{且为整数值。}\end{cases}$$

$$\max\ z=3x_1-x_2-Mx_6$$
$$\Rightarrow s.t.\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3=3,\\ 5x_1+4x_2-x_4+x_6=10,\\ 2x_1+x_2+x_5=5,\\ x_1,\dots,x_6\ge 0\end{cases}$$

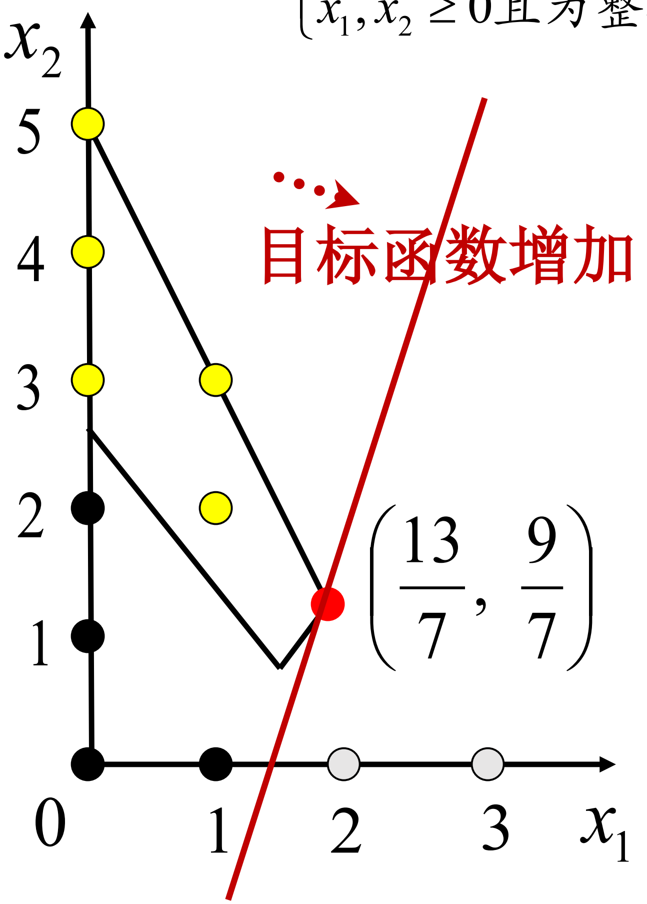


- 此时等式约束如下：

$$x_1+\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}x_5=\frac{13}{7}$$
$$x_2-\frac{2}{7}x_3+\frac{3}{7}x_5=\frac{9}{7}$$
$$x_4-\frac{3}{7}x_3+\frac{22}{7}x_5=\frac{31}{7}$$

例2：求解 $\max z = 3x_1 - x_2$

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数值。} \end{cases}$$



- 此时等式约束如下：

$$x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 = \frac{13}{7}$$
$$x_2 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_5 = \frac{9}{7}$$
$$x_4 - \frac{3}{7}x_3 + \frac{22}{7}x_5 = \frac{31}{7}$$

- 利用等式约束：

$$x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 = \frac{13}{7}$$

构造割平面约束：

$$x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 = 1 + \frac{6}{7}$$
$$x_1 - 1 = \frac{6}{7} - \left(\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5\right)$$

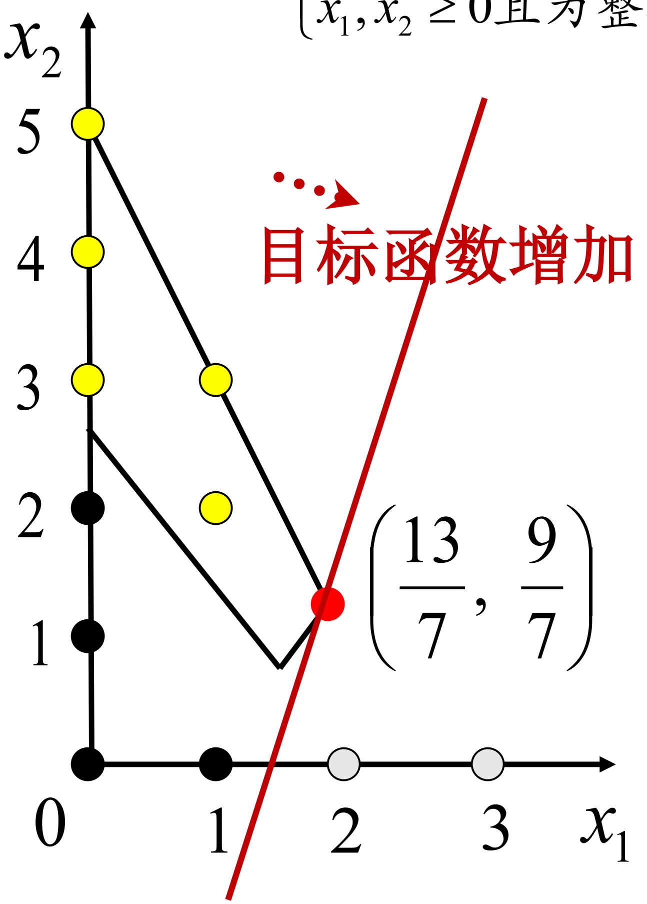
即

$$\frac{6}{7} - \left(\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5\right) \le 0$$

例2： 求解

$$\max\ z = 3x_1 - x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数值。} \end{cases}$$

$$\max\ z = 3x_1 - x_2 - Mx_6$$
$$\Rightarrow s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_4 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ x_1, \ldots, x_6 \ge 0 \end{cases}$$



利用等式约束

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3,$$
$$2x_1 + x_2 + x_5 = 5$$

可以转化

$$\frac{6}{7} - \left(\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5\right) \le 0$$

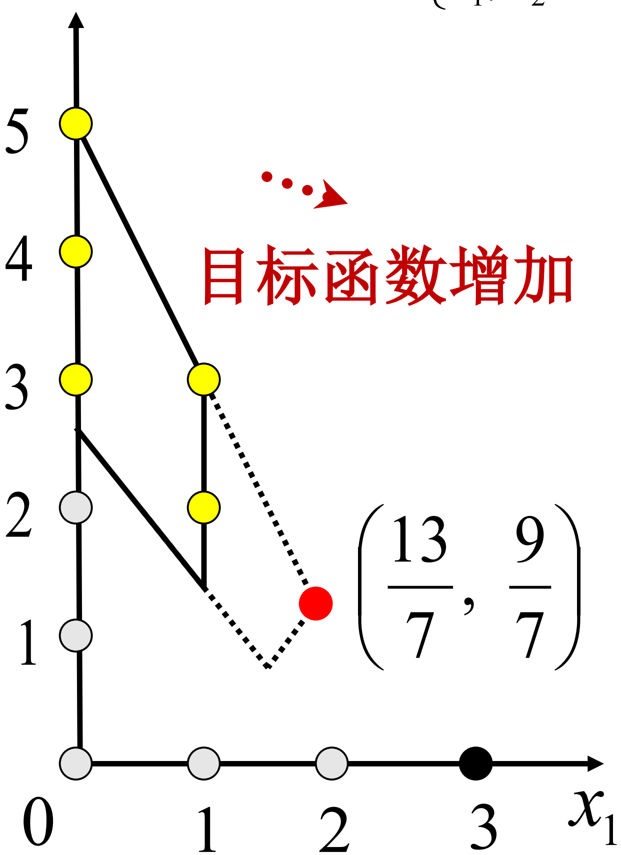
为：$x_1 \le 1$

代入原问题，替换整数条件：

例2：求解

$$\max z = 3x_1 - x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数值。} \end{cases}$$

$$\max z = 3x_1 - x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0\text{。} \end{cases}$$



