第4章
电路定理

4.1 叠加定理 Superposition Theorem

4.2 替代定理 Substitution Theorem

4.3 戴维南定理和诺顿定理 Thevenin-Norton Theorem

4.4 最大功率传输定理 Maximum Power Transfer Theorem

4.5 特勒根定理 Tellegen's Theorem

4.6 互易定理 Reciprocity Theorem

Motivation

电池充满时：亮度大

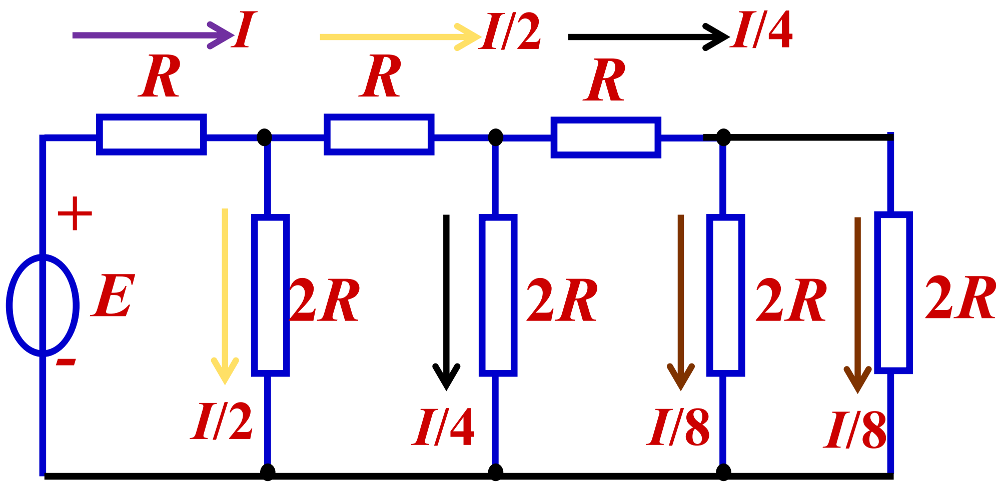
（电池电压大，灯泡电流大）

电池用了一段时间：亮度变小

（电池电压小，灯泡电流小）

Motivation

电路中的激励源（输入）和输出之间的关系：



$$I = \frac{E}{2R}$$

对于线性电路，输入-输出是线性关系（KCL，KVL）

线性函数的性质：对于线性函数$f(x)$

齐次性：$f(ax)=af(x)$　a是常数

可加性：$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

叠加性：$f(ax_1+bx_2)=af(x_1)+bf(x_2)$

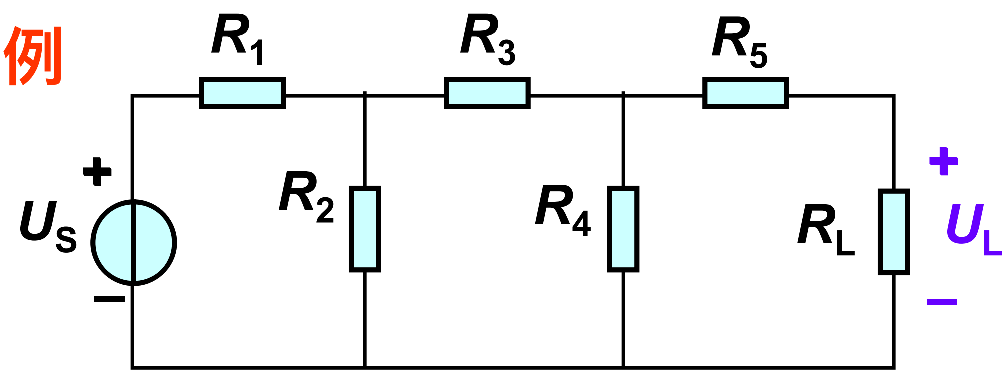
为什么我们之前研究的电路一般是线性电路?

电源　电阻　受控源　KCL, KVL

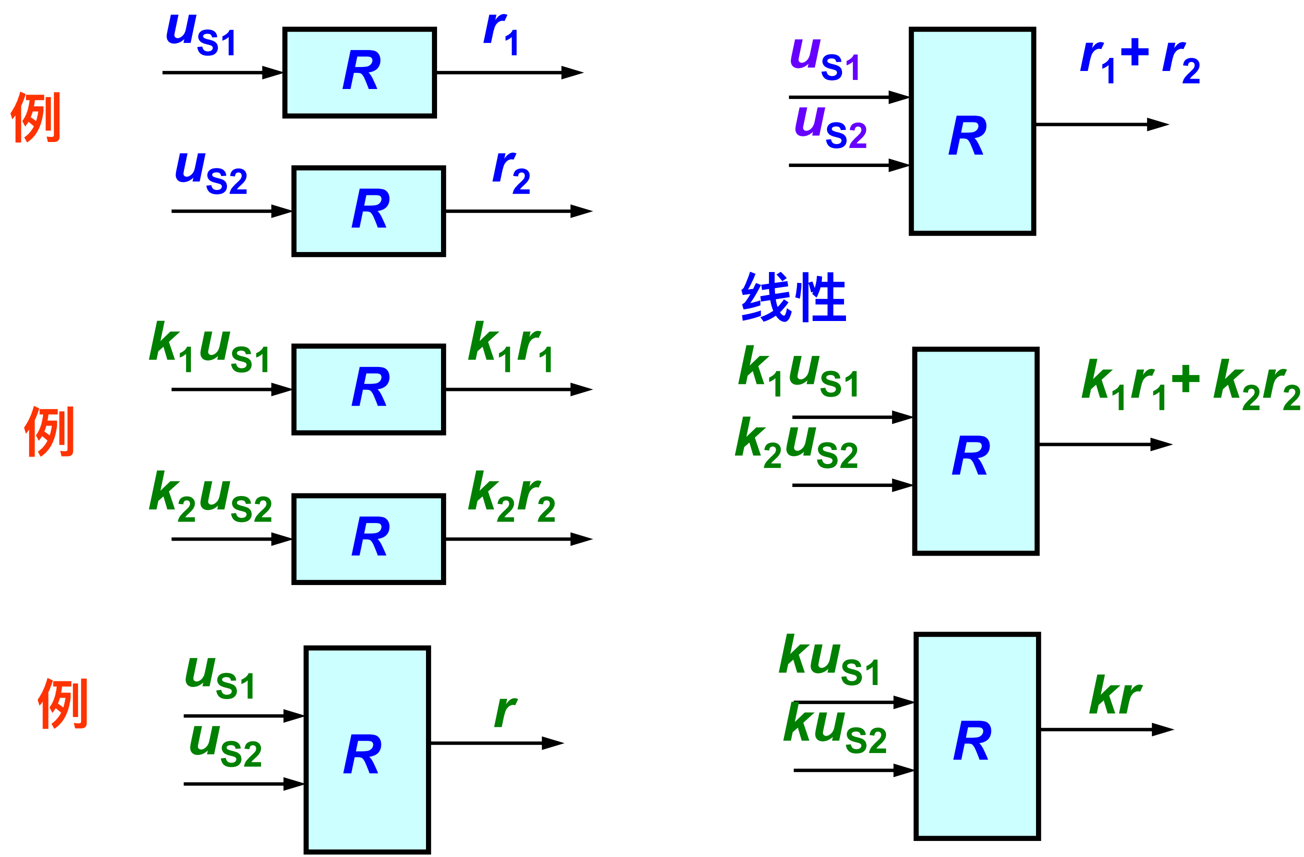
齐次性原理（*homogeneity property*）

当电路中只有一个激励(独立源)时，则响应(电压或电流)与激励成正比。

例



可加性（additivity　property）



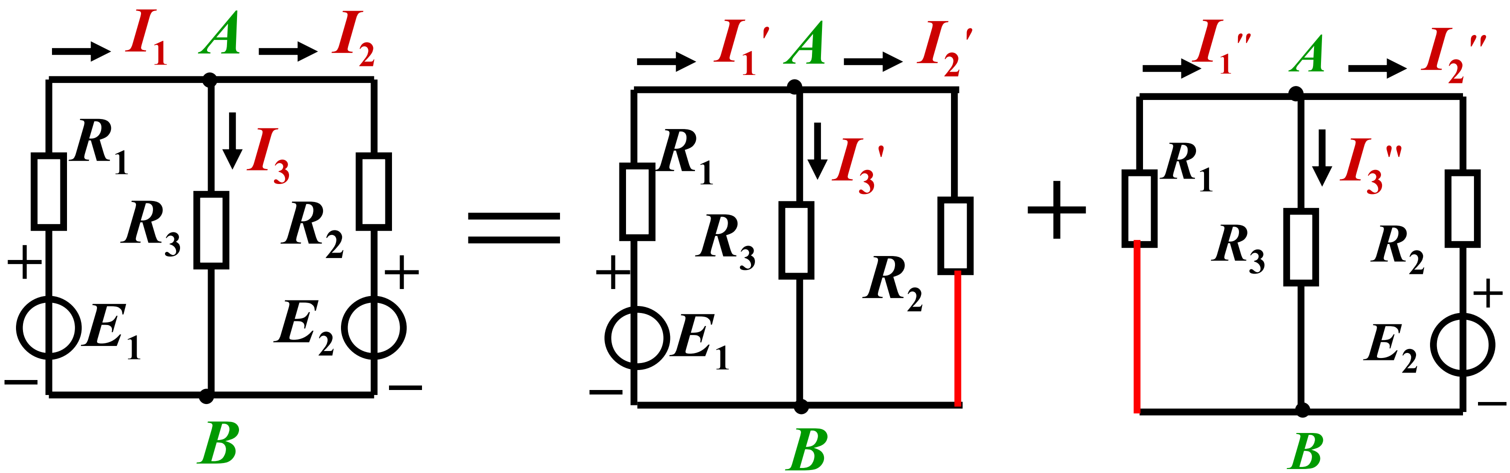
线性电路中，**所有**激励都增大(或减小)同样的倍数，则电路中响应也增大(或减小)同样的倍数。

§4-1叠加定理(*Superposition Theorem*)

概念:在多个电源同时作用的线性电路(由线性元件组成的电路)中，任何支路的电流或任意两点间的电压，都是各个电源单独作用时所得结果的代数和。

单独作用：一个电源作用，其余电源不作用

不作用的
- 电压源（u_s=0）短路
- 电流源 （i_s=0）开路



原电路

E_1单独作用

E_2单独作用

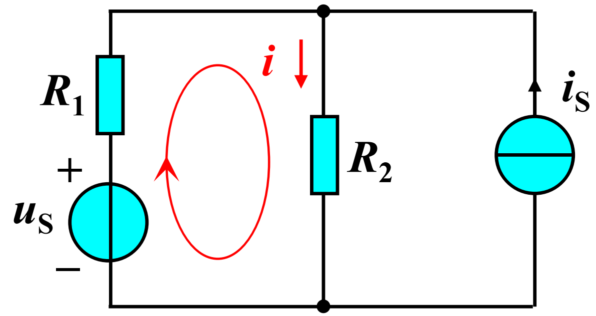
$$I_1 = I_1' + I_1''$$

$$I_2 = I_2' + I_2''$$

$$I_3 = I_3' + I_3''$$

叠加定理的引出：计算支路电流 i。

回路电压方程：



$$R_1(i-i_S)+R_2 i=u_s$$

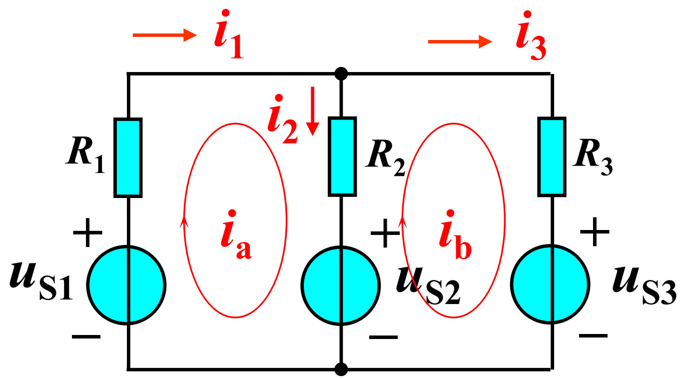
$$\Rightarrow (R_1+R_2)i=u_s+R_1 i_s$$

$$\Rightarrow i=\frac{u_s}{R_1+R_2}+\frac{R_1 i_s}{R_1+R_2}$$

电压源单独作用的响应

电流源单独作用的响应

定理的证明： 如图电路，计算各支路电流。



用网孔电流法：

$$\begin{cases} (R_1+R_2)i_a-R_2i_b=u_{s1}-u_{s2} \\ -R_2i_a+(R_2+R_3)i_b=u_{s2}-u_{s3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{11}i_a+R_{12}i_b=u_{s11} \\ R_{21}i_a+R_{22}i_b=u_{s22} \end{cases}$$

其中

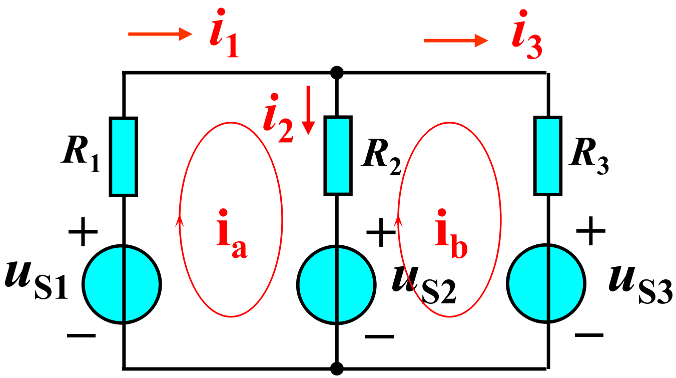
$$\begin{cases} R_{11}=R_1+R_2,\ R_{12}=-R_2,\ u_{s11}=u_{s1}-u_{s2} \\ R_{21}=-R_2,\ R_{22}=R_2+R_3,\ u_{s22}=u_{s2}-u_{s3} \end{cases}$$

用行列式法求解:

$$\begin{cases} R_{11}i_a+R_{12}i_b=u_{s11} \\ R_{21}i_a+R_{22}i_b=u_{s22} \end{cases}$$

$$u_{s11}=u_{s1}-u_{s2}$$

$$u_{s22}=u_{s2}-u_{s3}$$



$$i_a=\frac{\begin{vmatrix} u_{s11} & R_{12} \\ u_{s22} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}=\frac{R_{22}}{\Delta}u_{s11}+\frac{-R_{11}}{\Delta}u_{s22}$$

$$=\frac{R_{22}}{\Delta}u_{s1}-\frac{R_{11}+R_{22}}{\Delta}u_{s2}+\frac{R_{12}}{\Delta}u_{s3}$$

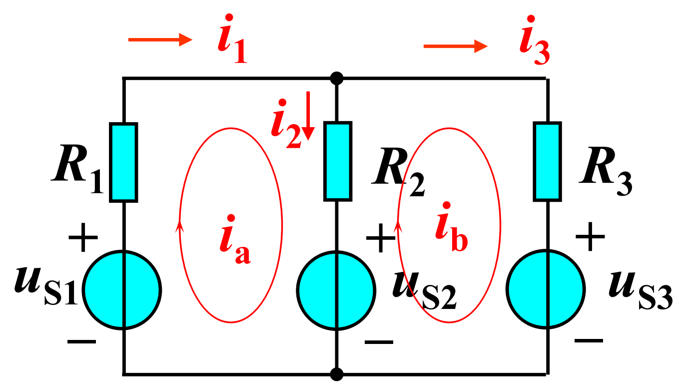
$$i_b=\frac{\begin{vmatrix} R_{11} & u_{s11} \\ R_{21} & u_{s22} \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-R_{21}}{\Delta}u_{s1}+\frac{R_{11}+R_{21}}{\Delta}u_{s2}+\frac{-R_{11}}{\Delta}u_{s3}$$

其中 $\Delta=\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}=R_{11}R_{22}-R_{12}R_{21}$

则各支路电流为：

$$\begin{cases} i_1 = i_a = \dfrac{R_{22}}{\Delta}u_{s1} - \dfrac{R_{12}+R_{22}}{\Delta}u_{s2} + \dfrac{R_{12}}{\Delta}u_{s3} = i_1' + i_1'' + i_1''' \\ i_2 = i_a - i_b = \dfrac{R_{21}+R_{22}}{\Delta}u_{s1} - \dfrac{R_{11}+R_{12}+R_1+R_{22}}{\Delta}u_{s2} + \dfrac{R_{11}+R_{12}}{\Delta}u_{s3} \\ \quad = i_2' + i_2'' + i_2''' \\ i_3 = i_b = \dfrac{-R_{21}}{\Delta}u_{s1} + \dfrac{R_{11}+R_{21}}{\Delta}u_{s2} + \dfrac{-R_{11}}{\Delta}u_{s3} = i_3' + i_3'' + i_3''' \end{cases}$$

