第8章
一阶电路的暂态分析

8.2 零输入响应

8.3 直流电源激励下的响应

8.3.1 直流电源激励的RC电路

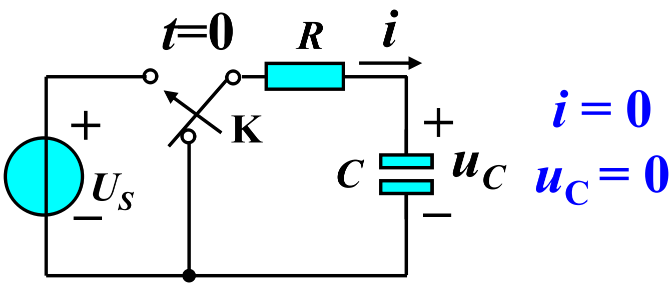
8.3.2 直流电源激励的RL电路

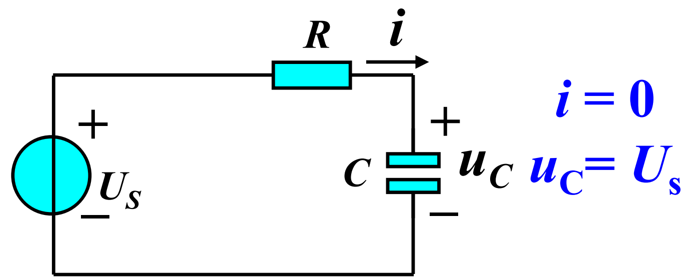
8.3.3 RC电路的方波响应

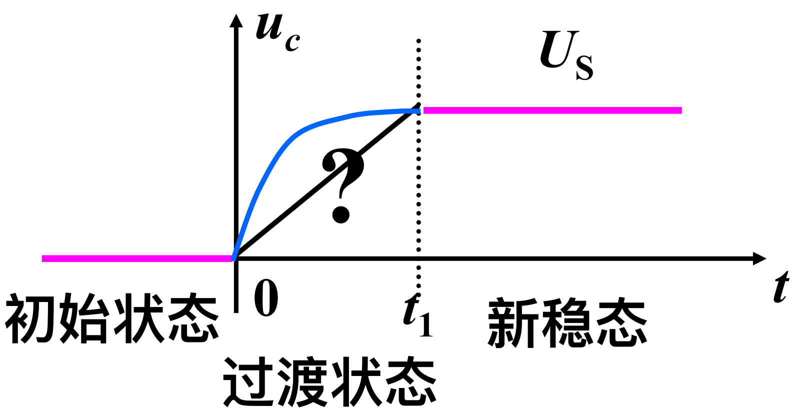
8.4 正弦电源激励下的RC电路

8.6 线性非时变特性

Motivation







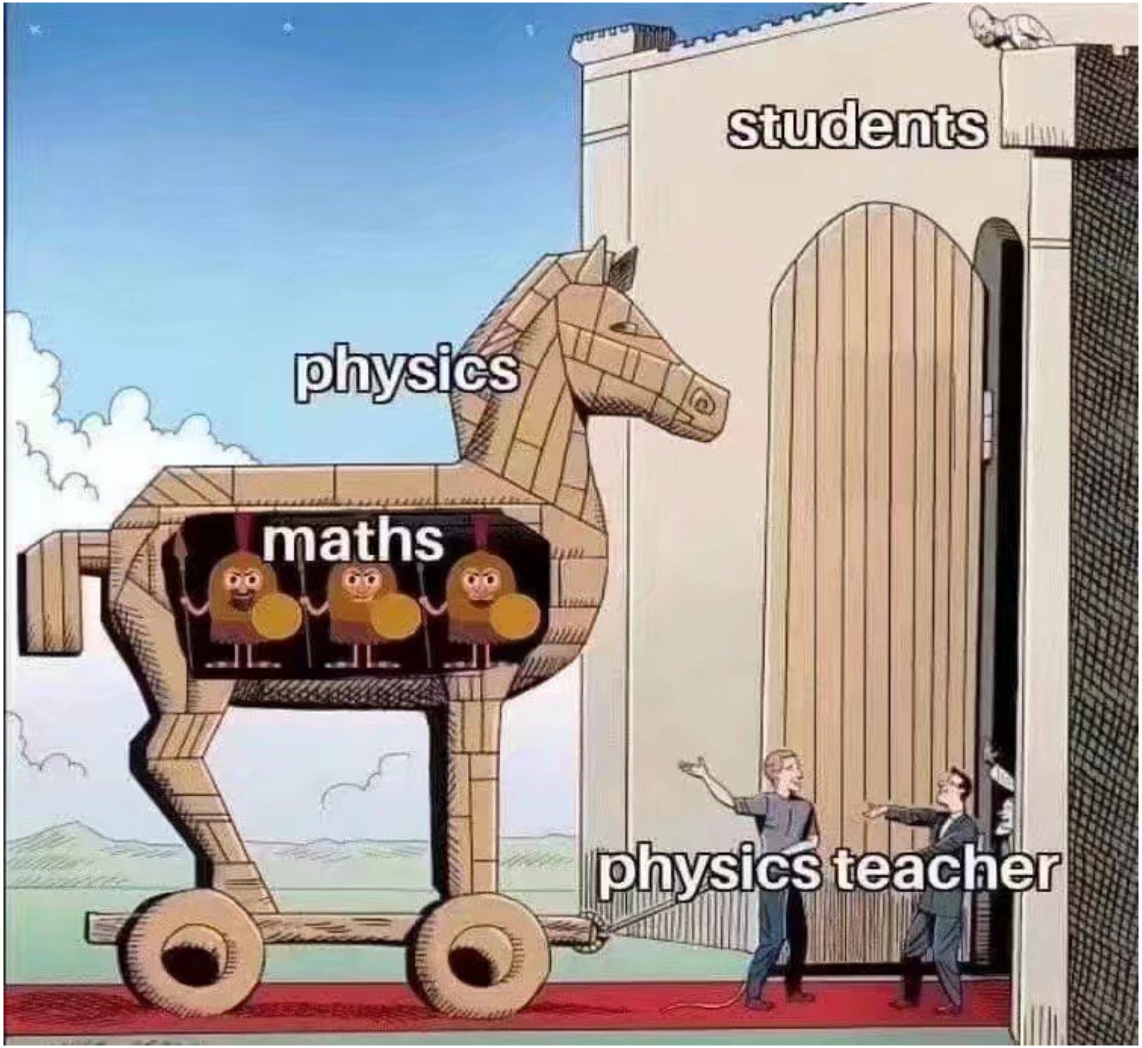
动态电路：含有动态元件的电路，当电路状态发生改变时需要**经历一个变化过程**才能达到新的稳态。

上述变化过程习惯上称为电路的**过渡过程**。数学化表达这一过渡过程是我们的学习目的。

重点 → 列微分方程，进行求解

难点 → 列微分方程，进行求解

考点 → 列微分方程，进行求解


students
physics
maths
physics teacher

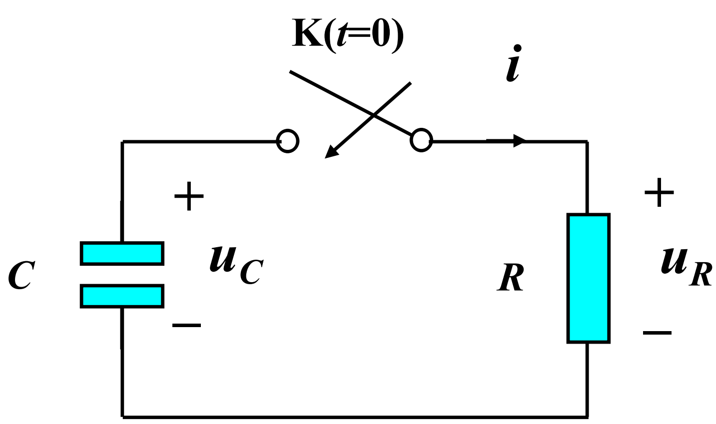
三个重要概念

零输入响应 → 换路后外加激励为零，仅由动态元件初始储能产生的电压和电流。

零状态响应 → 动态元件初始能量为零，由$t>0$电路中外加激励作用所产生的响应。

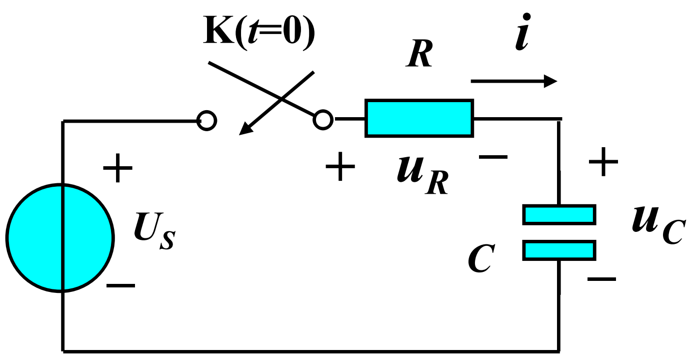
全响应 → 电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。

零输入响应 → **换路后外加激励为零，仅由动态元件初始储能产生的电压和电流。**



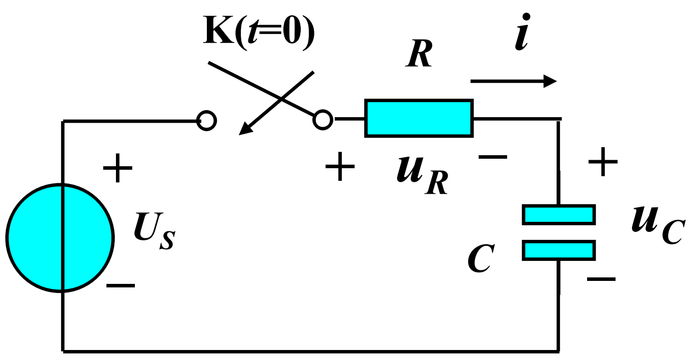
已知 $u_C(0_-)=U_0$，求$u_C(t)$

零状态响应 → **动态元件初始能量为零，由$t>0$电路中外加激励作用所产生的响应。**



已知 $u_C(0_-)=0V$，求$u_C(t)$

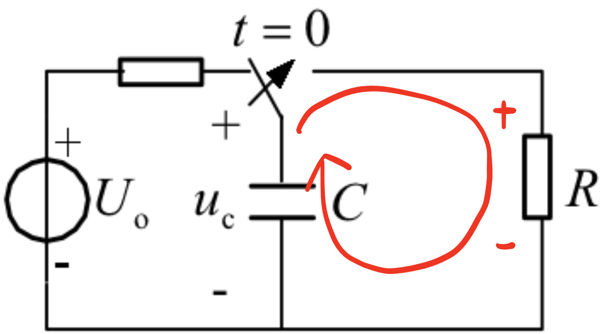
全响应 → **电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。**



已知 $u_C(0_-)= U_0$，求$u_C(t)$

8.2 零输入响应 Zero-input response

1. RC 电路



$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0 & t > 0 \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0 \end{cases}$$

通解： $u_C = k\mathrm{e}^{st}$

特征方程： $RCs+1=0$

特征根： $s = -\dfrac{1}{RC}$

则 $u_C = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$

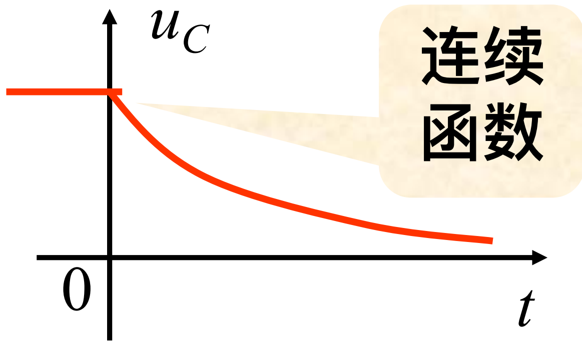
代入初始值： $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$ 可得： $k = U_0$

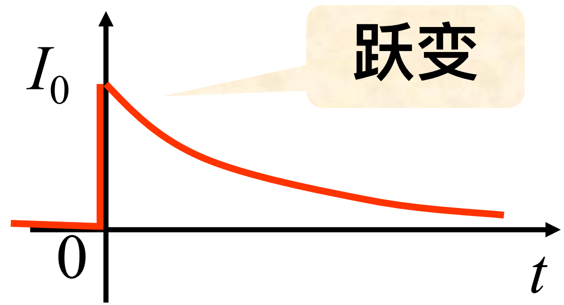
最终可得： $\boxed{u_c = U_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}}$ $t > 0$

$$\boxed{i = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$$

表明

①电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数；





②响应与初始状态成衰减关系，其衰减快慢与RC有关；

令 $\tau = RC$, 称τ为一阶电路的时间常数

$$[\tau]=[RC]=[欧][法]=[欧]\left[\frac{库}{伏}\right]=[欧]\left[\frac{安秒}{伏}\right]=[秒]$$

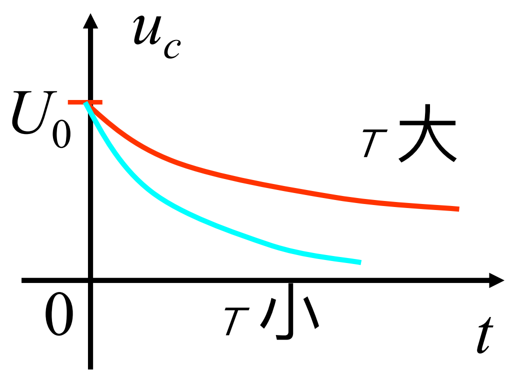
$$\boxed{\tau = RC}$$

$$p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$$

时间常数τ的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ大→过渡过程时间长

τ小→过渡过程时间短



t	0	τ	2τ	3τ	5τ
$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	U_0	$U_0 e^{-1}$	$U_0 e^{-2}$	$U_0 e^{-3}$	$U_0 e^{-5}$
	U_0	$0.368U_0$	$0.135U_0$	$0.05U_0$	$0.007U_0$

