大学物理(下)

华 中 科 技 大 学

张智

zzhang@hust.edu.cn

第四篇

振动与波动

(Oscillations and Waves)

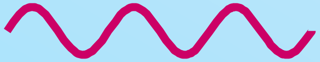
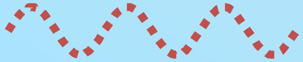
什么是振动？什么是波动？两者有何关系？

广义地,任一物理量在某个值附近来回变化就代表一个振动。

振动的形式：

- 机械振动:物体在一定位置附近作往复运动
- 电磁振荡:电场与磁场作周期性变化
- ....

波动是振动的传播：

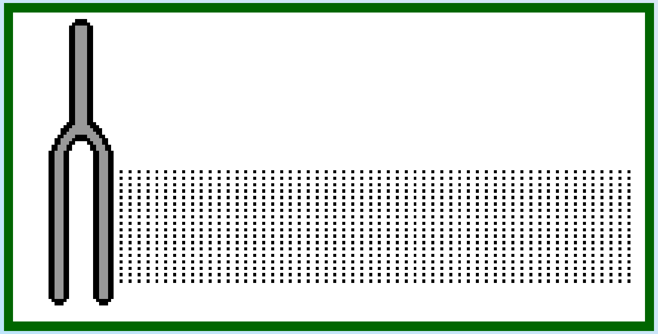
- 机械振动的传播  机械波
- 电磁振荡的传播  电磁波
- ......