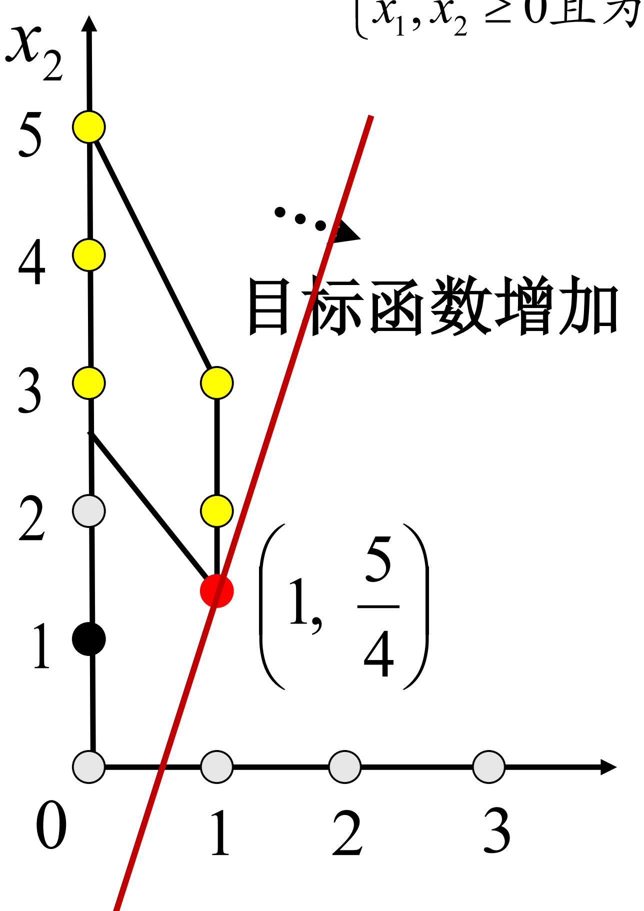
- 新松弛问题的可行集和最优解如图所示：
- (1) 原最优解被切割掉
- (2) 所有整数解被保存

割平面法

例2：求解

$$\max z = 3x_1 - x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数值。} \end{cases}$$

$$\max z = 3x_1 - x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0\text{。} \end{cases}$$



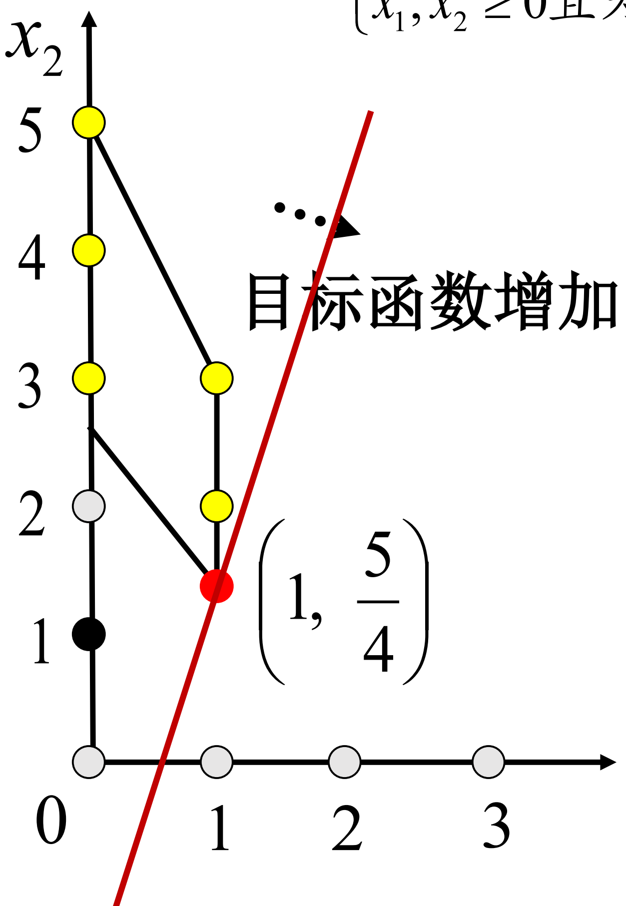
- 新松弛问题的可行集和最优解如图所示：
- 仍不满足整数约束

例2：求解 $\max z = 3x_1 - x_2$

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数值。} \end{cases}$$

$\max z = 3x_1 - x_2$

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0\text{。} \end{cases}$$



- 此时等式约束如下

$$x_1 + x_6 = 1$$

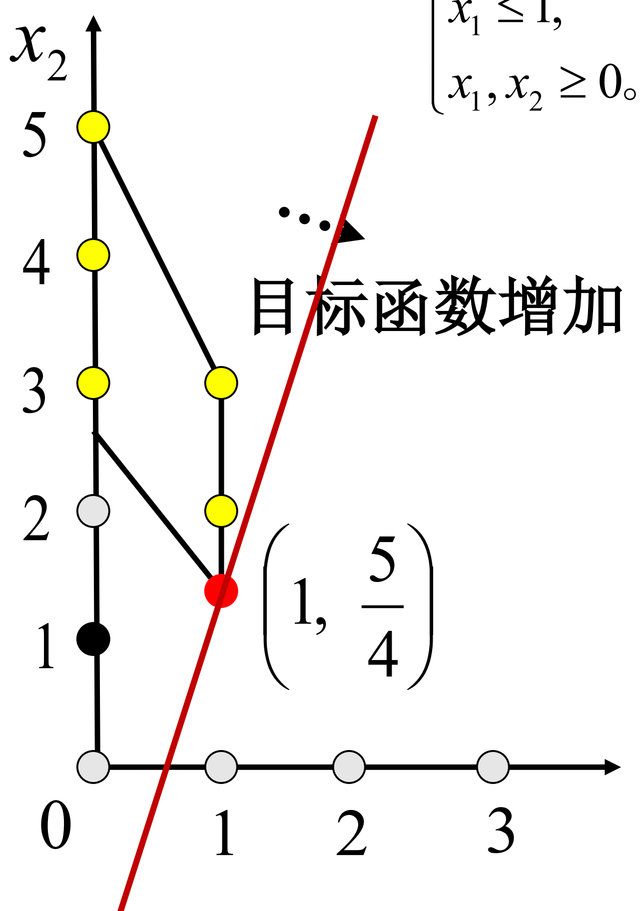
$$x_2 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{5}{4}x_6 = \frac{5}{4}$$

$$x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{11}{2}x_6 = \frac{5}{2}$$

$$x_5 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_6 = \frac{7}{4}$$

例2：求解 $\max z = 3x_1 - x_2$

$$s.t.\begin{cases}3x_1 - 2x_2 \le 3,\\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10,\\ 2x_1 + x_2 \le 5,\\ x_1 \le 1,\\ x_1, x_2 \ge 0。\end{cases}$$



