大学物理(下)

华 中 科 技 大 学
张智
zzhang@hust.edu.cn

第2节 振动的合成和分解

1. 同振动方向、同频率的两个谐振动的合成

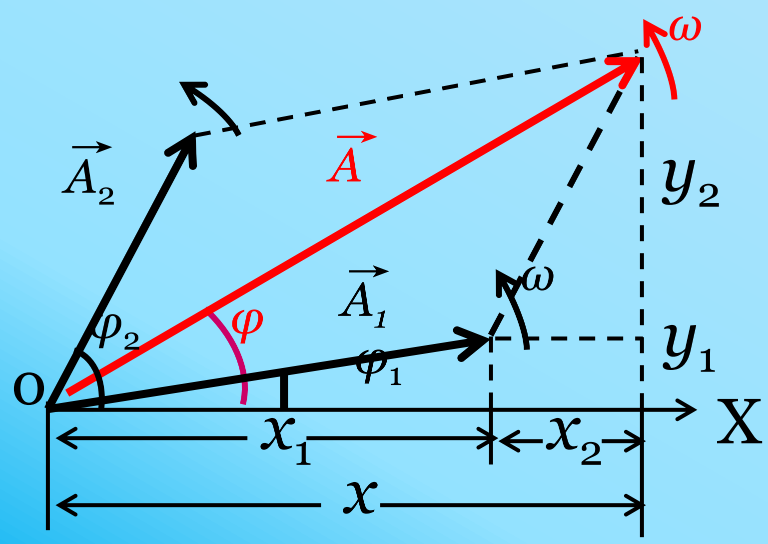
两谐振动 $x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ $x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

的合振动仍是同频率的谐振动

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t+\varphi)$$

合振动的振幅为A： $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$

合振动的初位相 φ： $tg\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$



两谐振动 $x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ $x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

的合振动仍是同频率的谐振动

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t+\varphi)$$

合振动的振幅为A： $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$

合振动的初位相 φ: $tg\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$

结论： (1)合振动仍是同频率的谐振动。

(2)合振幅不仅与分振幅有关还与$\Delta\varphi$有关。

（以上结果亦可用旋转矢量法得到）

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

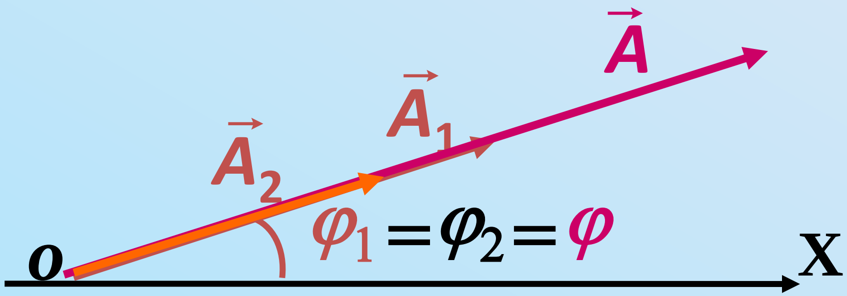
$$tg\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

两个重要的特例：

（1）两分振动同相 $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi$ （$k=0,\pm1,\pm2\ \ldots$）

$\vec{A}_1$ $\vec{A}_2$ 重合，合振幅为：

$$A=A_1+A_2$$

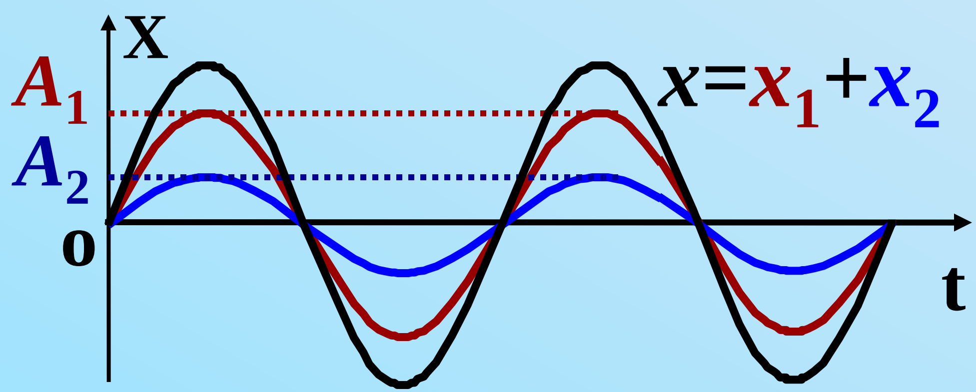


合振动初位相： $\varphi=\varphi_1=\varphi_2$

合振动方程：

$$x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi_1)$$



合振动的振幅最大。

两振动的合成效果： 使振动加强

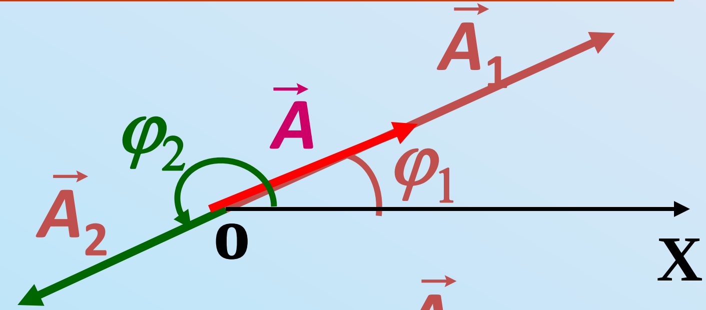
$$A^2=A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$tg\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