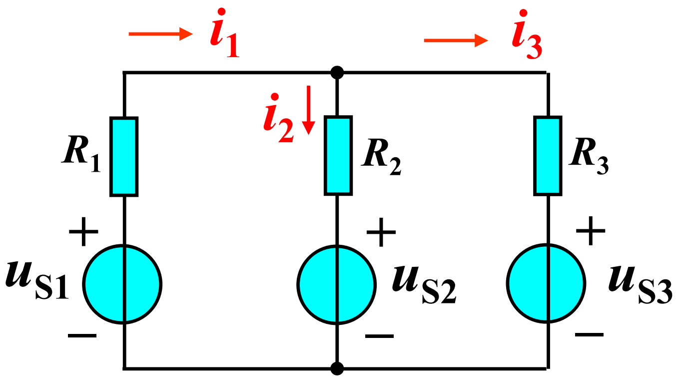
由上式可见，各支路电流均为各电源的一次函数



各支路电流均可看成各电压源单独作用时，产生的电流的叠加。

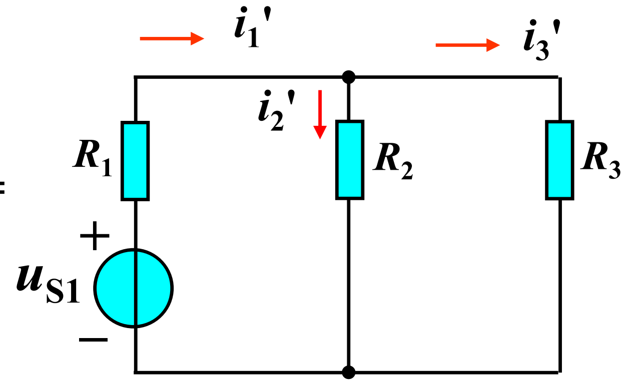
当一个电源单独作用时，其余电源不作用，就意味着置零。

即对电压源看作短路，而对电流源看作开路。



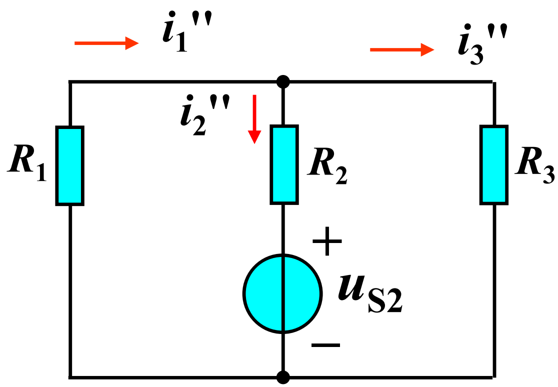
三个电源共同作用

=



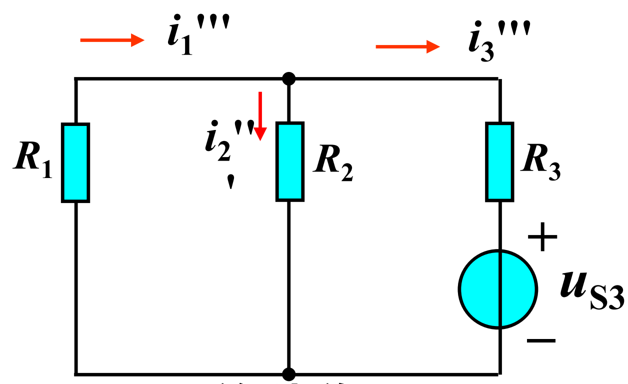
u_{S1}单独作用

+



u_{S2}单独作用

+



u_{S3}单独作用

每个支路电流都为电路中独立源单独作用所产生分量的叠加。

$$\begin{cases} i_1 = i_1' + i_1'' + i_1''' \\ i_2 = i_2' + i_2'' + i_2''' \\ i_3 = i_3' + i_3'' + i_3''' \end{cases}$$

上述以一个具体例子来说明叠加的概念，这个方法也可推广到多个电源的电路中去。

同样可以证明：线性电阻电路中任意两点间的电压等于各电源在此两点间产生的电压的代数和。

电源既可是电压源，也可是电流源。

小结：

(1). 叠加定理只适用于线性电路。

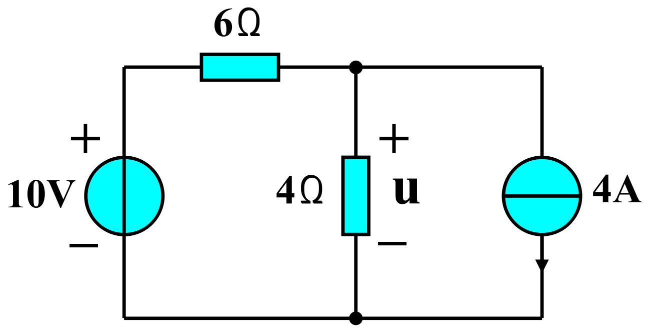
(2). 一个电源作用，其余电源为零
- 电压源为零—短路。
- 电流源为零—开路。

(3). 功率不能叠加(功率为电源的二次函数，非线性)。

(4). u，i叠加时要注意各分量的方向。

(5). 含受控源(线性)电路亦可用叠加，但叠加只适用于独立源，受控源应始终保留。

例1：求图中电压*u*。



解：应用叠加定理

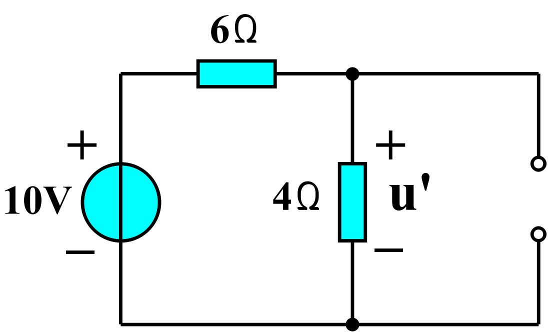
(1) 10V电压源单独作用，4A电流源开路

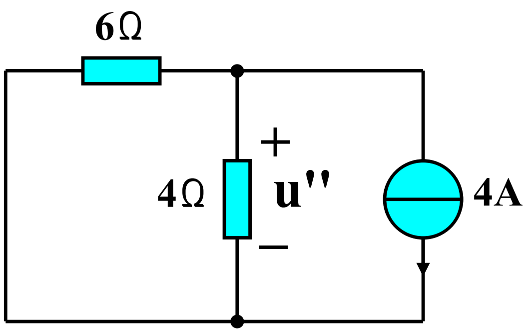
$u'=4\text{V}$

(2) 4A电流源单独作用，10V电压源短路

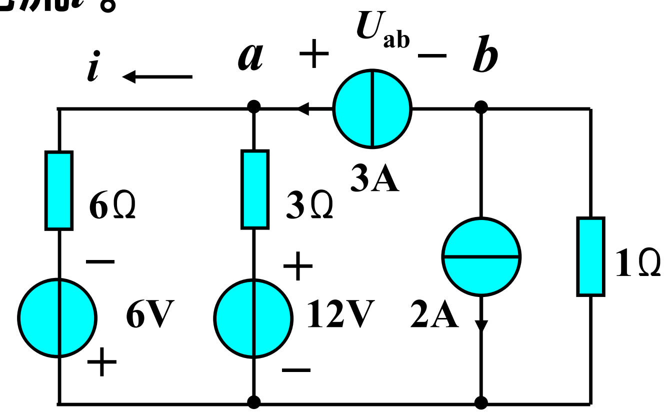
$u''= -4\times 2.4= -9.6\text{V}$

共同作用：$u=u'+u''= 4+(-9.6)= -5.6\text{V}$





例2：如图所示电路，求电压u_{ab}和电流i。



解： 应用叠加定理

(1) 6V，12V，2A电源作用

$$i'=(6+12)/(6+3)=2(\mathrm{A})$$

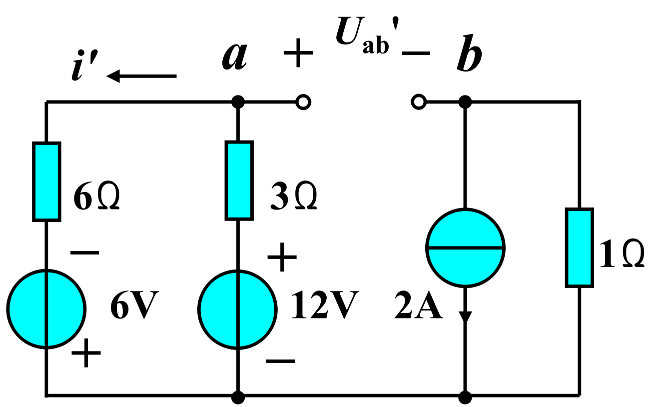
$$u_{ab}'=6i'-6+2\times1$$

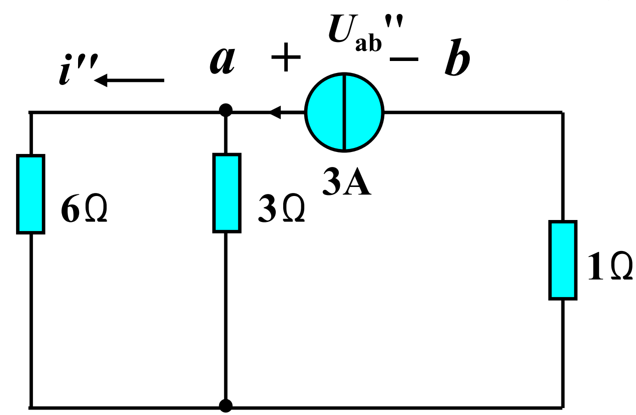
$$=6\times2-6+2=8(\mathrm{V})$$

(2) 3A电流源作用　$u_{ab}''=3\times[6//3+1]=9(\mathrm{V})$

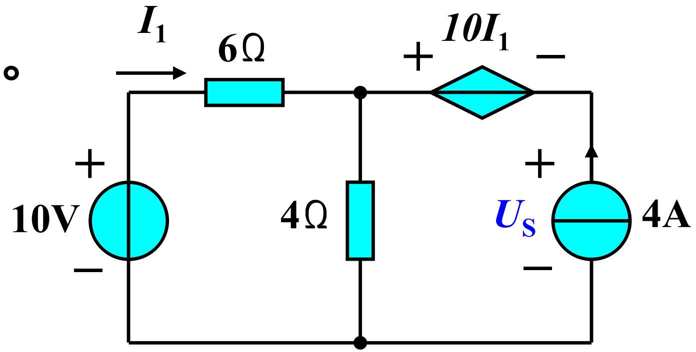
$$i''=3/(3+6)\times3=1(\mathrm{A})$$

共同作用：$u_{ab}=u_{ab}'+u_{ab}''=8+9=17(\mathrm{V})$　　$i=i'+i''=1+2=3(\mathrm{A})$



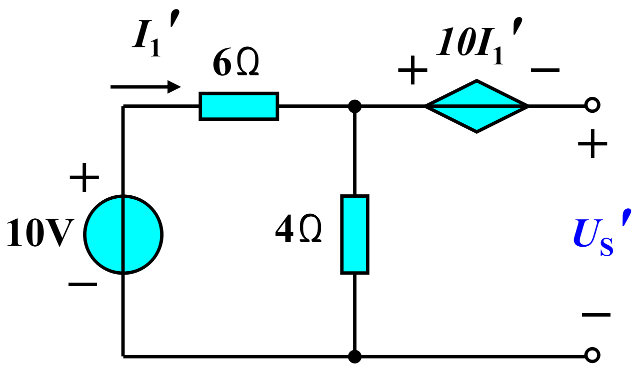


例3： 求电压U_s 。



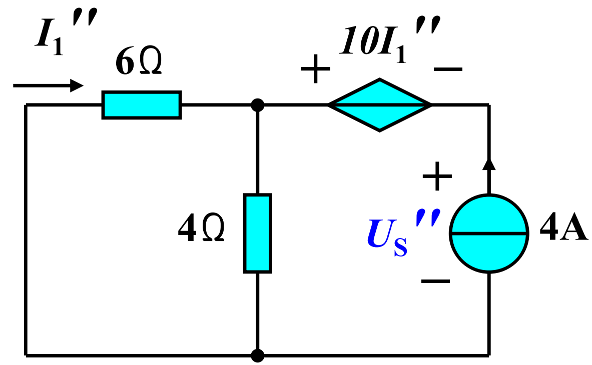
解： 应用叠加定理：

(1) 10V电压源单独作用：



$U_s' = -10\,I_1' + 4 = -10\times1+4 = -6\text{V}$

(2) 4A电流源单独作用：



$U_s'' = -10I_1'' + (6//4)\times4$

$= -10\times(-1.6)+9.6 = 25.6\text{V}$

共同作用： $U_s = U_s' + U_s'' = -6+25.6 = 19.6\text{V}$

齐性原理（homogeneity property):

线性电路中，所有激励(独立源)都增大(或减小)同样的倍数，则电路中响应(电压或电流)也增大(或减小)同样的倍数。

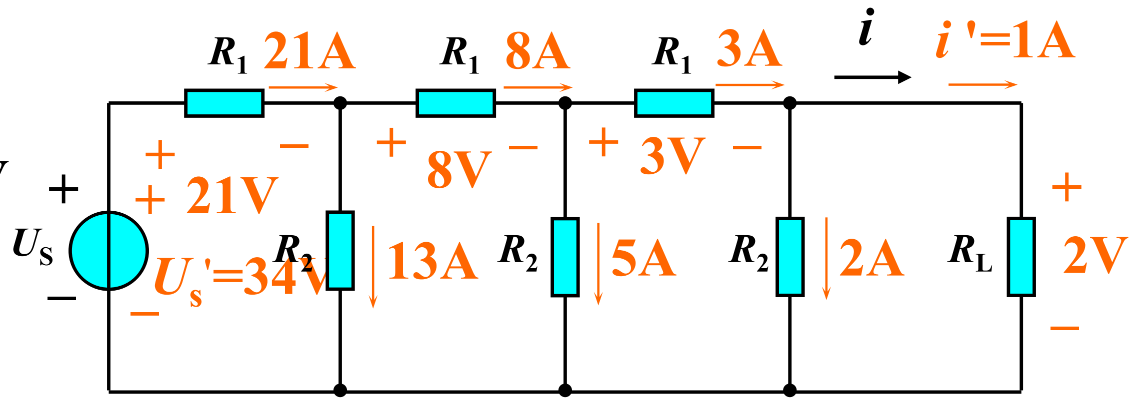
当激励只有一个时，则响应与激励成正比。

例：

R_L=2Ω R_1=1 Ω

R_2=1 Ω U_S=51V

求电流 i 。

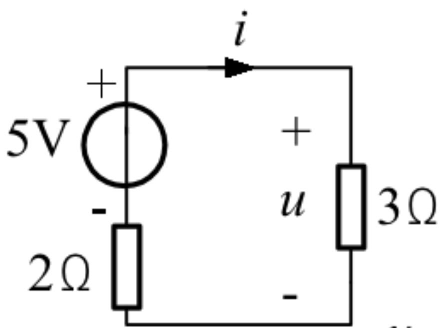


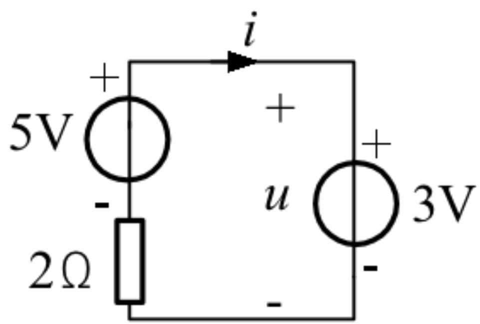
解：采用倒推法：设i'=1A。

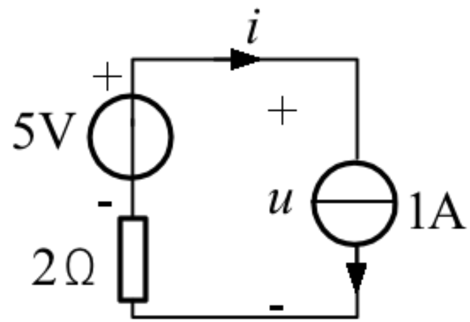
则
$$\frac{i}{i'}=\frac{U_s}{U_s'} \Rightarrow i=\frac{U_s}{U_s'}i'=\frac{51}{34}\times 1=1.5A$$

§4-2 替代定理(*Substitution Theorem*)

电路的某些支路的元件进行一定的更替，支路自身的状态不变







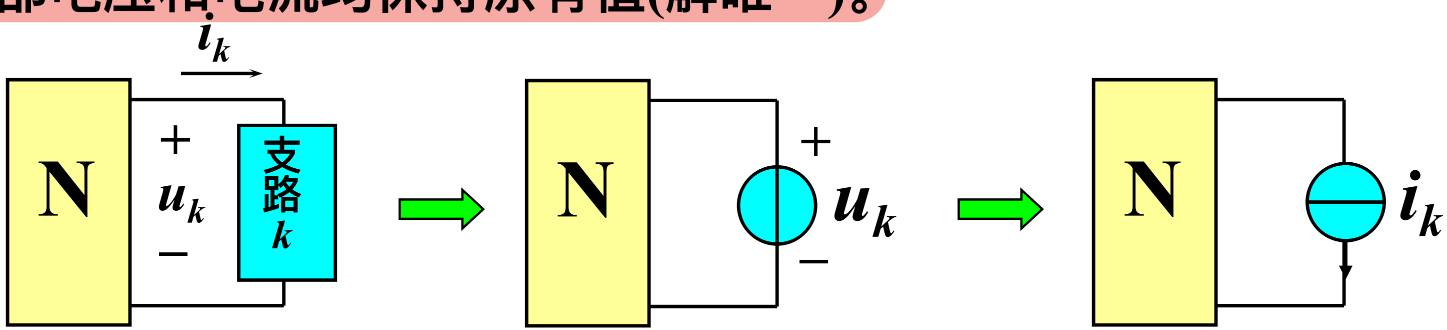
$u = 3\text{V}$

$i = 1\text{A}$

§4-2替代定理(*Substitution Theorem*)

定理内容：

对于给定的任意一个电路，其中第k条支路电压为u_k、电流为i_k，那么这条支路就可以用一个电压等于u_k的独立电压源，或者用一个电流等于i_k的 独立电流源来替代，替代后电路中全部电压和电流均保持原有值(解唯一)。



因为：　替代前后KCL,KVL关系相同。

用u_k替代后，其余支路电压不变(KVL)；

用i_k替代后，其余支路电流不变(KCL)。

注：

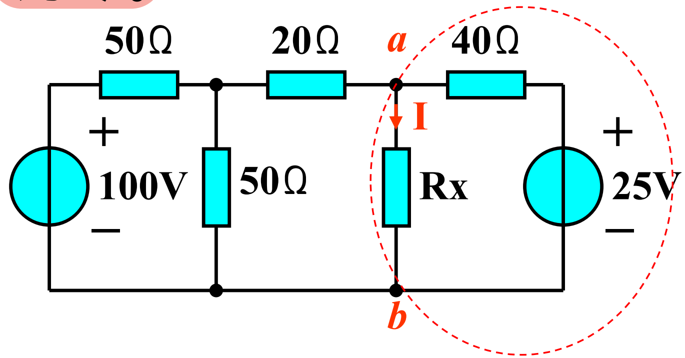
1.替代定理既适用于线性电路，也适用于非线性电路。

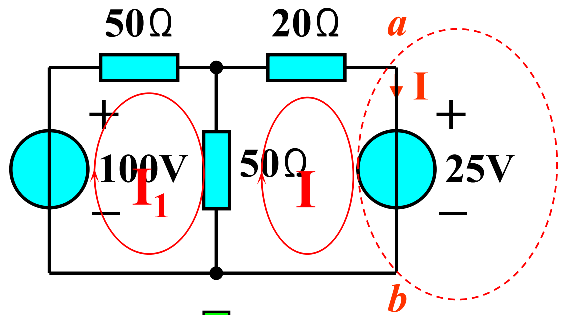
2. 替代后电路必须有唯一解 $\begin{cases}\text{无电压源回路；} \\ \text{无电流源节点(含广义节点)。}\end{cases}$