注意

a. τ :电容电压衰减到原来电压36.8%所需的时间。

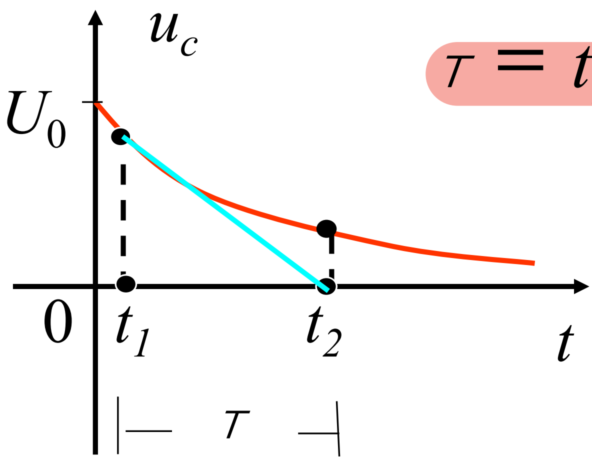
工程上认为, 经过 3τ—5τ, 过渡过程结束。

b. 时间常数τ的几何意义：

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

t_1时刻曲线的斜率等于

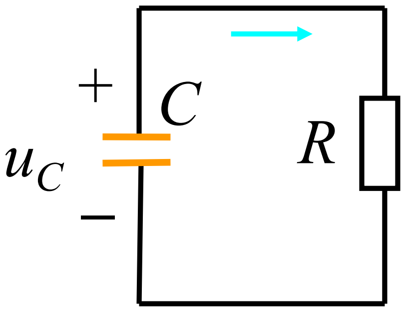
$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t_1} = -\frac{U_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_{t_1} = -\frac{1}{\tau} u_C(t_1) = \frac{u_C(t_1) - 0}{t_1 - t_2}$$



$\tau = t_2 - t_1$ → 次切距的长度

$$u_C(t_2) = 0.368 u_C(t_1)$$

③能量关系 → 电容不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕.



设 $u_C(0_+)=U_0$

电容放出能量： → $\frac{1}{2}CU_0^2$

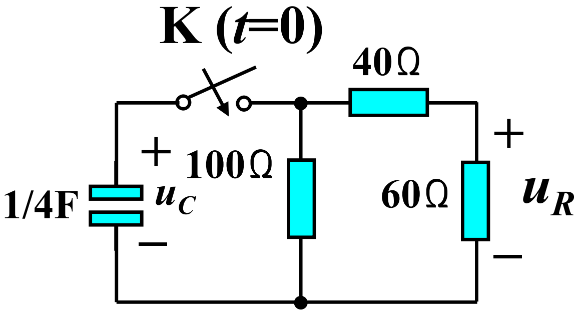
电阻吸收（消耗）能量： →

$$W_R=\int_0^\infty i^2R\mathrm{d}t \quad =\int_0^\infty\left(\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2R\mathrm{d}t$$

$$=\frac{U_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}\mathrm{d}t \quad =\frac{U_0^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right)\Big|_0^\infty \quad =\frac{1}{2}CU_0{}^2$$

能量守恒！

例：求零输入响应u_R，已知$u_C(0_-)=10V$。



解：零输入响应具有如下形式：

$$u_c(t)=u_c(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t\geq 0)$$

$$u_R(t)=u_R(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t\geq 0)$$

(1).求t＝0_+时的初始值：$u_c(0_+)=u_c(0\_)=10(V)$

(2).求时间常数τ：$\tau=RC=50\times(1/4)=12.5(S)$

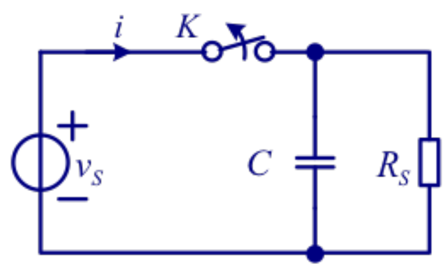
$$\Rightarrow u_c(t)=u_c(0_+)e^{-\frac{1}{\tau}t}=10e^{-\frac{1}{12.5}t} \quad (t\geq 0)$$

$$u_R(t)=\frac{60}{40+60}u_c(t)=6e^{-\frac{1}{12.5}t} \quad (t\geq 0)$$

u_R在t=0_+时的初始值 $u_R(0_+)=6(V)$

例　　一组 40μF的电容器，从高压电网上切除，切除瞬间，电容器两端的电压为 3.5kV。切除后，电容经本身漏电电阻Rs放电。今测得Rs＝100MΩ，试求电容器电压下降到1kV所需的时间。

解　电容从高压电网切除的等效电路如右图，电容器经漏电电阻器Rs放电，其电压逐步降低



$$v_C = 3.5\times10^3 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中 $\tau = R_sC = 100\times10^6\times40\times10^{-6} = 4000\text{s}$

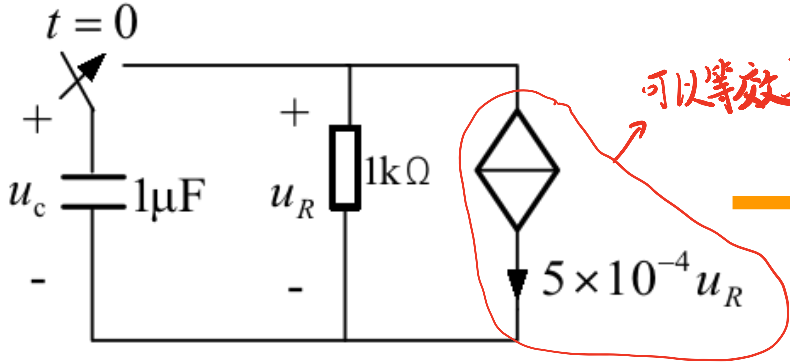
如果在$t=t_1$时v_C下降到1000V，则有 $3.5\times10^3 e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 1000\text{V}$

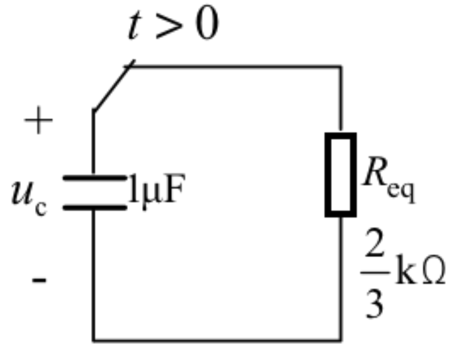
解得　　$t_1 = \ln3.5\times4000 = 1.25\times4000 = 5000\text{s}$

可见，电容虽与电源断开已逾1小时，但还保持高达1000V电压。这样高的电压足以造成人身安全事故。

8.2 零输入响应　Zero-input response

Example: Assume $u_c(0-)=10\text{V}$. Find u_c for $t>0$.

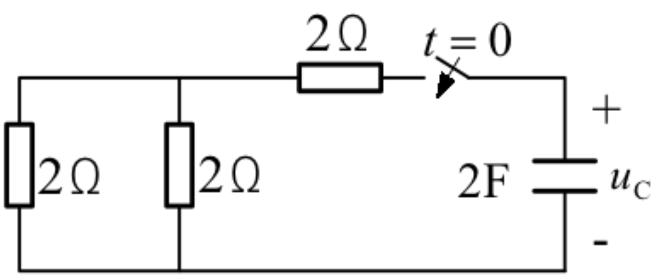


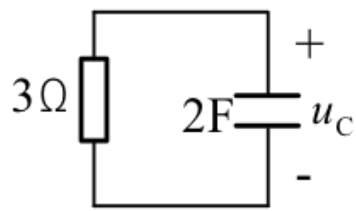


$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=10\text{V}$$

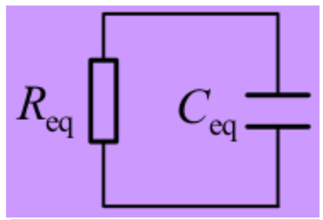
$$\tau=1\times\frac{2}{3}\times10^{-3}\text{s}$$

$$u_C(t)=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=10\mathrm{e}^{-1500t}\text{V}$$





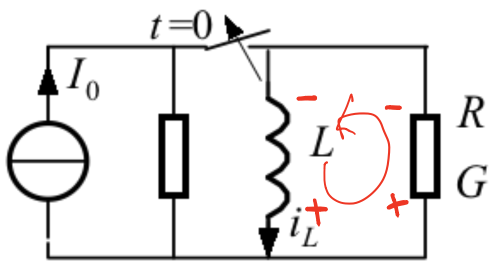
$$\tau=3\times2=6\text{s}$$



$$\tau=R_{eq}C_{eq}$$

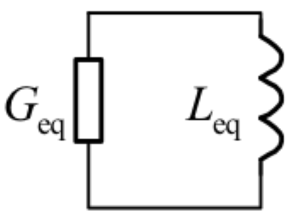
8.2 零输入响应　Zero-input response

2. RL 电路



$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=0 & (t>0) \\ i_L(0_+)=i_L(0_-)=I_0 \end{cases}$$

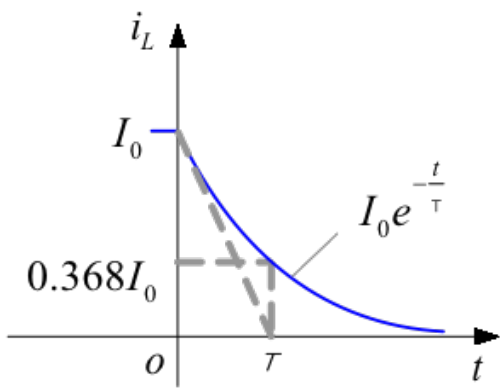
$$s=-\frac{R}{L}=-\frac{1}{GL} \rightarrow \tau = GL$$

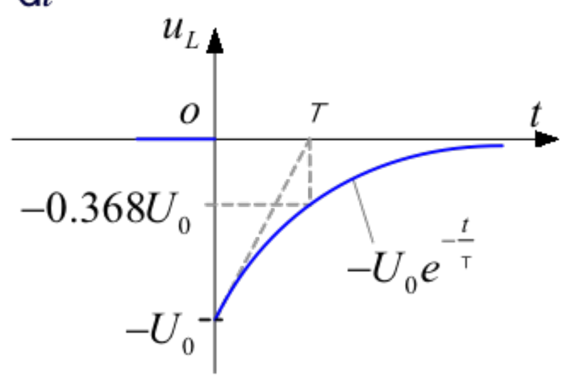


$$\tau = G_{eq}L_{eq}$$

$$i_L = I_0 e^{-\frac{t}{GL}} \qquad (t>0)$$

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-RI_0e^{-\frac{t}{L/R}}$$





②响应与初始状态成衰减关系，其衰减快慢与L/R有关;

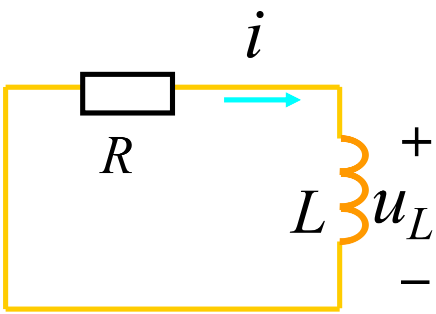
$\tau = L/R$ 为一阶RL电路时间常数

$$[\tau]=[\frac{L}{R}]=[\frac{亨}{欧}]=[\frac{韦}{安\cdot欧}]=[\frac{伏\cdot秒}{安\cdot欧}]=[秒]$$

时间常数τ的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ大→过渡过程时间长　　　τ小→过渡过程时间短

③能量关系 → 电感不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕。



设 $i_L(0_+)=I_0$

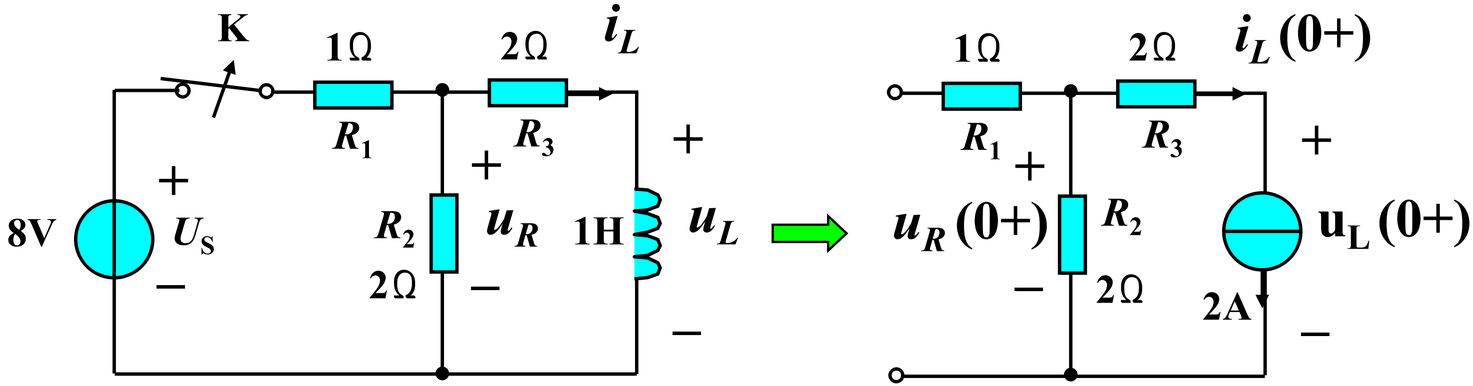
电感放出能量： → $\frac{1}{2}LI_0^2$

电阻吸收（消耗）能量： →

$$W_R=\int_0^{\infty} i^2 R\mathrm{d}t \quad =\int_0^{\infty}(I_0 e^{-\frac{t}{L/R}})^2 R\mathrm{d}t$$

$$=I_0^2 R\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{L/R}}\mathrm{d}t \quad =I_0^2 R(-\frac{L/R}{2}e^{-\frac{2t}{RC}})\Big|_0^{\infty} \quad =\frac{1}{2}LI_0^2$$