（2）两分振动反相 $\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi$

$\vec{A}_1$ 与 $\vec{A}_2$ 方向相反，合振幅为：

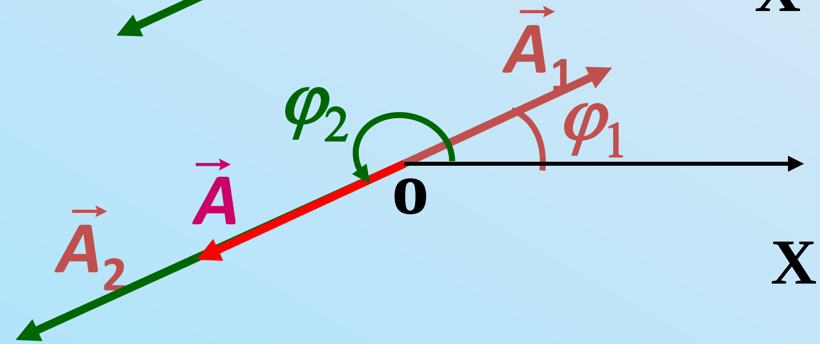
$$A=|A_1-A_2|$$



合振动初位相：

若$A_1>A_2$ $\quad\varphi=\varphi_1$

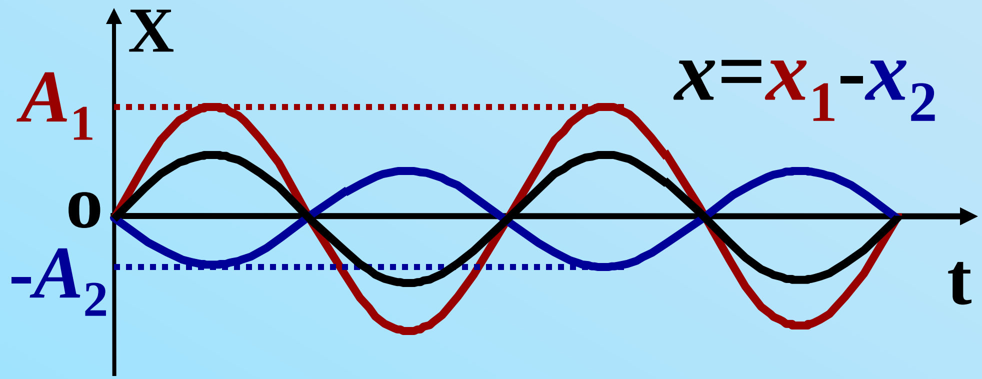
若$A_1<A_2$ $\quad\varphi=\varphi_2$



两振动合成的振幅最小。

两振动的合成效果：

使振动减弱



（3）两分振动的位相差：

$$\varphi_2-\varphi_1\neq k\pi$$

合成振动的振幅：$|A_1-A_2|<A<A_1+A_2$

◆ 同方向的 N 个同频率谐振动的合成

若它们的振幅相等，初相位依次相差一个恒量。
其表达式为：

$$x_1 = a\cos(\omega t)$$

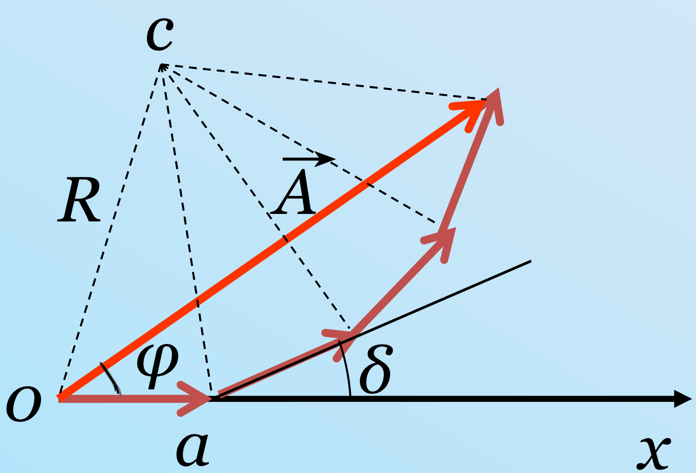
$$x_2 = a\cos(\omega t + \delta)$$

$$x_3 = a\cos(\omega t + 2\delta)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$x_N = a\cos\left[\omega t + (N-1)\delta\right]$$

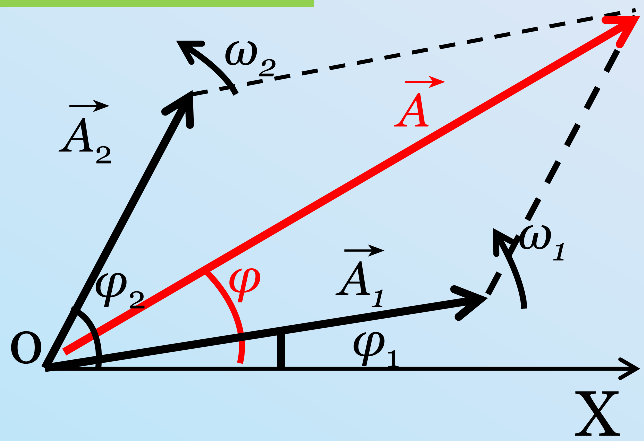


用矢量合成法或解析法均可得合成振动：

$$x = a\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\cos\left[\omega t + \frac{(N-1)\delta}{2}\right]$$

2. 同振动方向、不同频率的两个谐振动的合成

设两谐振动分别为 $\begin{cases} x_1 = A_0\cos(\omega_1 t+\varphi) \\ x_2 = A_0\cos(\omega_2 t+\varphi) \end{cases}$



合振动： $x = x_1 + x_2$

$$= A_0\left[\cos(\omega_1 t+\varphi)+\cos(\omega_2 t+\varphi)\right]$$

$$= A_0 2\cos\frac{\omega_2 t-\omega_1 t}{2}\cos\frac{\omega_1 t+\omega_2 t+2\varphi}{2}$$

$$x = \boxed{2A_0\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t}\cos\left(\boxed{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}t+\varphi\right)$$

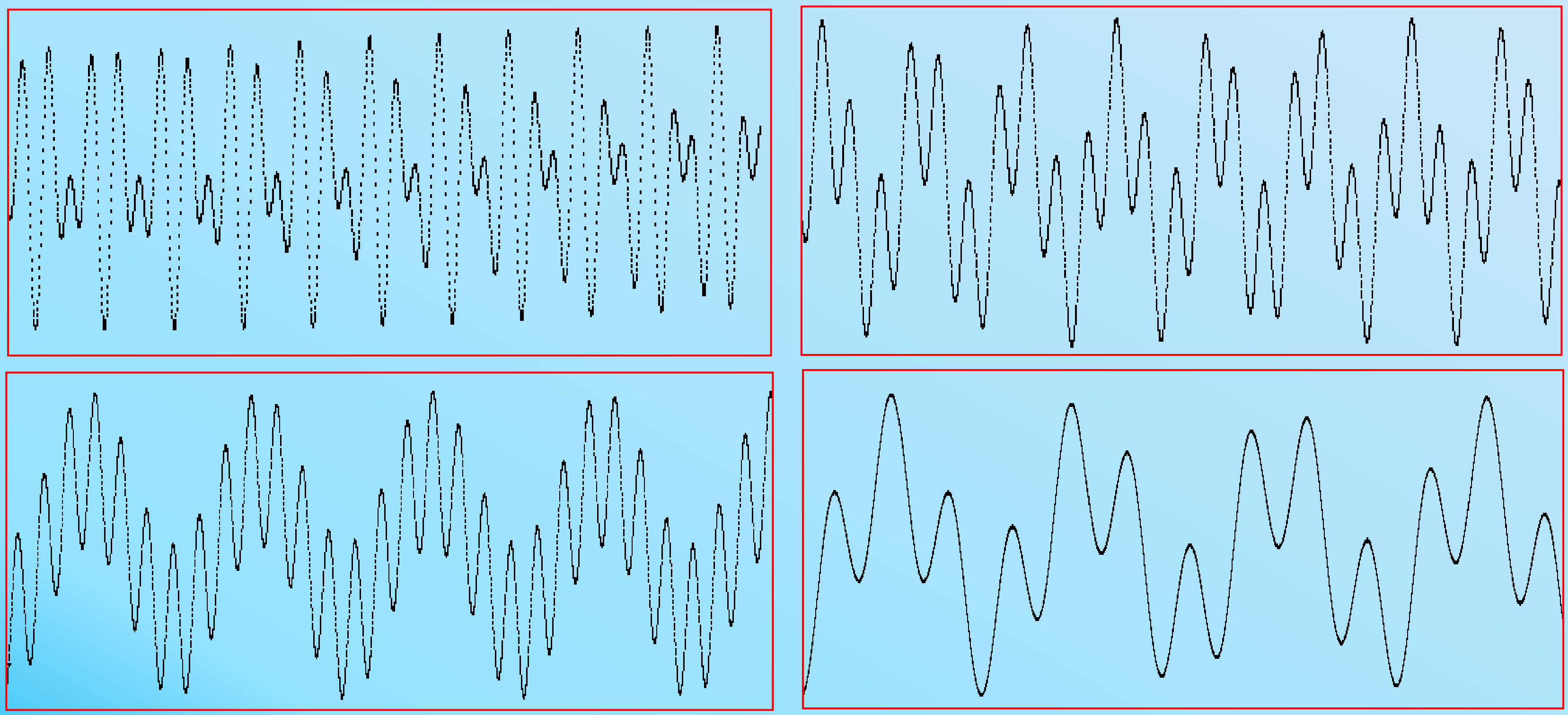
$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi)$$

合振动不是谐振动！

$$x = 2A_0 \cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\varphi\right)$$