再利用等式约束

$$x_5 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_6 = \frac{7}{4}$$

构造割平面约束，

$$-\frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 \le -\frac{3}{4}$$

利用

$$5x_1 + 4x_2 - x_4 = 10,\ \ x_1 + x_6 = 1$$

可得原变量表示的割平面约束为

$$x_1 + x_2 \ge 3$$

割平面法

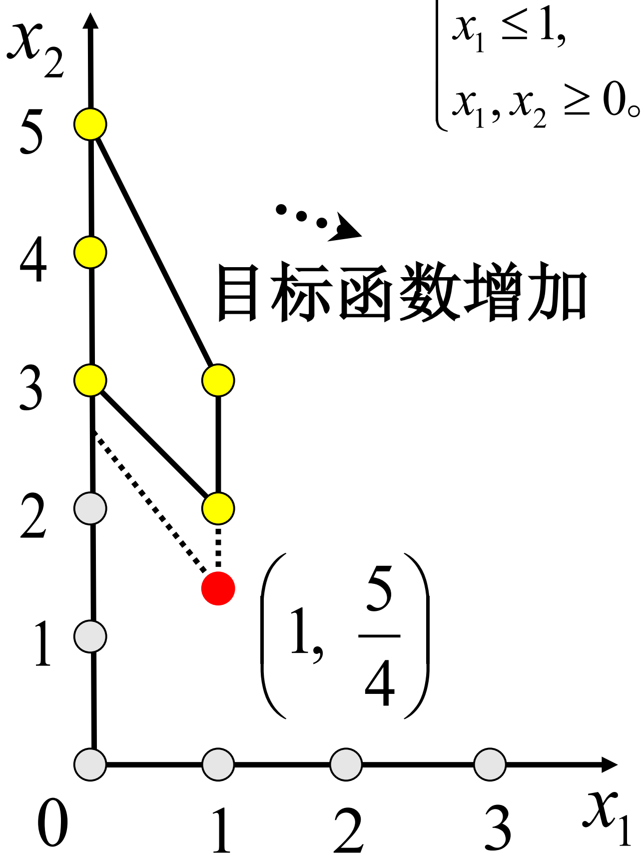
例2：求解

$$\max\ z=3x_1-x_2$$

$$s.t.\begin{cases}3x_1-2x_2\le 3,\\5x_1+4x_2\ge 10,\\2x_1+x_2\le 5,\\x_1\le 1,\\x_1,x_2\ge 0\text{。}\end{cases}$$

$$\max\ z=3x_1-x_2$$

$$s.t.\ \begin{cases}3x_1-2x_2\le 3\\5x_1+4x_2\ge 10\\2x_1+x_2\le 5\\x_1\le 1,\ x_1+x_2\ge 3\\x_1,x_2\ge 0\text{且为整数}\end{cases}$$



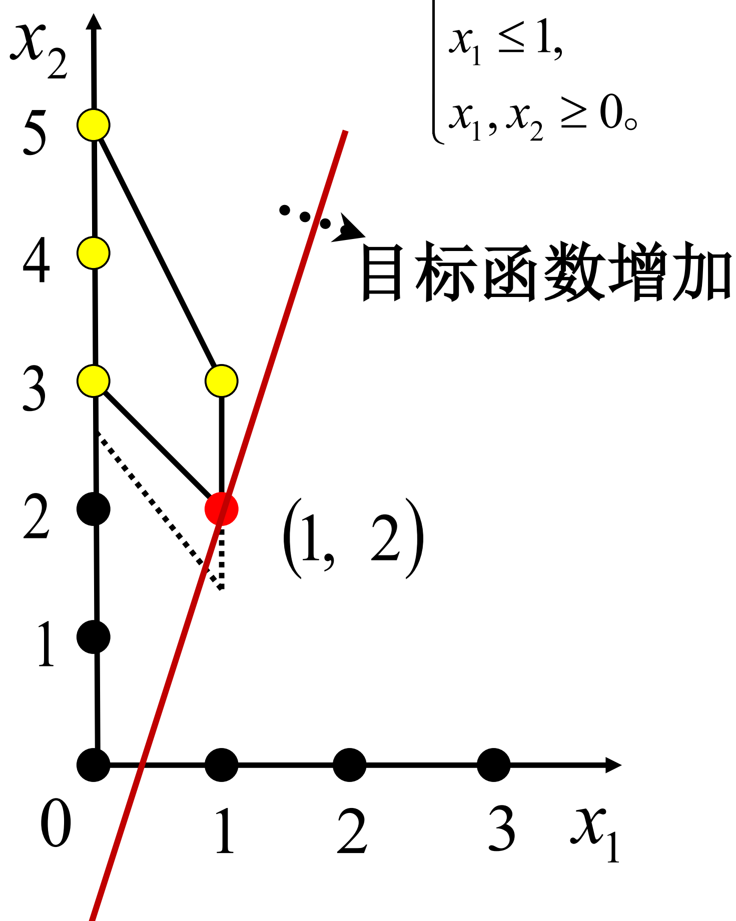
- 新松弛问题的可行集和最优解如图所示：
- (1) 原最优解被切割掉
- (2) 所有整数解被保存

割平面法

例2：求解

$$\max\ z = 3x_1 - x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0。\end{cases}$$

$$\max\ z = 3x_1 - x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \le 1,\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}$$



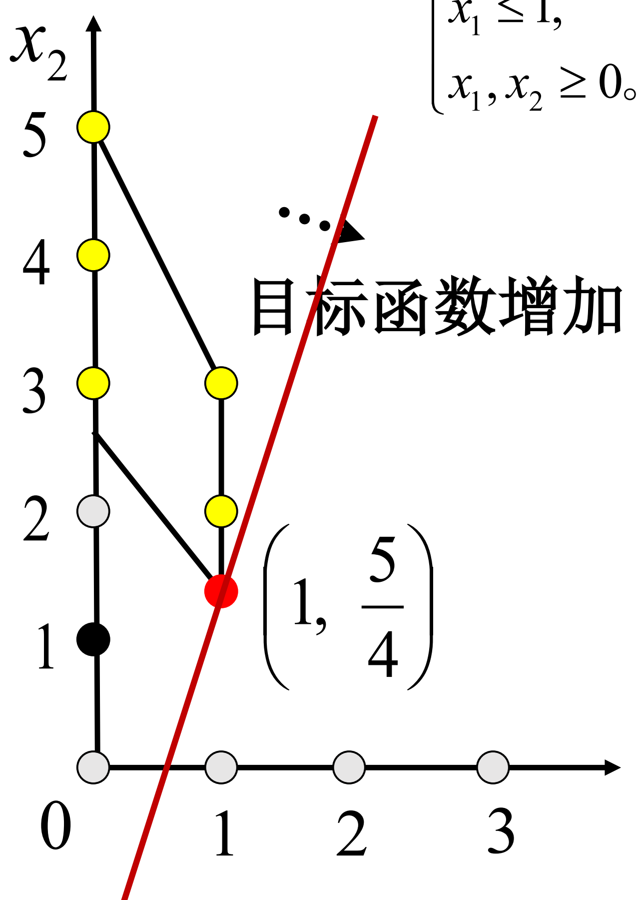
- 新松弛问题的该松弛问题的最优解显然是右图红点
- 满足整数约束，同时也是原问题的最优解