例：电路如图所示，$t<0$时电路处于稳定，$t=0$时开关K打开，求$t>0$ 时的电流i_L和电压u_R、u_L。



解： 零输入响应具有如下形式：

$$y(t)=y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

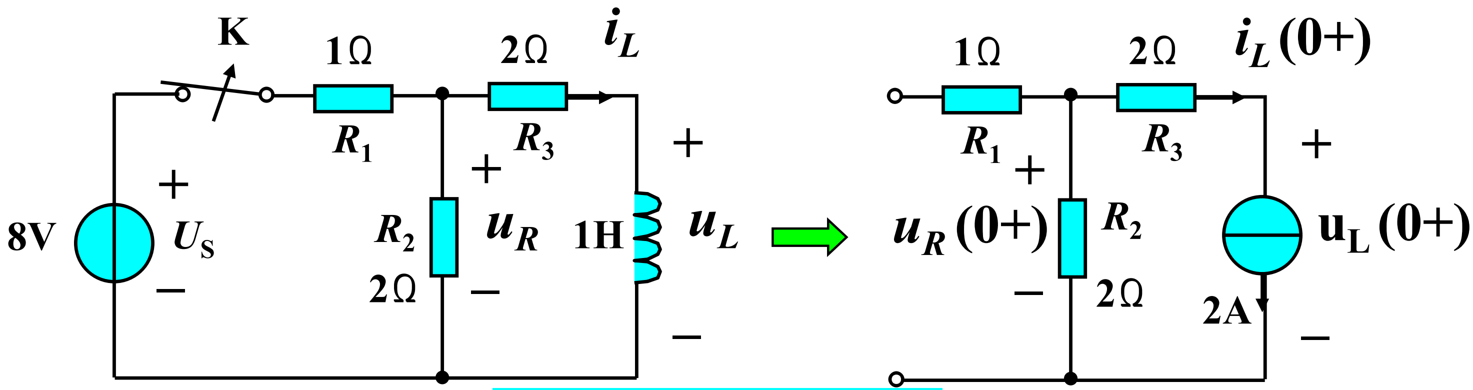
$t<0$时，电感L看作短路 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=2\ \text{A}$

$$u_R(0_+)=-R_2 i_L(0_+)=-4(\text{V})$$

$$u_L(0_+)=-(R_2+R_3)i_L(0_+)=-8(\text{V})$$

时间常数： $\tau=L/(R_2+R_3)=1/4(\text{S})$

例：电路如图所示，t<0时电路处于稳定，t=0时开关K打开，求t>0 时的电流i_L和电压u_R、u_L。



解：$i_L(0_+) = 2\ \mathrm{A}$　　$u_R(0_+) = -4(\mathrm{V})$

$u_L(0_+) = -8(\mathrm{V})$　　$\tau = 1/4(\mathrm{S})$

$$y(t) = y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 2e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0)$$

$$u_R = u_R(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = -4e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0)$$

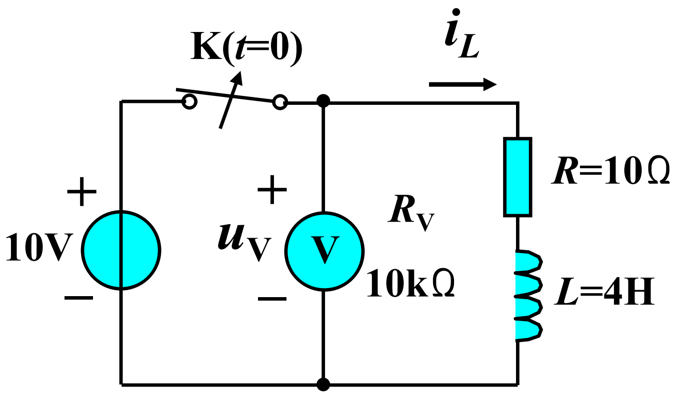
$$u_L = u_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = -8e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0)$$

或：

$$u_R = -R_2 i_L = -4e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0)$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = -8e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0)$$

例：t=0时，打开开关K，求u_V 。 (电压表量程：50V)



解：

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{ A}$$

$$i_L = e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{L}{R + R_V} = \frac{4}{10000} = 4 \times 10^{-4}\, s$$

$$u_V = -R_V i_L = -10000 e^{-2500t} \qquad t \geq 0$$

$u_V(0_+)$= - 10000V 造成 V 损坏。

现象： 电压表坏了

小结

①一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应, 都是由初始值衰减为零的指数衰减函数;

$$y(t) = y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

RC电路　　$u_C(0_+) = u_C(0_-)$

RL电路　　$i_L(0_+) = i_L(0_-)$

小结

②衰减快慢取决于时间常数τ;

RC电路 $\tau = RC$

$\tau = L/R$ RL电路

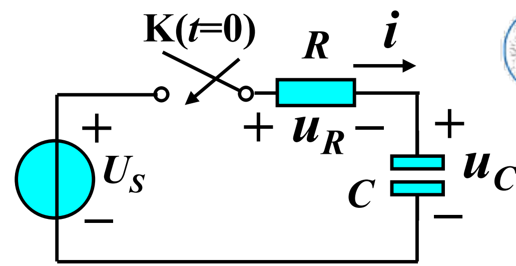
R为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻

③同一电路中所有响应具有相同的时间常数;

④一阶电路的零输入响应和初始值成正比,
称为零输入线性。

8.3直流电源激励下的响应

8.3.1直流电源激励下的RC电路



$u_C(0_-)= U_0$

三要素法

First - order circuits :
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{\tau}y(t)=f(t) & t>0 \\ y(0_+) \end{cases}$$

其解的一般形式为： $y(t)=ke^{-\frac{t}{\tau}}+y(\infty)$

$y(\infty)$ **一个显著的特解，对于直流电路特别容易求出**

令 $t=0_+$ $\quad y(0_+)=k+y(\infty) \longrightarrow k=y(0_+)-y(\infty) \longrightarrow$

$$y(t)=[y(0_+)-y(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}+y(\infty)$$

注意形象记忆其物理意义！

8.3直流电源激励下的响应

直流电源激励下的一阶电路通解：

$$y(t)=[y(0_+)-y(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}t}+y(\infty)$$

分析一阶电路问题转为求解电路的三个要素的问题。

$$\text{三要素}\begin{cases} y(\infty) & \text{稳态解} \\ y(0_+) & \text{初始值} \\ \tau & \text{时间常数} \end{cases}$$

$y(\infty)$ 稳态解 → **用$t\rightarrow\infty$的稳态电路求解**

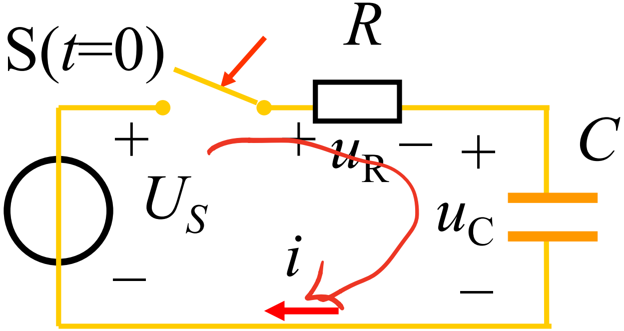
$y(0_+)$ 初始值 → **用0_+等效电路求解**

8.3.1 一阶电路的零状态响应

零状态响应 → 动态元件初始能量为零，由$t>0$电路中外加激励作用所产生的响应。

1.RC电路的零状态响应

非齐次线性常微分方程



$u_C(0_-)=0$

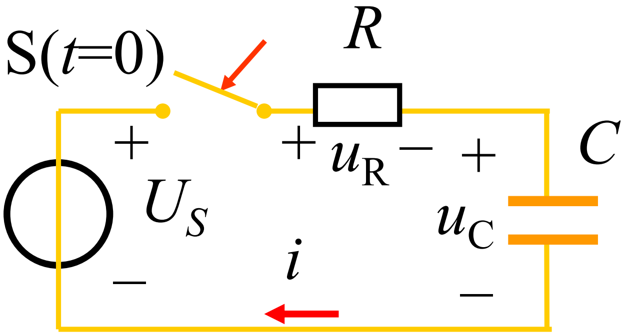
方程：

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

解答形式为：

$$u_c(t)=[u_c(0_+)-u_c(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}t}+u_c(\infty)$$

8.3.1 一阶电路的零状态响应



$u_C(0_-)=0$

$$u_c(t)=[u_c(0_+)-u_c(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}+u_c(\infty)$$

三要素：

$$u_c(0_+)=u_c(0_-)=0$$

$$u_c(\infty)=U_s$$

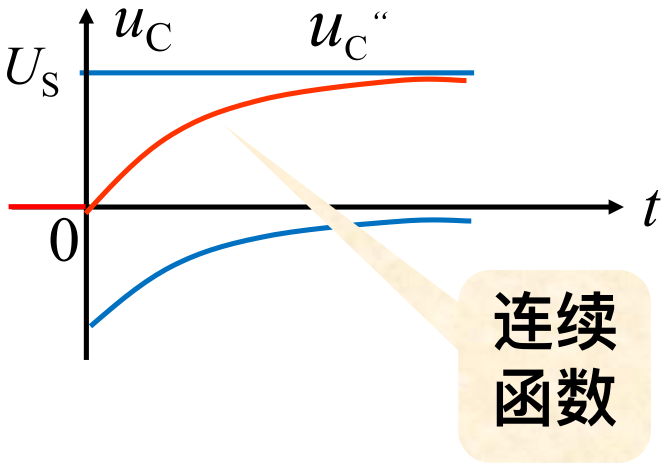
$$\tau=RC$$

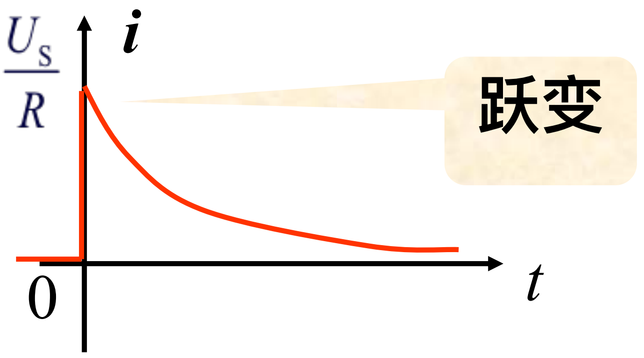
$$u_C=U_S-U_Se^{-\frac{t}{RC}}=U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})\quad(t\geq 0)$$

从以上式子可以得出： $i=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\dfrac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

表明

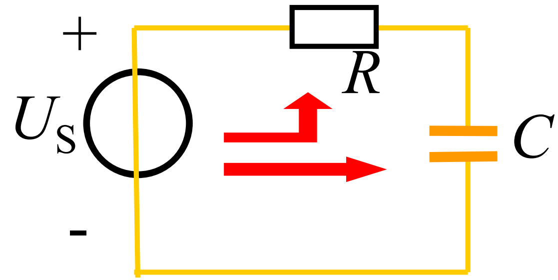
①电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数：





②响应变化的快慢，由时间常数$\tau=RC$决定；τ大，充电慢，τ小充电就快；

③响应与外加激励成线性关系；



④能量关系

电源提供能量：$\int_0^\infty U_S i\mathrm{d}t = U_S[q(\infty)-q(0)] = CU_S^2$

电阻消耗能量：$\int_0^\infty i^2 R\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty (\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}})^2 R\,\mathrm{d}t$

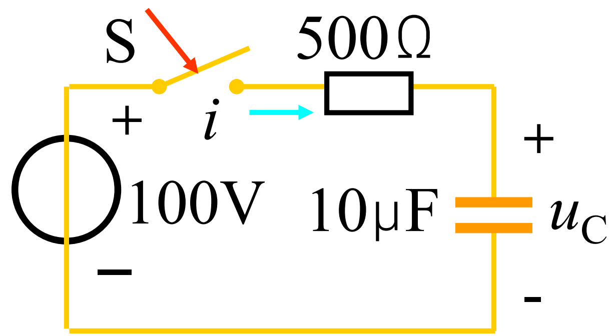
$= \frac{1}{2}CU_S^2$

电容储存能量：$\frac{1}{2}CU_S^2$

电源提供的能量一半消耗在电阻上，一半转换成电场能量储存在电容中。

例 t=0时,开关S闭合，已知 $u_C(0_-)=0$，求(1)电容电压和电流,(2) $u_C=80\text{V}$时的充电时间t 。

解 (1)这是一个RC电路零状态响应问题，有：



$$\tau = RC = 500\times10^{-5} = 5\times10^{-3}\text{s}$$

$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}}) = 100(1-e^{-200t})\text{V} \quad (t\geq 0)$$