振幅按余弦函数变化，变化范围：$0 \leqslant A \leqslant 2A_0$

因此，合振动显然不是谐振动。 振动曲线取决于频率差。



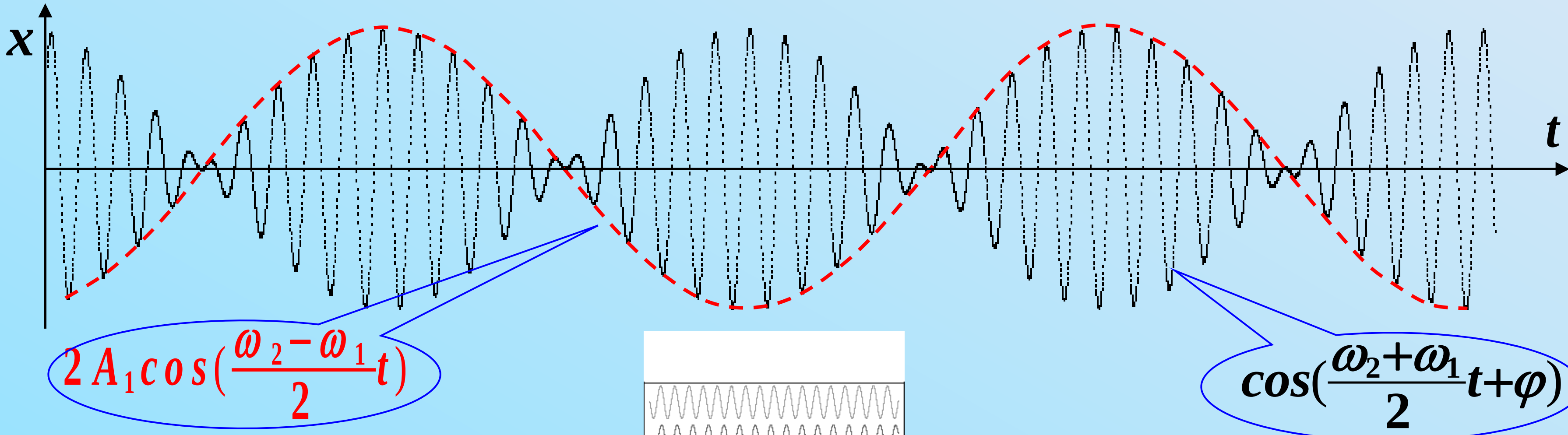
若频率差很小？

若频率差很小：振幅将出现明显的加强和减弱现象 ——拍

$$\boxed{x = 2A_0\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\varphi\right)}$$

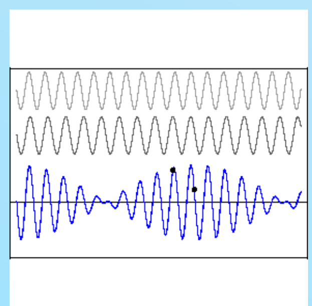
可见$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t$改变$\pi$时，

A就重复出现一次变化



拍的周期τ：$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\tau=\pi$

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}$$



拍的频率ν：

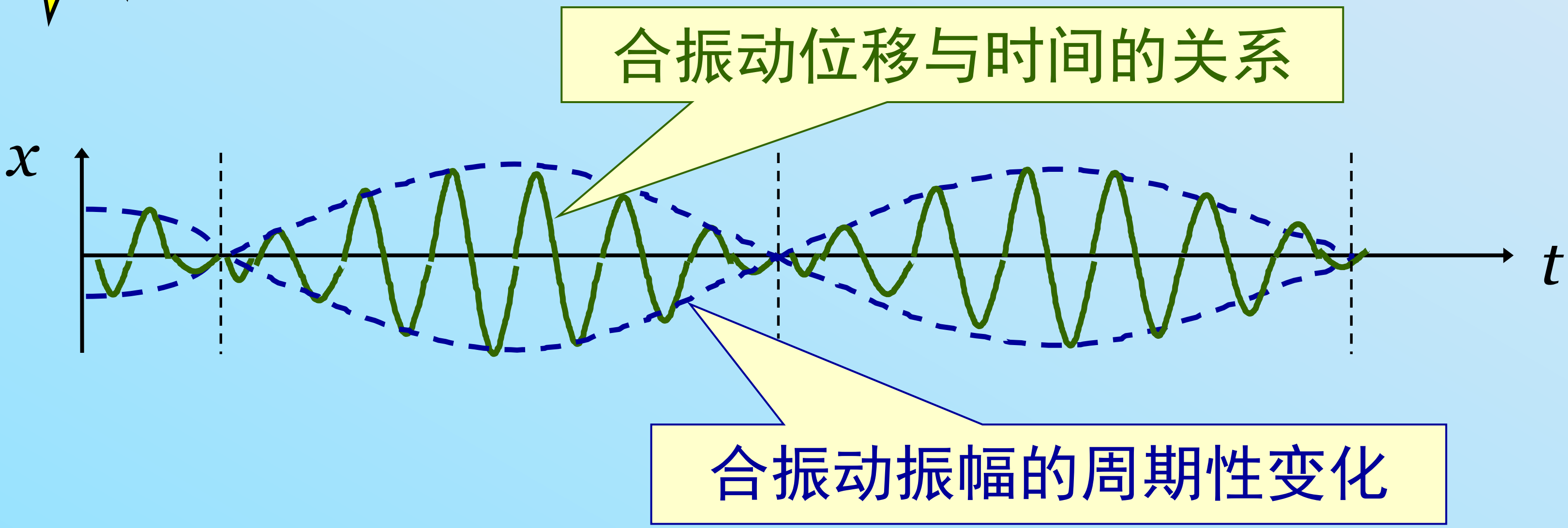
$$\nu=\frac{1}{\tau}=\frac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}=\nu_2-\nu_1$$

- ◆ 拍频与合振动位移变化的频率是完全不同的。
- ◆ 拍现象只在两分振动的频率相差不大时才明显。

$$x = 2A_0 \cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi\right)$$

注意:

1° $\omega_1 - \omega_2 << \omega_1 + \omega_2$时，合振动可近似看成振幅缓慢变化的谐振动。



2° 当 ω_1、ω_2相差很小时出现拍现象。

拍现象：合振动时强时弱的现象。
在声振动、电振动、波动、激光等问题中常遇到。

音叉演示拍现象实验

3. 振动方向相互垂直、频率相等的两个谐振动的合成

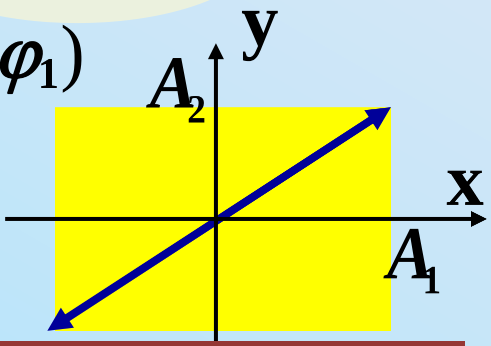
设一质点同时参与两谐振动，分别在X,Y方向进行。

$$x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$
$$y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

演示：垂直振动的合成

椭圆方程

消去t：$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$



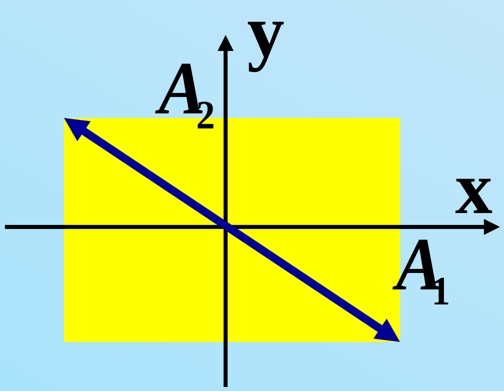
讨论几种特殊情况：

1）$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=0$ $\left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$

合成仍为谐振动，轨迹为一直线

$y=\frac{A_2}{A_1}x$ 斜率：$tg\theta=\frac{A_2}{A_1}$ $\varphi_2=\varphi_1=\varphi$

2）$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pi$ $\left(\frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}\right)^2=0$