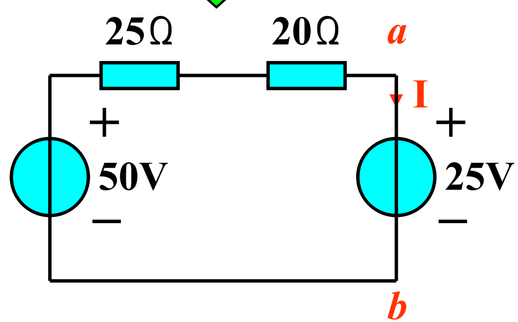
3.替代后其余支路及参数不能改变(一点等效)。

4.替代与等效是两个完全不同的概念。

例：如图所示，网络中R_x为多少欧姆时，25V电压源中电流为零。







解：　应用替代定理

采用回路电流法

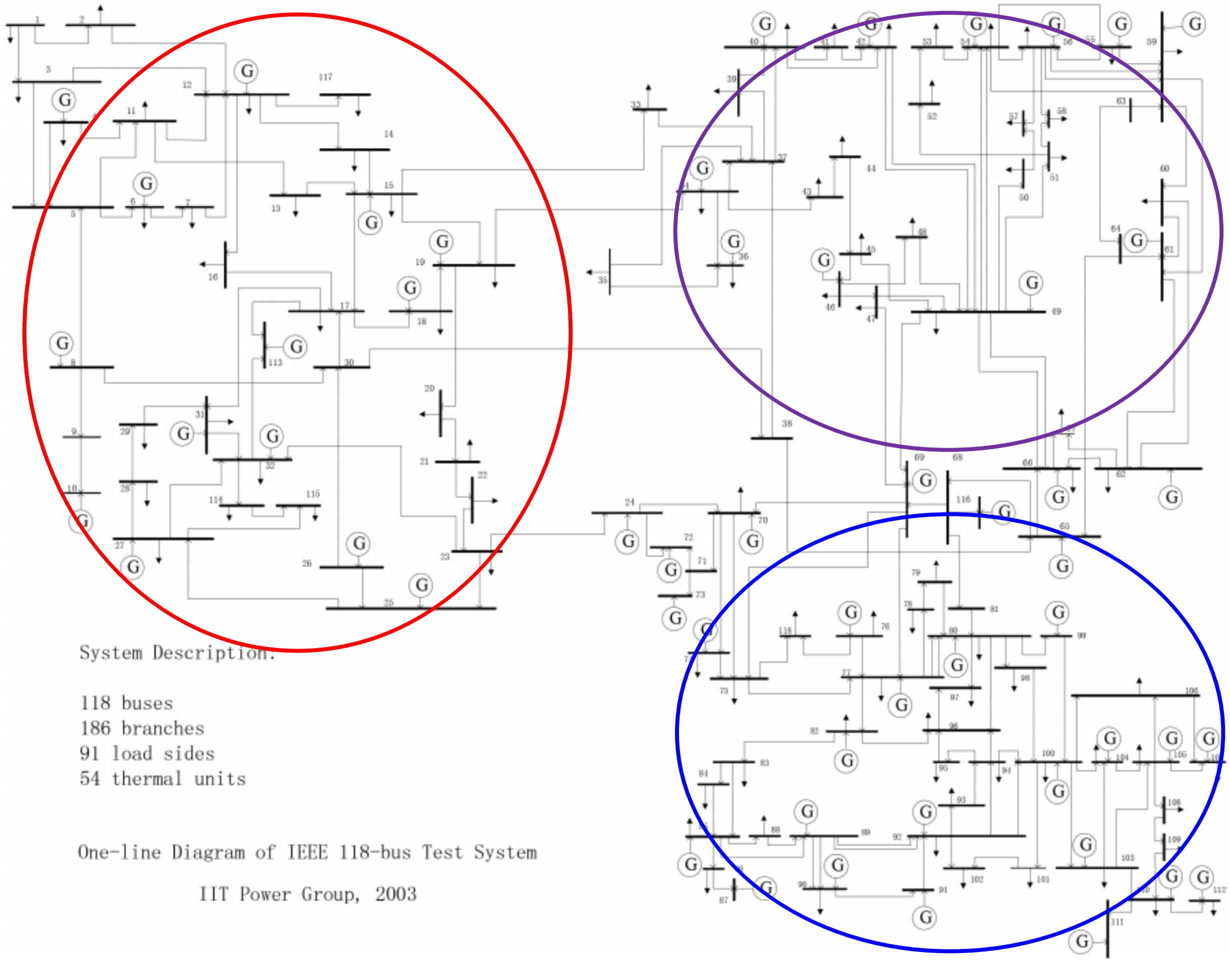
$$\begin{cases} (50+50)I_1-50I=100 \\ -50I_1+(20+50)I=-25 \end{cases}$$

电流I＝5/9(A)

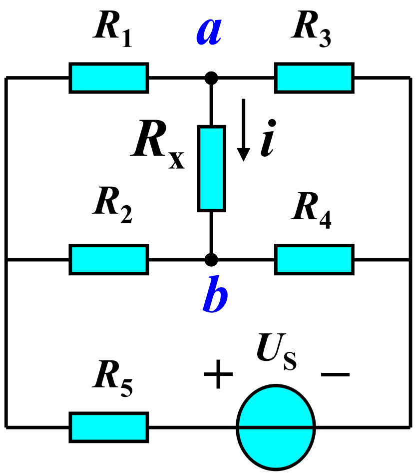
或：等效变换　　电流$I=25/45=5/9(\mathrm{A})$

$$R_x=U_{ab}/I=25/(5/9)=45(\Omega)$$

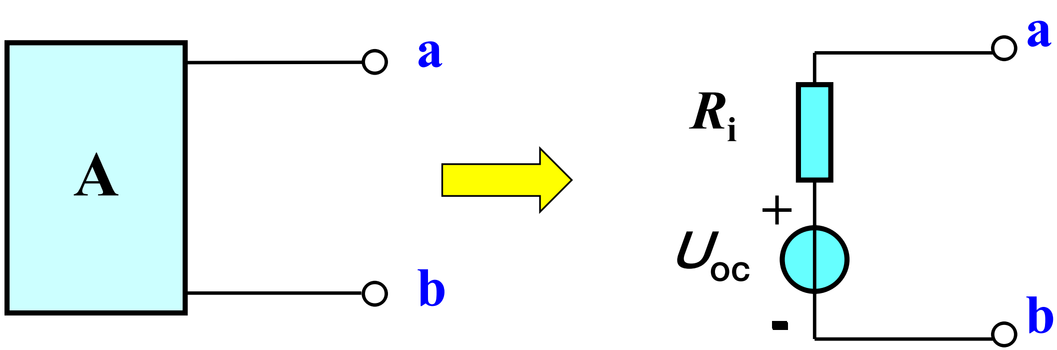
§4-3 戴维南定理和诺顿定理



§4-3 戴维南定理和诺顿定理
(*Thevenin-Norton Theorem*)

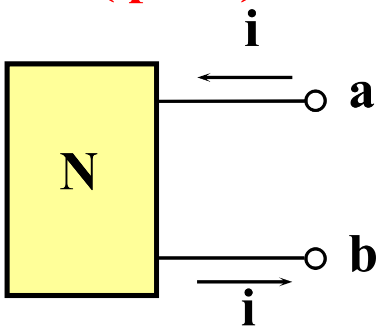


工程实践中，常常碰到只需研究某一支路的情况。这时，可以将除我们需保留的支路外的其余部分的电路(通常为二端网络或称一端口网络),等效变换为较简单的含源支路 (电压源与电阻串联或电流源与电阻并联支路),可大大方便我们的分析和计算。



几个名词:

(1) **端口(port)**



端口指电路引出的一对端钮，其中从一个端钮(如a)流入的电流一定等于从另一端钮(如b)流出的电流。

(2) **一端口网络 (network)** (亦称二端网络)

网络与外部电路只有一对端钮(或一个端口)联接。

(3) **含源(active)与无源(passive)一端口网络**

网络内部含有独立电源的一端口网络称为含源一端口网络。

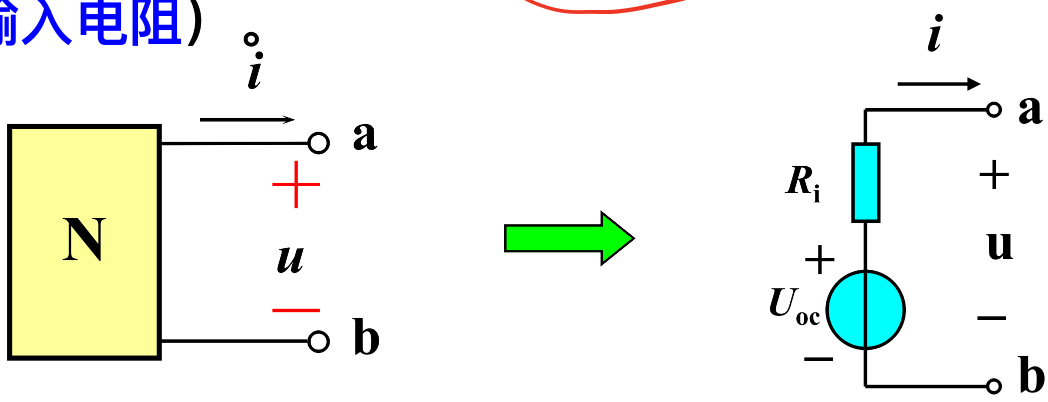
网络内部不含有独立电源的一端口网络称为无源一端口网络。

一、戴维南定理：

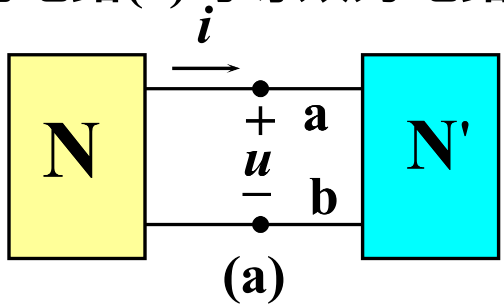
任何一个线性含有独立电源、线性电阻和线性受控源的一端口网络，对外电路来说，可以用**一个电压源(U_{oc})和电阻R_i的串联组合**来等效置换。

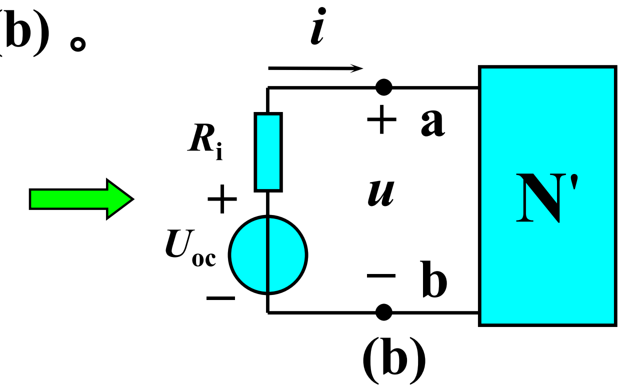
电压源的电压—等于外电路断开时端口处的**开路电压**；

电阻—等于一端口内全部独立电源置零后的端口等效电阻（**输入电阻**）。



即要证明电路(a)可等效为电路(b) 。

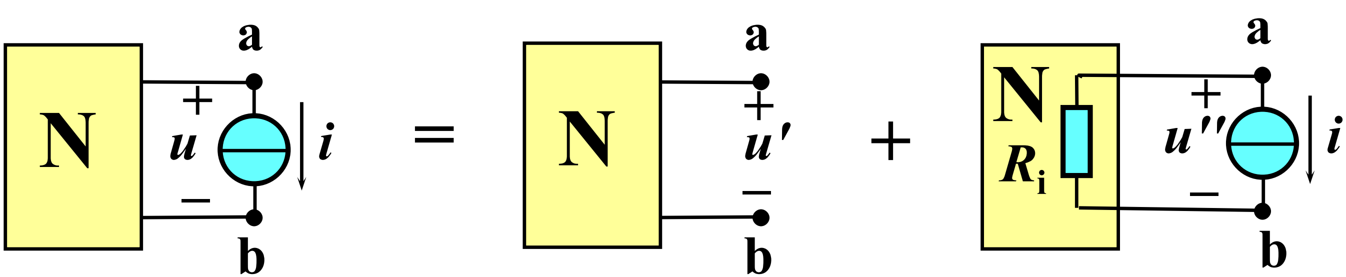




证明：

根据替代定理，将图(a)外部电路用电流源i替代，计算u值。

根据叠加定理：　　电流源i置零　　网络N内独立源全部置零



$u'=U_{oc}$　　　$u''=-R_i i$

U_{oc}—网络N端口处的开路电压；

R_i—网络N内全部独立电源置零后的等效电阻。

则$u=u'+u''=U_{oc}-R_i i$　　此关系式恰与图(b)电路相同。证毕！

小结

(1) 戴维南等效电路中电压源电压等于将外电路断开时的开路电压U_{oc}。

(2) 串联电阻为将一端口网络内部独立电源全部置零(电压源短路，电流源开路)后，所得无源一端口网络的等效电阻。

等效电阻的计算方法：

① 当网络内部不含受控源时可采用电阻串并联的方法计算；

② 加压求流法或加流求压法。

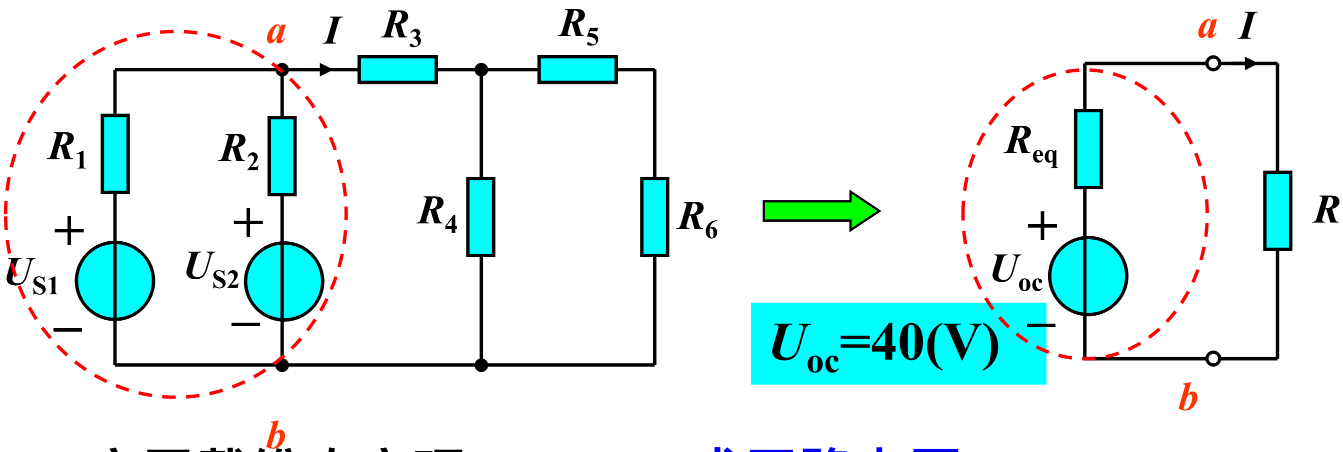
③ 开路电压，短路电流法。

②③ 方法更有一般性。

(3) 外电路发生改变时，含源一端口网络的等效电路不变。

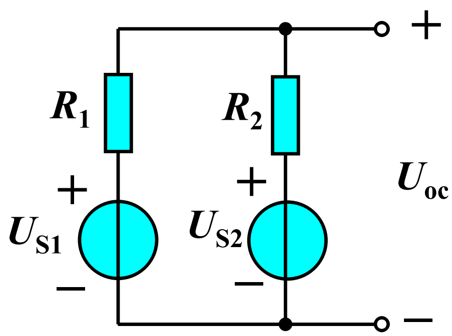
(4) 当一端口内部含有受控源时，控制电路与受控源必须包含在被化简的同一部分电路中。

例1：如图所示电路，$U_{S1}=40\text{V}$，$U_{S2}=40\text{V}$，$R_1=4\ \Omega$，$R_2=2\ \Omega$，$R_3=5\ \Omega$，$R_4=10\ \Omega$，$R_5=8\ \Omega$，$R_6=2\ \Omega$，求电流 I 。



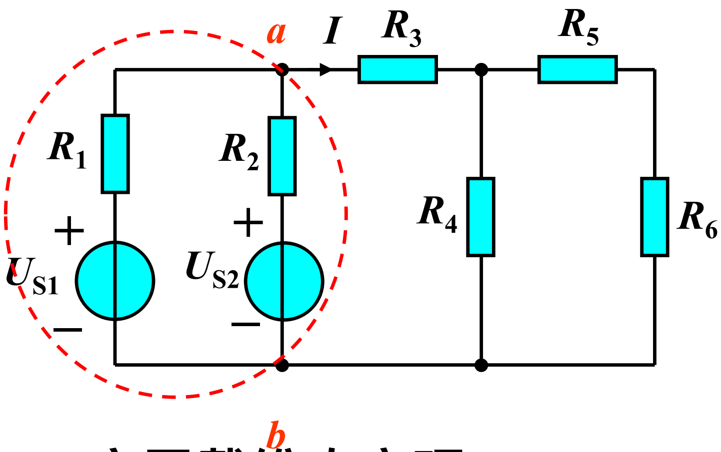
$U_{oc}=40(\text{V})$

解：　应用戴维南定理：　　**(1) 求开路电压 U_{oc}**

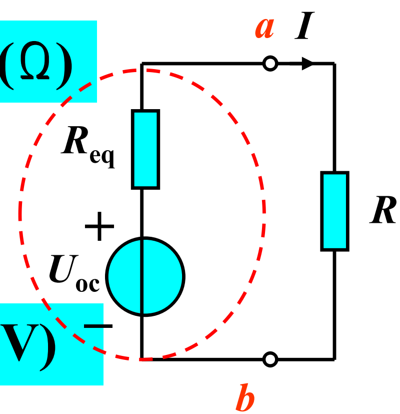


$U_{oc}=40(\text{V})$

例1：如图所示电路，$U_{S1}=40\text{V}$，$U_{S2}=40\text{V}$，$R_1=4\ \Omega$，$R_2=2\ \Omega$，$R_3=5\ \Omega$，$R_4=10\ \Omega$，$R_5=8\ \Omega$，$R_6=2\ \Omega$，求电流 I 。