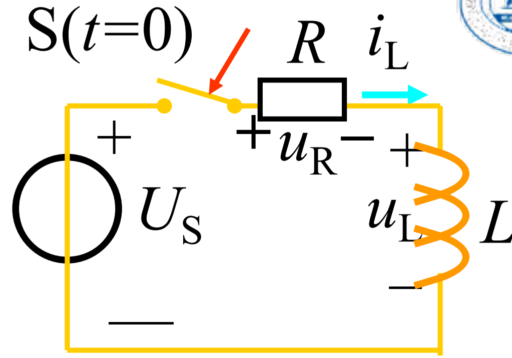
$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = 0.2e^{-200t}\text{A}$$

(2)设经过t_1秒，$u_C=80\text{V}$

$$80 = 100(1-e^{-200t_1}) \rightarrow t_1 = 8.045\text{ms}$$

2. RL电路的零状态响应

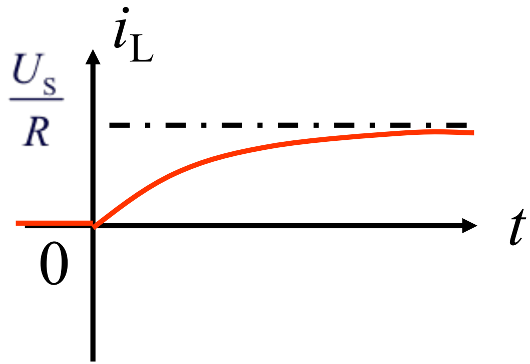
已知$i_L(0_-)=0$，电路方程为：



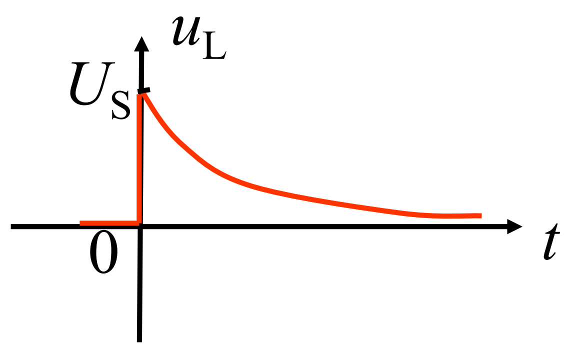
$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=U_S$$

$$=\frac{U_S}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L=\frac{U_S}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$ 三要素公式



$$u_L=L\frac{di_L}{dt}=U_Se^{-\frac{R}{L}t}$$

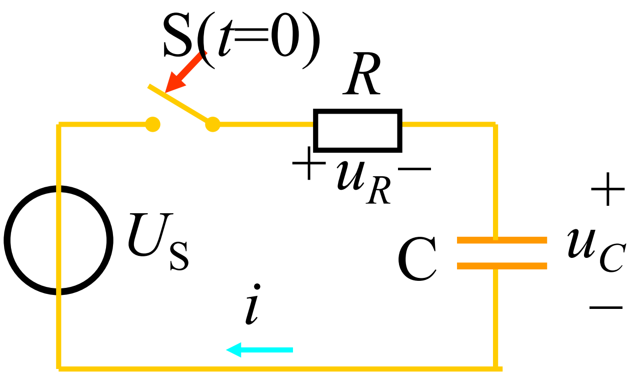


8.3 一阶电路的全响应

$\boxed{\text{全响应}}$ → 电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。

1. 全响应

以RC电路为例，电路微分方程：



$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

三要素：

$$u_c(0_+)=u_c(0_-)=U_0$$

$$u_c(\infty)=U_s$$

$$\tau=RC$$

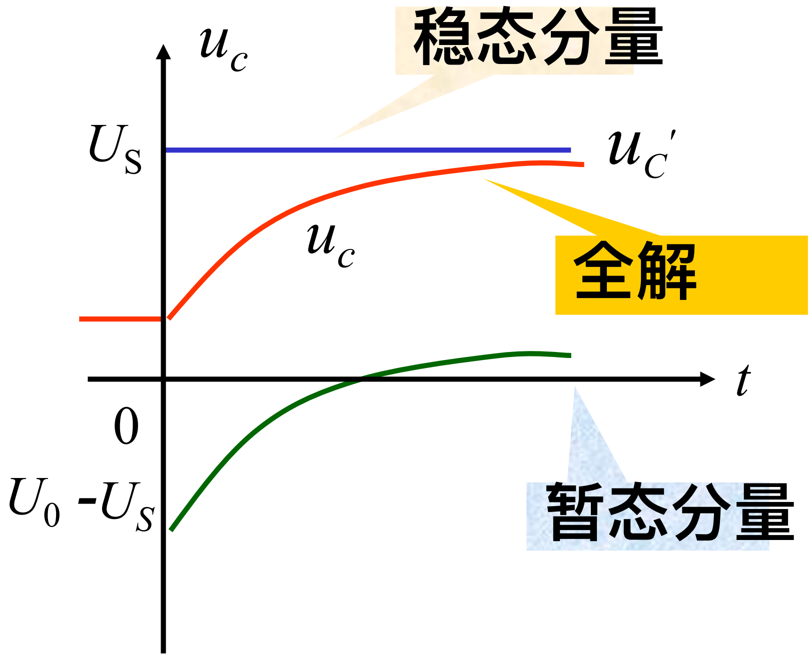
$$u_C=U_S+Ae^{\frac{-t}{\tau}}=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{\tau}}\qquad t\geq 0$$

强制分量(稳态分量)　　　自由分量(暂态分量)

2. 全响应的两种分解方式

①着眼于电路的两种工作状态 → 物理概念清晰

全响应 = 强制分量(稳态分量)+自由分量(暂态分量)

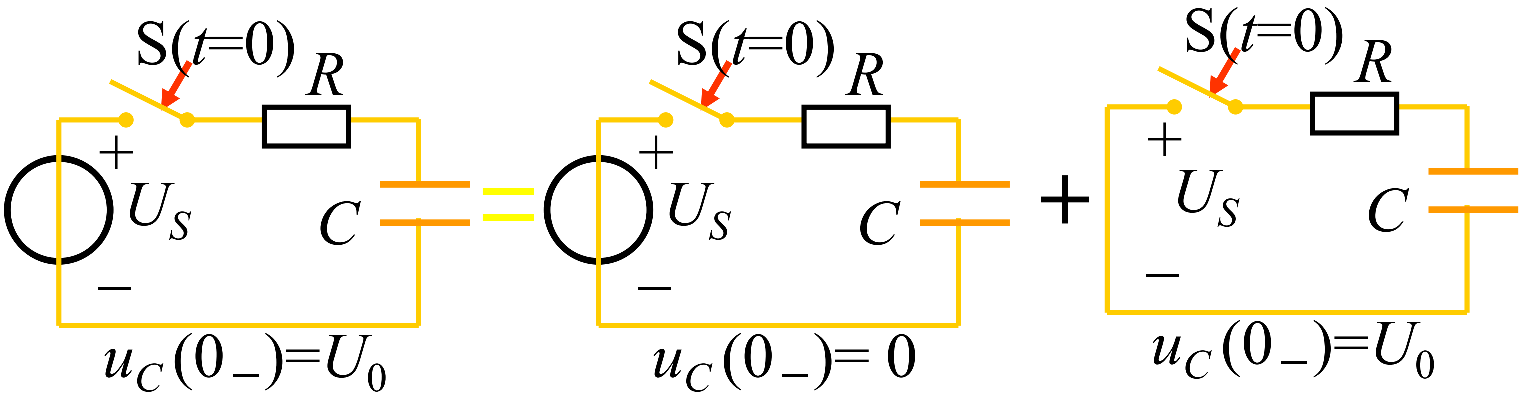


②着眼于因果关系 → 便于叠加计算

$$u_C = U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

零状态响应　　零输入响应

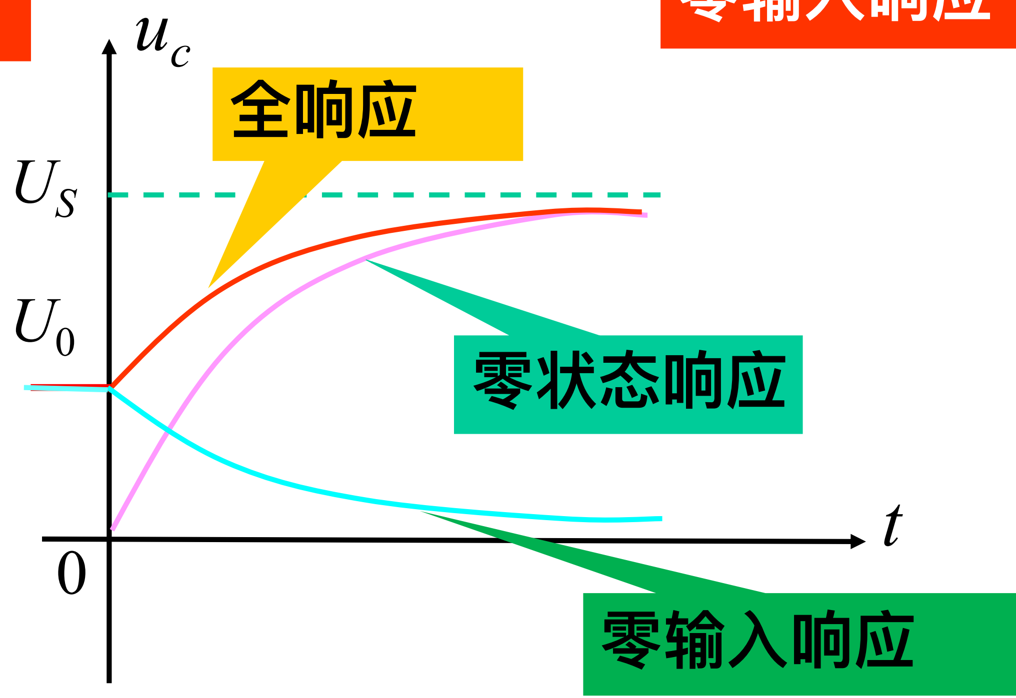
全响应 ＝ 零状态响应 ＋ 零输入响应



$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

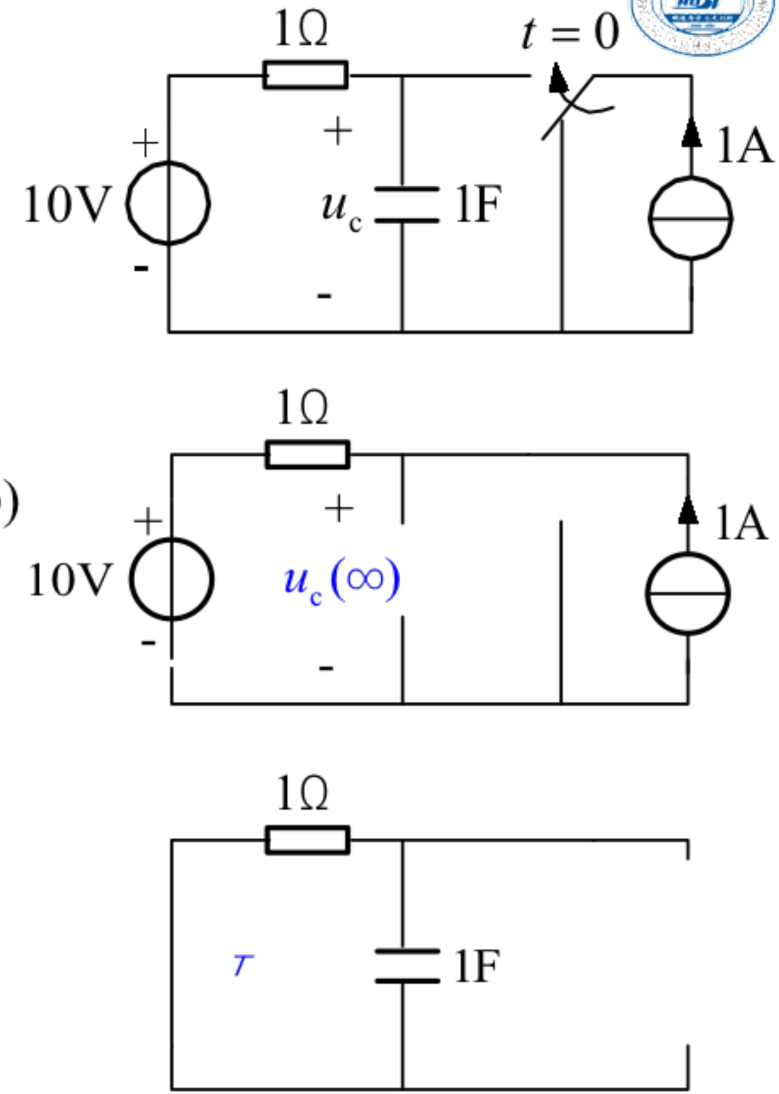
零状态响应

零输入响应



Practice

Find u_c for $t>0$.