月落乌啼霜满天
江枫渔火对愁眠
姑苏城外寒山寺
夜半钟声到客船

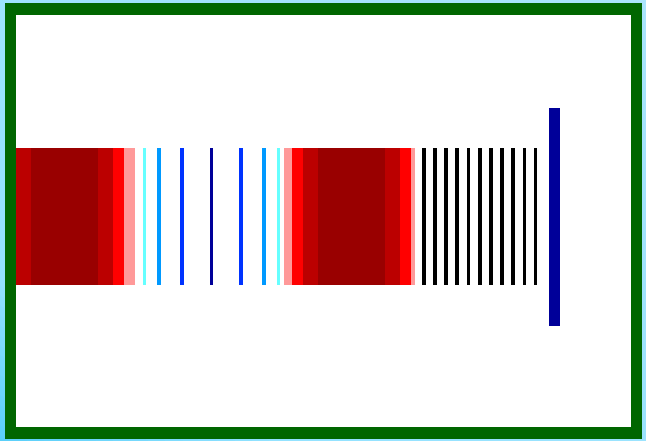
--张继 • 夜泊枫桥

意境很美

钟声尤妙



寒山寺



枫桥

第11章 振动与波动
Oscillations and Waves

第1节　谐振动

第2节　振动的合成与分解

第3节　阻尼振动、受迫振动和共振

第4节　机械波

第5节　波的衍射与波的干涉

第6节　多普勒效应

第7节　电磁振荡与电磁波

任何一物理量在某一定值附近周期性变化的现象称振动。

力学量（如位移 x） —— 机械振动

电磁量（如 I、V、E、B）—— 电磁振荡

最基本、最简单、最重要的振动是谐振动。

复杂的振动 ⟵ 谐振动

任一物理量X在某一数值附近来回变化就称为振动。

若$X(t)$作周期性变化，$X(t)=X(t+T)$,则

$$\mathbf{X}(t)=\sum_i A_i\cos(\omega_i t+\phi_i) \qquad \text{（傅里叶级数）}$$

$$=\sum_i x_i$$

其中，A_i, ω_i, ϕ_i为一系列常数。

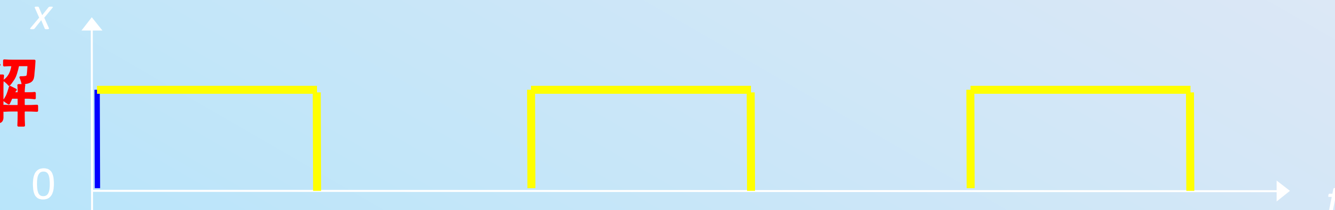
若$X(t)$不作周期变化，则求和改成积分，并采用复数形式。

（傅里叶积分）

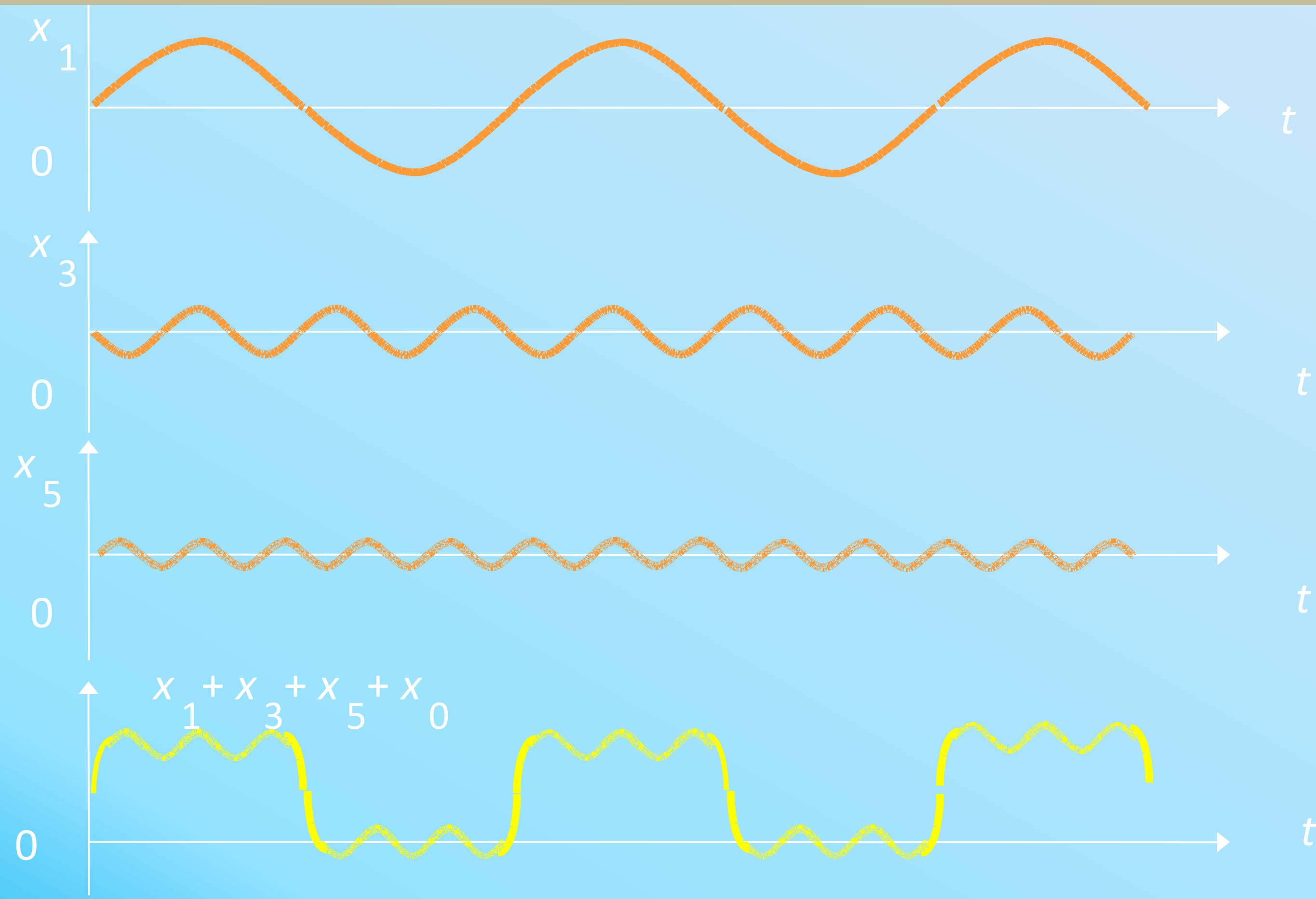
上式中每项x_i的形式均为　$x=A\cos(\omega t+\phi)$

故，任何振动都是形如$x=A\cos(\omega t+\phi)$的振动的叠加。

方波的分解



例如：人耳的科蒂氏器官（包含上万条纤维，它们的振动频率各不相同。声振动传入人耳后，相应于声振动所包含的各种谐振动频率的那些纤维被激发而共振，刺激相应的神经末梢并传入大脑，人就是这样听到和识别各种声音的。这里不仅是数学上的分解，而且是真实的物理过程。）