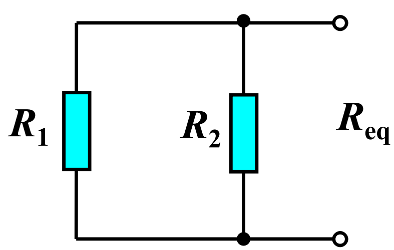
$R_{eq}=4/3(\Omega)$



$U_{oc}=40(\text{V})$

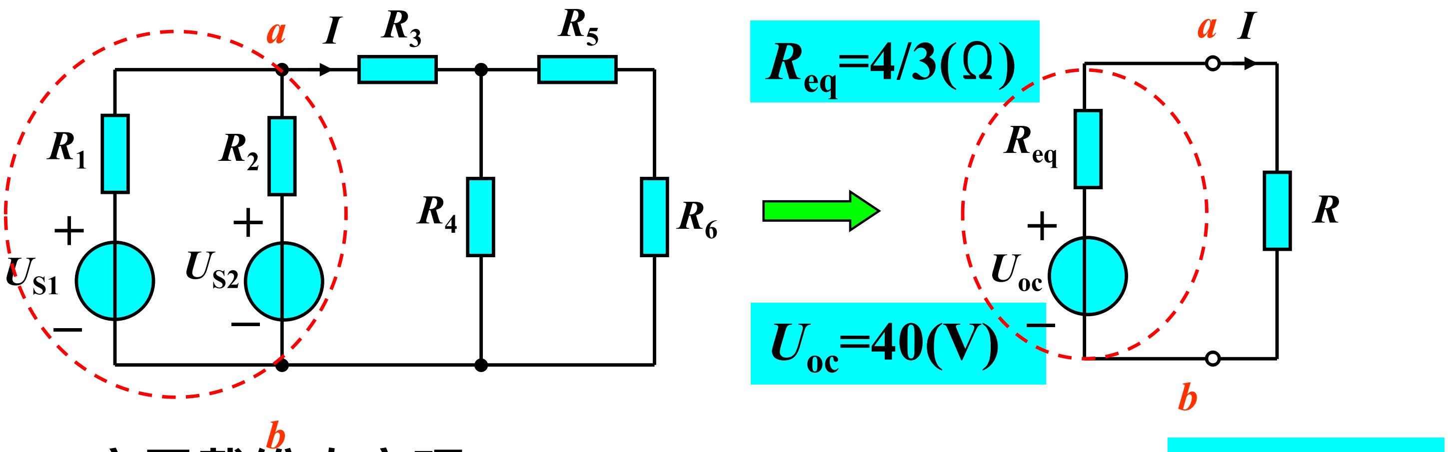
解：　应用戴维南定理：

(2) 等效输入电阻R_{eq}
(电源置零后)



$R_{eq}=R_1//R_2=4/3(\Omega)$

例1：如图所示电路，$U_{S1}=40V$，$U_{S2}=40V$，$R_1=4\ \Omega$，$R_2=2\ \Omega$，$R_3=5\ \Omega$，$R_4=10\ \Omega$，$R_5=8\ \Omega$，$R_6=2\ \Omega$，求电流 I 。

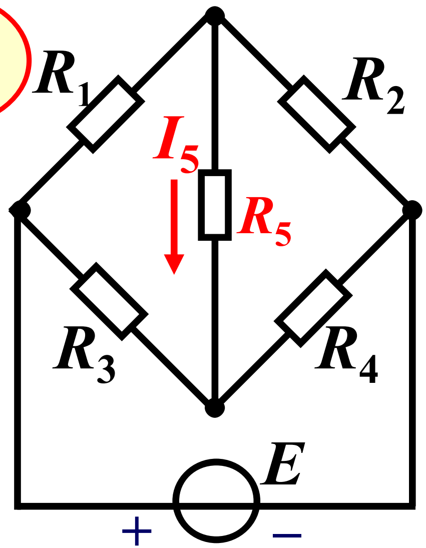


解：　应用戴维南定理：

(3) ab右端可等效为一个电阻：$R=10(\Omega)$

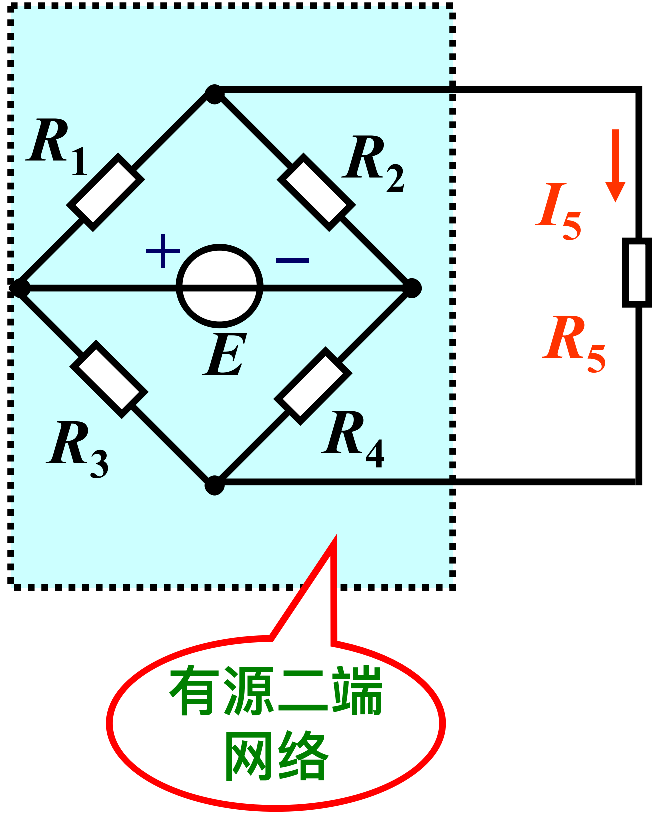
原电路中：$I=U_{oc}/(R_{eq}+R)=40/(4/3+10)=3.53(A)$

例2

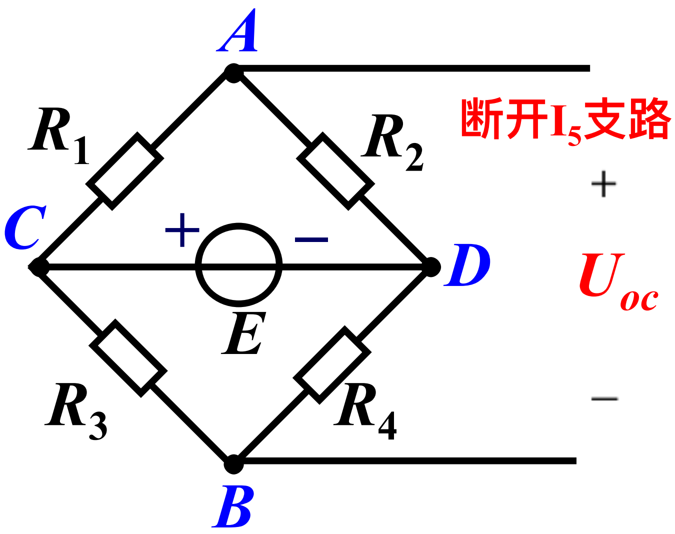


已知：R_1=20 Ω、　R_2=30 Ω
R_3=30 Ω、　R_4=20 Ω
E=10V、 R_5=10 Ω
求：I_5=?

等效电路

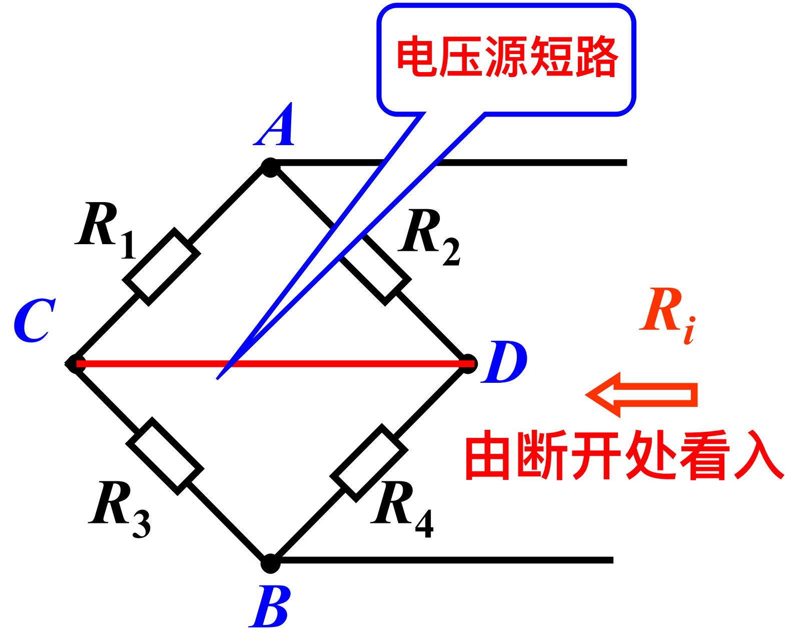


第一步：求开端电压U_{oc}



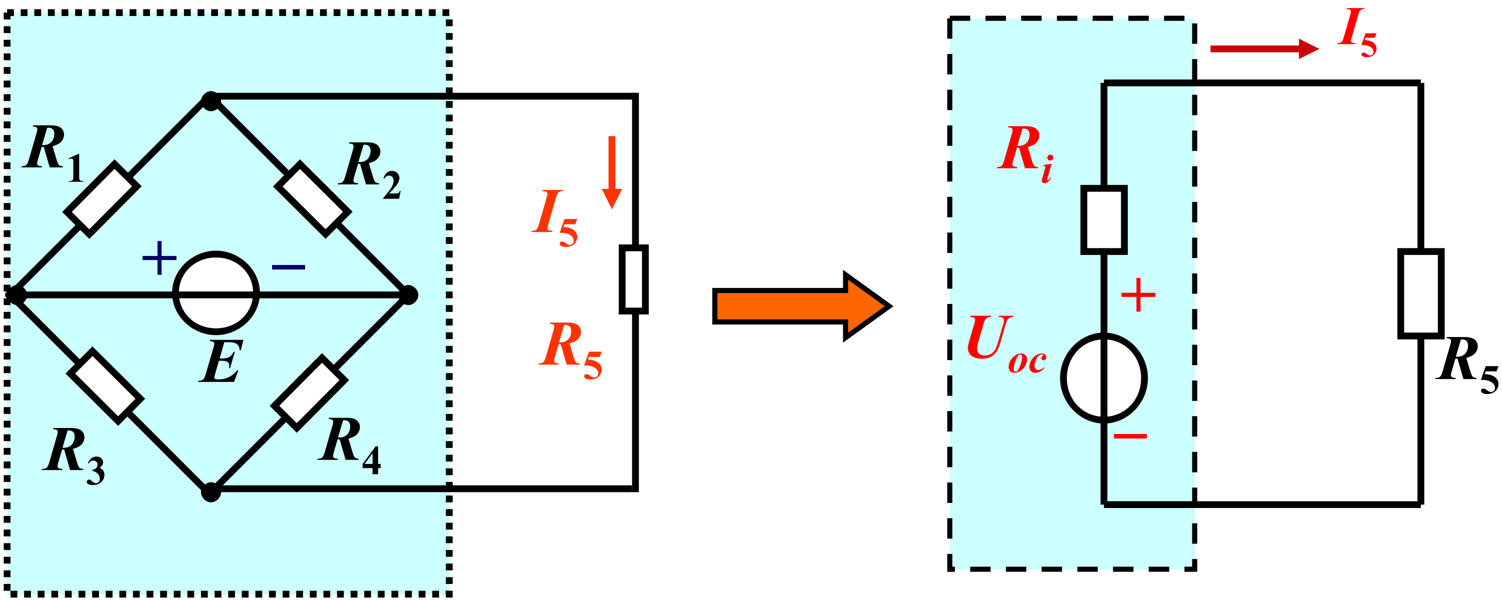
$$U_{oc}=U_{AD}+U_{DB}$$
$$=E\frac{R_2}{R_1+R_2}-E\frac{R_4}{R_3+R_4}$$
$$=10\frac{30}{20+30}-10\frac{20}{30+20}$$
$$=2\text{ V}$$

第二步：求输入电阻 R_i



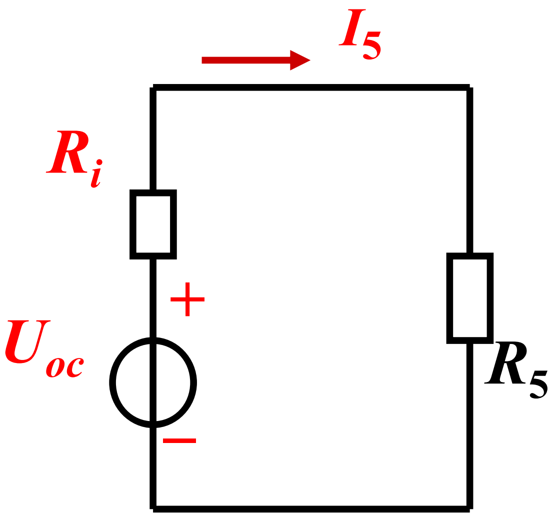
$$R_i=R_1\,//\,R_2+R_3\,//\,R_4$$
$$=20\,//\,30+30\,//\,20$$
$$=24\Omega$$

等效电路



$$\begin{cases} U_{oc} = 2\ \text{V} \\ R_i = 24\ \Omega \end{cases}$$

第三步：求未知电流 I_5



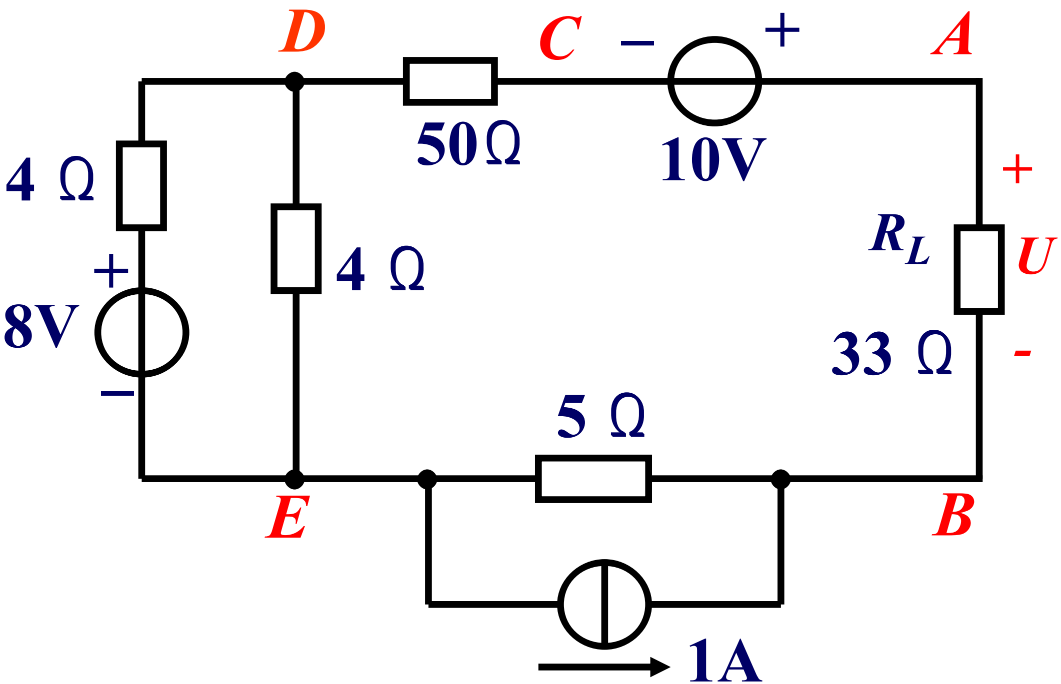
$Uoc= 2V$

$R_i=24\Omega$

$R_5 = 10\,\Omega$ 时

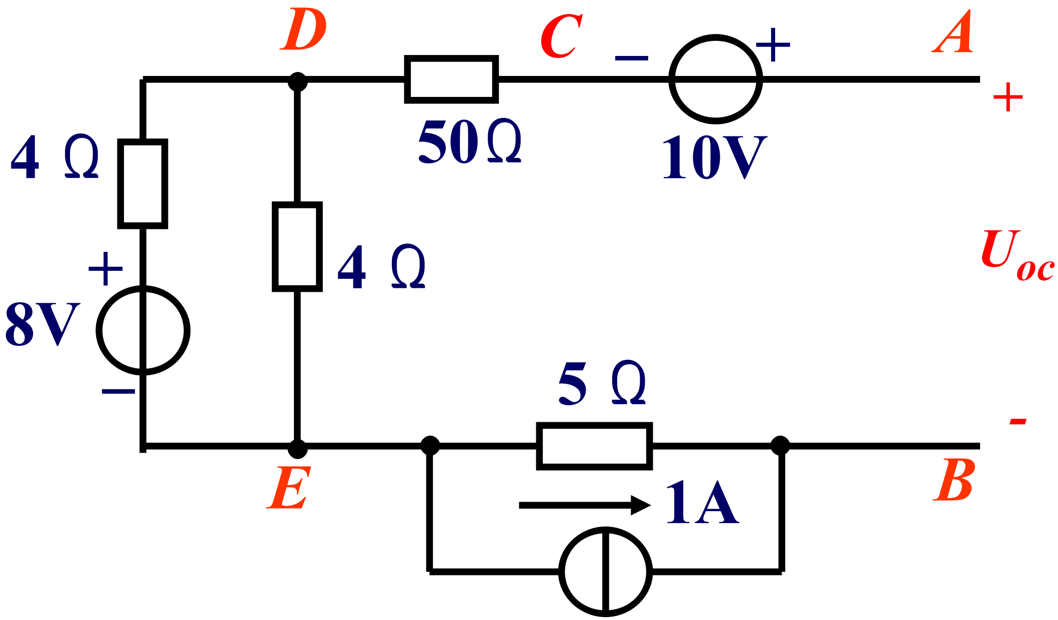
$$\boxed{I_5 = \frac{U_{oc}}{R_i + R_5} = \frac{2}{24+10} = 0.059\ \text{A}}$$

例3



求：U=?