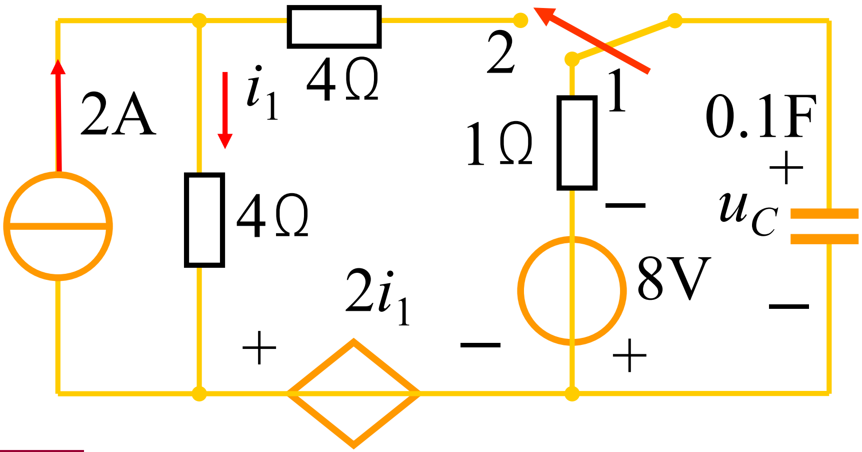
三要素法:

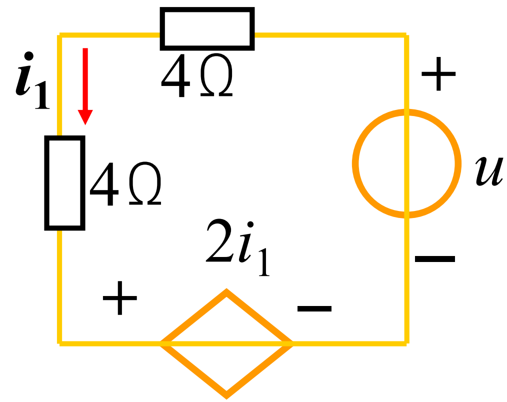
$u_C(0_+)=10\text{V}$　　$u_C(\infty)=11\text{V}$

$\tau=1\times1=1\text{s}$

$$u_c(t)=[u_c(0_+)-u_c(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}+u_c(\infty)$$

例 已知：t=0时开关由1→2，求换路后的$u_C(t)$





解 三要素为：

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = -8\text{V}$$

$$u_C(\infty) = 4i_1 + 2i_1 = 6i_1 = 12\text{V}$$

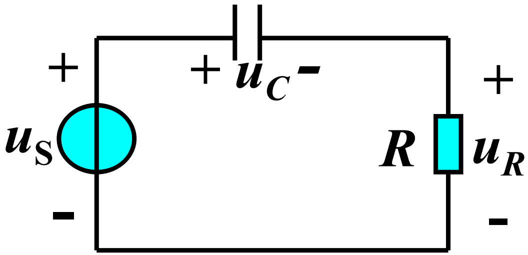
戴维南等效电路

$$u = 10i_1 \rightarrow R_{eq} = u / i_1 = 10\Omega \longrightarrow \tau = R_{eq}C = 10 \times 0.1 = 1\text{s}$$

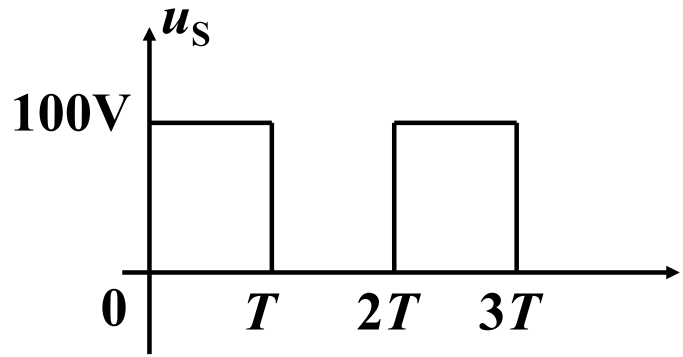
$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-t/\tau}$$

$$u_C(t) = 12 + [-8 - 12]e^{-t} = 12 - 20e^{-t}\text{V}$$

8.3.3 RC电路的方波响应



$u_C(0^-)=0$



(1) $T >> \tau$

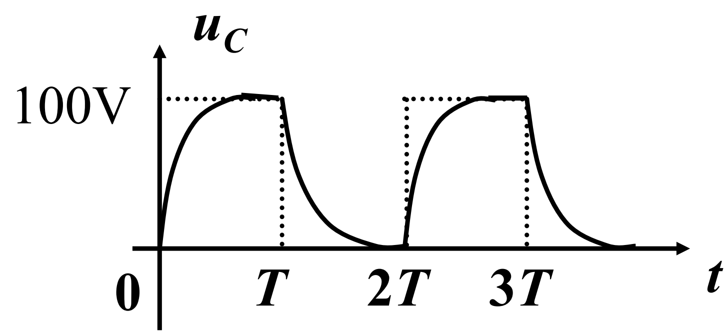
$0 < t < T$

$u_C(0_+)=0$

$u_C(\infty)=100\text{V}$

$\tau = RC$

$$u_C = 100(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\ \text{V}$$

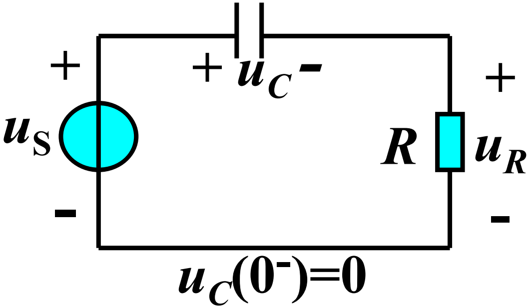


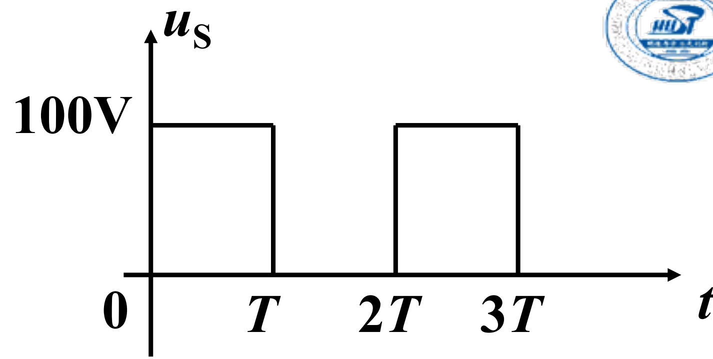
$T < t < 2T$

$u_C(T_+)=100\text{V}$ $u_C(\infty)=0$ $\tau = RC$

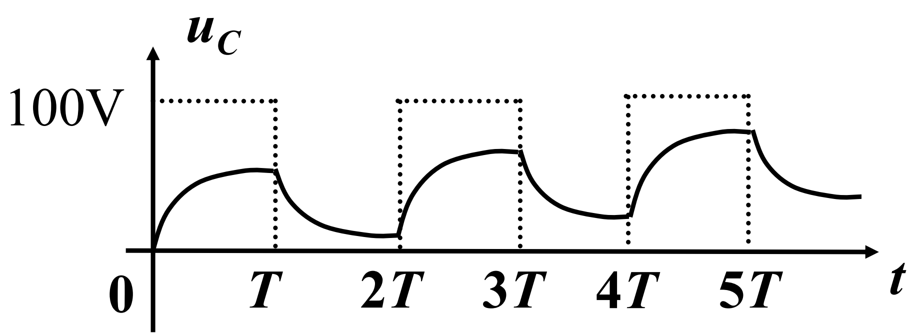
$$u_C = 100\mathrm{e}^{-\frac{t-T}{RC}}\ \text{V}$$

（2） T与τ接近



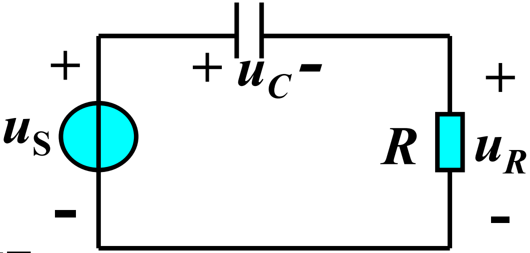


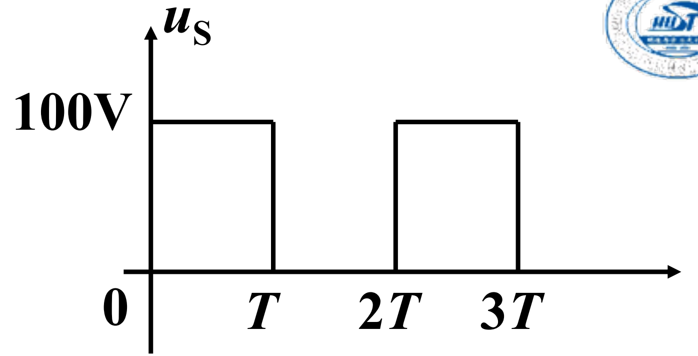
暂态过程：



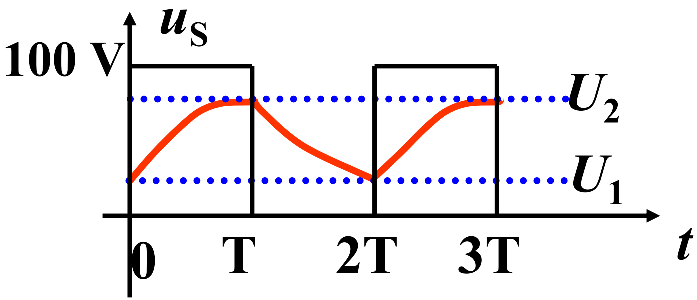
分解：P314　图3

（2） T与τ接近

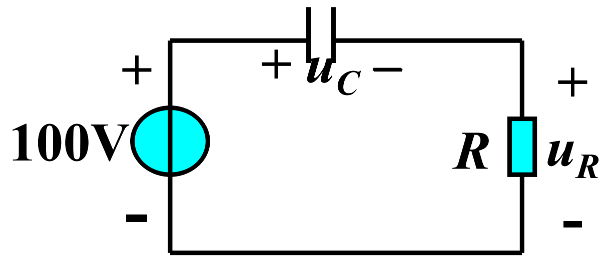




稳态解：



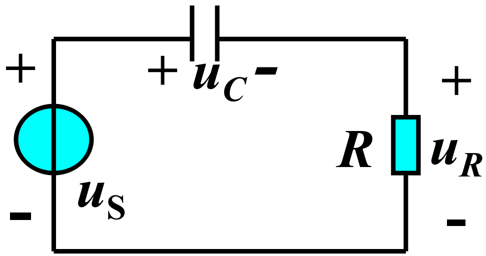
$0 < t < T$ 等效电路图



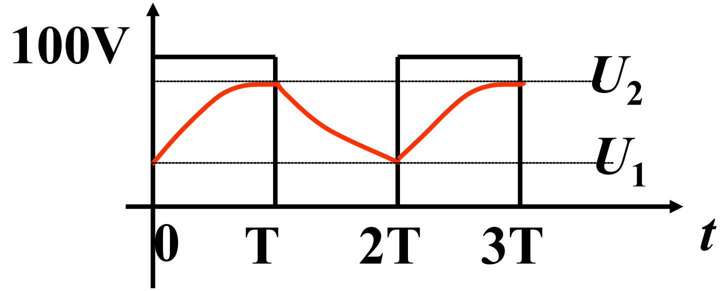
$$u_C(0^+) = U_1$$

$$u_C(\infty) = 100\ \text{V} \quad \Rightarrow \quad u_C = 100 + (U_1 - 100)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\ \text{V}$$

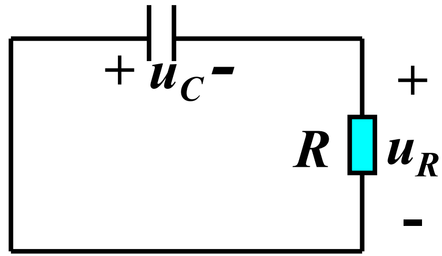
$$\tau = RC$$



$u_C(0^-)=0$



$T < t < 2T$ 等效电路图

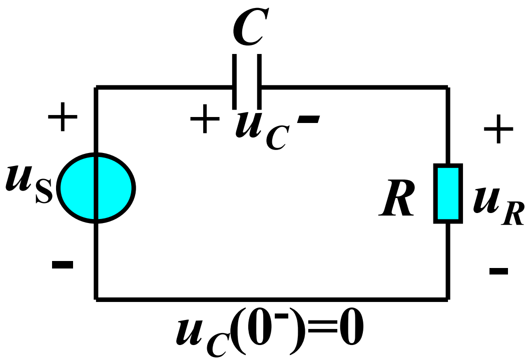


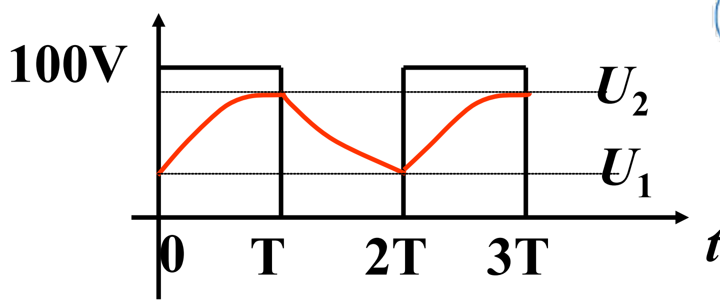
$$u_C(T^+) = U_2$$

$$u_C(\infty) = 0$$

$$\tau = RC$$

$$\Rightarrow \quad u_C = U_2 e^{-\frac{t-T}{RC}} \ \mathrm{V}$$





$0 < t < T$

$$u_C = 100 + (U_1 - 100)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$T < t < 2T$