第1节　谐振动

1. 定义及运动方程

动力学观点定义

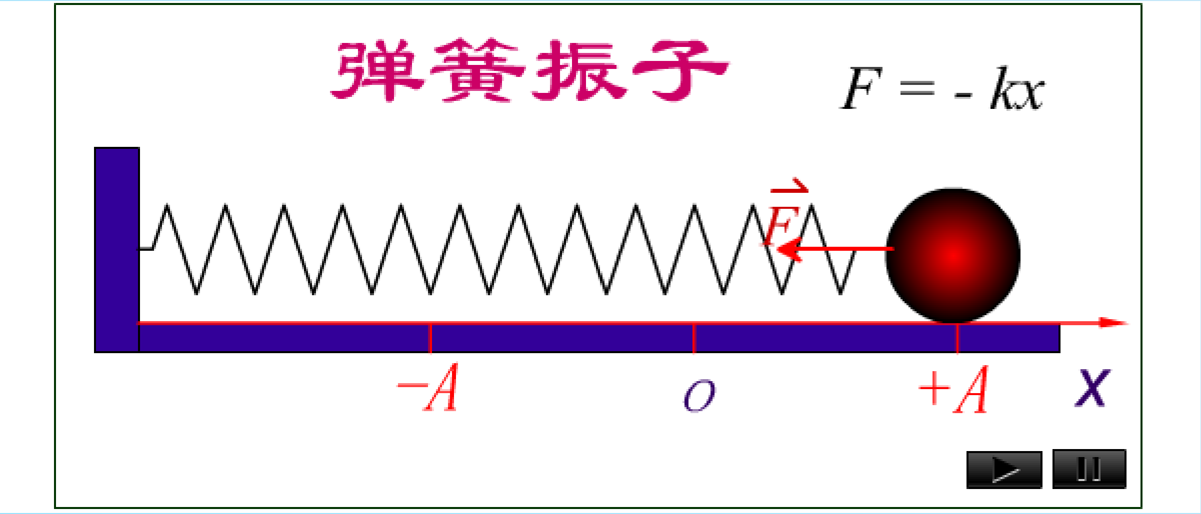
运动学观点定义

1）动力学观点定义

物体在回复力

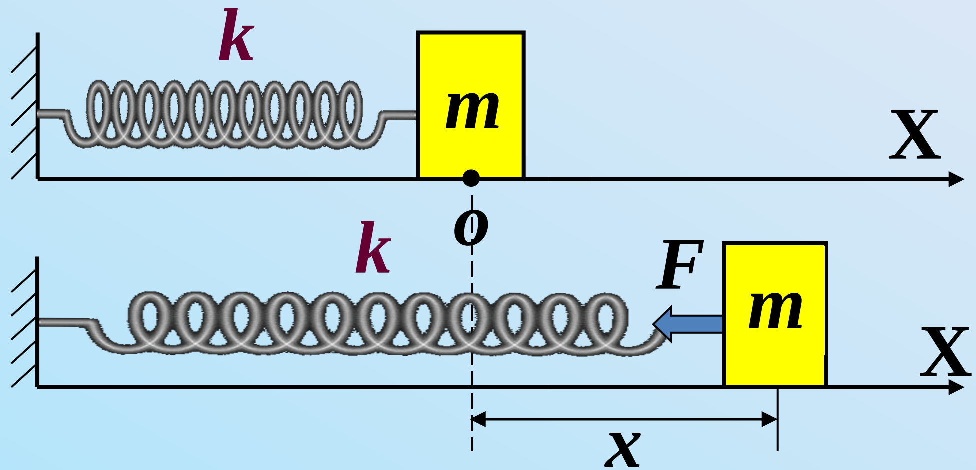
$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

作用下的运动。



2）运动学观点定义

以水平弹簧振子为例：



理想模型：$m_{弹}=0, f_{磨}=0$

质点在某位置受力为零

—— 平衡位置

（取为坐标原点）

离开平衡位置，质点受的力总是与质点相对平衡位置的位移成正比，并指向平衡点。

$$F=-kx$$

（利用能量关系）

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=c$$

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$$

根据牛顿定律：$F=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ 则：$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx$

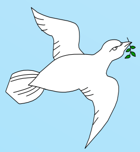
即：$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{k}{m}x$ 令：$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 得：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

谐振动的运动方程

2. 谐振动的数学表达式

（1）运动方程的解：



$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0}$$

求解运动方程

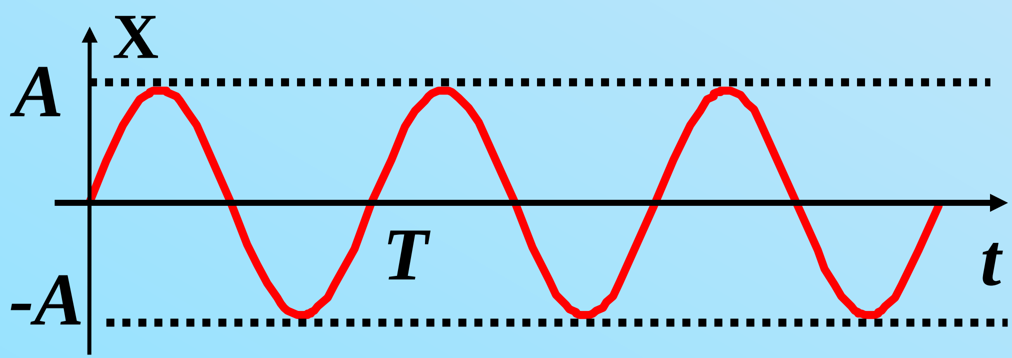
$$x=A\cos(\omega t+\varphi)\longrightarrow$$ 振动方程