割平面法

若是换用其他割平面：

$$\max z = 3x_1 - x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0。\end{cases}$$



若是利用等式约束

$$x_2 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{5}{4}x_6 = \frac{5}{4}$$

构造割平面约束，

$$-\frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_6 \le -\frac{1}{4}$$

利用

$$5x_1 + 4x_2 - x_4 = 10, \quad x_1 + x_6 = 1$$

得原变量表示的割平面约束：

$$x_1 + x_2 \ge \frac{7}{3}$$

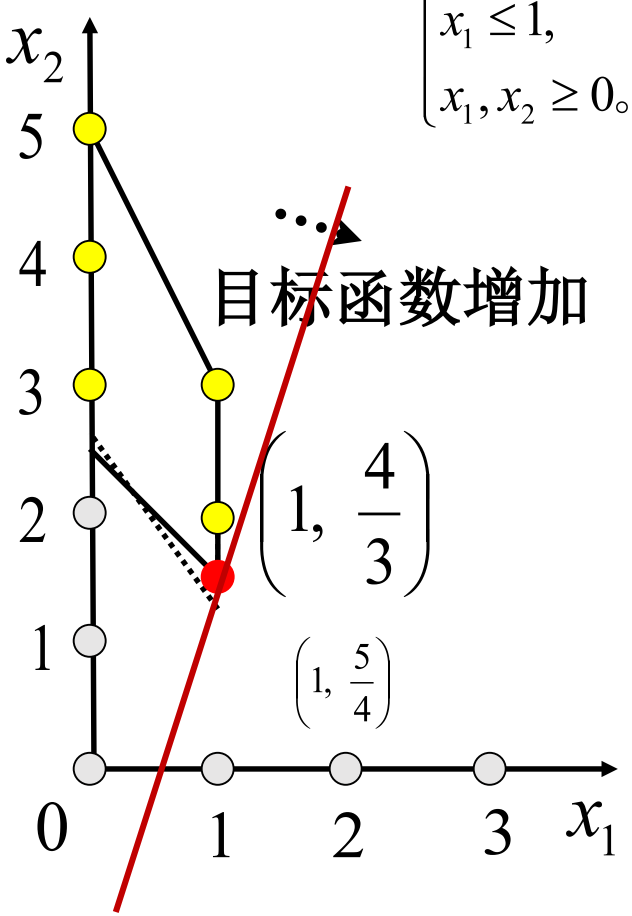
若是换用其他割平面：

$$\max z=3x_1-x_2$$

$$s.t.\begin{cases}3x_1-2x_2\le 3,\\5x_1+4x_2\ge 10,\\2x_1+x_2\le 5,\\x_1\le 1,\\x_1,x_2\ge 0。\end{cases}$$

$$\max\ z=3x_1-x_2$$

$$s.t.\ \begin{cases}3x_1-2x_2\le 3\\5x_1+4x_2\ge 10\\2x_1+x_2\le 5\\x_1\le 1,\ x_1+x_2\ge 7/3\\x_1,x_2\ge 0\text{且为整数}\end{cases}$$



- 新松弛问题的可行集和最优解如图所示：
- 仍不满足整数约束！
- 用不同等式构造割平面效果不同。

运 筹 学

Operations Research (OR)

讲师： 王 博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email： wb8517@hust.edu.cn QQ：2734802827

華中科技大學

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第6章 整数规划

第6章 整数规划

0-1型整数规划

0-1型整数线性规划是整数线性规划中的特殊情形，它的变量x_i仅取值0或1。这时x_i称为0-1变量，或称二进制变量。

x_i仅取值0或1这个条件可由下述约束条件所代替:

- $x_i \le 1, x_i \ge 0$且为整数:
- 它和一般整数线性规划的约束条件形式是一致的。

在实际问题中，如果引入0-1变量，就可以把有各种情况需要分别讨论的线性规划问题统一在一个问题中讨论了。

如果变量x_i不是仅取值0或1，而是可取其他范围的非负整数，这时可利用二进制的记数法将它用若干个0-1变量来代替:

- 例如在给定的问题中，变量x可任取0与10之间的任意整数时，令 $x = 2^0x_0 + 2^1x_1 + 2^2x_2 + 2^3x_3$
- 这时，x就可用4个0-1变量x_0，x_1，x_2，x_3来代替。

例1：投资场所的选定 – 互相排斥的计划

某公司拟在东、西、南三区建立门市部，有7个位置A_i $(i = 1,2,\dots,7)$可供选择：

- 在东区，由A_1、A_2、A_3三个点中至多选两个；
- 在西区由A_4、A_5两个点中至少选一个；
- 在南区由A_6、A_7两个点中至少选一个。

如选用A_i点，设备投资估计为b_i元，每年可获利润估计为c_i元，但投资总额不能超过B元。问应选择哪几个点可使年利润为最大?

解：引入0-1变量$x_i(i = 1,2,\dots,7)$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{当}A_i\text{点被采用} \\ 0, & \text{当}A_i\text{点没有被采用} \end{cases}$$

0-1型整数规划

- 东区，由A_1、A_2、A_3三个点中至多选两个：

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

- 在西区由A_4、A_5两个点中至少选一个：

$$x_4 + x_5 \geq 1$$

- 在南区由A_6、A_7两个点中至少选一个：

$$x_6 + x_7 \geq 1$$

- 如选用A_i点，设备投资估计为b_i元，每年可获利润估计为c_i元，但投资总额不能超过B元：

$$\sum_{i=1}^{7} b_i x_i \leq B$$

- 目标：年利润最大：

$$\max z = \sum_{i=1}^{7} c_i x_i$$

解：

引入0-1变量$x_i(i=1,2,\dots,7)$

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{当}A_i\text{点被采用}\\ 0, & \text{当}A_i\text{点没有被采用}\end{cases}$$

数学模型：

$$\max z=\sum_{i=1}^{7}c_i x_i$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{7}b_i x_i\le B\\ x_1+x_2+x_3\le 2\\ x_4+x_5\ge 1\\ x_6+x_7\ge 1\\ x_i=0\text{或}1\end{cases}$$

例2：互相排斥的约束条件

- 某厂拟用集装箱托运甲乙两种货物，每箱的体积、重量、可获利润以及托运所受限制如下表所示。问两种货物各托运多少箱，可使获得利润为最大？

货物	体积(平方米/箱)	重量(百公斤/箱)	利润(百元/箱)
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24平方米	13百公斤	

- 整数规划的数学模型：

$$\max z = 20x_1 + 10x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 & (2) \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

0-1型整数规划

- 今设运货有车运和船运两种方式。

$$5x_1 + 4x_2 \le 24 \quad (6\text{-}9)$$

- 是车运时的限制条件，如用船运时关于体积的限制条件为：

$$7x_1 + 3x_2 \le 45 \quad (6\text{-}10)$$

- 这两个条件是互相排斥的。
- 为了统一在一个问题中，引入0-1变量y，令

$$y=\begin{cases}1 & \text{用船运,}\\ 0 & \text{用车运,}\end{cases} \quad \text{得:} \quad \begin{cases}5x_1+4x_2\le 24+yM & (6-11)\\ 7x_1+3x_2\le 45+(1-y)M & (6-12)\end{cases}$$