第一步：求开路电压U_{oc}。



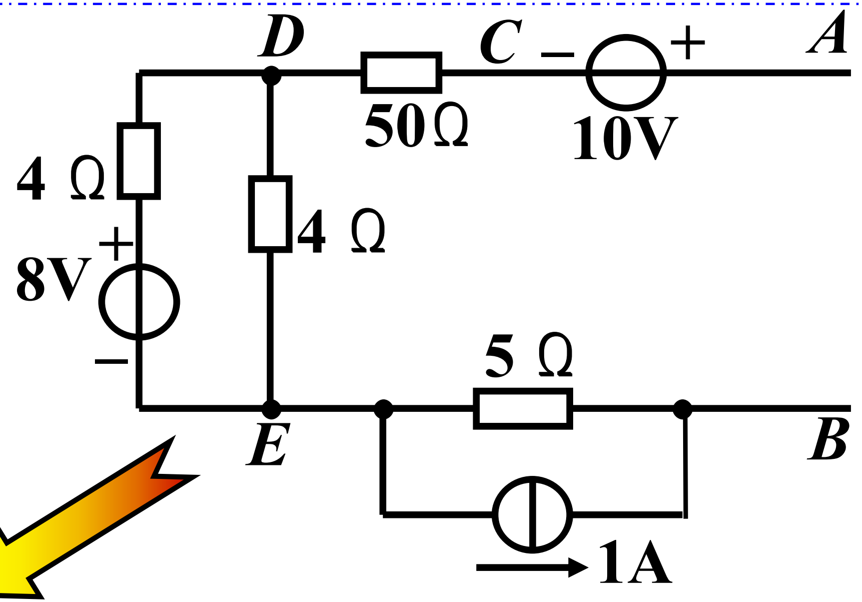
$$\boxed{U_{oc}=U_{AC}+U_{CD}+U_{DE}+U_{EB}}$$

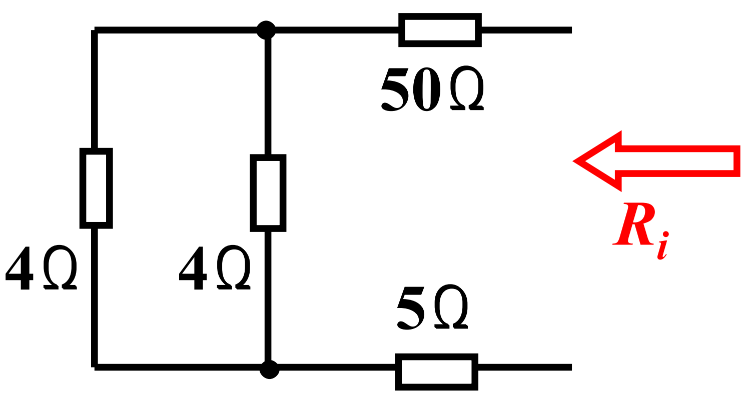
$$=10+0+4-5$$

$$=9\text{ V}$$

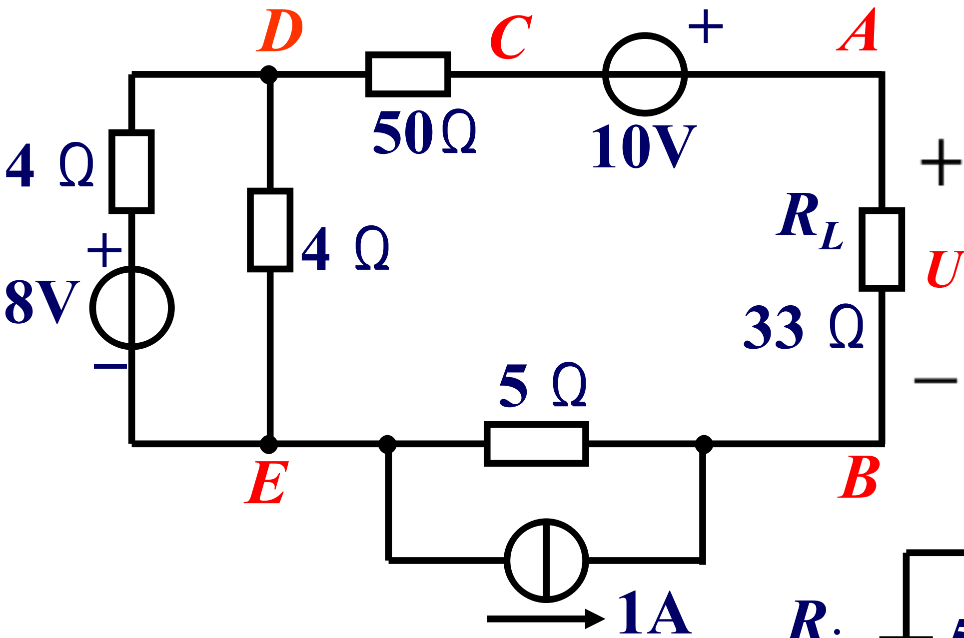
第二步：

求输入电阻 R_i。

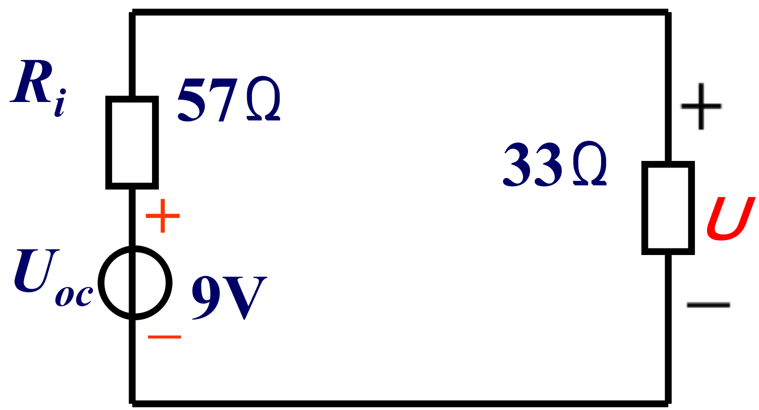




$$R_i = 50 + 4 // 4 + 5$$
$$= 57\ \Omega$$

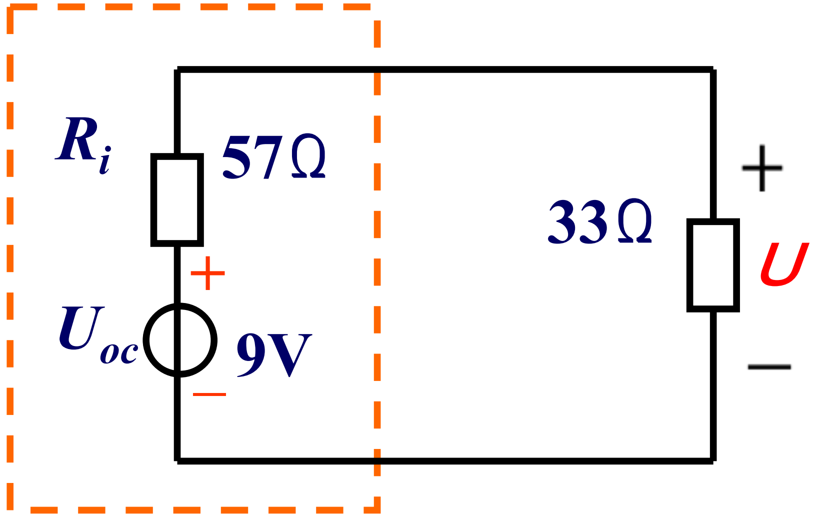


等效电路



$$\begin{cases} U_{oc} = 9\ \text{V} \\ R_i = 57\ \Omega \end{cases}$$

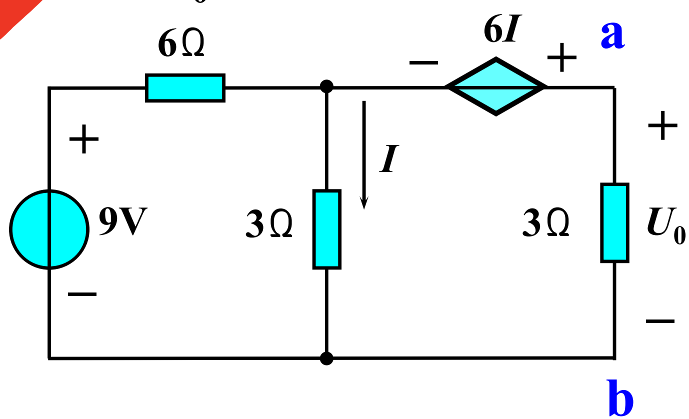
第三步：求解未知电压 U。

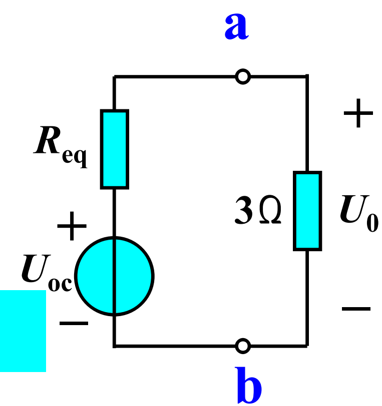


$$\boxed{U = \frac{9}{57+33} \times 33 = 3.3\ \text{V}}$$

含受控源电路戴维南定理的应用

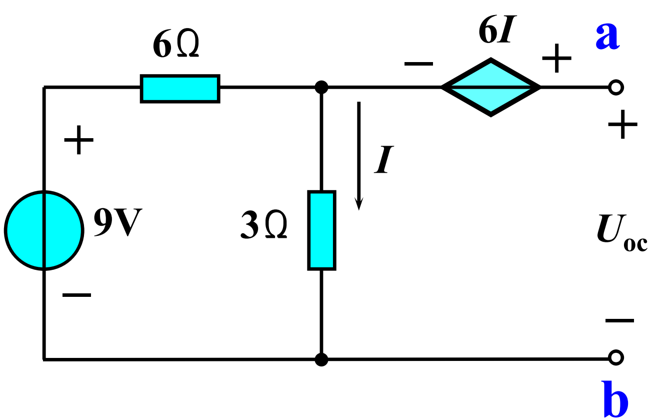
例4　求U_0。





U_{oc}=9V

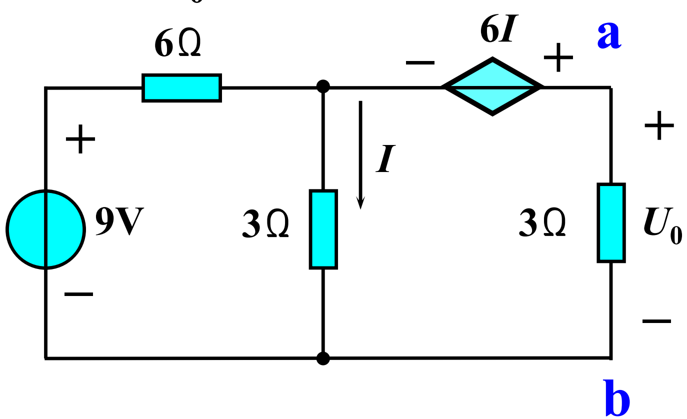
解：　(1) 求开路电压U_{oc}



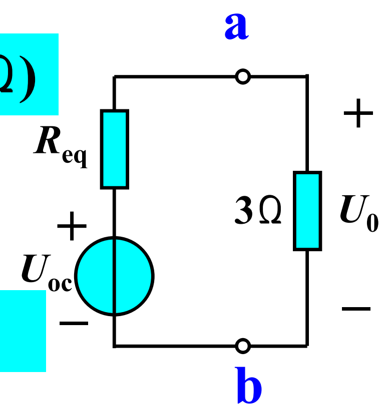
$$\begin{cases} U_{oc}=6I+3I \\ I=9/9=1\text{A} \end{cases} \Rightarrow U_{oc}=9\text{V}$$

含受控源电路戴维南定理的应用

例4：求U_0。

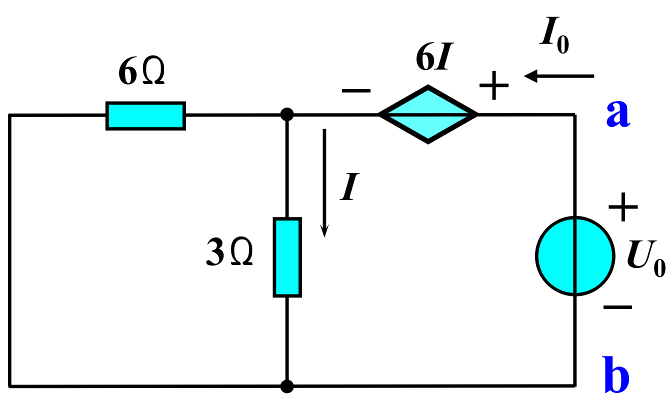


$R_{eq}=6(\Omega)$



$U_{oc}=9V$

解： (2) 求等效电阻R_{eq}　　**方法1：加压求流**



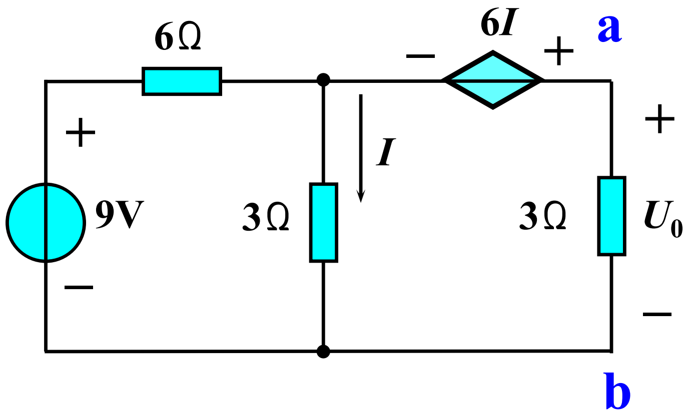
$$\begin{cases} U_0=6I+3I=9I \\ I=I_0\times 6/(6+3)=(2/3)I_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $U_0=9\times(2/3)I_0=6I_0$

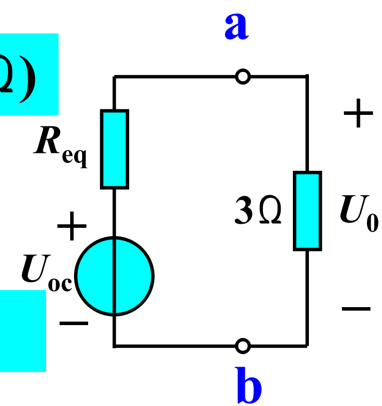
$\Rightarrow$ $R_{eq}=U_0/I_0=6(\Omega)$

含受控源电路戴维南定理的应用

例4：求U_0。

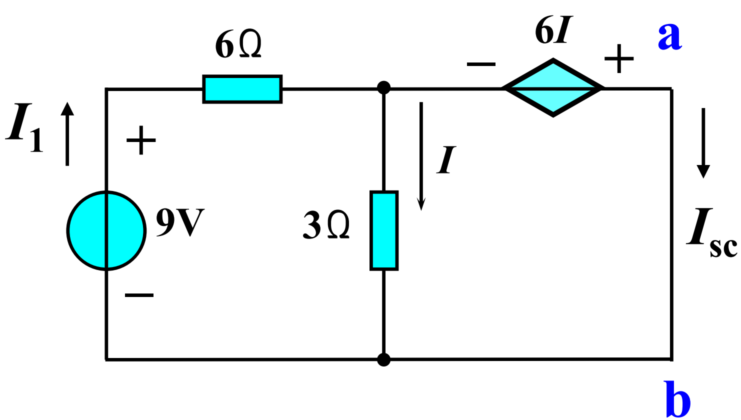


$R_{eq}=6(\Omega)$



$U_{oc}=9V$

解： (2) 求等效电阻R_{eq} **方法2：开路电压、短路电流**



$6\,I_1+3I=9$

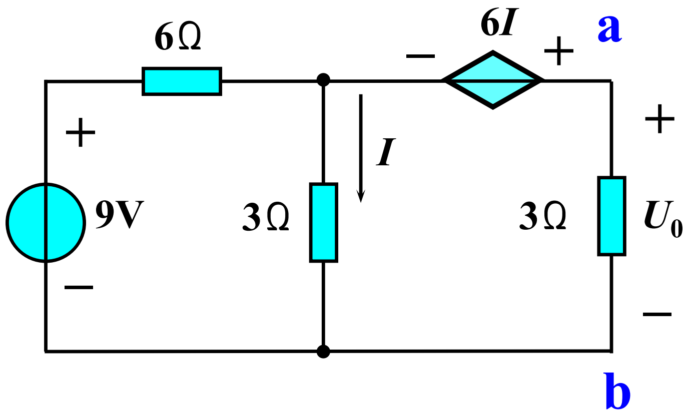
$3I=-6I$ （KVL） $\Rightarrow$ $I=0$

$I_{sc}=I_1=9/6=1.5\text{A}$

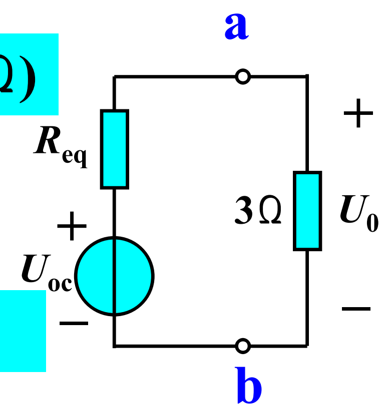
$R_{eq}=U_{oc}/I_{sc}=9/1.5=6(\Omega)$

含受控源电路戴维南定理的应用

例4：求U_0。



R_{eq}=6(Ω)