物体的位置 x 按余弦函数随时间t而变化

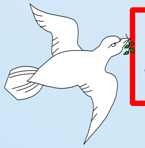
若已知A、ω、 ϕ就唯一确定了一个谐振动

振动曲线 ——

振动物体的位移x随时间 t变化的曲线



◆ 描述谐振动的物理量



$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

*振幅A：

振动物体离开平衡位置最大距离的绝对值

*角频率ω：

2π 秒内振动的次数（描述简谐振动快慢）

$\omega = 2\pi\nu$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

*初位相φ：

表征振子在 t=0 时刻的运动状态

描述谐振动的三个特征量

*描述运动状态： 位置、速度

（平衡位置 ---- 振动物体受合外力为零的位置）

*位移x：

振动物体任一时刻离开平衡位置的距离

*周期T：

物体完成一次全振动所需的时间

*频率ν：

物体在单位时间内完成全振动的次数

（2）振子的振动速度及加速度

$$\boxed{x=A\cos(\omega t+\phi)}$$

速度：$v=\dfrac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\phi)=\omega A\cos(\omega t+\phi+\dfrac{\pi}{2})$

加速度：$a=\dfrac{dv}{dt}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\phi)=\omega^2 A\cos(\omega t+\phi+\pi)$

可见：

振子的速度v、加速度a 均随t按余弦函数规律变化

（3）振动周期T —— 一次完整振动所需的时间

$$x=A\cos(\omega t+\phi)$$
$$=A\cos[\omega(t+T)+\phi]$$
$$=A\cos[\omega t+\omega T+\phi]$$

由余弦函数的周期得：

$\omega T=2\pi$　　$\therefore T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

固有周期

$\omega=2\pi\nu$

固有频率：　$\nu=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$

$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

角频率/圆频率

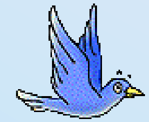
由系统本身性质(m, k)决定

振幅 A : 决定振动的范围

ω、T : 决定振动的快慢

ϕ ?

(4)位相 ——位置状态



$\boxed{x = A\cos(\omega t+\phi)}$

$v = -\omega A\sin(\omega t+\phi)$

$a = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi)$

$\omega t+\phi$ ——位相

振子振动时，任意时刻的运动状态取决于（$\omega t+\phi$）

如： $\omega t+\phi=0$ $\quad x = A \quad v = 0 \quad a = -w^2 A$

$\omega t+\phi=\dfrac{\pi}{2}$ $\quad x = 0 \quad v = -wA \quad a = 0$

当 $t=0$ 时： $\omega t+\phi=\phi$ 一般： $0\le\phi<2\pi$ 或 $-\pi\le\phi\le\pi$

初位相

综上所述： A、ω、ϕ 为系统的三个特征量。

◆ 特征量的求法

(1)　求ω　　　（注意举一反三）

写出振子所受的合外力　$F=-kx$

根据牛顿第二定律　$F=ma$

联立得　$ma=-kx \Rightarrow a=-\frac{k}{m}x$　$\boxed{\omega^2}$

与　$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x$　相比较，　$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$

得　$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$　谐振动周期和频率取决于振动系统本身的力学性质

固有频率、固有周期

(2) 求 A

由 $\begin{cases} \omega \\ \text{初始条件}t=0\text{时，}x_0\text{、}v_0\text{共同决定。} \end{cases}$

根据 $\begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi) \end{cases}$

当 $t=0$ 时 $\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi & \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{x_0}{A} \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi & \Rightarrow \sin\varphi = -\dfrac{v_0}{A\omega} \end{cases}$

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}$$

公式！

(3) 求 φ

根据 $\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$

当 $t = 0$ 时 $\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi & \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{x_0}{A} \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi & \Rightarrow \sin\varphi = -\dfrac{v_0}{A\omega} \end{cases}$

$$\boxed{tg\varphi = -\frac{v_0}{x_0\omega}}$$

公式！

小结：谐振动的特征、规律、判定与问题类型

1、特征

动力学特征

$$F_{合} = -kx$$

运动学特征 (微分方程特征)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

2、规律

位 移 $x = A\cos(\omega t + \phi)$ 振动方程

3、谐振动的判定

符合以上三个方程中任意一个的运动即为谐振动。

4. 谐振动问题类型：

（1）证明为谐振动，并求周期

（2）写出振动方程

5、由初始条件 (x_0, v_0) 定 A, ϕ

初始状态

注意：振动状态由(x, v) 描述。

若 $t=0$，位移x_0，速度 v_0 (初始条件)

则可得
$$\begin{cases} A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2} \\ tg\phi=-\dfrac{v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

然后根据v_0的正负决定ϕ的取舍！ $v_0=-A\omega sin\phi$

例：某物体沿X轴（向右为正方向）作谐振动，其振动周期 $T=\pi$ s，$t=0$时，$x_0=4$m，$v_0=6$m/s，且向右运动。求物体的振动方程。

解： $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ $v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\ \text{rad/s} \qquad A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5\ \text{m}$$

$$\varphi=tg^{-1}\frac{-v_0}{\omega x_0}=tg^{-1}\left(-\frac{6}{4\times 2}\right)=\begin{cases}\cancel{143^{\circ}} \rightarrow \text{舍去} \\ -36.8^{\circ}\end{cases}$$

$v_0=-A\omega\sin\varphi$ 而$v_0>0$，

所以，$\varphi=-36.8^{\circ}=-0.64$ rad

故，所求的振动方程为

$$x=5\cos(2t-0.64)\text{m}$$

$$\boxed{\begin{aligned}A&=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2}\\ tg\varphi&=\frac{-v_0}{\omega x_0}\end{aligned}}$$