$$u_C = U_2 e^{-\frac{t-T}{RC}}$$

$t = T$

$$u_C = U_2 = 100 + (U_1 - 100)e^{-\frac{T}{RC}}$$

$t = 2T$

$$u_C = U_1 = U_2 e^{-\frac{2T-T}{RC}}$$

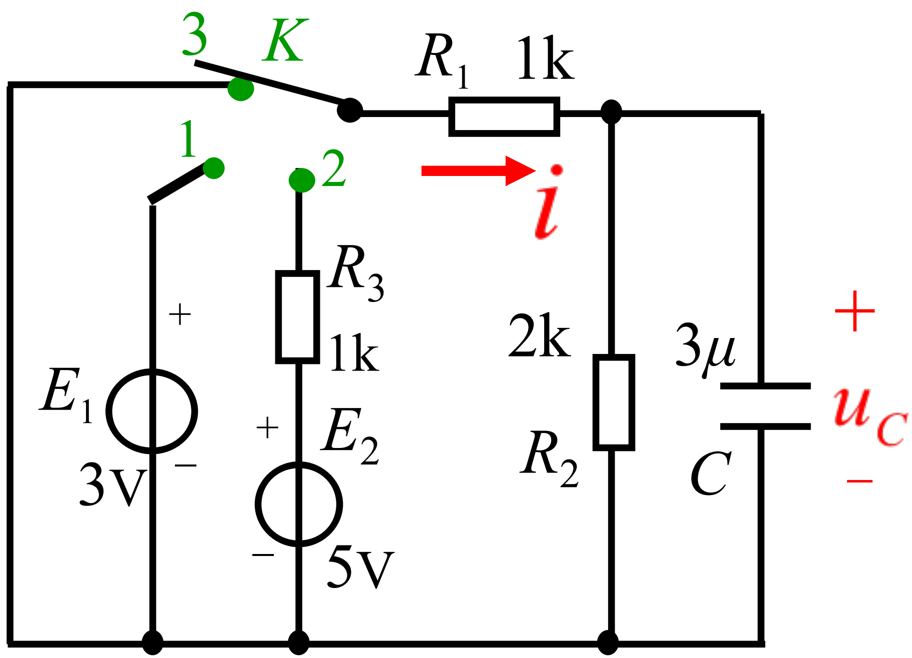
$$U_1 = \frac{100e^{-\frac{T}{RC}}}{1+e^{-\frac{T}{RC}}} = \frac{100}{1+e^{\frac{T}{RC}}} \qquad U_2 = \frac{100}{1+e^{-\frac{T}{RC}}}$$

例

已知：开关原在“3”位置，电容未充电。当 $t=0$ 时，开关合向“1”

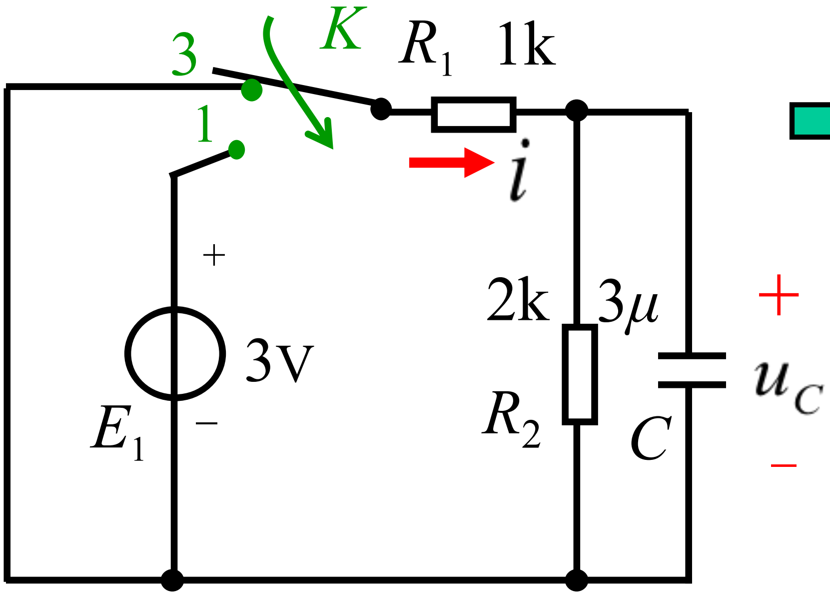
$t=20$ ms 时，开关再从“1”合向“2”

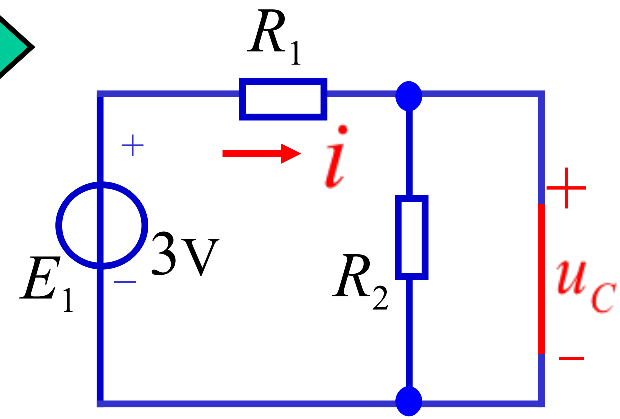
求： $u_C(t)$、$i(t)$



解：第一阶段 $t = 0 \sim 20\,\mathrm{ms}$

初始值



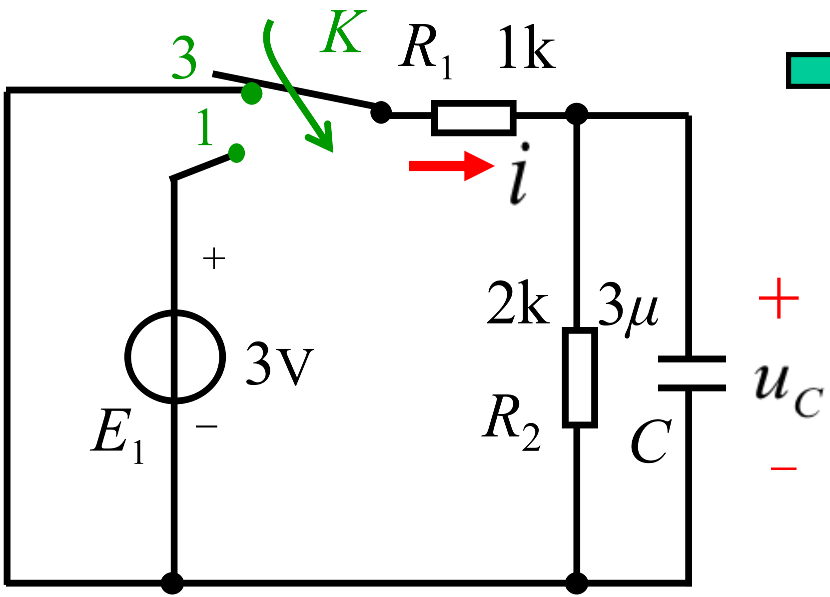


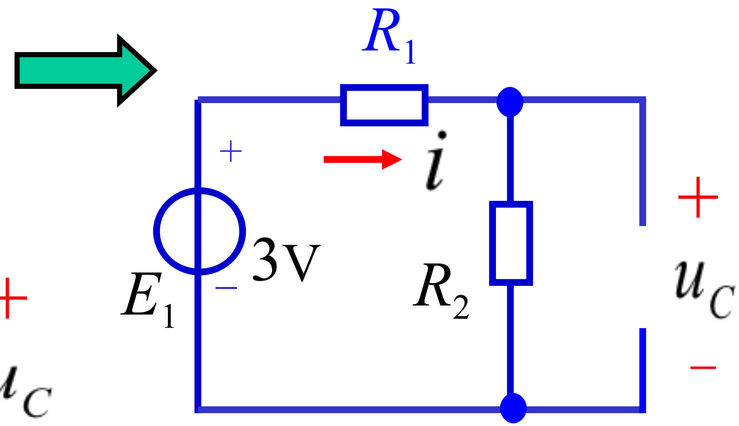
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0\ \mathrm{V}$$

$$i(0^+) = \frac{E}{R_1} = 3\ \mathrm{mA}$$

第一阶段 $t = 0 \sim 20$ ms

稳态值

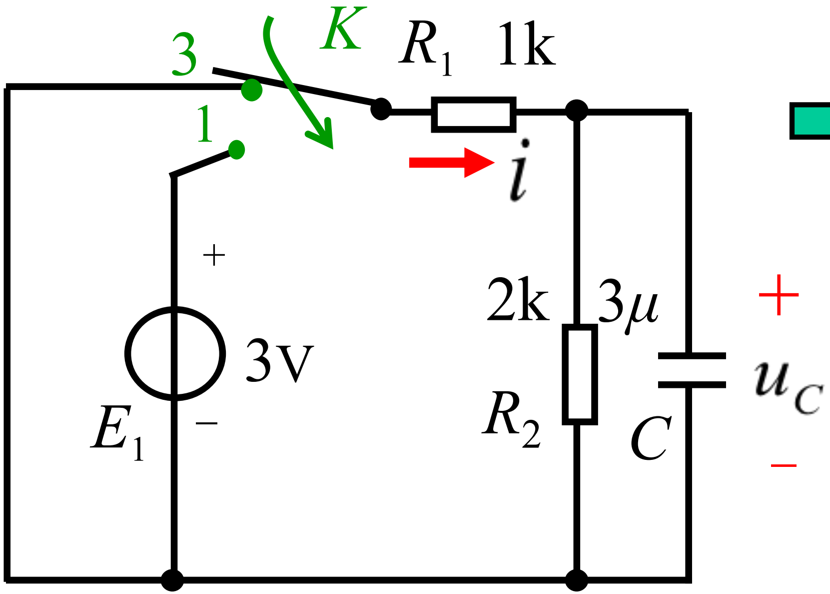


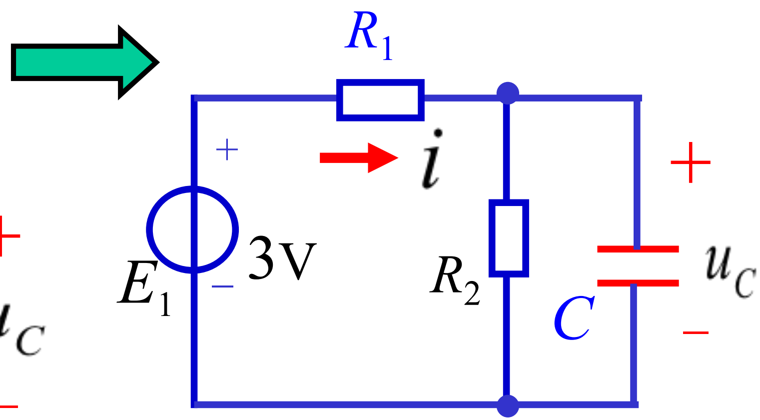


$$i(\infty) = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = 1\ \text{mA}$$

$$u_C(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot E_1 = 2\ \text{V}$$

第一阶段 $t = 0 \sim 20$ ms 时间常数





$$R_d = R_1 // R_2 = \frac{2}{3}\text{ k}\Omega$$

$$\boxed{\tau = R_d C = 2 \text{ ms}}$$

5倍的时间常数动态电路已经达到稳态

第一阶段（$t = 0 \sim 20$ ms）电压过渡过程方程：

$$f(t) = f(\infty) + \left[f(0^+) - f(\infty)\right] \cdot e^{-t/\tau}$$

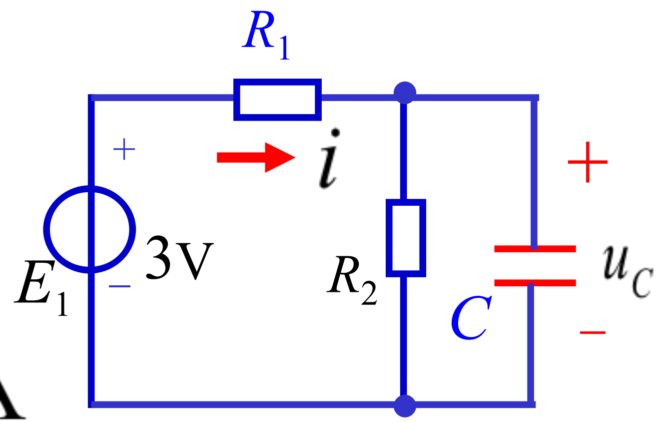
$$\begin{cases} \tau = R_d C = 2(\text{ms}) \\ u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0(\text{V}) \\ u_C(\infty) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot E_1 = 2(\text{V}) \end{cases}$$

$$\boxed{u_c(t) = 2 - 2e^{-t/0.002}\ \text{V}}$$

第一阶段（$t=0\sim 20\ \mathrm{ms}$）电流过渡过程方程：

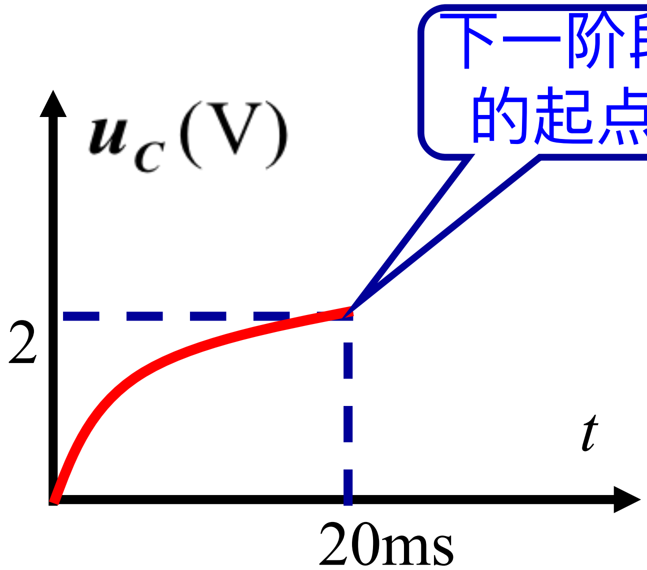
$$f(t)=f(\infty)+\left[f(0^{+})-f(\infty)\right]\cdot e^{-t/\tau}$$

