2016-2 期末试题

一、单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分）

1. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的下面四条性质：

（1）连续　　（2）两个偏导存在

（3）可微　　（4）沿方向 $\{1,0\}$ 的方向导数存在

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则成立（　　）.

A. $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$　B. $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$　C. $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$　D. $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(4)$

2. 将逐次积分 $I=\int_0^1 dy\int_{-y}^{y} f(x,y)dx$ 化为先对 y 后对 x 的逐次积分，正确结果是（　）.

A. $I=\int_{-1}^{0}dx\int_x^1 f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_{-x}^{1} f(x,y)dy$

B. $I=\int_{-y}^{y}dx\int_0^1 f(x,y)dy$

C. $I=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^1 f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_{x}^{1} f(x,y)dy$

D. $I=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} f(x,y)dy$

3. 设 L 表示圆 $x^2+y^2=R^2(R>0)$，取顺时针方向，则积分 $\int_L -x^2ydx+xy^2dy=$（　　）.

A. πR^4　B. $-\dfrac{\pi R^4}{2}$　C. $-\pi R^4$　D. $\dfrac{\pi R^4}{2}$

4. 设 $a_n>0$（$n=1,2,\cdots$），下列说法中正确的是（　　）.

A. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散

B. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散

C. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛.

D. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则当 n 充分大时，$a_n\ge\dfrac{1}{n}$.

5. 二阶常系数线性微分方程 $y''-3y'-4y=x+e^{-x}$ 的特解的待定形式为（　　）.

A． $y^*=ax+b+ce^{-x}$　　　B． $y^*=x(ax+b)+(cx+d)e^{-x}$

C． $y^*=ax+b+cxe^{-x}$　　　D． $y^*=x(ax+b)+cxe^{-x}$

6. 设$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$是将函数$f(x)=x+1(0\le x\le\pi)$做奇延拓后展开成的傅立叶级数，其和函数$S(x)(-\infty<x<+\infty)$，则$S(-\frac{5\pi}{2})=$（　　　）.

A． $-\frac{\pi}{2}+1$　　B． $\frac{\pi}{2}+1$　　C． $-\frac{\pi}{2}-1$　　D． $\frac{\pi}{2}-1$

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分）

7. 设函数$z=xe^y$，则$dz\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=$_________.

8. 设D: $x^2+y^2\le1, y\ge0$，则 $\iint\limits_D[(x+1)^2+y^2]dxdy=$_______.

9. 设L是圆周$x^2+y^2=1$，则$\int_L(x^2+xy)ds=$_______ .

10. 设曲面$S=\{(x,y,z):z=1,|x|\le1,|y|\le1\}$，则$\iint\limits_S(x+y+z)\,dS=$____.

三、基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分）

11. 求经过直线$L:\begin{cases}2x+3y-z-8=0,\\ y-3z+4=0\end{cases}$，且与平面$\pi:x+y+z-4=0$平行的平面方程$\pi_1$.

12. 设$z=f(e^{2x},xy)$，其中f具有二阶连续导数，且$f_2'(1,0)=2$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=0\\y=3}}$.

13. 设变量x,y,t满足方程$x=F(t,y)$和$f(x+y+t)=3y$，其中f具有一阶连续导数，F具有一阶连续偏导数，记$F_1=\frac{\partial F(t,y)}{\partial t}$，$F_2=\frac{\partial F(t,y)}{\partial y}$， 且$1+F_1\ne0, f'\ne0$，求$\frac{dx}{dy}$.

14. 设L是依逆时针方向的下半圆周 $x^2+y^2=x(y\le0)$，求曲线积分

$$I=\int_L(1-y-e^x\sin y)dx+(1-e^x\cos y)dy.$$

15. 设S为曲面$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧，求曲面积分

$$I=\iint\limits_S xyzdydz+x^2ydzdx+(\frac{1}{3}z^3+1)dxdy.$$

16. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展成 x 的幂级数 .

四、 应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分）

17. 求函数 $f(x,y,z)=xy+z^2$ 在平面 $x=y$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相交的圆周上的最大值和最小值.

18. 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的一阶导数，且满足 $\varphi(0)=0$，$\varphi'(x)+\int_0^x\varphi(t)dt=e^x$，求 $\varphi(x)$.

五、分析证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分）

19. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[1-\sin(\dfrac{(-1)^n}{n^p})-\cos(\dfrac{(-1)^n}{n^p})]$（ $p>0$ ）的敛散性，收敛时指明是条件收敛还是绝对收敛.

20. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ $(a>0)$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明

$$\int_a^b xf(x)dx\int_a^b \frac{x}{f(x)}dx \ge \frac{(b+a)^2(b-a)^2}{4}.$$