由v_0定φ的取舍！

例： 弹簧振子 $\begin{cases} m = 5\times 10^{-3}\ \mathrm{kg} \\ k = 2\times 10^{-4}\ \mathrm{N\ m^{-1}} \end{cases}$

$t = 0$ 时 $x_0 = 0$ $\upsilon_0 = 0.4\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

完成振动方程 $x = \underline{2}\cos(\underline{0.2}t + \underline{\frac{3}{2}}\pi)$ (SI)

解： $\omega = \sqrt{k/m}$

$= 0.2\ (\mathrm{rad \cdot s^{-1}})$

$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}$

$= 2\ (\mathrm{m})$

$tg\varphi = -\frac{\upsilon_0}{\omega x_0} = -\infty$

$\upsilon_0 = -\omega A \sin\varphi$

而 $\upsilon_0 > 0$

故 $\varphi = \frac{3}{2}\pi$

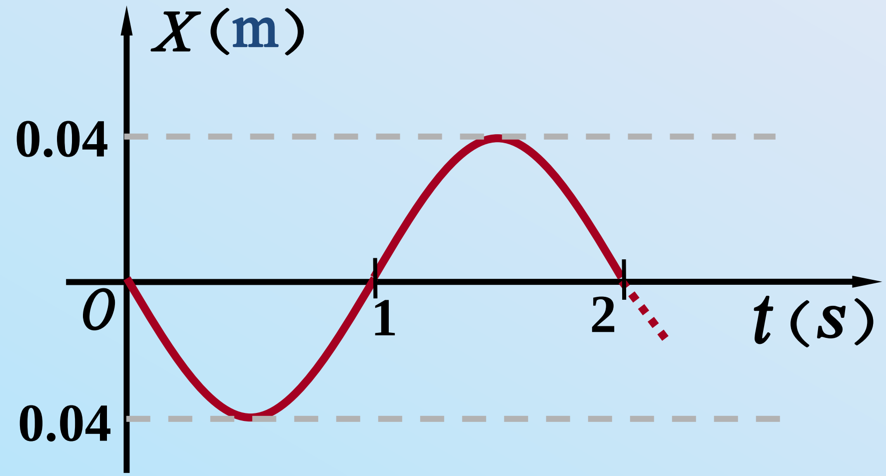
或 $\varphi = \frac{-1}{2}\pi$

例： 已知

谐振动的 $x\sim t$ 曲线

完成下列振动方程

$x = \underline{0.04}\cos(\underline{\pi}\, t + \underline{\frac{\pi}{2}})$ (SI)



解：由图知：

$A = 0.04$ (m)

$T = 2$ (s)

故：

$\omega = 2\pi / T = \pi$ (rad /s)

(A) $\varphi = \frac{\pi}{4}$

(B) $\varphi = \frac{\pi}{3}$

(C) $\varphi = \frac{\pi}{2}$

(D) $\varphi = \pi$

已知 $t = 0$ 时，

$x_0 = 0$, $\quad v_0 < 0$

且：$x_0 = A\cos\varphi$

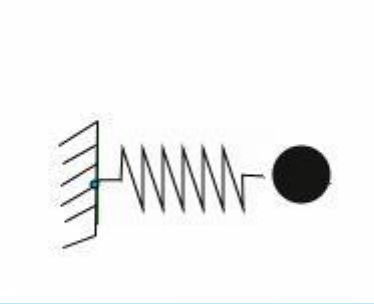
$v_0 = -\omega A \sin\varphi$

$\therefore \quad \varphi = \pi / 2$

3. 谐振动的种类

(1) 线谐振（例-弹簧振子）

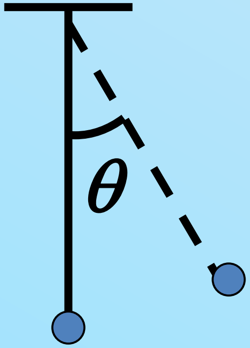
$$\begin{cases} \sum F = -kx \\ x = A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$



轨迹是直线

(2) 角谐振（例-单摆）

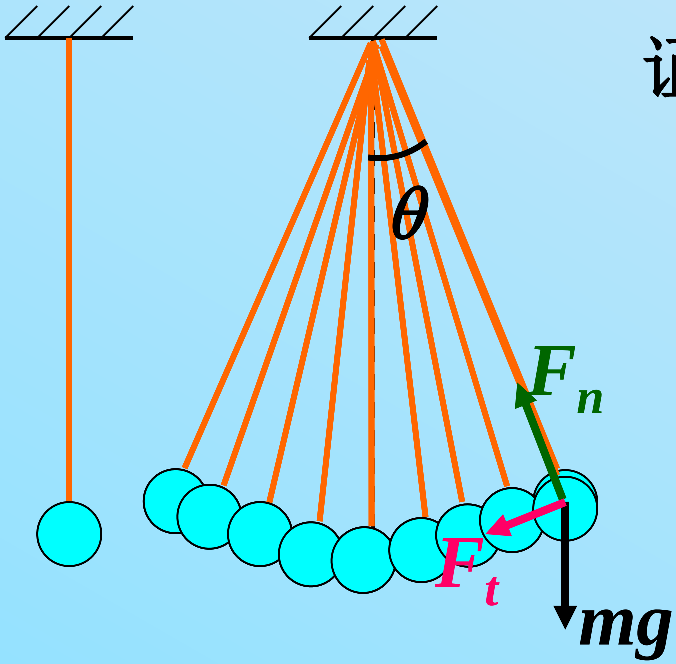
$$\begin{cases} \sum M = -k\theta \\ \theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$