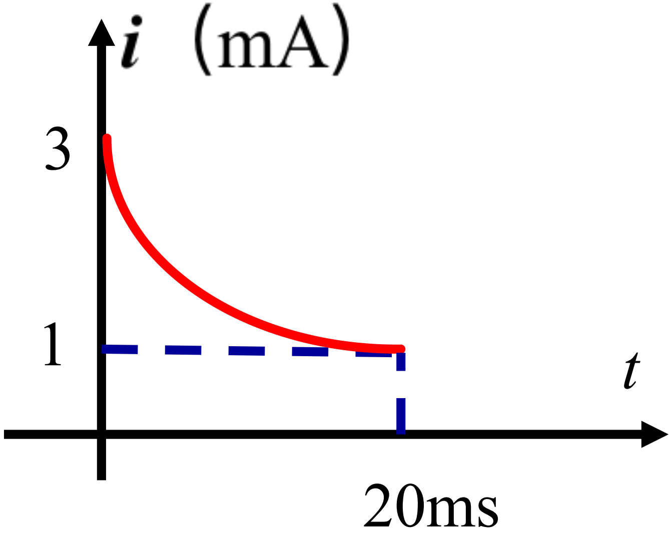
$$\begin{cases}\tau=R_dC=2\mathrm{ms}\\ i(0^{+})=\dfrac{E}{R_1}=3\mathrm{mA}\\ i(\infty)=\dfrac{E_1}{R_1+R_2}=1\mathrm{mA}\end{cases}$$



$$\boxed{i(t)=1+2e^{-t/0.002}\mathrm{mA}}$$

第一阶段波形图



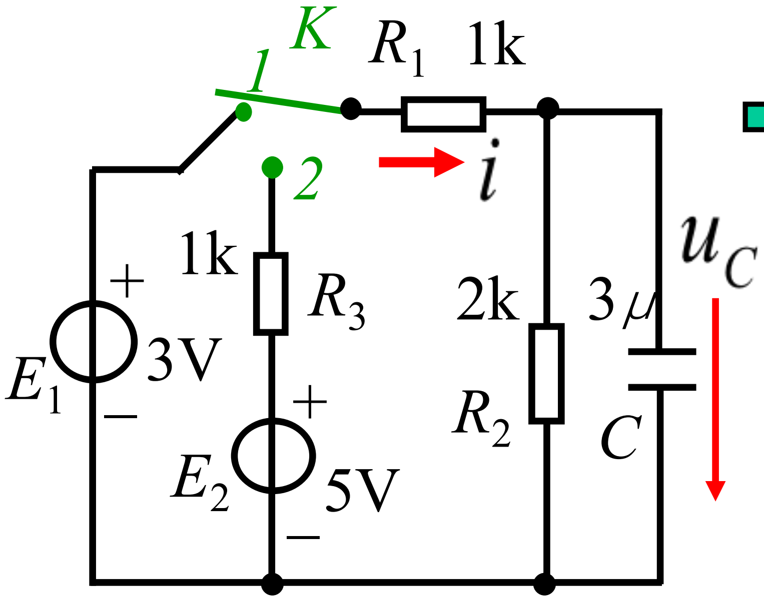


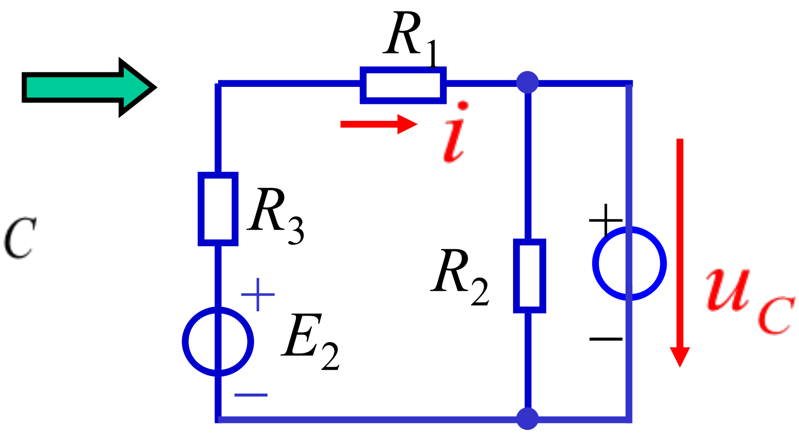
说明： $5\tau = 10$ ms

20 ms > 10 ms , t=20 ms 时，可以认为电路已基本达到稳态。

第二阶段：20ms ~

起始值





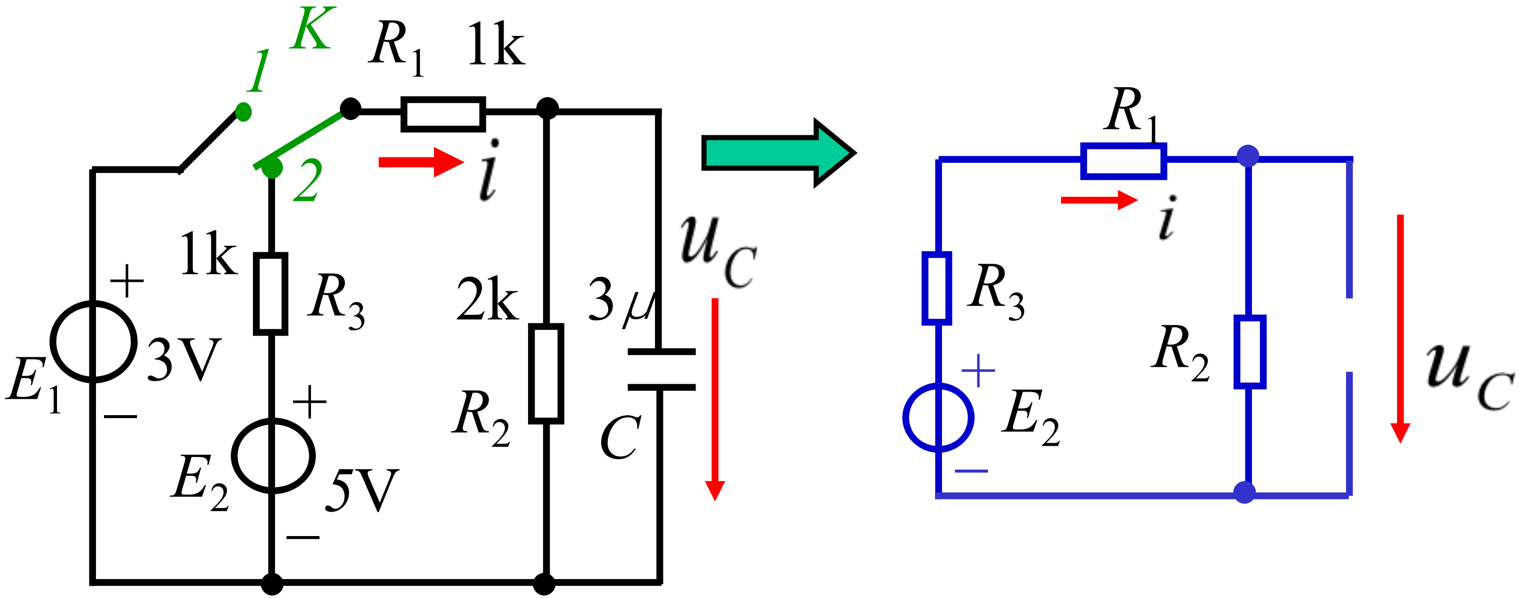
$t=20^+$ ms 时等效电路

$$u_C(20\text{ms}^+) = u_C(20\text{ms}^-) = 2\text{V}$$

$$i(20\text{ms}^+) = \frac{E_2 - u_c(20\text{ms}^+)}{R_1 + R_3} = 1.5\text{mA}$$

第二阶段

稳态值



$$u_c(\infty)=\frac{R_2}{R_1+R_2+R_3}E_2$$

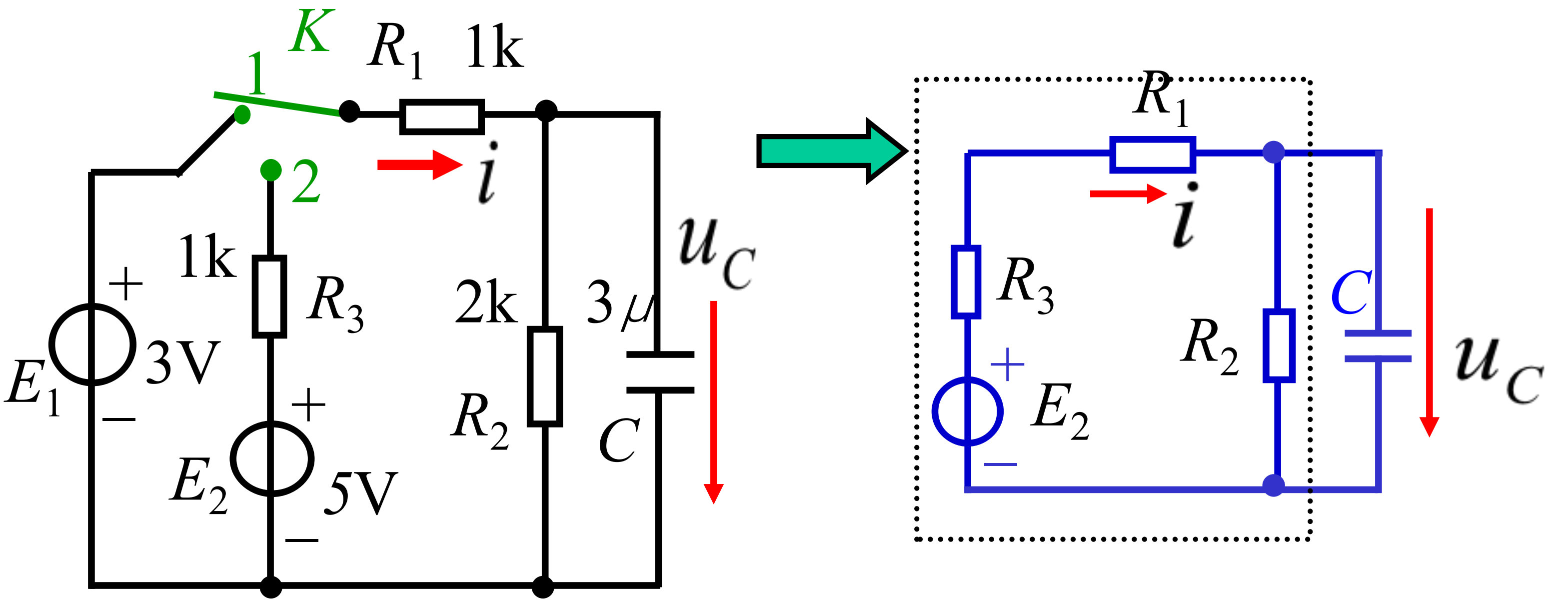
$$=2.5\ \mathrm{V}$$

$$i(\infty)=\frac{E_2}{R_1+R_2+R_3}$$

$$=1.25\ \mathrm{mA}$$

第二阶段

时间常数



$$R_d = (R_1 + R_3) // R_2 = 1\,\mathrm{k}\Omega$$

$$\boxed{\tau = R_d C = 3\mathrm{ms}}$$

第二阶段（ 20ms ~）电压过渡过程方程

$$\begin{cases} \tau = R_d C = 3\text{ms} \\ u_C(20\text{ms}^+) = 2\text{V} \\ u_C(\infty) = 2.5\text{V} \end{cases}$$

$$\boxed{u_C(t-20) = 2.5 - 0.5\,e^{-\frac{t-0.02}{0.003}}\ \text{V}}$$

第二阶段（20ms ~）电流过渡过程方程

$$\begin{cases} \tau = R_d C = 3\text{ms} \\ i(20\text{ms}^+) = 1.5\text{mA} \\ i(\infty) = 1.25\text{mA} \end{cases}$$