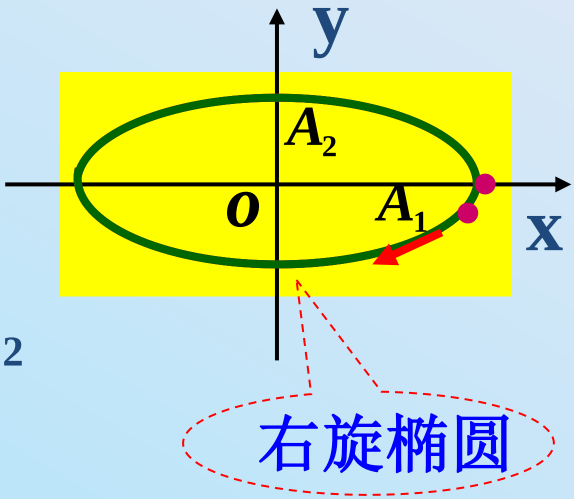


$y=-\frac{A_2}{A_1}x$ 斜率：$tg\theta=-\frac{A_2}{A_1}$

位移、频率、振幅同上，质点沿$y=-\frac{A_2}{A_1}x$直线振动

$$\left.\begin{array}{l} x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ y=A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{array}\right\} \frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

3） $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}$ 则有：$\dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}=1$



轨迹为一正椭圆，长、短轴分别为$2A_1$、$2A_2$

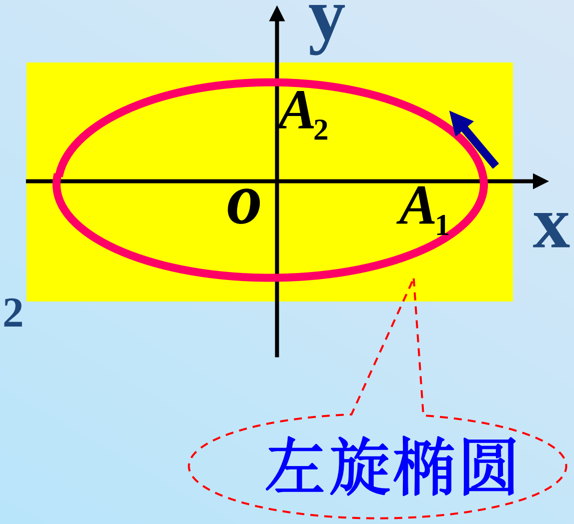
若$A_1=A_2$，就是一个圆。问题：振动方向？

$$\varphi_2=\varphi_1+\frac{\pi}{2} \qquad \begin{array}{l} x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ y=A_2\cos(\omega t+\varphi_1+\dfrac{\pi}{2})=-A_2\sin(\omega t+\varphi_1) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{当 } \omega t+\varphi_1=0 \text{ 时：} x=A_1,\ y=0 \\ \text{而 } \omega(t+\Delta t)+\varphi_1 \text{ 时：} x>0,\ y<0 \end{array}\right\} \text{振动为顺时针方向}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ y &= A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{aligned}\right\} \frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

4） $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\dfrac{3\pi}{2}$ 同理：$\dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}=1$



轨迹为一正椭圆，长、短轴分别为$2A_1$、$2A_2$

问题：振动方向?

$$\varphi_2=\varphi_1+\frac{3\pi}{2} \quad \begin{aligned} x &= A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ y &= A_2\cos(\omega t+\varphi_1+\tfrac{3\pi}{2})=A_2\sin(\omega t+\varphi_1) \end{aligned}$$

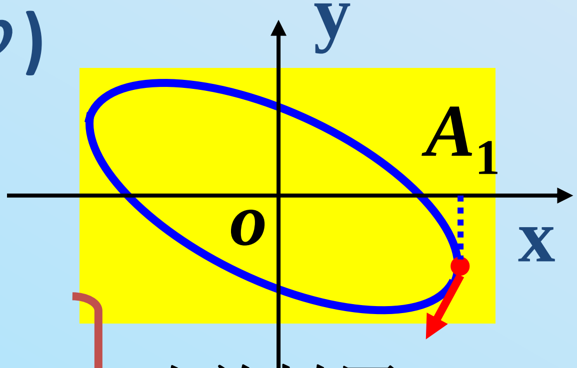
$$\left.\begin{aligned} &\text{当 } \omega t+\varphi_1=0 \text{ 时：} x=A_1,\ y=0 \\ &\text{而 } \omega(t+\Delta t)+\varphi_1 \text{ 时：} x>0,\ y>0 \end{aligned}\right\} \text{振动为逆时针方向}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ y &= A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{aligned}\right\} \frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

5）$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\varphi$　φ为其它任意值，

轨迹是任意一个斜椭圆　左旋?右旋?

为便于讨论：令$\varphi_1=0$,则 $\begin{cases} x=A_1\cos\omega t \\ y=A_2\cos(\omega t+\varphi) \end{cases}$

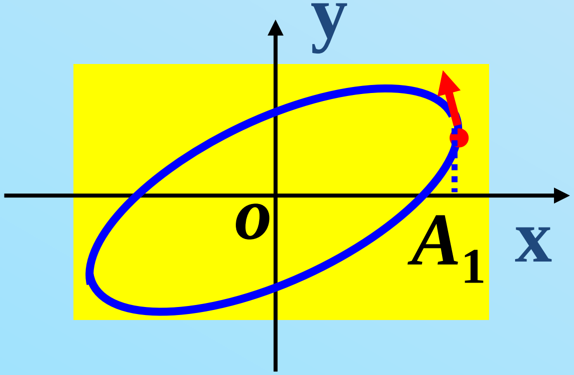


当 $0<\varphi<\pi$，t=0 时：$x=A_1$　$y=A_2\cos\varphi$

$$\left.\begin{aligned} \text{又：}\ \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} &= -\omega A_1\sin\omega t\big|_{t=0}=0 \\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} &= -\omega A_2\sin(\omega t+\varphi)\big|_{t=0}=-\omega A_2\sin\varphi<0 \end{aligned}\right\}\text{右旋椭圆}$$

当 $\pi<\varphi<2\pi$，或 $-\pi<\varphi<0$

$$\left.\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-\omega A_2\sin\varphi\big|_{t=0}>0\right\}\text{左旋椭圆}$$