- 其中M是充分大的数。
- 当 $y=0$ 时, (6-11)式就是(6-9)式,而(6-12)式自然成立,因而是多余的。当$y=1$时(6-12)式就是(6-10)式, 而(6-11)式是多余的。
- 引入的变量y不必出现在目标函数内，即认为在目标函数式内y的系数为0。

0-1型整数规划

若有m个互相排斥的约束：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, i = 1,2,\cdots,m \quad (*)$$

- 为了保证这m个约束条件只有一个起作用，我们引入m个0-1变量$y_i(i = 1,2,\ldots,m)$和一个充分大的常数M，而下面这一组$m+1$个约束条件：

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i + y_i M & (6-13) \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_m = m-1 & (6-14) \end{cases}$$

- 就能满足(*)中只有一个约束条件起作用的要求。
- 这是因为，由于(6-14)式，m个y_i中只有一个能取0值，设$y_{i^*} = 0$，代入(6-13)式，就只有$i = i^*$的约束条件起作用，而别的式子都是多余的。

例3：固定费用的问题

- 某工厂为了生产某种产品，有几种不同的生产方式可供选择，如选定投资高的生产方式(选购自动化程度高的设备)，由于产量大，因而分配到每件产品的变动成本就降低；反之，如选定投资低的生产方式，将来分配到每件产品的变动成本可能增加，所以必须全面考虑。今设有三种方式可供选择，令
- x_j表示采用第j种方式时的产量；
- c_j表示采用第j种方式时每件产品的变动成本；
- k_j表示采用第j种方式时的固定成本。
- 为了说明成本的特点，暂不考虑其他约束条件。采用各种生产方式的总成本分别为

$$P_j = \begin{cases} k_j + c_j x_j, & \text{当 } x_j > 0 \\ 0, & \text{当 } x_j = 0 \end{cases} \quad j = 1,2,3$$

0-1型整数规划

- 在构成目标函数时，为了统一在一个问题中讨论，现引入0-1变量y_j，令

$$y_j=\begin{cases}1,\text{当采用第 }j\text{种生产方式,}\quad\text{即}x_j>0\text{时}\\0,\text{当不采用第 }j\text{种生产方式,即}x_j=0\text{时}\end{cases}\qquad(1)$$

- 于是目标函数：

$$\min z=(k_1y_1+c_1x_1)+(k_2y_2+c_2x_2)+(k_3y_3+c_3x_3)$$

- (1)式这个规定可由以下3个线性约束条件表示：

$$x_j\le y_jM,\ j=1,2,3\qquad(2)$$

- 其中M是个充分大的常数。
- (2)式说明，当$x_j>0$时y_j必须为1；
- 当$x_j=0$时，y_j可以取到0，使目标极小化。
- 所以(2)式完全可以代替(1)式

6.4 0-1型整数规划

6.4.1 0-1型整数规划的解法

0-1型整数规划的解法

- 解0-1型整数线性规划最容易想到的方法，和一般整数线性规划的情形一样，就是穷举法，即检查变量取值为0或1的每一种组合，比较目标函数值以求得最优解，这需要检查变量取值的2^n个组合
- 对于变量个数n较大(例如n＞10)，这几乎是不可能的。
- 因此常设计一些方法，只检查变量取值的组合的一部分，就能求到问题的最优解。
- 这样的方法称为隐枚举法(implicit enumeration).
- 分枝定界法也是一种隐枚举法。
- 当然，对有些问题隐枚举法并不适用，所以有时穷举法还是必要的。

0-1型整数规划的解法

例4：解0-1型整数线性规划

$$\boxed{\max z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3,} \quad s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 & (1) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 & (2) \\ x_1 + x_2 \le 3 & (3) \\ 4x_1 + x_3 \le 6 & (4) \\ x_1, x_2, x_3 = 0\text{或}1 & (5) \end{cases}$$

解题时先通过试探的方法找一个可行解，容易看出$(x_1，x_2，x_3) = (1，0，0)$就是符合(1)～(4)条件的，算出相应的目标函数值$z = 3$。

- 我们求最优解，对于极大化问题，当然希望z⩾3，于是增加一个约束条件：$\boxed{3x_1 - 2x_2 + 5x_3} \ge 3$ ◎
- 后加的条件称为过滤的条件(filtering constraint)。
- 这样，原问题的线性约束条件就变成5个。

0-1型整数规划的解法

- 将5个约束条件按◎～(4)顺序排好；
- 用全部枚举的方法，3个变量共有 $2^3=8$ 个解，原来4个约束条件，共需32次运算。现在增加了过滤条件◎，如按下述方法进行，就可减少运算次数。
- 对每个解，依次代入约束条件左侧，求出数值，看是否适合不等式条件，如某一条件不适合，同行以下各条件就不必再检查，因而就减少了运算次数。

$$\max z=3x_1-2x_2+5x_3,\quad s.t.\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3\ge 3 & ◎\\ x_1+2x_2-x_3\le 2 & (1)\\ x_1+4x_2+x_3\le 4 & (2)\\ x_1+x_2\le 3 & (3)\\ 4x_1+x_3\le 6 & (4)\\ x_1,x_2,x_3=0\text{或}1 & (5)\end{cases}$$

0-1型整数规划的解法

点 (x_1, x_2, x_3)	条件 ◎	①	②	③	④	满足条件? 是(√)否(×)	z 值
(0, 0, 0)	0					×	
(0, 0, 1)	5	−1	1	0	1	√	5
(0, 1, 0)	−2					×	
(0, 1, 1)	3	1	5			×	
(1, 0, 0)	3	1	1	1	0	√	3
$\boxed{(1, 0, 1)}$	8	0	2	1	5	√	8
(1, 1, 0)	1					×	
(1, 1, 1)	6	2	6			×	

$$\max z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3, \quad s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3 & ◎ \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 & (1) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4 & (2) \\ x_1 + x_2 \leq 3 & (3) \\ 4x_1 + x_3 \leq 6 & (4) \\ x_1, x_2, x_3 = 0或1 & (5) \end{cases}$$

- 枚举的方法，3个变量共有$2^3 = 8$个解，原来4个约束条件，共需32次运算。
- 增加了过滤条件◎，按上表，只需要24次计算。
- 计算次数还可以进一步减少：

0-1型整数规划的解法

- 在计算过程中，若遇到z值已超过条件◎右边的值，应改变条件◎，使右边为迄今为止最大者，然后继续计算。
- 例如，当检查点(0，0，1)时因$z = 5(>3)$，所以应将条件◎换成

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 5 \qquad ◎$$

- 这种对过滤条件的改进，可以更进一步地减少计算量。

点 (x_1, x_2, x_3)	条件 ◎	①	②	③	④	满足条件? 是(√)否(×)	z 值
(0, 0, 0)	0					×	
(0, 0, 1)	5	−1	1	0	1	√	5
(0, 1, 0)	−2					×	
(0, 1, 1)	3	1	5			×	
(1, 0, 0)	3	1	1	1	0		3
(1, 0, 1)	8	0	2	1	1		8
(1, 1, 0)	1					×	
(1, 1, 1)	6	2	6			×	