轨迹是曲线

角谐振–单摆

证明当单摆的摆角θ很小时，其运动为谐振动，并求其周期T。（忽略空气摩檫）



证明：单摆在运动方向受力：

$$F_t = mg\sin\theta$$

切向力

$\because\ \theta << 1 \qquad \therefore\ \sin\theta \approx \theta$

$\therefore\ F_t = -mg\theta \qquad \theta \rightarrow$ 为质点的角位移

可见，F_t 起回复力的作用

又：$F_t = ma_t \qquad a_t = l\beta = l\cdot\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

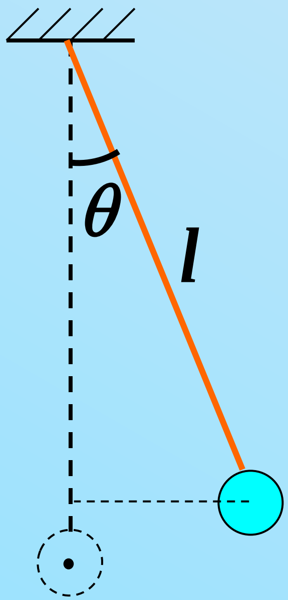
$$\therefore ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta$$ 令：$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

即得：$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad \rightarrow$ 谐振动

摆动周期：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

利用能量关系证明:当单摆的摆角θ很小时，其运动为谐振动，并求其周期T。（忽略空气摩擦）



$(\theta \ll 1)$

证：只有重力做功，故系统机械能守恒。

$$\frac{1}{2}mv^2+mgl(1-\cos\theta)=c$$

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+mgl\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0$$

$$v\frac{\mathrm{d}(l\omega)}{\mathrm{d}t}+g\sin\theta\cdot l\omega=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\theta=0 \quad (\sin\theta\approx\theta)$$

令:$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

即得：$\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0$ $\rightarrow$谐振动

摆动周期：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

注：θ较大时系统不是谐振动.

注意:

对角谐振动 $\theta=\theta_m\cos(\omega t+\varphi)$

圆频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

角振幅 $\theta_m=\sqrt{\theta_0^2+\left(\dfrac{\Omega_0}{\omega}\right)^2}$

初位相 $\varphi=tg^{-1}\left(-\dfrac{\Omega_0}{\theta_0\omega}\right)$

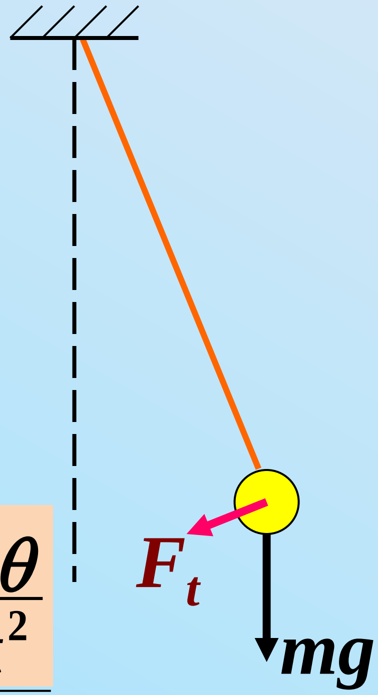
单摆的应用

通过测T，来测g

例： 一位月球探险家，安装了一个长为860mm的单摆，并测出在微小位移时摆的周期 T=4.6s，$g_{月}$=？

显然：由 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ 可得：$g_{月}=(\dfrac{2\pi}{T})^2 l$ =1.6 m/s^2