例. 已知两分振动为

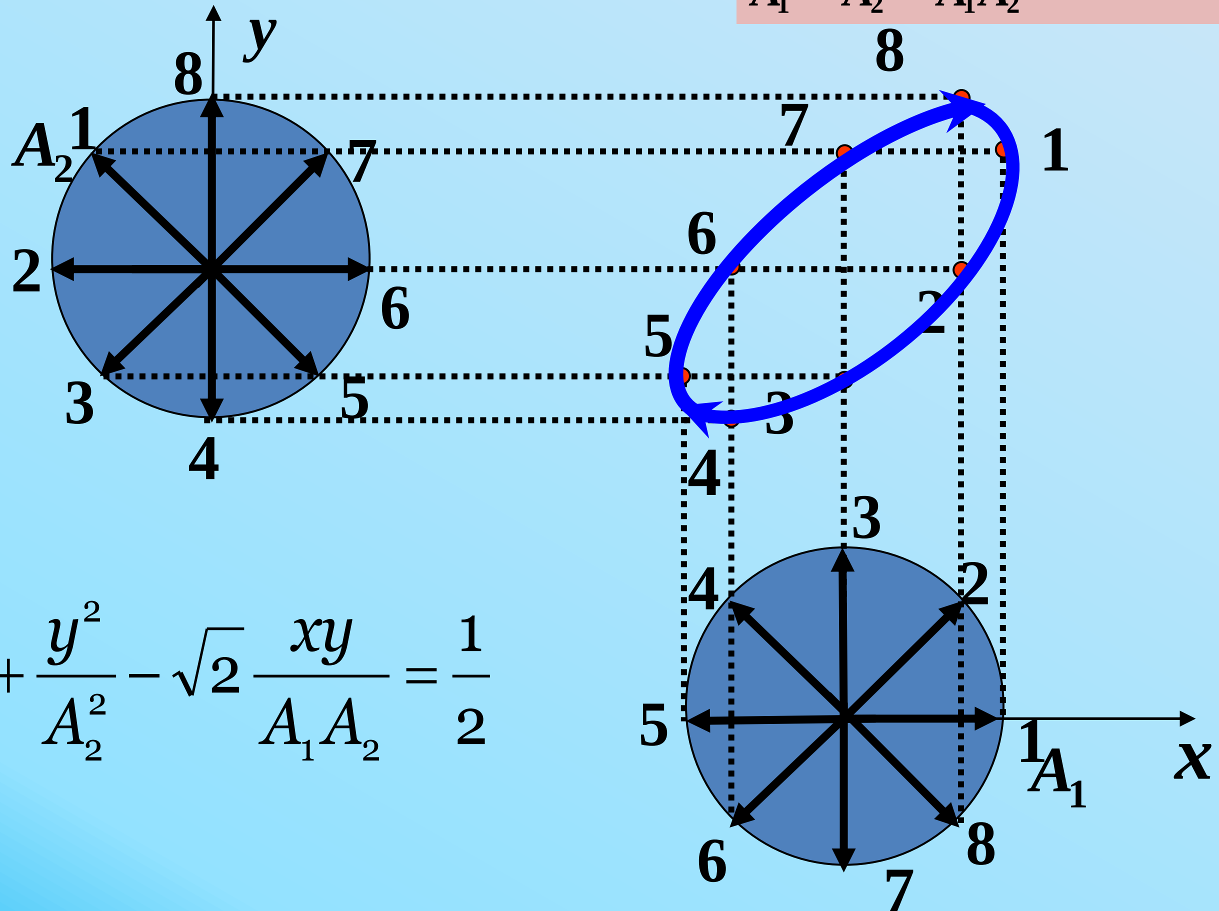
$$x = A_1 \cos\omega t \quad y = A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$$

求(1) 合振动的轨迹。

(2) 若已知A，ω、φ，m，求质点在任一位置所受的力。

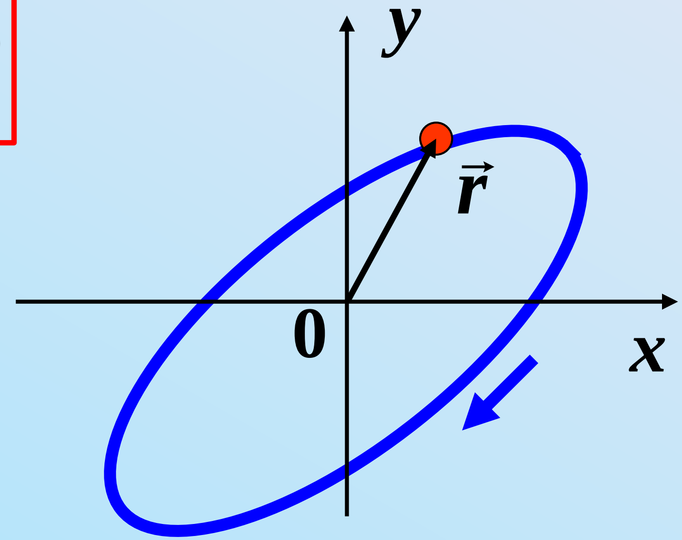
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

解: (1) 几何作图法



$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \sqrt{2}\frac{xy}{A_1 A_2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A_1 \cos\omega t \\ y &= A_2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}}$$



（2）求质点在任一位置所受的力

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$= m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{F} = m\left\{\left[-A_1\omega^2\cos\omega t\right]\vec{i} + \left[-A_2\omega^2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\right]\vec{j}\right\}$$

$$= -m\omega^2\left\{A_1\cos\omega t\,\vec{i} + A_2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\vec{j}\right\}$$

$$= -m\omega^2(x\vec{i} + y\vec{j})$$

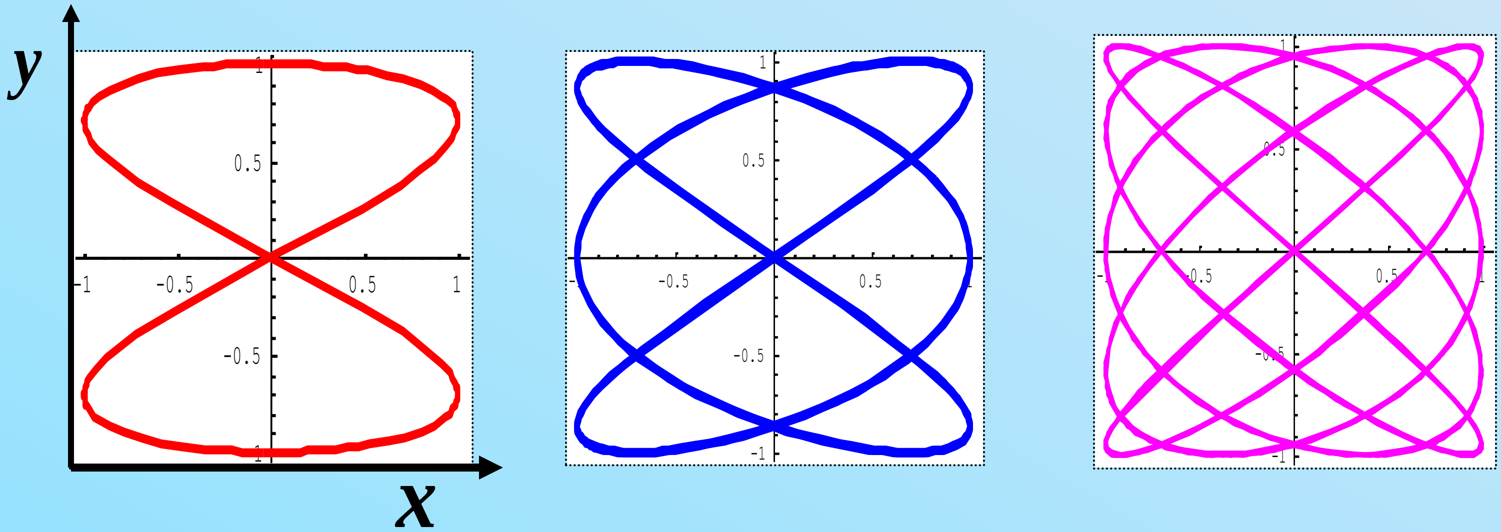
$$= -m\omega^2\vec{r}$$

4. 不同频率、垂直方向谐振动的合成

设两振动为：$x = A_1 cos(\omega_1 t + \varphi_1)$　$y = A_2 cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

合振动轨迹曲线一般很复杂，且不稳定。

- 两振动的频率成整数比时，合成轨迹稳定，称为李萨如图形。如：



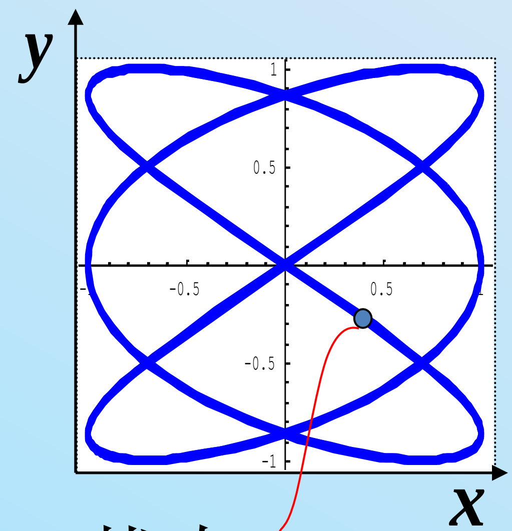
由切点数之比 $\dfrac{N_y}{N_x} = \dfrac{T_y}{T_x} = \dfrac{\nu_x}{\nu_y}$ 可测频率。