$24 - 8 = 16$次

0-1型整数规划的解法

- 一般常重新排列x_i的顺序使目标函数中x_i的系数是递增(不减)的，
- 在上例中，改写$z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2x_2 + 3x_1 + 5x_3$，
- 因为−2，3，5是递增的序，变量(x_2，x_1，x_3)也按下述顺序取值：(0，0，0)，(0，0，1)，(0，1，0)，(0，1，1)，…，这样，最优解容易比较早的发现。
- 再结合过滤条件的改进，更可使计算简化。

$$\max z = -2x_2 + 3x_1 + 5x_3,$$

$$s.t.\begin{cases} -2x_2 + 3x_1 + 5x_3 \geq 3 & \circledcirc \\ 2x_2 + x_1 - x_3 \leq 2 & (1) \\ 4x_2 + x_1 + x_3 \leq 4 & (2) \\ x_2 + x_1 \leq 3 & (3) \\ 4x_1 + x_3 \leq 6 & (4) \\ x_1, x_2, x_3 = 0或1 \end{cases}$$

0-1型整数规划的解法

$$\max z = -2x_2 + 3x_1 + 5x_3,$$

$$s.t.\begin{cases} -2x_2 + 3x_1 + 5x_3 \geq 3 & ◎ \\ 2x_2 + x_1 - x_3 \leq 2 & (1) \\ 4x_2 + x_1 + x_3 \leq 4 & (2) \\ x_2 + x_1 \leq 3 & (3) \\ 4x_1 + x_3 \leq 6 & (4) \\ x_1, x_2, x_3 = 0或1 \end{cases}$$

- 解题时按下述步骤进行

点	条件					满足条件?	
(x_2, x_1, x_3)	◎	(1)	(2)	(3)	(4)	是(√)否(×)	
(0,0,0)	0					×	
(0,0,1)	5	−1	1	0	1	√	5

- 改进过滤条件，用

$$-2x_2 + 3x_1 + 5x_3 \geq 5 \qquad ◎'$$

- 代替◎，继续进行。

0-1型整数规划的解法

点 (x_2,x_1,x_3)	条件					满足条件? 是(√)否(×)	
	◎	(1)	(2)	(3)	(4)		
(0,0,0)	0					×	
(0,0,1)	5	−1	1	0	1	√	5

- **改进过滤条件，用**

$$-2x_2+3x_1+5x_3\geq 5 \qquad ◎'$$

- **代替◎，继续进行。**

点 (x_2,x_1,x_3)	条件					满足条件? 是(√)否(×)	
	◎′	(1)	(2)	(3)	(4)		
(0,1,0)	3					×	
(0,1,1)	8	0	2	1	1	√	8

- **再改进过滤条件，用**

$$-2x_2+3x_1+5x_3\geq 8 \qquad ◎''$$

- **代替◎′，继续进行。**

0-1型整数规划的解法

点	条件					满足条件?	
(x_2, x_1, x_3)	◎′	(1)	(2)	(3)	(4)	是(√)否(×)	
(0,1,0)	3					×	
(0,1,1)	8	0	2	1	1	√	8

- **再改进过滤条件，用**

$$-2x_2 + 3x_1 + 5x_3 \geq 8 \qquad ◎''$$

- **代替◎′，继续进行。**
- **至此，z值已不能改进，即得到最优解，计算已简化。**

点	条件					满足条件?	
(x_2, x_1, x_3)	◎″	(1)	(2)	(3)	(4)	是(√)否(×)	
(1,0,0)	2					×	
(1,0,1)	3					×	
(1,1,0)	1					×	
(1,1,1)	6					×	

0-1型整数规划的解法

点	条件					满足条件?	
(x_2, x_1, x_3)	◎	(1)	(2)	(3)	(4)	是(√)否(×)	
(0,0,0)	0					×	
(0,0,1)	5	−1	1	0	1	√	5

点	条件					满足条件?	
(x_2, x_1, x_3)	◎′	(1)	(2)	(3)	(4)	是(√)否(×)	
(0,1,0)	3					×	
(0,1,1)	8	0	2	1	1	√	8

点	条件					满足条件?	
(x_2, x_1, x_3)	◎″	(1)	(2)	(3)	(4)	是(√)否(×)	
(1,0,0)	2					×	
(1,0,1)	3					×	
(1,1,0)	1					×	
(1,1,1)	6					×	

共计16次计算

运 筹 学

Operations Research (OR)

讲师： 王 博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email： wb8517@hust.edu.cn QQ：2734802827

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第6章 整数规划

第6章 整数规划

指派问题

在生活中经常遇到这样的问题，某单位需完成n项任务，恰好有n个人可承担这些任务。由于每人的专长不同，各人完成任务不同(或所费时间)，效率也不同。于是产生应指派哪个人去完成哪项任务，使完成n项任务的总效率最高(或所需总时间最小)。

- 这类问题称为**指派问题**或分派问题(assignment problem)。
- 例1：有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字。分别记作E、J、G、R。现有甲、乙、丙、丁四人。他们将中文说明书翻译成不同语种的说明书所需时间如下表所示。问应指派何人去完成何工作，使所需总时间最少?

任务 人员	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

- 对应每个指派问题，需有类似左表那样的数表，称为**效率矩阵**或**系数矩阵**，其元素$c_{ij}>0(i,j=1,2,\dots,n)$表示指派第$i$人去完成第$j$项任务时的效率(或时间、成本等)。

例1：有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字。分别记作E、J、G、R。现有甲、乙、丙、丁四人。他们将中文说明书翻译成不同语种的说明书所需时间如下表所示。问应指派何人去完成何工作，使所需总时间最少?

任务 人员	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

- 解题时需引入变量x_{ij}；其取值只能是1或0。并令

$$x_{ij}=\begin{pmatrix} 1, & \text{当指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项任务} \\ 0, & \text{当不指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项任务} \end{pmatrix}$$

- 一个可行解矩阵：

$$(x_{ij})=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然，解矩阵(x_{ij})中各行各列的元素之和都是1。但这不是最优。

指派问题

数学模型：

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项任务}\\ 0, & \text{当不指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项任务}\end{cases}$$

$$\min z=\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_i x_{ij}=1, & \text{第}j\text{项任务只能有一个人来完成}\\ \sum_j x_{ij}=1, & \text{第}i\text{个人只能完成一项任务}\\ x_{ij}=0 \text{ 或 } 1\end{cases}$$

- **满足约束条件的可行解x_{ij}写成矩阵形式，称为解矩阵。如：**

$$(x_{ij})=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- **根据问题约束，解矩阵中的1一定在不同的行和不同的列。**

指派问题的一些结果：

- (1)指派问题是0-1规划的特例也是运输问题的特例，当然也是线性规划问题。
- (2)若从系数矩阵(c_{ij})的一行(列)各元素中分别减去该行(列)的最小元素，得到新矩阵(b_{ij})，则新系数阵对应的最优解与原系数阵对应的最优解相同。
- 证明：若从c_{ij}中每行减去一个常数u_i，每列减去一个常数v_j，得到的新系数阵为b_{ij}：

$$
\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -u_1 \\ -u_2 \\ \vdots \\ -u_m \end{array} \\
\begin{array}{cccc} -v_1 & -v_2 & \cdots & -v_n \end{array} &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
z' &= \sum_i^n \sum_j^n b_{ij} x_{ij} = \sum_i^n \sum_j^n (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} \\
&= \sum_i^n \sum_j^n c_{ij} x_{ij} - \sum_i^n u_i \sum_j^n x_{ij} - \sum_j^n v_j \sum_i^n x_{ij} \\
&= z \boxed{- \sum_i^n u_i - \sum_j^n v_j} \leftarrow \text{常数}
\end{aligned}
$$