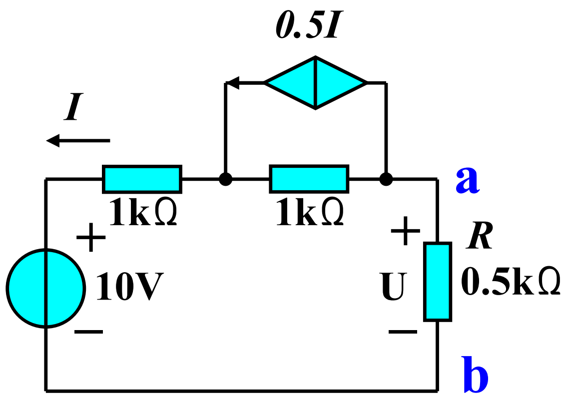


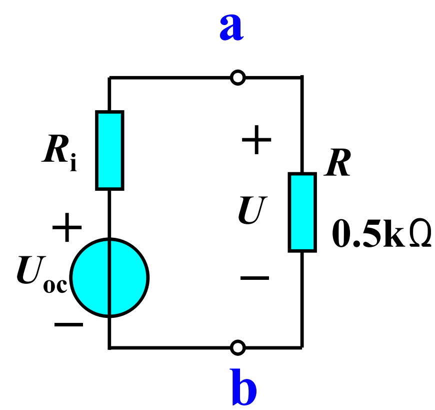
U_{oc}=9V

解： 由等效电路得：

$$U_0 = \frac{3}{6+3} \times 9 = 3\text{V}$$

例5：用戴维南定理求U。

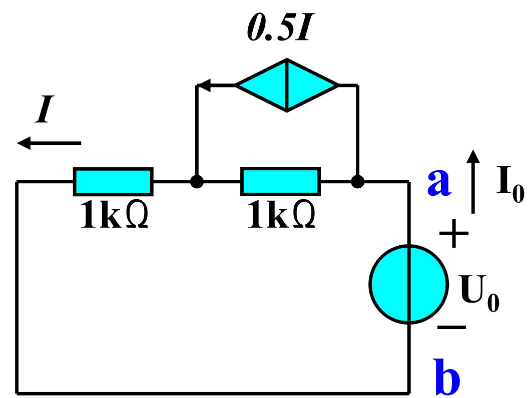




解： (1). 求开路电压：（a、b开路）

$I=0$，$0.5I=0$，$U_{oc}=10\text{V}$

(2).求等效电阻R_i：加压求流法



$$U_0=(I_0-0.5\,I_0)\times10^3+I_0\times10^3$$

$$=1500I_0$$

$$R_i=U_0\,/\,I_0=1.5\text{k}\Omega$$

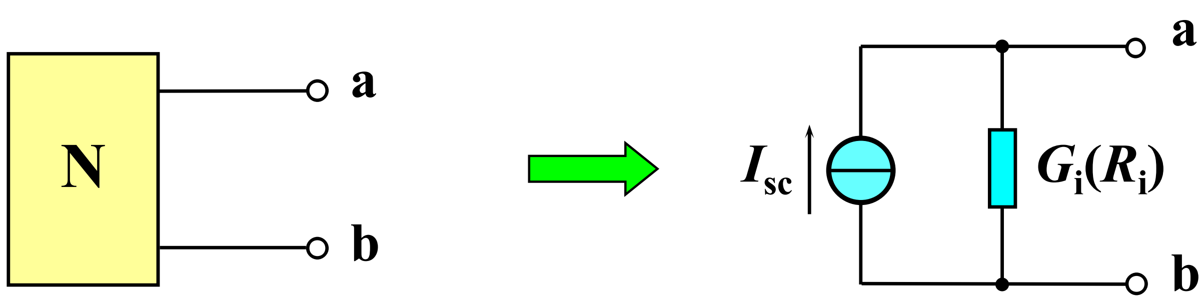
$$U=U_{oc}\times500/(1500+500)=2.5\text{V}$$

二、诺顿定理：

任何一个含独立电源，线性电阻和线性受控源的一端口，对外电路来说，可以用一个电流源和电导(电阻)的并联组合来等效置换。

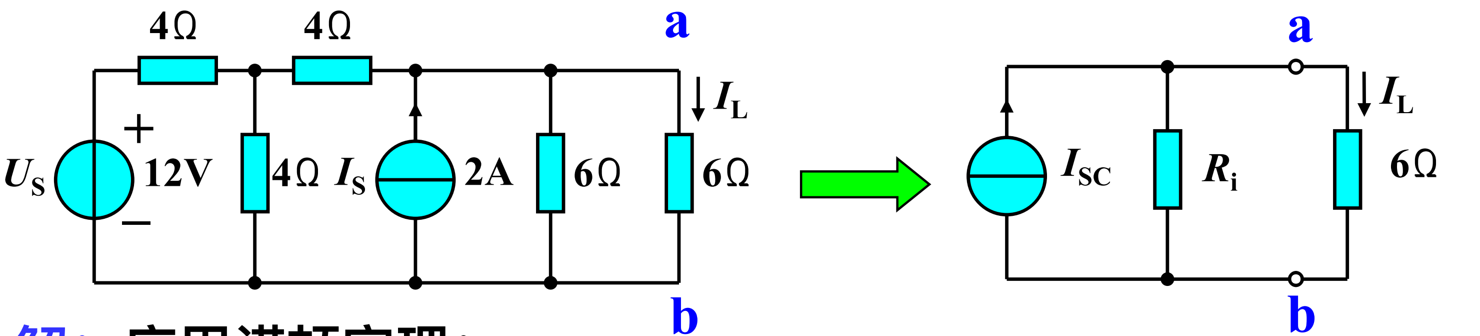
电流源的电流—等于该一端口的短路电流；

电导(电阻)—等于一端口内全部独立电源置零后的输入电导(电阻)。

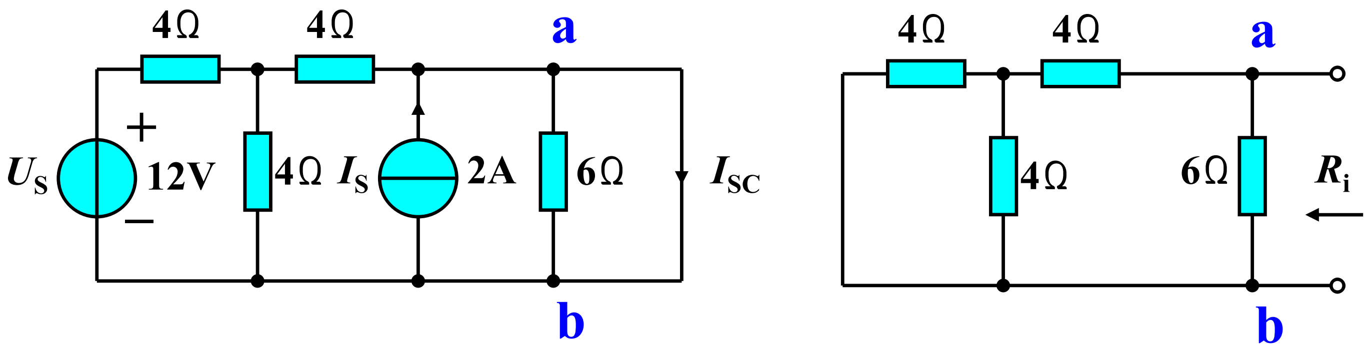


诺顿等效电路可由戴维南等效电路经电源等效变换得到。但须指出，诺顿等效电路可以独立进行证明。证明过程从略。

例6：求图示电路中的电流I_L。



解：应用诺顿定理：



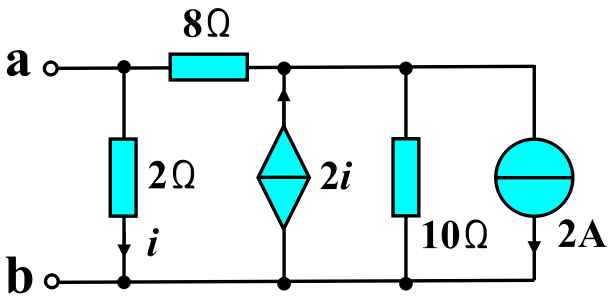
(1). 求短路电流I_{sc}：　$I_{sc}=2+1=3(A)$　叠加定理

(2).求等效电阻R_i：　$R_i=((4//4)+4)//6=3(\Omega)$

$I_L=3\times(3/(6+3))=1(A)$

并不是所有的含源二端口都有戴维南等效电路和诺顿等效电路，当网络最终等效为一个电流源时，就没有戴维南等效电路；反之亦然。

例7：如图所示电路ab端口的TC，NC是否存在，求出等效电路 。

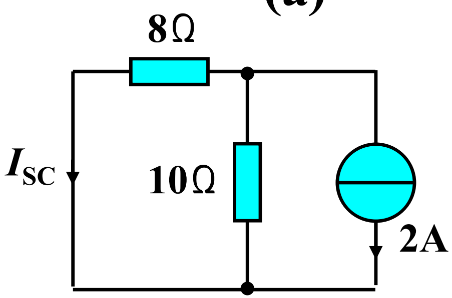


(a)

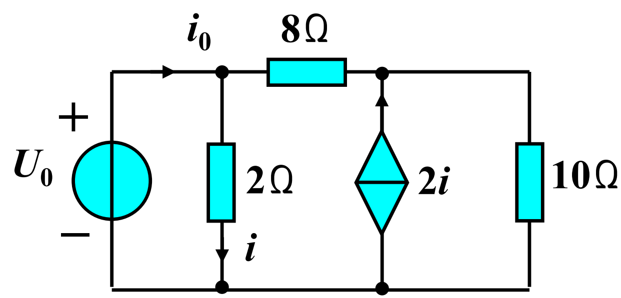
解： 图(a)中$U_{oc}=U_{ab}=2i$

KVL方程：$(8+2)i+10(2-i)=0$

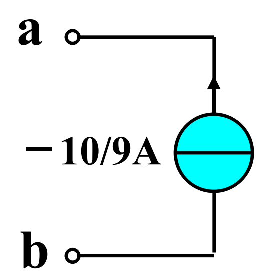
$\Rightarrow$ U_{oc}无法确定



(b)



(c)



(d)

图(b)中短接ab，$I_{sc}=-10/9(\mathrm{A})$

用端口加电源法求入端电阻，图(c)中$U_0=2i$

KVL方程：$U_0=8i_1+10i_2=8(i_0-U_0/2)+10(i_0-U_0/2+U_0)$

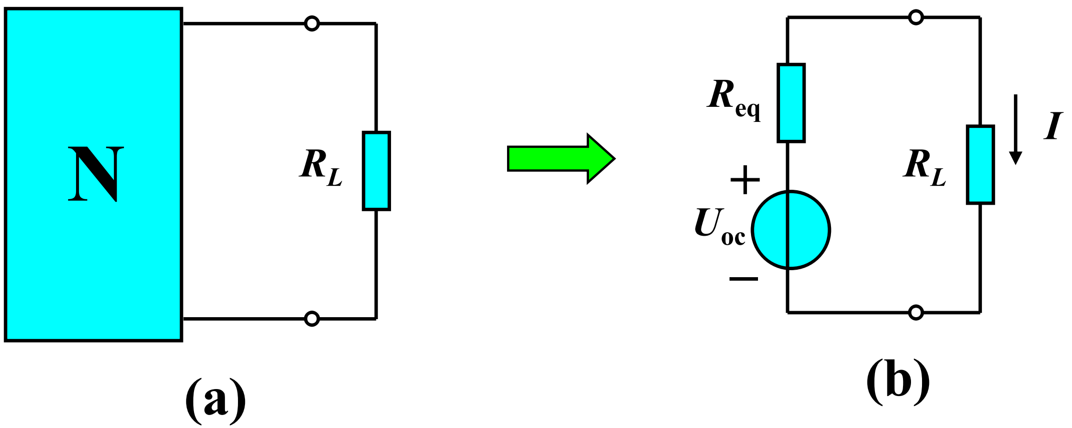
$$\begin{cases} i_0=0 \\ R_0=\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 电路等效为一个电流源$I_{sc}=-10/9(\mathrm{A})$ 图(d)

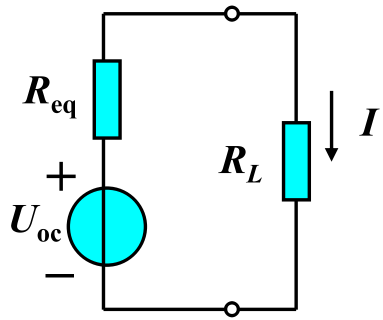
§4-4 最大功率传输定理

一、最大功率传输：就是电网络的负载在什么条件下可以从电网络上获最大功率。

根据戴维南定理，任意线性含源网络可等效为戴维南电路。



图(b)中：　$I = \dfrac{U_{oc}}{R_{eq} + R_L}$



(b)

负载R_L上的功率为：

$$P_L = I^2 R_L = \frac{R_L U_{oc}^2}{(R_{eq} + R_L)^2}$$

$$= \frac{U_{oc}^2}{2R_{eq} + R_L + \dfrac{R_{eq}^2}{R_L}} \le \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}}$$

$$(a + b \ge 2\sqrt{ab})$$

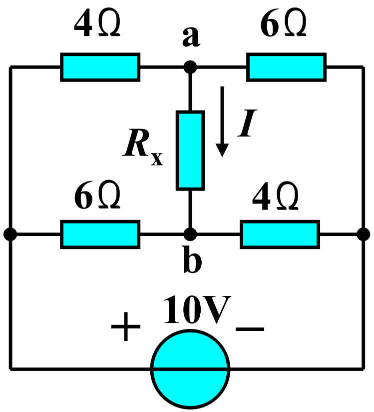
最大功率传输条件为：

(1).$R_L = R_{eq}$时，获最大功率；

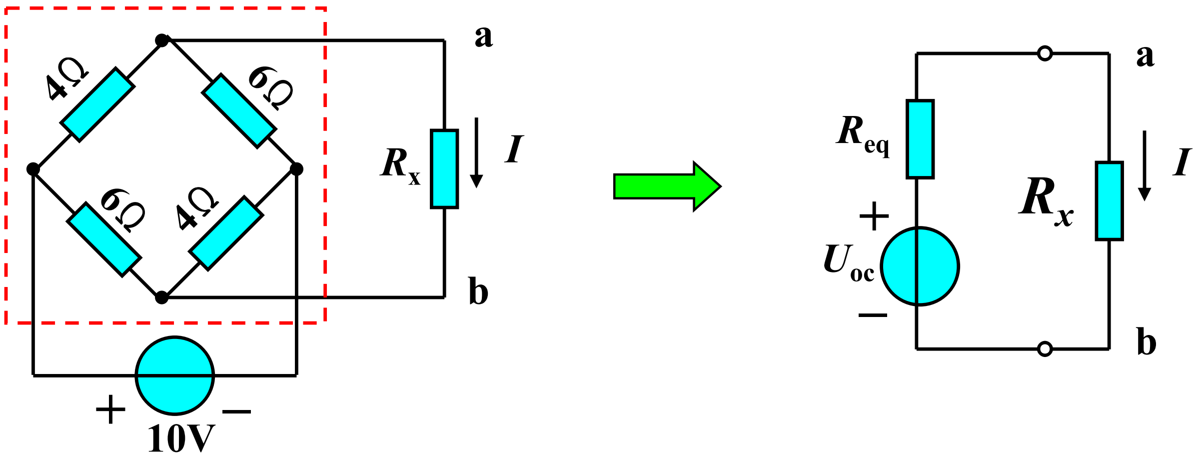
(2).最大功率为： $P_{max} = \dfrac{U_{oc}^2}{4R_{eq}}$

例：(1) 计算R_x分别为1.2Ω、5.2Ω时的I；

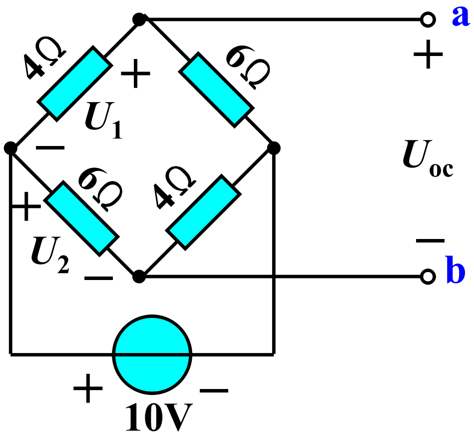
(2) R_x为何值时，其上获最大功率?



解：保留R_x支路，将其余一端口网络化为戴维南等效电路：

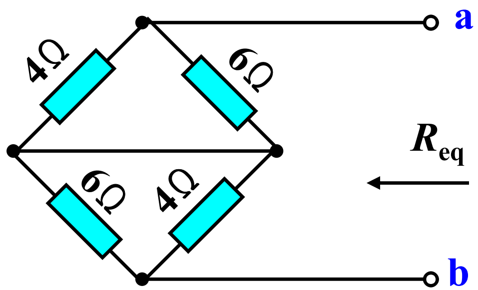


(1) 求开路电压



$U_{oc}=U_1+U_2=-4+6=2(V)$

(2) 求等效电阻R_i



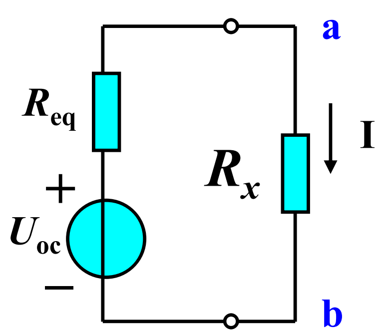
$R_{eq}=4//6+6//4=4.8(\Omega)$

(3) R_x =1.2Ω时，

$I=U_{oc}/(R_{eq}+R_x)=0.333$ (A)

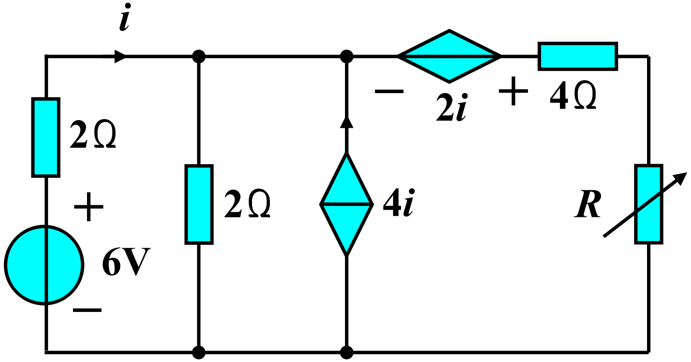
R_x =5.2Ω时，

$I= U_{oc} /(R_{eq}+R_x)=0.2$(A)

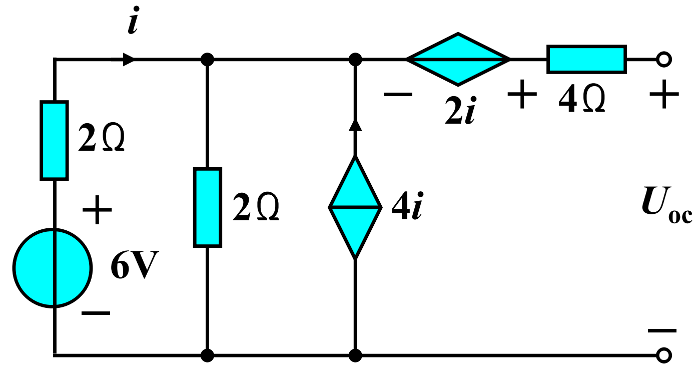


$R_x = R_i$ =4.8Ω时，其上获最大功率。

例：如图所示电路，试问当R为何值时？它可获得最大功率。最大功率为多少?