两振动： $x=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ $y=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

由切点数之比 $\dfrac{N_y}{N_x}=\dfrac{T_y}{T_x}=\dfrac{\nu_x}{\nu_y}$ 可测频率。

再次到达状态1，所需时间为：

$$T=n_xT_x=n_yT_y$$

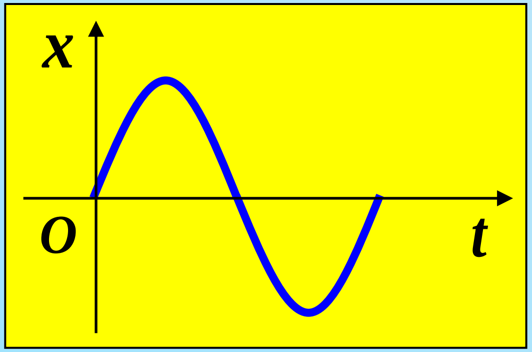


状态1:(x,y,v_x,v_y)

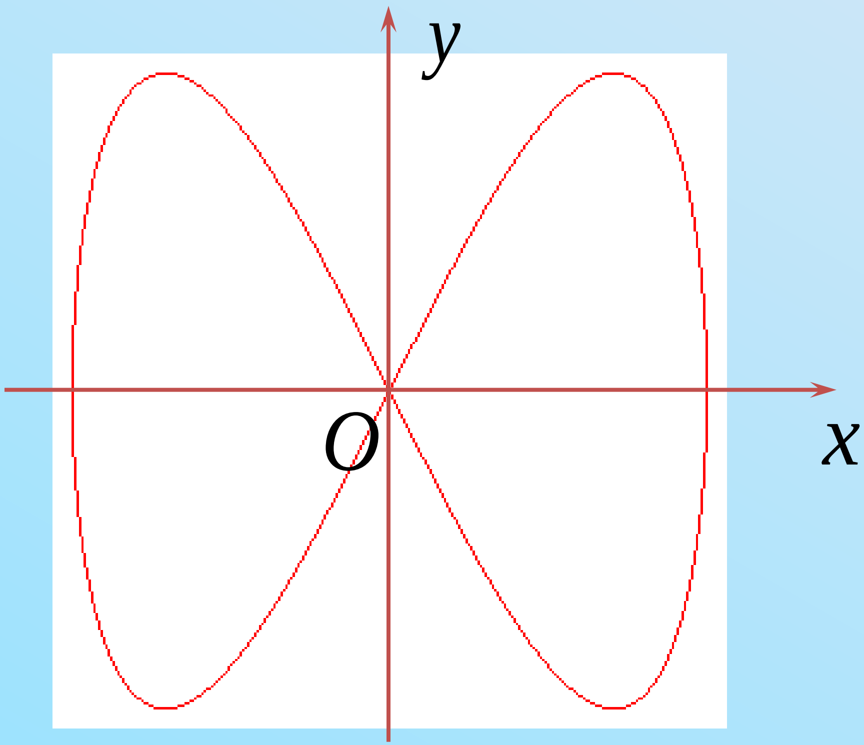
n_x,n_y分别是x方向和y方向的振动经历的周期个数。

x每次到达最大值就产生y方向上的一个切点。一个振动周期内x到达最大值一次。

$$\left.\begin{aligned}&\therefore N_y=n_x \quad N_x=n_y\\&\therefore N_yT_x=N_xT_y\end{aligned}\right\}\quad \frac{N_y}{N_x}=\frac{T_y}{T_x}=\frac{\nu_x}{\nu_y}$$



$\omega_x : \omega_y = 1:2$ 时，对应不同初相位差的李萨如图形



相邻的李萨如图形初相位差为12°

李萨如图

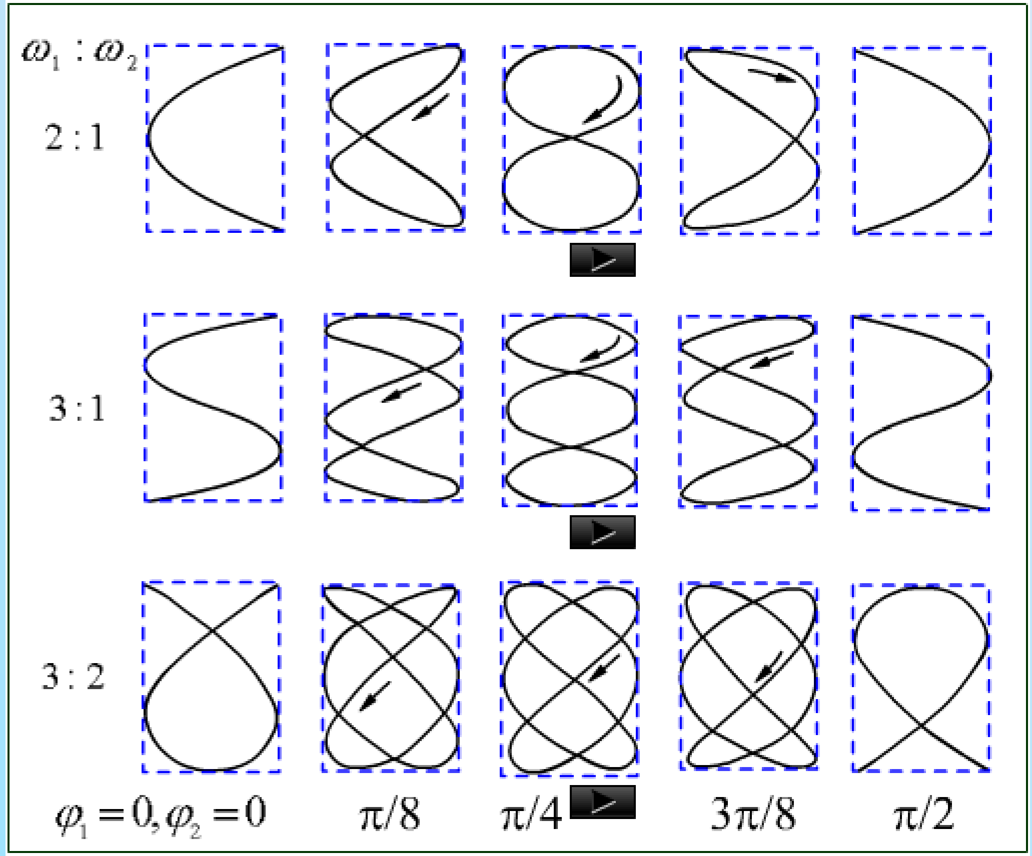
$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\varphi_1 = 0$$