$$\boxed{i(t-20) = 1.25 + 0.25\, e^{-\frac{t-0.02}{0.003}} \ \text{mA}}$$

第一阶段小结：

$$u_c(t) = 2 - 2\,e^{-t/2}\ \text{V}$$

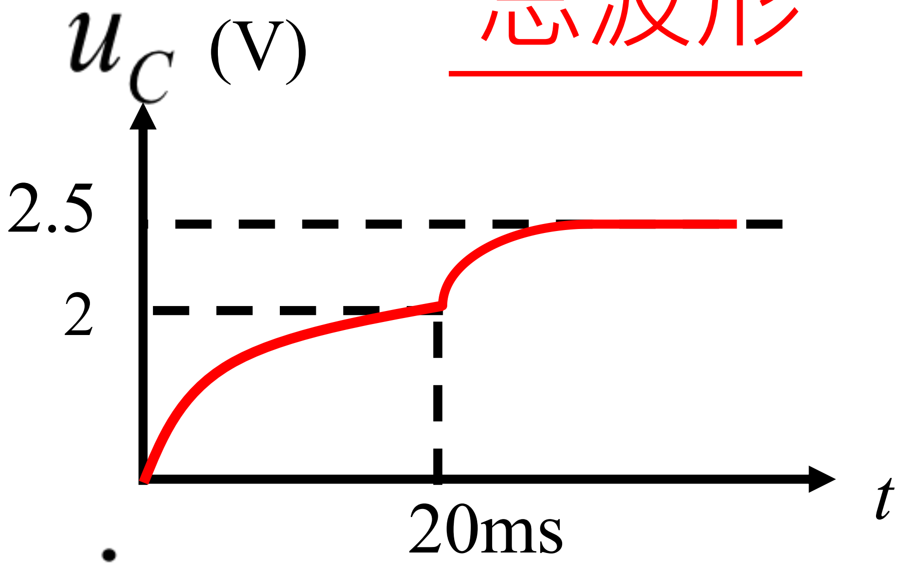
$$i(t) = 1 + 2\,e^{-t/2}\ \text{mA}$$

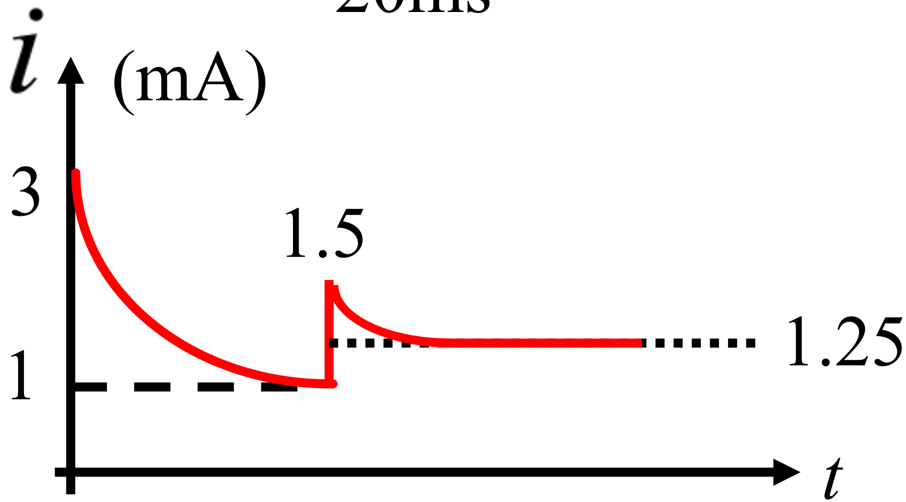
第二阶段小结：

$$u_c(t-20) = 2.5 - 0.5\,e^{-\frac{t-20}{3}}\ \text{V}$$

$$i(t-20) = 1.25 + 0.25\,e^{-\frac{t-20}{3}}\ \text{mA}$$

总波形





8.6线性非时变特性

线性非时变电路：

- **除独立电源外，元件是线性、非时变元件。**
- **线性非时变动态电路的微分方程是常系数线性微分方程。**

线性特性：

1. 齐次性

若激励变为原来的k 倍，则响应也相应的变为原来的k 倍

如：

- **零状态响应，激励U_s与响应分量$U_s(1-e^{-t/RC})$成正比**

8.6线性非时变特性

线性特性：

2. 可加性

若激励$x_1(t)$的响应为$y_1(t)$，激励$x_2(t)$的响应为$y_2(t)$，则激励$x_1(t)+x_2(t)$的响应为$y_1(t)+y_2(t)$，如：

非时变特性：

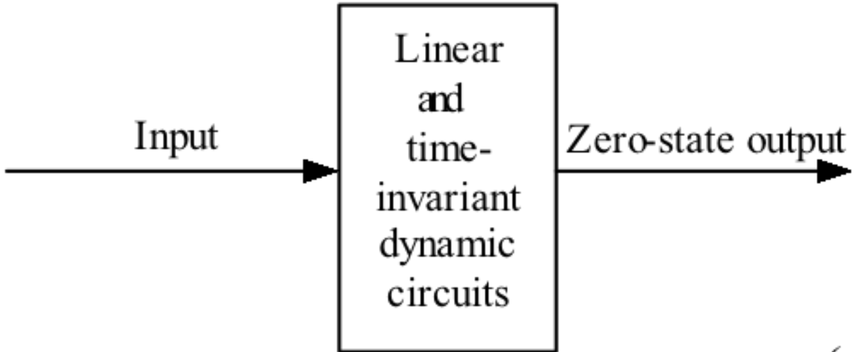
线性非时变电路零状态响应的非时变特性体现为：

若激励$x_1(t)$的响应为$y_1(t)$，则激励$x_1(t-t_0)$ 的响应为$y_1(t-t_0)$

本质是微分方程不随时间发生本质变化（系数）

8.6线性非时变特性

零状态响应与激励间的关系



如果考虑全响应?

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$$

分解：

零输入+零状态

$$k_1x_1(t)+k_2x_2(t) \longrightarrow k_1y_1(t)+k_2y_2(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,x_1(t)}{\mathrm{d}\,t} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}\,y_1(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x_1(t)\mathrm{d}\,t \longrightarrow \int_{-\infty}^{t} y_1(t)\mathrm{d}\,t$$

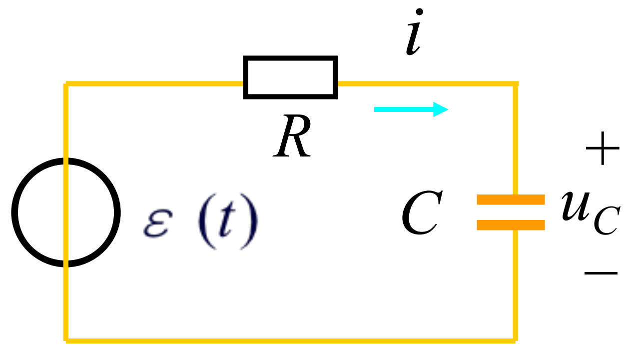
$$x_1(t-t_0) \longrightarrow y_1(t-t_0)$$

零状态响应的阶跃函数表示

阶跃响应 → 激励为单位阶跃函数时，电路中产生的**零状态**响应。

$$u_C(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$



$$u_C(0_-)=0$$

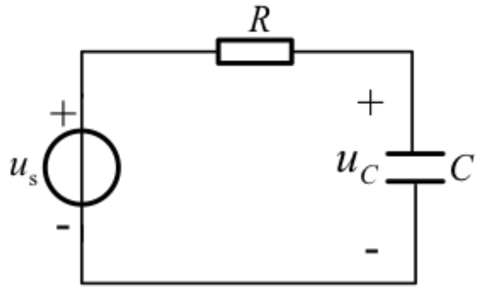
注意

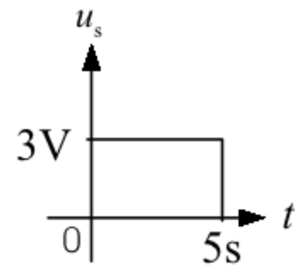
$i = e^{-\frac{t}{RC}} \underline{\varepsilon(t)}$ 和 $i = \underline{e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0}$ 的区别

8.6线性非时变特性

Practice：Find the zero-state response u_c .

$$u_s = [3\varepsilon(t) - 3\varepsilon(t-5)]\text{V}$$





$$u_C = 3s(t) - 3s(t-5)$$

$$s(t) = [(1\text{-e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)]\text{V}$$

$$u_C = [3(1\text{-e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) - 3(1\text{-e}^{-\frac{t-5}{RC}})\varepsilon(t-5)]\text{V}$$

如果电容初始电压为2V?

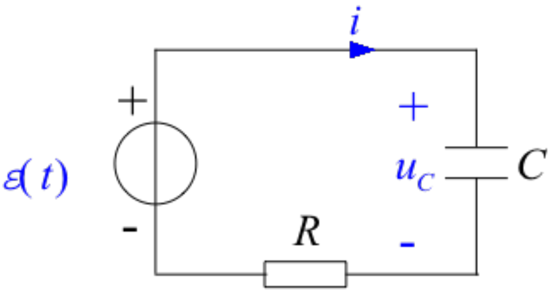
0<t<5: Zero-state response $\quad u_C = 3(1-\text{e}^{-\frac{t}{RC}})\text{V}$

t>5: Zero-input response $\quad u_C(t) = 3(1-\text{e}^{-\frac{5}{RC}})\text{e}^{-\frac{t-5}{RC}}\text{V}$

t=5: $\quad u_C(5-) = 3(1-\text{e}^{-\frac{5}{RC}}) = u_C(5+)$

8.7冲激响应计算

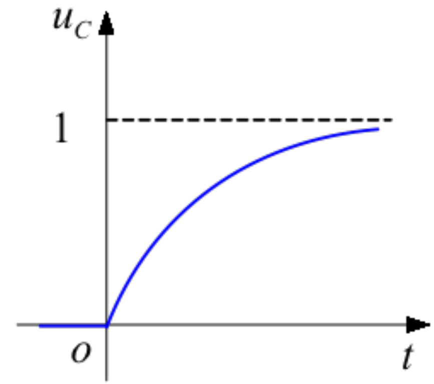
单位阶跃响应与单位冲激响应



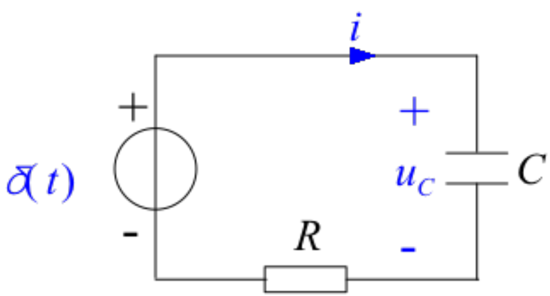
s(t)：

$$u_C=(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$i(t)=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$



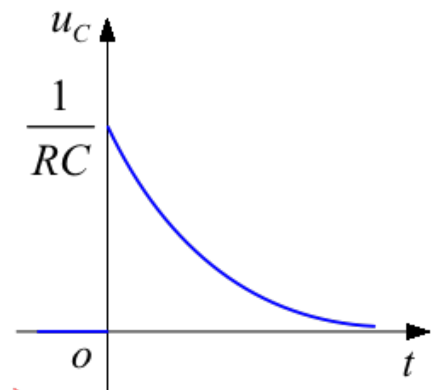
$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$



h(t)：

$$u_C(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

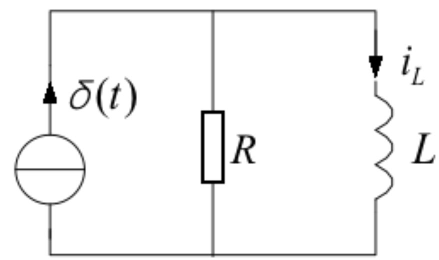
$$i(t)=-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)+\frac{1}{R}\delta(t)$$



8.7冲激响应计算

Practice : Find the impulse response i_L .

由阶跃响应获得冲激响应



$$s(t)=i_L(t)=i_L(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$$

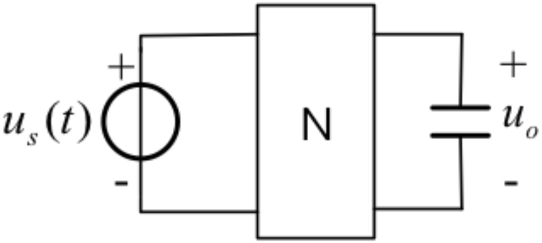
$$=(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$$

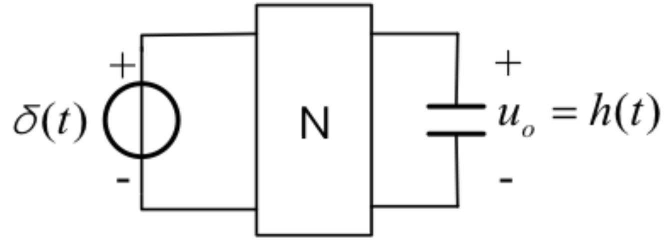
$$\tau=\frac{L}{R}$$

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\delta(t)+\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

$$=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

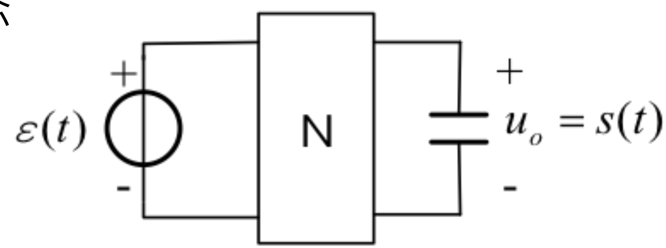
Practice：不含独立电源的线性时不变网络N的零输入响应为 e^{-t}；原始储能不变，电压源 $u_s(t)=$ 激励下的全响应为 $3e^{-t}$V。试确定 $u_s(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$ V 下的零状态响应。





电压源 $u_s(t)=\delta(t)$V 激励下的零状态响应为：

$$h(t)=(3e^{-t}-e^{-t})\varepsilon(t)=2e^{-t}\varepsilon(t)$$



$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{t}2e^{-t}\varepsilon(t)\mathrm{d}t=\left(\int_{0}^{t}2e^{-t}\mathrm{d}t\right)\varepsilon(t)=(2-2e^{-t})\varepsilon(t)$$

$$u_o(t)=(2-2e^{-t})\varepsilon(t)-[2-2e^{-(t-1)}]\varepsilon(t-1)$$

作业

- 8.2节： 8-2、8-4
- 8.3节： 8-13、8-18， 8-31
- 8.7节： 8-48