(a)



(b)

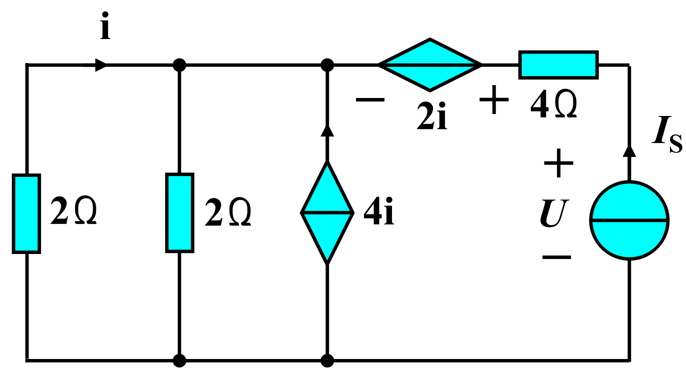
解：(1) 求开路电压U_{oc}，如图(b)

$$U_{oc}=2i-2i+6$$

$\Rightarrow$ $U_{oc}=6(V)$

(2) 求等效输入电阻R_0

KCL KVL来回导

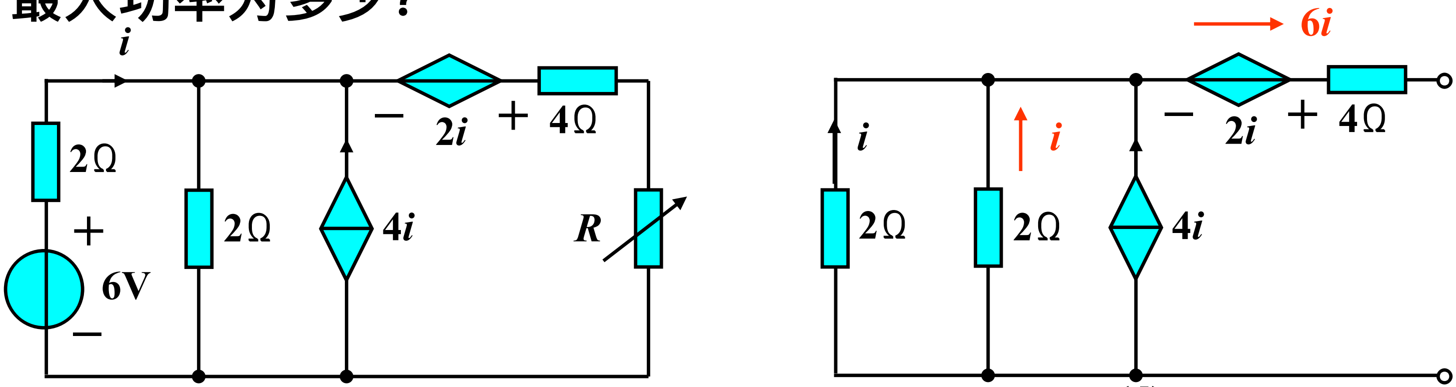


(c)

$$\begin{cases} 6i+I_S=0 \\ 4I_S+2i-2i=U \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $R_0=U/I_S=4(\Omega)$

例：如图所示电路，试问当R为何值时？它可获得最大功率。最大功率为多少?

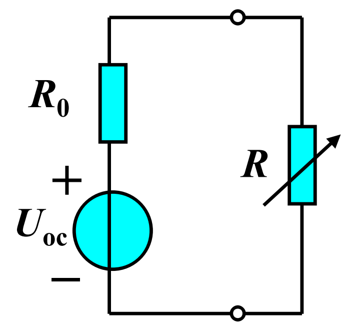


(a)　　　　(d)

等效电路如图(e)所示：

当$R=R_0=4\Omega$时获最大功率。

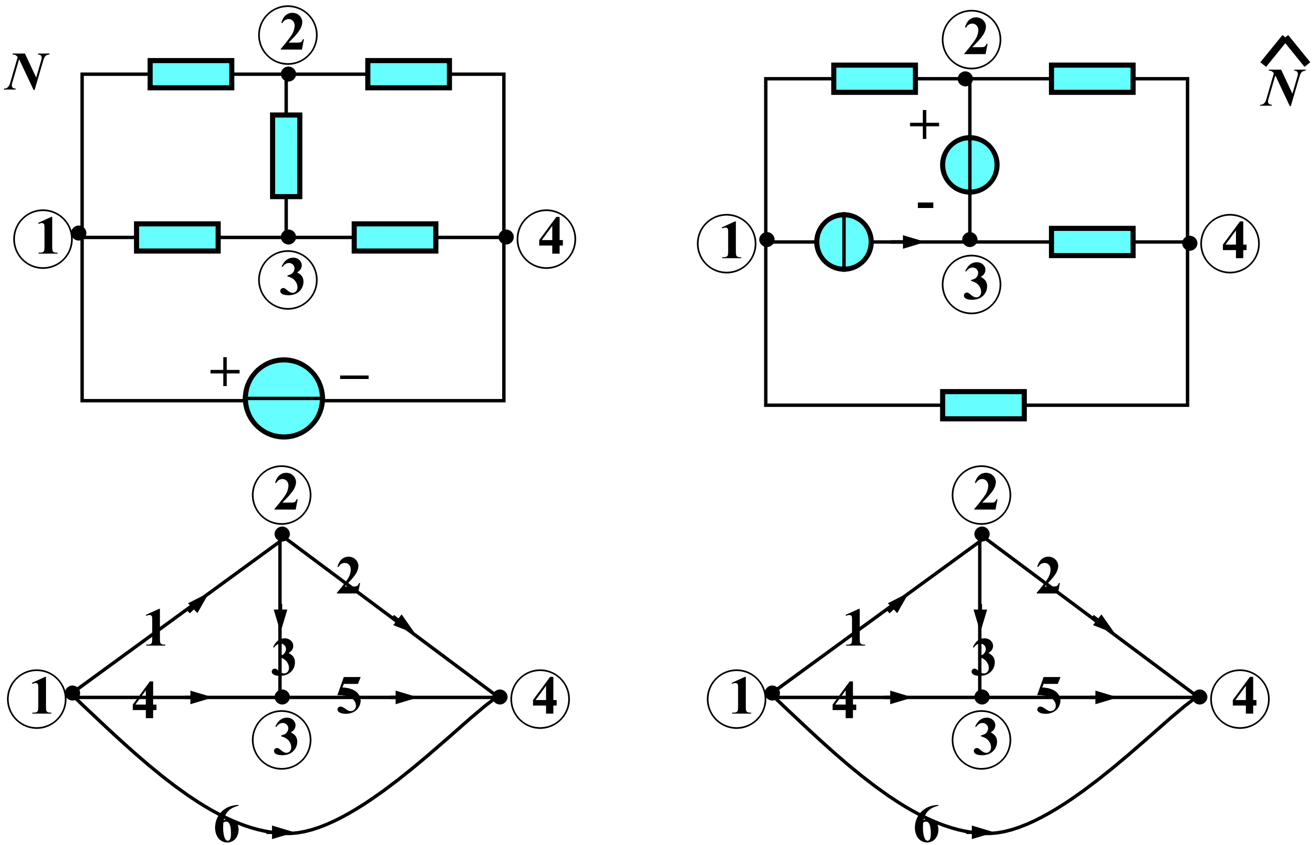
$$P_{max}=\frac{U_{oc}^2}{4R_0}=\frac{6^2}{4\times 4}=2.25(W)$$



(e)

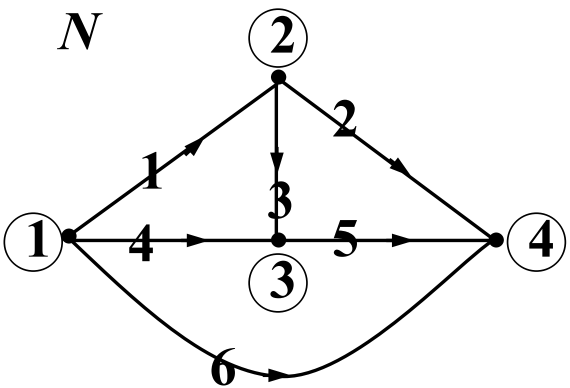
§4-5 特勒根定理

具有相同拓扑结构的电路。

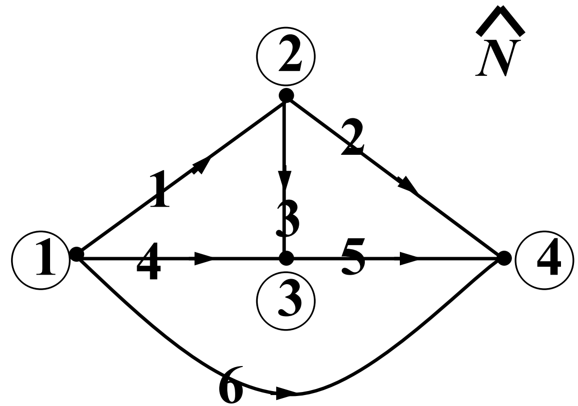


一、特勒根定理1

各支路电压、电流均取关联的参考方向

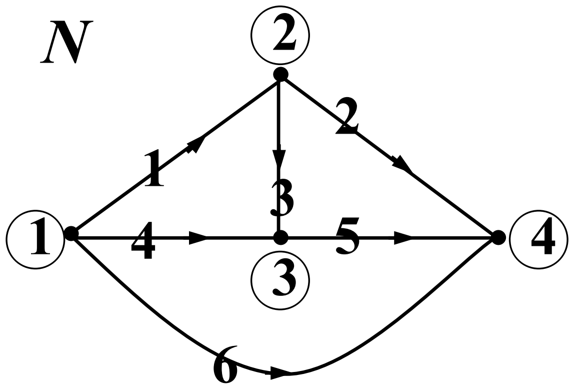


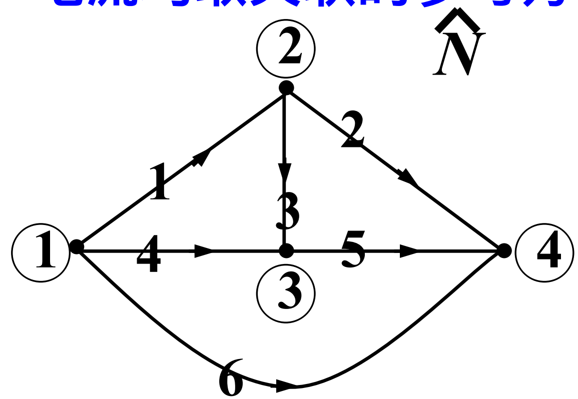
$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0$$



$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0$$

二、特勒根定理2　各支路电压、电流均取关联的参考方向





$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6}(u_k\hat{i}_k) &= u_1\hat{i}_1+u_2\hat{i}_2+u_3\hat{i}_3+u_4\hat{i}_4+u_5\hat{i}_5+u_6\hat{i}_6 \\
&=(u_{n1}-u_{n2})\hat{i}_1+(u_{n2}-u_{n4})\hat{i}_2+(u_{n2}-u_{n3})\hat{i}_3 \\
&\quad+(u_{n1}-u_{n3})\hat{i}_4+(u_{n3}-u_{n4})\hat{i}_5+(u_{n1}-u_{n4})\hat{i}_6 \\
&=u_{n1}(\hat{i}_1+\hat{i}_6+\hat{i}_4)+u_{n2}(-\hat{i}_1+\hat{i}_2+\hat{i}_3) \\
&\quad+u_{n3}(-\hat{i}_3-\hat{i}_4+\hat{i}_5)+u_{n4}(-\hat{i}_2-\hat{i}_5-\hat{i}_6)=0
\end{aligned}
$$

同理:

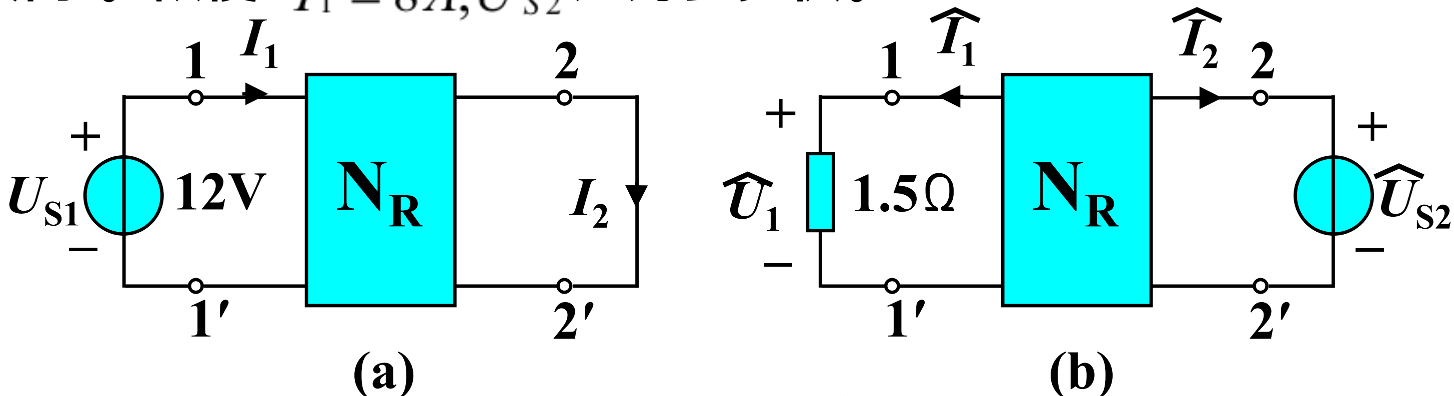
$$\sum_{k=1}^{6}(\widehat{u_k}i_k)=0$$

特勒根定理应用范围：

(1).理论基础为KCL，KVL，只涉及电路的拓扑性质，并不涉及支路元件的特性。

(2).勒根定理对任何具有线性、非线性、时不变、时变元件的集总电路都适用。

例：如图所示电路中，N_R内仅含线性电阻元件，当1-1′端接电压源U_{S1}，2-2′端短路时，电路如图(a)所示，测得I_1=6A，I_2＝1.2A。若将1-1′端接1.5Ω电阻、2-2′端接电压源，电路如图(b)所示。欲使 $\hat{I}_1 = 8A, \hat{U}_{S2}$ 应为多少伏。



解：由特勒根定理：

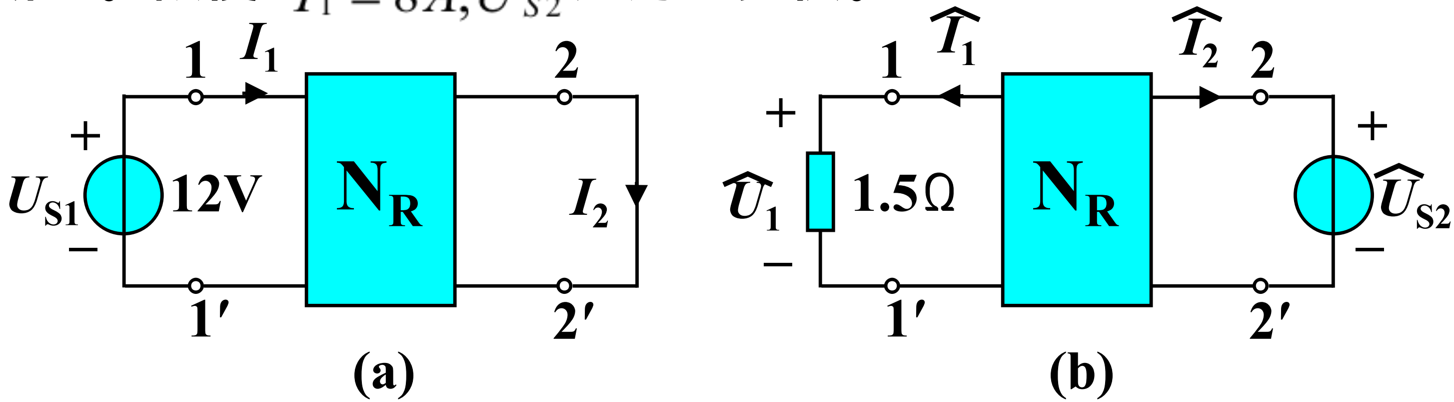
$$U_1\hat{I}_1 + U_2\hat{I}_2 + \sum_{k=3}^{b} U_k\hat{I}_k = 0$$

$$\hat{U}_1 I_1 + \hat{U}_2 I_2 + \sum_{k=3}^{b} \hat{U}_k I_k = 0$$

两个电路为同一个线性纯电阻网络。

$$\sum_{k=3}^{b} U_k\hat{I}_k = \sum_{k=3}^{b} (I_k R_k)\hat{I}_k = \sum_{k=3}^{b} (R_k\hat{I}_k) I_k = \sum_{k=3}^{b} \hat{U}_k I_k$$

例：如图所示电路中，N_R内仅含线性电阻元件，当1-1′端接电压源U_{S1}，2-2′端短路时，电路如图(a)所示，测得I_1=6A，I_2＝1.2A。若将1-1′端接1.5Ω电阻、2-2′端接电压源，电路如图(b)所示。欲使 $\hat{I}_1 = 8A, \widehat{U}_{S2}$ 应为多少伏。



可以得到： $U_1\widehat{I}_1 + U_2\widehat{I}_2 = \widehat{U}_1 I_1 + \widehat{U}_2 I_2$