$$\varphi_2 = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi$$

$$\frac{N_x}{N_y} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

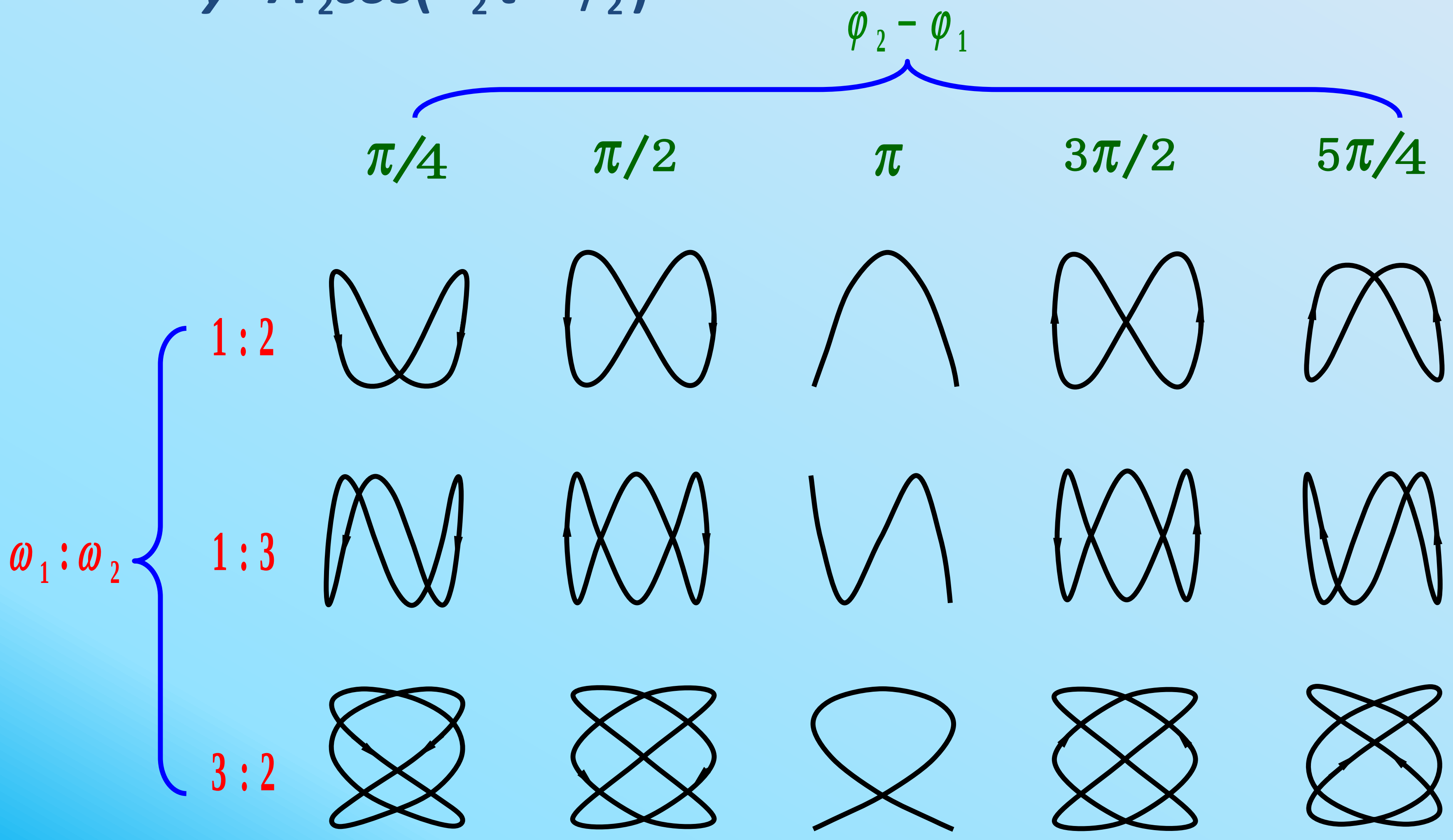
测量振动频率和相位的方法



李萨如图形示例

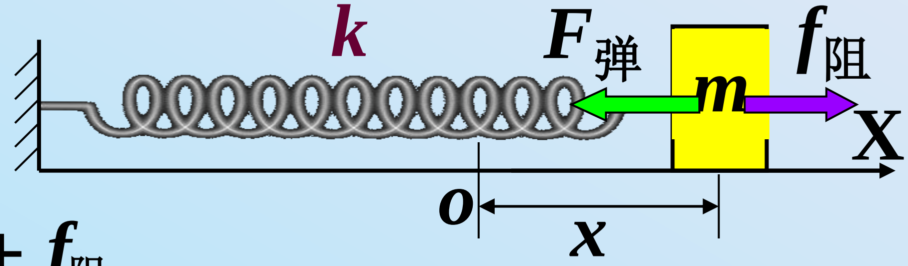
$$x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$



第3节 阻尼振动、受迫振动和共振

1.谐振子的阻尼振动



1）动力学方程

$$F = F_{弹} + f_{阻}$$

$$F_{弹} = -kx \qquad f_{阻} = -\gamma v = -\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

根据牛顿定律： $F = m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ 　　则： $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

即： $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$$ ——运动方程

其中： $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ 　　$2\beta = \dfrac{\gamma}{m}$ 　　β——阻尼系数

阻尼项

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

2）运动学特征

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

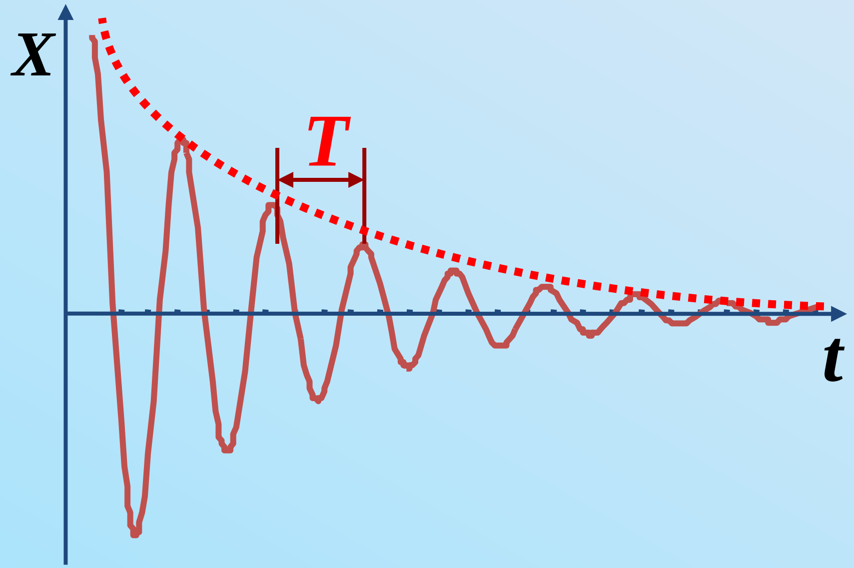
一般 β 不同振动状态就不同

（1）阻尼较小时，$\beta<\omega_0$，称为弱阻尼。

方程的解：$x(t)=A_0e^{-\beta\cdot t}\cos(\omega t+\varphi_0)$

其中：振幅 $A=A_0e^{-\beta t}$

频率 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$



振动特点：

1.振幅随t按指数衰减

间隔一个周期的振幅比：

$$\frac{A_0e^{-\beta t}}{A_0e^{-\beta(t+T)}}=e^{\beta T}$$

2. 是准周期运动 位相改变2π所经历的时间~周期

出现两次极大的时间间隔：$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0-\beta^2}}>\frac{2\pi}{\omega_0}=T_0$

周期变长，振动变慢。

3. 能量E随振幅A的减小而衰减 $E\propto A^2$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$$

（2）阻尼较大时$\beta>\omega_0$，称为过阻尼。

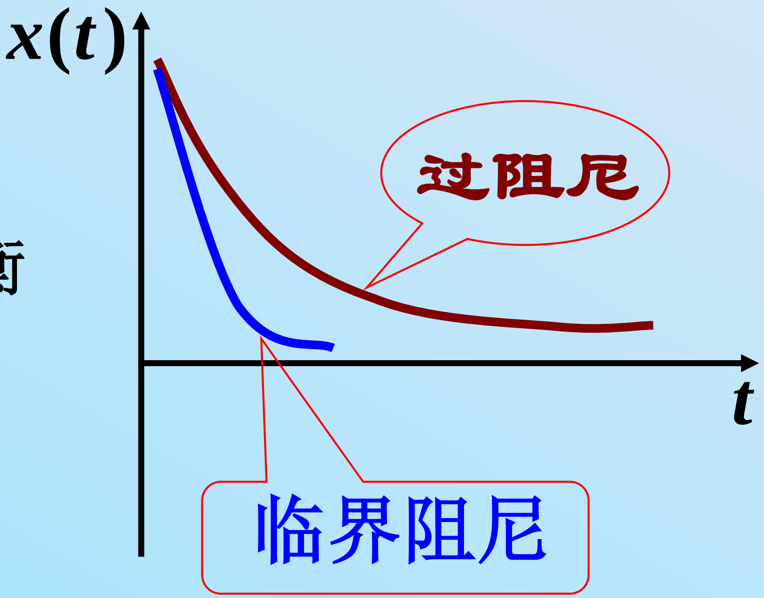
方程的解：$x(t)=C_1e^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}+C_2e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}$