独立0元素：不同行不同列的0元素

$$\begin{bmatrix} 1 & (0) & 2 & 0 \\ 1 & 3 & (0) & 0 \\ (0) & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 0 & (0) \end{bmatrix}$$

指派问题的解法：

- 第一步：使指派问题的系数矩阵经变换，在各行各列中都出现0元素。
- (1) 从系数矩阵的每行元素减去该行的最小元素；
- (2) 再从所得系数矩阵的每列元素中减去该列的最小元素。
- 若某行(列)已有0元素，那就不必再减了。

例1：有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字。分别记作E、J、G、R。现有甲、乙、丙、丁四人。他们将中文说明书翻译成不同语种的说明书所需时间如下表所示。问应指派何人去完成何工作，使所需总时间最少?

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

任务 人员	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

解：

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} [2] & 15 & 13 & 4 \\ 10 & [4] & 14 & 15 \\ [9] & 14 & 16 & 13 \\ [7] & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -4 \\ -9 \\ -7 \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 13 & 11 & 2 \\ 6 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & [4] & [2] \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} & & -4 & -2 \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 13 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第二步：进行试指派，以寻求最优解。为此，按以下步骤进行。

- 经第一步变换后，系数矩阵中每行每列都已有了0元素；但需找出n个独立的0元素。若能找出，就以这些独立0元素对应解矩阵(x_{ij})中的元素为1，其余为0，这就得到最优解。
- 当n较小时，可用观察法、试探法去找出n个独立0元素。
- 若n较大时，就必须按一定的步骤去找，常用的步骤为：
- (1) 从只有一个0元素的行(列)开始，给这个0元素加圈，记作◎。这表示对这行所代表的人，只有一种任务可指派。然后划去◎所在列(行)的其他0元素，记作Φ。这表示这列所代表的任务已指派完，不必再考虑别人了。
- (2) 给只有一个0元素列(行)的0元素加圈，记作◎；然后划去◎所在行的0元素，记作Φ。
- (3) 反复进行(1)，(2)两步，直到所有0元素都被圈出和划掉为止。

第二步：进行试指派，以寻求最优解。为此，按以下步骤进行。

- 经第一步变换后，系数矩阵中每行每列都已有了0元素；但需找出n个独立的0元素。若能找出，就以这些独立0元素对应解矩阵(x_{ij})中的元素为1，其余为0，这就得到最优解。
- 当n较小时，可用观察法、试探法去找出n个独立0元素。
- 若n较大时，就必须按一定的步骤去找，常用的步骤为：

- (4) 若仍有没有划圈的0元素，且同行(列)的0元素至少有两个(表示对这个可以从两项任务中指派其一)。这可用不同的方案去试探。
- 从剩有0元素最少的行(列)开始，比较这行各0元素所在列中0元素的数目，选择0元素少的那列的这个0元素加圈(表示选择性多的要“礼让”选择性少的)。然后划掉同行同列的其他0元素。可反复进行，直到所有0元素都已圈出和划掉为止。
- (5) 若◎元素的数目m等于矩阵的阶数n，那么这指派问题的最优解已得到。若$m<n$，则转入下一步。

以例1得到的0元素矩阵为例：

$$
\begin{bmatrix} \cancel{0} & 13 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ \cancel{0} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} \Phi & 13 & 7 & 0 \\ 6 & \circledcirc & 6 & 9 \\ \circledcirc & 5 & 3 & 2 \\ \Phi & 1 & 0 & \cancel{0} \end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{bmatrix} \Phi & 13 & 7 & \circledcirc \\ 6 & \circledcirc & 6 & 9 \\ \circledcirc & 5 & 3 & 2 \\ \Phi & 1 & 0 & \Phi \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} \Phi & 13 & 7 & \circledcirc \\ 6 & \circledcirc & 6 & 9 \\ \circledcirc & 5 & 3 & 2 \\ \Phi & 1 & \circledcirc & \Phi \end{bmatrix}
$$

以例1得到的0元素矩阵为例：

$$\begin{bmatrix} \Phi & 13 & 7 & ◎ \\ 6 & ◎ & 6 & 9 \\ ◎ & 5 & 3 & 2 \\ \Phi & 1 & ◎ & \Phi \end{bmatrix}$$

4个独立0元素，
$m = n$

可以求得最优解：

- 其最优目标函数值$z = 28$

$$(x_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

例2：求下表所示效率矩阵的指派问题的最小解。

任务 人员	A	B	C	D	E
甲	12	7	9	7	9
乙	8	9	6	6	6
丙	7	17	12	14	9
丁	15	14	6	6	10
戊	4	10	7	10	9

$$\begin{bmatrix} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 9 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

解：按上述第一步，将这系数矩阵进行变换。

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 9 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} -7 \\ -6 \\ -7 \\ -6 \\ -4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

经一次运算即得每行每列都有0元素的系数矩阵，

找出一组数目为n的独立0元素：

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & \cancel{0} & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ \cancel{0} & 6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & \circledcirc & 2 & \Phi & 2 \\ 2 & 3 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ \circledcirc & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ \Phi & 6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & \circledcirc & 2 & \Phi & 2 \\ 2 & 3 & \Phi & \Phi & \circledcirc \\ \circledcirc & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & \cancel{0} & 4 \\ \Phi & 6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & \circledcirc & 2 & \Phi & 2 \\ 2 & 3 & \Phi & \Phi & \circledcirc \\ \circledcirc & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & \circledcirc & \Phi & 4 \\ \Phi & 6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- 4个独立0元素，$m = 4$而$n = 5$，$m < n$

第三步($m < n$时的处理办法)：作最少的直线覆盖所有0元素，以确定该系数矩阵中能找到最多的独立元素数。为此按以下步骤进行：

- (1) 对没有◎的行打√号；
- (2) 对已打√号的行中所有含Φ元素的列打√号；
- (3) 再对打有√号的列中含◎元素的行打√号；
- (4) 重复(2)，(3)直到得不出新的打√号的行、列为止。
- (5) 对没有打√号的行画一横线，有打√号的列画一纵线，这就得到覆盖所有0元素的最少直线数。

- 令这直线数为l。若$l<n$，说明必须再变换当前的系数矩阵，才能找到n个独立的0元素，为此需要转第四步：若l=n，而m<n，应回到第二步(4)，另行试探。

  - (4) 若仍有没有划圈的0元素，且同行(列)的0元素至少有两个(表示对这个可以从两项任务中指派其一)。这可用不同的方案去试探。

对于例2得到的0元素矩阵，按以下次序进行:

- 先在第五行旁打√(没有◎的行);
- 接着可判断应在第1列下打√(打√行中含Φ元素的列);
- 接着在第3行旁打√(打√列中含◎元素的行);
- 经检查不再能打√了。对没有打√行，画一直线以覆盖0元素，即：第1行，第2行，第4行;
- 已打√的列画一直线以覆盖0元素，即：第1列;

