2018-2 期末试题

一、单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分）

1. 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 都是微分方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = x^2$ 的解，则以下函数中也是该微分方程的解的是（　　）．

A. $y_1 + y_2 + y_3$　　B. $\dfrac{3}{2}y_1 - y_2 + \dfrac{1}{2}y_3$　　C. $y_1 - y_2$　　D. $2y_3$

2. 以下函数在原点可微的是（　　）．

A. $z = x^2 + y^2$　　B. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$　　C. $z = |x - y|$　　D. $z = \sqrt{|xy|}$

3. 设 $F(x, y) = 0$ 是一条平面光滑曲线，则以下说法中正确的是（　　）．

A. $\{F_x,\ F_y\}$ 是该曲线的切矢量　　B. $\{F_y,\ F_x\}$ 是该曲线的法矢量

C. $\{-F_y,\ F_x\}$ 是该曲线的切矢量　　D. $\{-F_x,\ F_y\}$ 是该曲线的法矢量

4. 设平面区域 D 由 $x^2 + y^2 \le 1$ 表示，区域 D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (xy + \cos x \sin y)d\sigma =$（　　）．

A. 0　　B. $4\iint\limits_{D_1} xy d\sigma$　　C. $4\iint\limits_{D_1} \cos x \sin y d\sigma$　　D. $4\iint\limits_{D_1} (xy + \cos x \sin y)d\sigma$

5. 设区域 Ω 由 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 1$ 围成，$I = \iiint\limits_\Omega f(z)dv$，则以下表达式***错误***的是（　　）．

A. $I = \pi\int_0^1 zf(z)dz$　　B. $I = 2\pi\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 f(z)dz$

C. $I = \int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{x^2+y^2}^1 f(z)dz$　　D. $I = 2\pi\int_0^1 f(z)dz\int_0^z rdr$

6. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则以下说法中正确的是（　　）．

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分）

7. 微分方程 $y'' + 2y' + y = x + 2$ 的通解为______________.

8. 设 $z = f(x^2 + y^2, xy)$, 其中 f 有连续偏导数, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$_____________.

9. 设 $f(x, y, z) = x + y^3 + z^5$, 则 div **grad** $f =$ _________ .

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n3^n}=$________.

三、基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分）

11. 求点 $A(1,2,3)$ 到直线 $L:\frac{x-6}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-2}$ 的距离.

12. 设方程组 $\begin{cases}x^2-2x+y^2+\ln z+z^3=1,\\ x+y+z=1\end{cases}$ 在包含点 $(0,0,1)$ 的一个邻域上确定隐函数 $y=y(x),z=z(x)$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0},\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}$.

13. 求函数 $f(x,y)=4x+2xy-x^2-3y^2$ 的极值.

14. $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$，其中 Ω 是三坐标面与平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体.

15. 求曲线积分 $I=\int_L(2xy-y^2\cos x)dx+(x^2-2y\sin x)dy$，其中曲线 L 沿抛物线 $y=\pi x-x^2+1$ 从 $A(0,1)$ 到 $B(\pi,1)$.

16. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-3)^n}{(2n-1)!!}$ 的敛散性，若收敛指出是绝对收敛还是条件收敛，说明你的理由。

四、 应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分）

17. 求曲面 $z=x^2+y^2,0\le z\le 2$ 的面积.

18. 计算曲面积分 $I=\oiint_S 3xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$，其中 S 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧.

五、综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分）

19. 设 L 是圆周曲线 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$（取正向），$f(x)$ 为正值连续函数.证明:

$$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\ge 2\pi .$$

20. 证明：当 $-\pi<x<\pi$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}=\frac{x}{2}$.