物理前沿问题



在单摆的讨论中，隐含了一个前提条件：

$$m_{惯}=m_{引}$$

$$F_t=ma_t \qquad F_t=m_{惯}a_t$$

$$F_{引}=m_{引}\frac{GM}{r^2} \qquad F_{重}=m_{引}g$$

$$F_t = mg\sin\theta$$

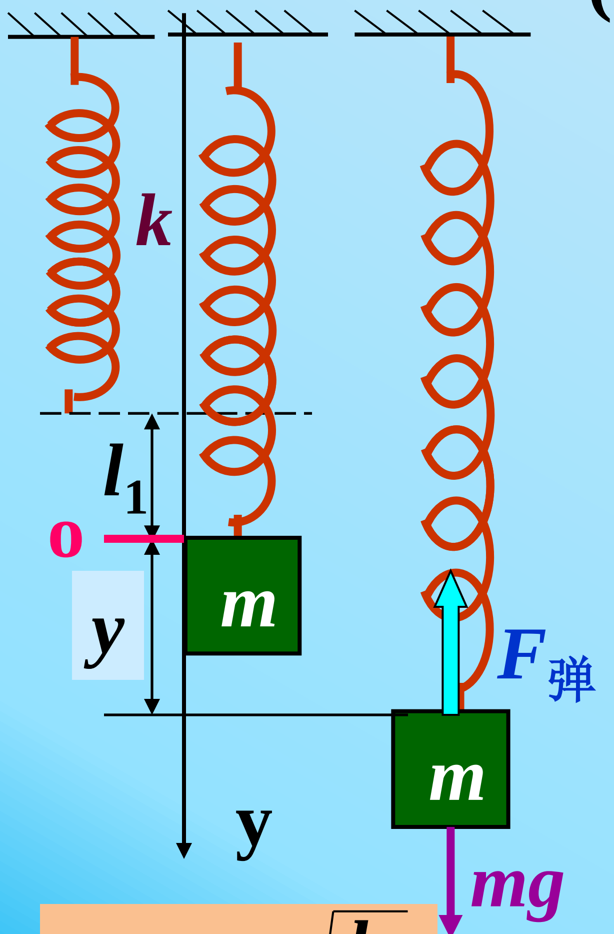
$$\therefore m_{惯}l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-m_{引}g\theta$$

$$F_t=ma_t \quad a_t=l\beta=l\cdot\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

若： $m_{惯}\neq m_{引}$ 则：$\omega^2=\dfrac{m_{引}g}{m_{惯}l}$ $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m_{惯}l}{m_{引}g}}$

$\boxed{m_{惯}\overset{?}{=}m_{引}}$ → 等效原理

例.将一倔强系数为k的轻质弹簧竖直悬吊。最初弹簧没有拉伸，然后把质量为m的物块加到另一端，达到平衡时，弹簧伸长了l_1，物块又被向下拉了l_2 后，静止释放。(1)证明系统作简谐振动。(2)求其振动方程.



$$y=l_2\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(1) 证明：取系统平衡点为坐标原点O

设时刻t，振子运动到y处

其受力：$F=F_{弹}+mg=-k(y+l_1)+mg$

而振子在O点处：$F=0$ 即：$kl_1=mg$

$\therefore\ F=-ky$ 又：$F=m\dfrac{d^2y}{dt^2}$

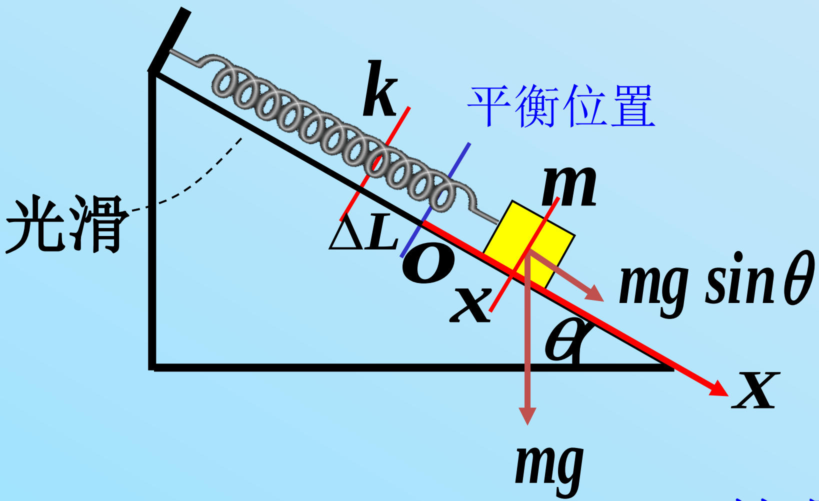
则：$\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{k}{m}y$ 令：$\omega^2=\dfrac{k}{m}$

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0$——系统作简谐振动

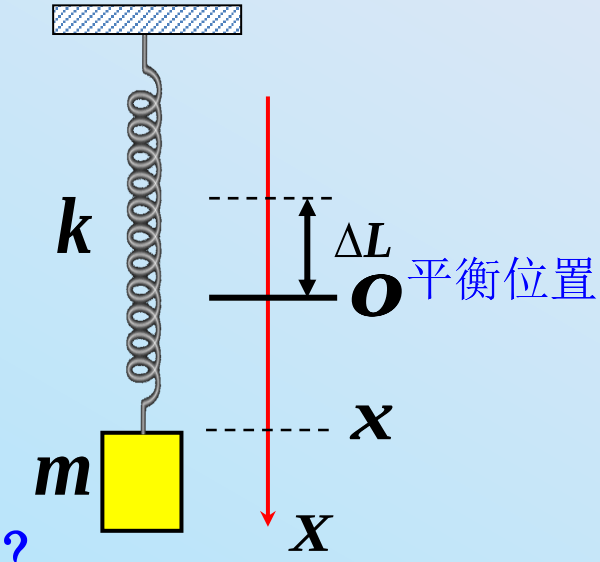
(2) $y=A\cos(\omega t+\varphi)$ $v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

$$t=0\begin{cases} y=l_2 & A\cos\varphi=l_2>0 \\ v=0 & \sin\varphi=0 \end{cases} \qquad \therefore\begin{cases} \varphi=0 \\ A=l_2 \end{cases}$$