其中的积分常数C_1、C_2由初始条件决定。

振动特点：

非周期运动 ； 无振动发生。

物体从初始位置开始一直是向着平衡位置运动，到达平衡位置后停止。



（3）$\beta=\omega_0$，称为临界阻尼。

方程的解：$x(t)=(C_1+C_2t)e^{-\beta t}$ C_1、C_2由初始条件决定。

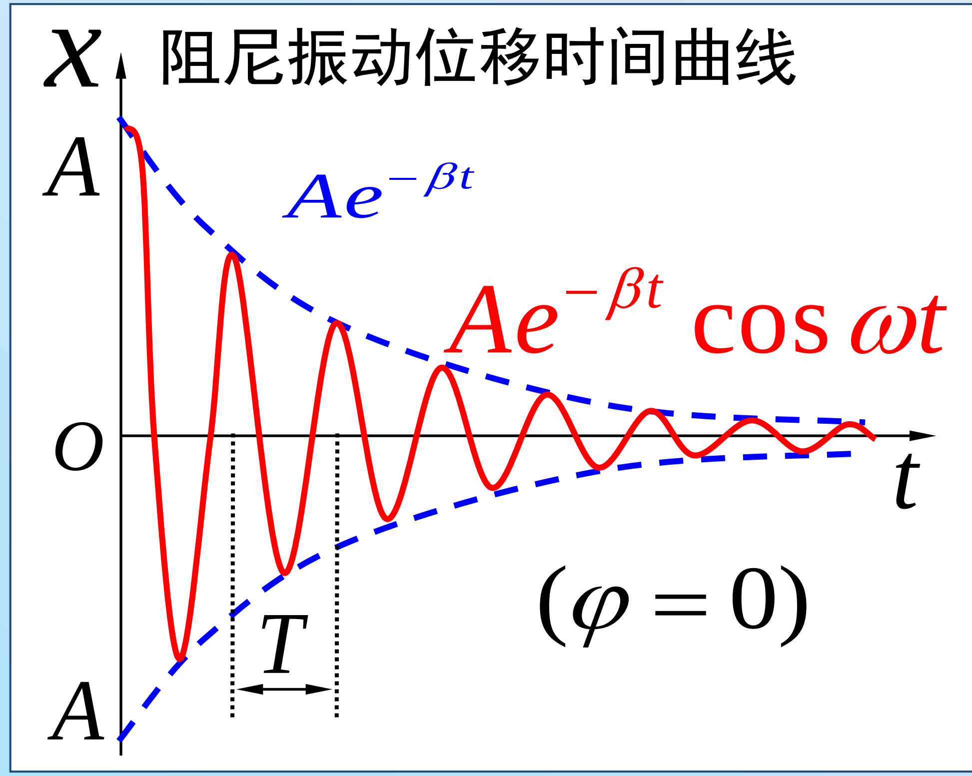
振动特点同上，但很快回到平衡位置。

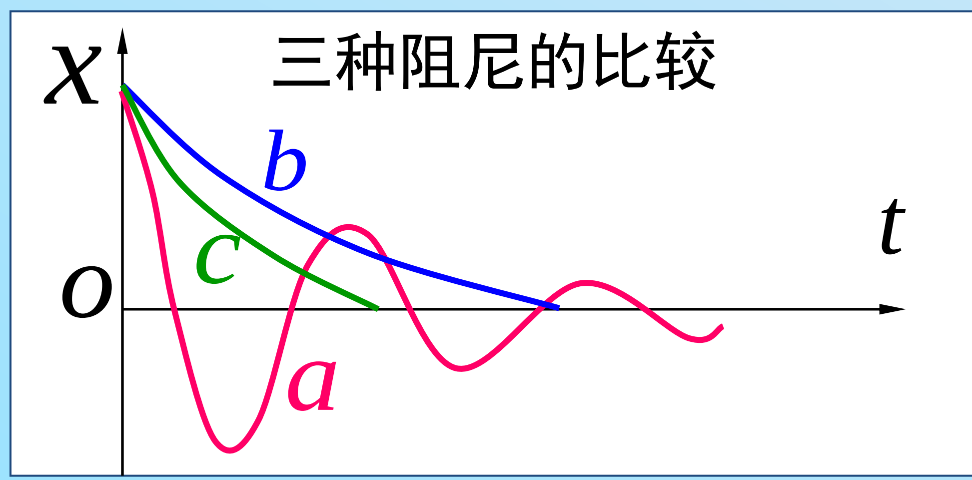
$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+kx=0$$

$$x=Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

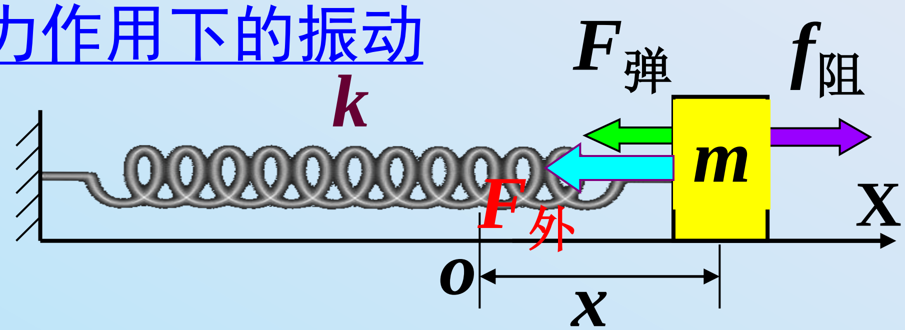
- a）欠阻尼 $\quad \omega_0^2>\beta^2$
- b）过阻尼 $\quad \omega_0^2<\beta^2$
- c）临界阻尼 $\quad \omega_0^2=\beta^2$





2. 受迫振动

系统在周期性外力作用下的振动



1)谐振子的受迫振动方程

假设强迫力按余弦规律 $F_{外}=F_0\cos\omega_{外}t$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_{弹}+f_{阻}+F_{外}\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+kx=F\cos\omega_{外}t$$

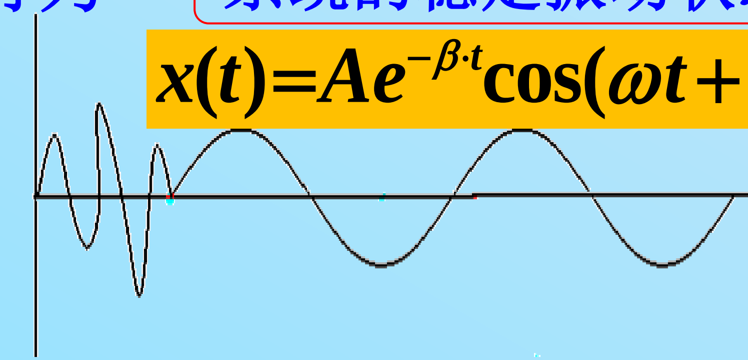
则有：$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega_{外}t$ ——运动方程

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}\qquad 2\beta=\frac{\gamma}{m}\qquad f_0=\frac{F_0}{m}$$

方程的解： $x(t)=\underbrace{A_0e^{-\beta\cdot t}\cos(\omega_0t+\varphi_0)}_{\text{反映系统的暂态行为}}+A_p\cos(\omega_{外}t+\alpha)$

系统的稳定振动状态

$x(t)=Ae^{-\beta\cdot t}\cos(\omega t+\varphi_0)$



经过足够长的时间，变为稳态态：

$$x(t)=A_p\cos(\omega_{外}t+\alpha)$$