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
5 & \circledcirc & 2 & \Phi & 2 \\
2 & 3 & \Phi & \Phi & \circledcirc \\
\circledcirc & 10 & 5 & 7 & 2 \\
9 & 8 & \circledcirc & \Phi & 4 \\
\Phi & 6 & 3 & 6 & 5
\end{pmatrix} &
\begin{array}{c} \\ \\ \surd \\ \\ \surd \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} \surd & & & & \end{array} &
\end{array}$$

- $l = 4 < n$，所以应继续对左边的矩阵进行变换。
- 转第四步。

第四步：

- 对矩阵进行变换的目的是增加0元素。
- 为此，在没有被直线覆盖的部分中找出最小元素，然后在打√行各元素中都减去这最小元素，而在打√列的各元素都加上这最小元素，以保证原来0元素不变。
- 这样得到新系数矩阵(它的最优解和原问题相同)。若得到n个独立的0元素，则已得最优解，否则回到第三步重复进行。

$$\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{ccccc}5&\circledcirc&2&\Phi&2\\2&3&\Phi&\Phi&\circledcirc\\\circledcirc&10&5&7&2\\9&8&\circledcirc&\Phi&4\\\Phi&6&3&6&5\end{array}\right) & \begin{array}{c}\\ \\ \surd\\ \\ \surd\end{array}\\
\begin{array}{ccccc}\surd&&&&\end{array} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{ccccc}5&\circledcirc&2&\Phi&2\\2&3&\Phi&\Phi&\circledcirc\\\circledcirc&10&5&7&2\\9&8&\circledcirc&\Phi&4\\\Phi&6&3&6&5\end{array}\right) & \begin{array}{c}\\ \\ -2\\ \\ -2\end{array}\\
\begin{array}{ccccc}+2&&&&\end{array} &
\end{array}$$

第四步：

$$
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
5 & \circledcirc & 2 & \Phi & 2 \\
2 & 3 & \Phi & \Phi & \circledcirc \\
\circledcirc & 10 & 5 & 7 & 2 \\
9 & 8 & \circledcirc & \Phi & 4 \\
\Phi & 6 & 3 & 6 & 5
\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ -2 \\ \\ -2 \end{matrix} \\
\begin{matrix} +2 & \quad & \quad & \quad & \quad \end{matrix} &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
7 & 0 & 2 & \cancel{0} & 2 \\
4 & 3 & 0 & 0 & \cancel{0} \\
\cancel{0} & 8 & 3 & 5 & 0 \\
11 & 8 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 4 & 1 & 4 & 3
\end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
7 & \circledcirc & 2 & \Phi & 2 \\
4 & 3 & 0 & 0 & \Phi \\
\Phi & 8 & 3 & 5 & \circledcirc \\
11 & 8 & 0 & 0 & 4 \\
\circledcirc & 4 & 1 & 4 & 3
\end{pmatrix}
$$

当指派问题的系数矩阵，经过变换得到了同行和同列中都有两个或两个以上0元素时。这时可以任选一行(列)中某一个0元素，再划去同行(列)的其他0元素。这时会出现多重解：

- 本例中，我们实际上可以选择两种方案，
- 既可以给 b_{23}，b_{44} 加圈，
- 也可以给 b_{24}，b_{43} 加圈。
- 两种情况都是最优解。

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & \circledcirc & 2 & \Phi & 2 \\ 4 & 3 & \circledcirc & \Phi & \Phi \\ \Phi & 8 & 3 & 5 & \circledcirc \\ 11 & 8 & \Phi & \circledcirc & 4 \\ \circledcirc & 4 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & \circledcirc & 2 & \Phi & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & \Phi \\ \Phi & 8 & 3 & 5 & \circledcirc \\ 11 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ \circledcirc & 4 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & \circledcirc & 2 & \Phi & 2 \\ 4 & 3 & \Phi & \circledcirc & \Phi \\ \Phi & 8 & 3 & 5 & \circledcirc \\ 11 & 8 & \circledcirc & \Phi & 4 \\ \circledcirc & 4 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

上面的矩阵已具有n个独立0元素。这就得到了最优解，相应的解矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 7 & ◎ & 2 & \Phi & 2 \\ 4 & 3 & ◎ & \Phi & \Phi \\ \Phi & 8 & 3 & 5 & ◎ \\ 11 & 8 & \Phi & ◎ & 4 \\ ◎ & 4 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & ◎ & 2 & \Phi & 2 \\ 4 & 3 & \Phi & ◎ & \Phi \\ \Phi & 8 & 3 & 5 & ◎ \\ 11 & 8 & ◎ & \Phi & 4 \\ ◎ & 4 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 9 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

系数矩阵

- 由解矩阵得最优指派方案：

  甲—B，乙—C，丙—E，丁—D，戊—A

- 还可以得到另一最优指派方案

  甲—B，乙—D，丙—E，丁—C，戊—A

所需总时间为$\min z = 32$

6.5 指派问题

6.5.1 指派问题小结与讨论

指派问题小结

作为运输问题的特例，指派问题存在一个$n \times n$的系数矩阵。

- 指派问题的最优解有这样性质：若从系数矩阵(c_{ij})的一行或一列的各元素中分别减去该行或列的最小元素,得到新矩阵(b_{ij})，那么以(b_{ij})为系数矩阵求得的最优解和用原系数矩阵(c_{ij})求得的最优解相同。
- 利用这个性质,可使原系数矩阵变换为含有很多0元素的新系数矩阵,而最优解保持不变。
- 在系数矩阵(b_{ij})中,不同行不同列的0元素,称为独立0元素。
- 在系数矩阵(b_{ij})中找出n个独立的0元素，则令解矩阵(x_{ij})中对应这n个独立的0元素的元素取值为1,其他元素取值为0。
- 将解代入到目标函数$z_b = bx$中，可以得到$z_b = 0$,得到以(b_{ij})为系数矩阵的指派问题的最优解，同时$z = cx$也取得最优解。
- 库恩于1955年提出了指派问题的解法，被称为匈牙利法。

以上讨论限于极小化的指派问题。

- 对最大化的问题，可利用大M法，将原问题的系数矩阵变换为一个极大的正数M减去原系数矩阵，从而将问题变换为最小化问题。

类似于产销不平衡的运输问题，若是不平衡的指派问题，可以虚拟一项任务或工作者，使其平衡，再来求解。

- 例3：五个工人中确定四个人完成四项工作中的一项 (2005南京大学考研题目)：

任务 人员	A	B	C	D	
I	9	4	3	7	
II	4	6	5	6	
III	5	4	7	5	
IV	7	5	2	3	
V	10	6	7	4	

- 例3：五个工人中确定四个人完成四项工作中的一项 (2005南京大学考研题目)：

任务 人员	A	B	C	D	
I	9	4	3	7	
II	4	6	5	6	
III	5	4	7	5	
IV	7	5	2	3	
V	10	6	7	4	

- 解：虚拟一项工作E，设每人完成E所用的时间都是“0”，从而转化为五个人完成五项工作的分配问题，再用匈牙利法求解。

任务 人员	A	B	C	D	E
I	9	4	3	7	0
II	4	6	5	6	0
III	5	4	7	5	0
IV	7	5	2	3	0
V	10	6	7	4	0