例： 证明下列两种情况下，物体作谐振动。



(*a*)



(*b*)

这是两个问题吗？

利用能量关系求解？

解： (*a*) $mg\sin\theta = k\Delta L$　　(*b*) $mg = k\Delta L$

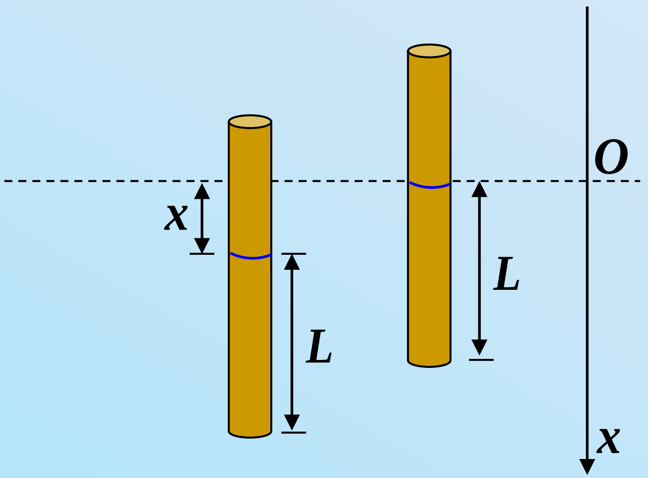
$$f = mg\sin\theta - k(\Delta L + x) = -kx$$

$$f = mg - k(\Delta L + x) = -kx$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x}$$

例： 一质量为m的柱体浮在水面上，其横截面积为S。证明其在水中的铅直自由运动是谐振动，并求其振动周期。

解： $mg = \rho g(SL)$



$$f = -\rho gS(x+L)+mg$$

$$= -\rho gSx$$

运动方程：

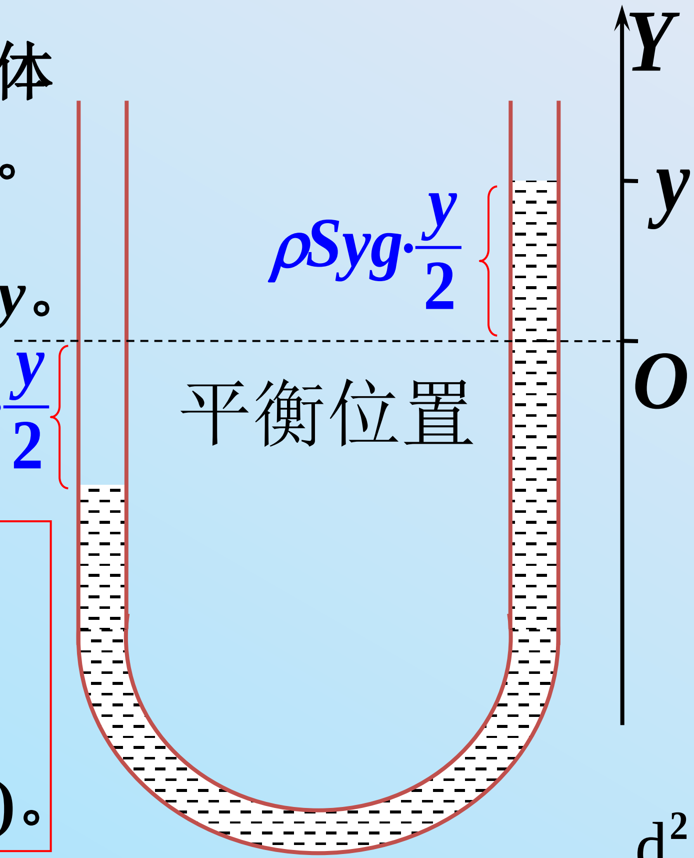
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2t} = -\rho gSx$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2t}+\frac{\rho gS}{m}x = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2t}+\omega^2x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho gS}{m}}$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}$$

例： 光滑U形管的截面面积为 S，管中流体的质量为 m、密度为ρ，求液体振荡周期。



解： 设t时刻液面偏离平衡位置的高度为 y。

机械能守恒: $\frac{1}{2}mv^2+(E_P+\Delta E_P)=C$ $-\rho Syg\cdot\frac{y}{2}$

$$\frac{1}{2}mv^2+\rho Syg\cdot y=C-E_P$$

$$\frac{1}{2}mv^2+\rho Sgy^2=C-E_P$$

平衡时液体的总势能为一常数(设为E_P)。

两边求导得: $m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\rho Sgy=0$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-2\rho Syg$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\rho Sg}{m}y=0$$

$F=-2yS\cdot\rho\cdot g$ $\quad F=m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$

$$-2yS\cdot\rho\cdot g=m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\rho Sg}{m}y=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2y=0 \qquad \boxed{\omega=\sqrt{\frac{2\rho Sg}{m}}}$$

故，液柱作谐振动。 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho Sg}}$