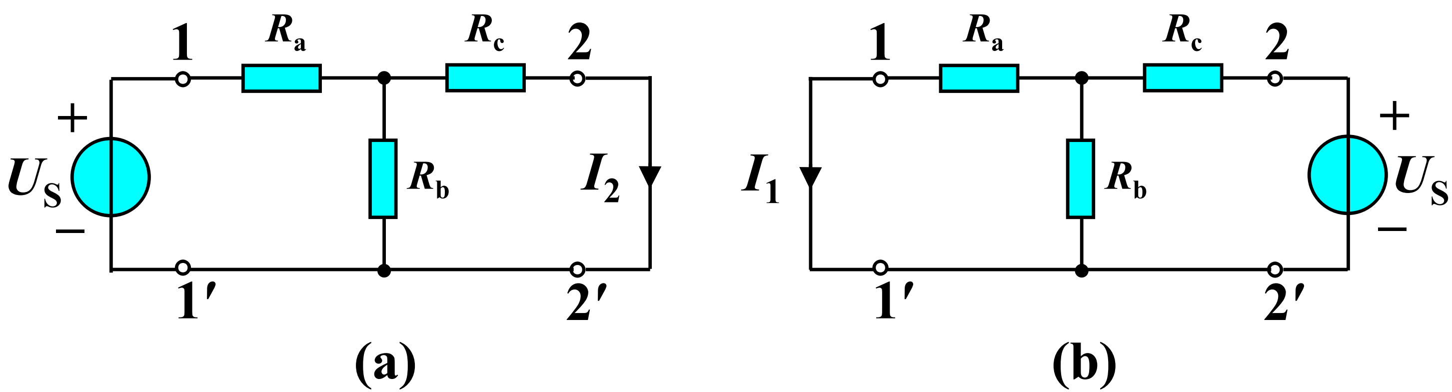
带入数据得：

$$12\times 8 + 0 = 8\times 1.5\times(-6) + \hat{U}_{s2}\times 1.2$$

$$\hat{U}_{s2} = 140V$$

§4-6 互易定理 (*Reciprocity Theorem*)

网络的互易性：

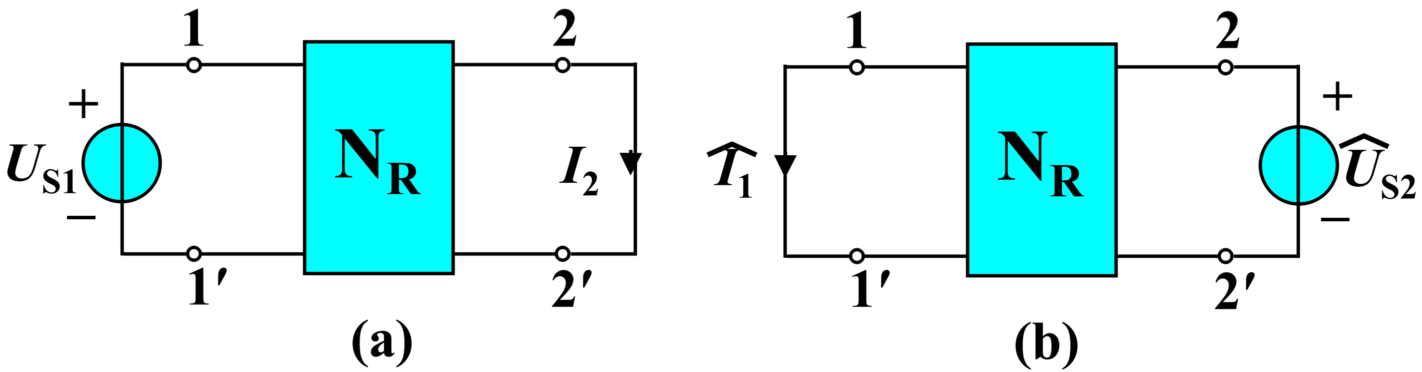


图(a)中响应电流为：　　**图(b)中响应电流为：**

$$I_2 = \frac{R_b}{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a} U_S \qquad I_1 = \frac{R_b}{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a} U_S$$

所加电压相等时，响应电流也相等，$I_1 = I_2$。

互易定理一：激励-电压源，响应-电流(N_R为线性电阻网络)



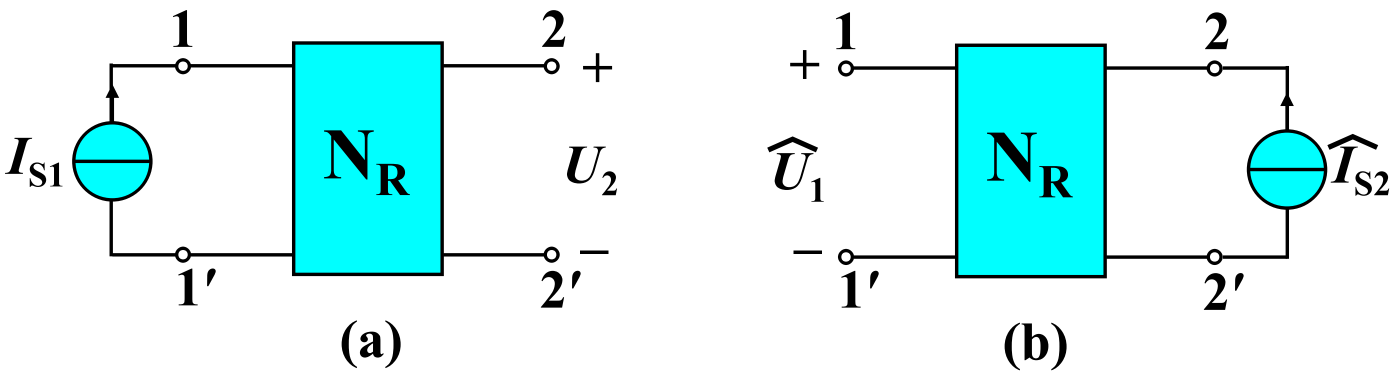
即要证明：
$$\frac{I_2}{U_{s1}} = \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_{s2}}$$
输出/输入＝constant

根据互易网络特性：
$$U_1\hat{I}_1 + U_2\hat{I}_2 = \hat{U}_1 I_1 + \hat{U}_2 I_2$$

$$\Rightarrow \quad U_{s1}\hat{I}_1 + 0 = 0 + \hat{U}_{s2} I_2$$
得证。

当激励源相等时：
$$I_2 = \hat{I}_1$$

互易定理二：激励-电流源，响应-电压(N_R为线性电阻网络)



即要证明：
$$\frac{U_2}{I_{s1}} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_{s2}}$$

输出/输入＝constant

根据互易网络特性：
$$U_1\hat{I}_1 + U_2\hat{I}_2 = \hat{U}_1 I_1 + \hat{U}_2 I_2$$

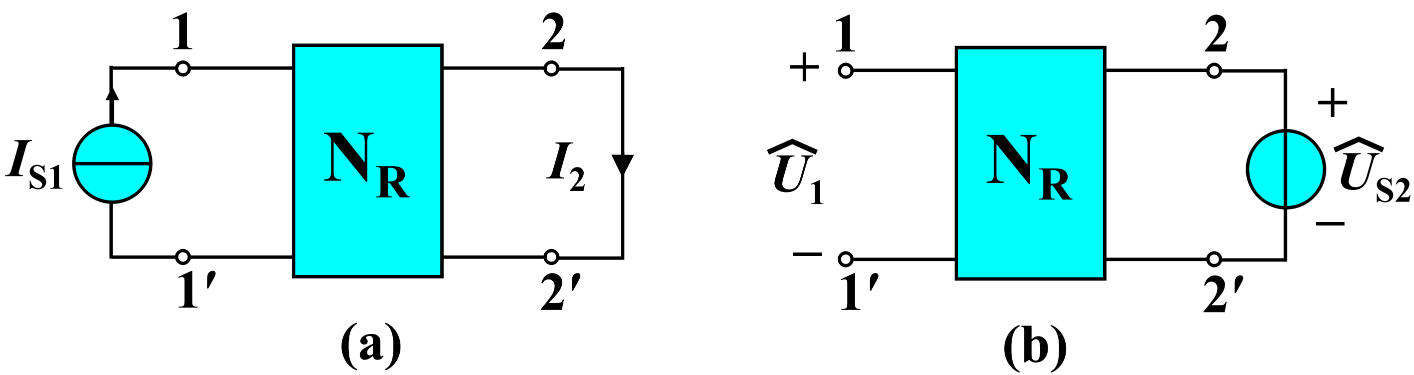
$$\Rightarrow \quad 0 + U_2\hat{I}_{s2} = \hat{U}_1 I_{s1} + 0$$

得证。

当激励源相等时：
$$U_2 = \hat{U}_1$$

互易定理三：激励-电流源，响应-电流

激励-电压源，响应-电压(N_R为线性电阻网络)



即要证明：

$$\frac{I_2}{I_{s1}} = \frac{\hat{U}_1}{\widehat{U_{s2}}}$$

输出/输入＝constant

根据互易网络特性：

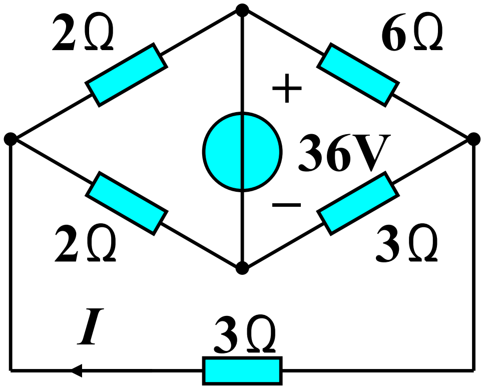
$$U_1\hat{I}_1 + U_2\hat{I}_2 = \hat{U}_1 I_1 + \widehat{U_2} I_2$$

$$\Rightarrow \quad 0 + 0 = \hat{U}_1(-I_{s1}) + \widehat{U_{s2}} I_2$$ 得证。

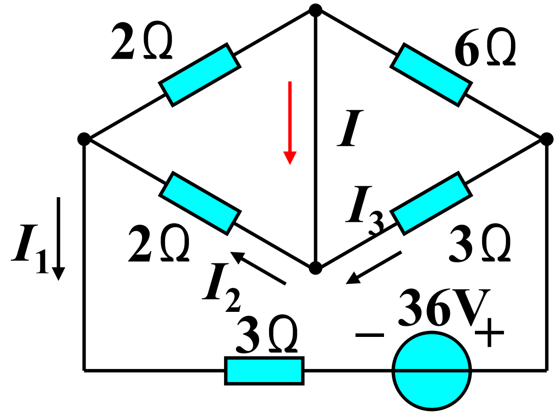
当激励源相等时：

$$I_2 = \hat{U}_1$$

例：求如图所示电路中的电流 I 。



解：



用互易定理一：

$$I_1=36/(3+1+2)=6(\mathrm{A})$$

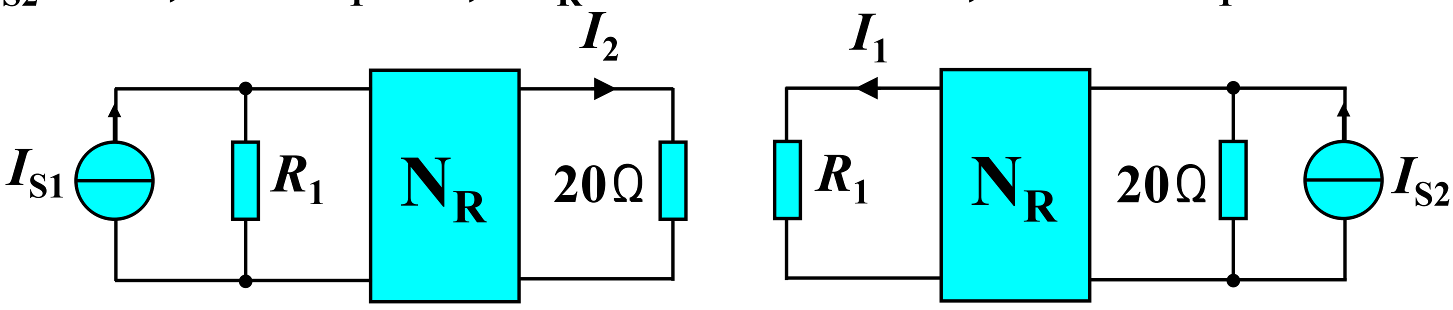
根据并联电路的分流特性：

$$I_2=I_1\times2/(2+2)=3(\mathrm{A}) \qquad I_3=I_1\times6/(6+3)=4(\mathrm{A})$$

根据节点a的KCL方程：

$$I=I_2-I_3=3-4=-1(\mathrm{A})$$

例：图(a)所示电路，I_{S1}=10A，测得I_2=1A，图(b)所示电路，I_{S2}=20A，测得I_1=4A，N_R为线性电阻网络，求电阻R_1的阻值。



(a)　　(b)

解：图(a)，关联参考方向下：　$U_2=20I_2=20\times1=20(\mathrm{V})$

图(b)，关联参考方向下：　$U_1=R_1I_1=4R_1$

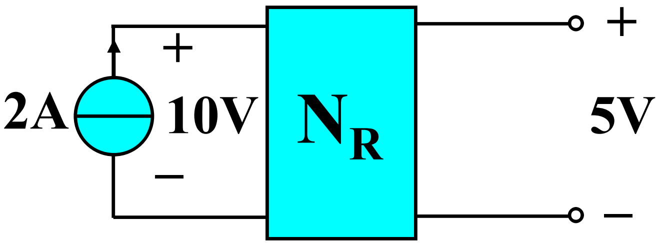
根据互易定理二：

$$\frac{U_2}{I_{s1}}=\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_{s2}} \Rightarrow \frac{20}{10}=\frac{4R_1}{20} \Rightarrow R_1=10\ (\Omega)$$

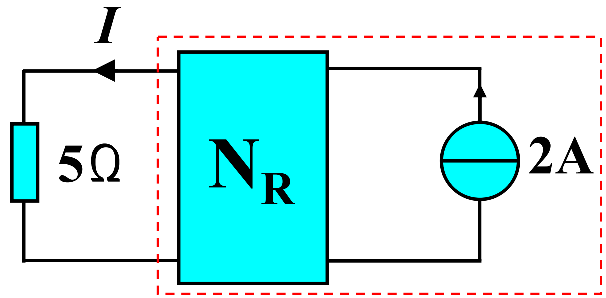
或根据互易定理一：

$$\frac{I_2}{R_1I_{s1}}=\frac{I_1}{20I_{s2}} \Rightarrow \frac{1}{R_1\times10}=\frac{4}{20\times20} \Rightarrow R_1=10\ (\Omega)$$

例：如图所示电路，工作状态分别如(a)(b)所示，N_R为线性电阻网络，求电流I。

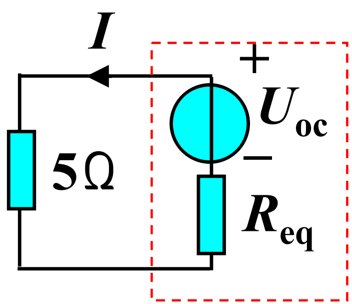


(a)

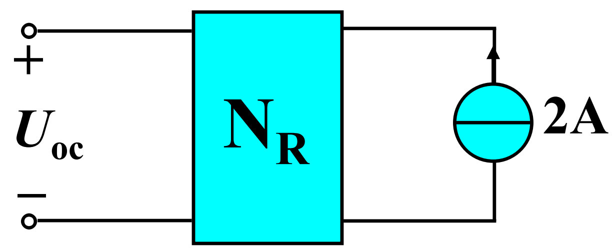


(b)

解法一：　利用戴维南定理和互易定理求解。



(c)

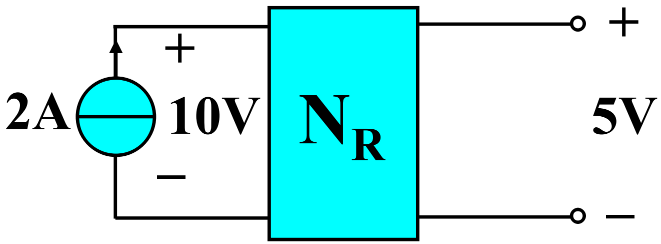


(d)

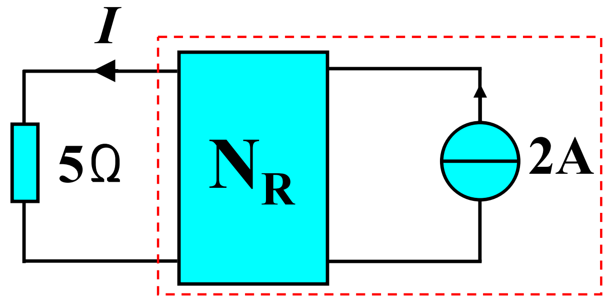
(1)求开路电压U_{oc}：由互易定理二：　U_{oc}=5(V)

(2)求等效电阻R_{eq}：有多种方法：　R_{eq}=10/2=5 (Ω)

例：如图所示电路，工作状态分别如(a)(b)所示，N_R为线性电阻网络，求电流I。



(a)

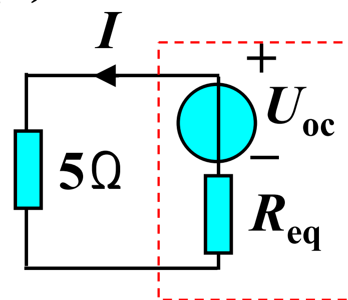


(b)

求等效电阻R_{eq}：　由互易定理三：

$$I_{sc}=1(\mathrm{A})$$

$$R_{eq}=U_{oc}/I_{sc}=5\ (\Omega)$$



(c)

图(c)中电流为：　$I=U_{oc}/(5+R_{eq})=0.5\ (\mathrm{A})$

解法二：　由特勒根定理：　$U_1\hat{I}_1+U_2\hat{I}_2=\hat{U}_1I_1+\widehat{U_2}I_2$

$$10\times I-5\times 2=5\,I\times(-\,2)$$

$$I=0.5\ (\mathrm{A})$$

应用互易定理时应注意：

(1).互易定理适用于线性网络在单一电源激励下，两个支路电压电流关系。

(2).激励为电压源时，响应为电流
激励为电流源时，响应为电压
电压与电流互易。

(3).电压源激励，互易时原电压源处短路，电压源串入另一支路；电流源激励，互易时原电流源处开路，电流源并入另一支路的两个节点间。

(4).互易要注意电源与电压(电流)的方向。

(5).含有受控源的网络，互易定理一般不成立。

——End

作业：

4.3节：4-10，4-15

4.4节：4-17

4.5节：4-19 4-20 4-21

4.6节：4-33

综合：4-45

要求把题目写在作业本上！

——End