大学物理(下)

华 中 科 技 大 学
张智
zzhang@hust.edu.cn

回顾：谐振动的特征、规律、判定与问题类型

1、特征

动力学特征

$$F_{合} = -kx$$

运动学特征　(微分方程特征)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

2、规律

位 移　$x = A\cos(\omega t + \phi)$　振动方程

三个特征量：A，ω，φ

3、谐振动的判定

符合以上三个方程中任意一个的运动即为谐振动。

4、由初始条件 (x_0, v_0) 定A, ϕ

若　$t=0$，位移 x_0，速度 v_0 (初始条件)

然后根据v_0的正负决定ϕ的取舍！　$v_0 = -A\omega\sin\phi$

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}$$

$$tg\phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

5、周期、频率、角频率

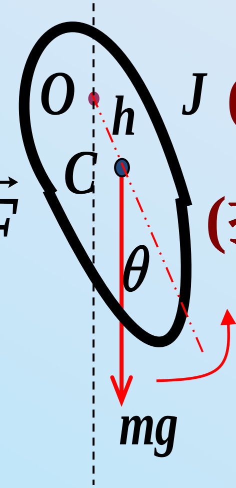
$\omega T = 2\pi$　　$\omega = 2\pi\nu$

例：求复摆（物理摆）的周期。

解：利用能量关系。

$$\frac{1}{2}J\omega^2+mgh(1-\cos\theta)=c$$

$$\vec{M}_O=\vec{r}\times\vec{F}$$



J (转动惯量)

(摆角很小)

$$J\omega\frac{d\omega}{dt}+mgh\cdot\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=0$$

$$\omega=\frac{d\theta}{dt} \qquad \sin\theta\approx\theta \text{ (因摆角很小)}$$

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+mgh\cdot\theta=0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgh}{J}\theta=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{mgh}{J}}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$$

周期：$T=2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgh}}$

单摆的等值单摆长：

$$L=J/mh$$

另解：

$$\frac{d\omega}{dt}<0$$

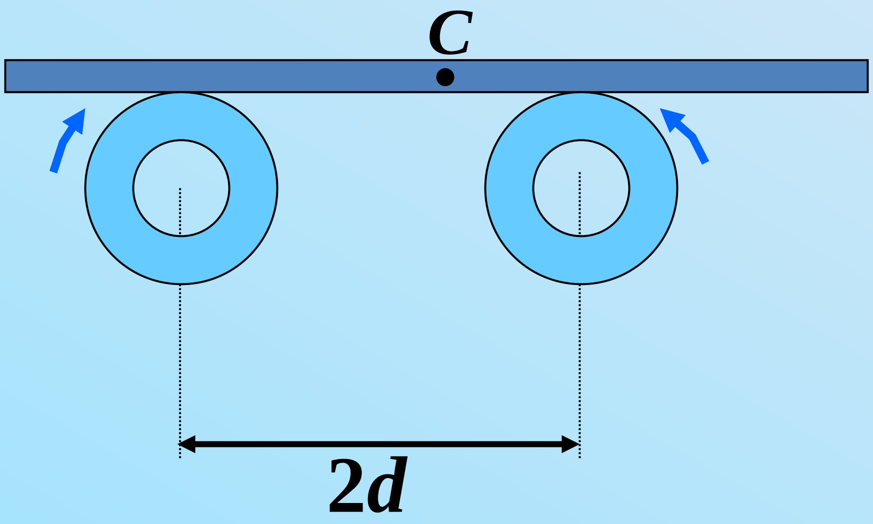
$$M=J\beta=J\frac{d^2\theta}{dt^2}<0$$

$$M=-mgh\sin\theta$$

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgh\sin\theta$$

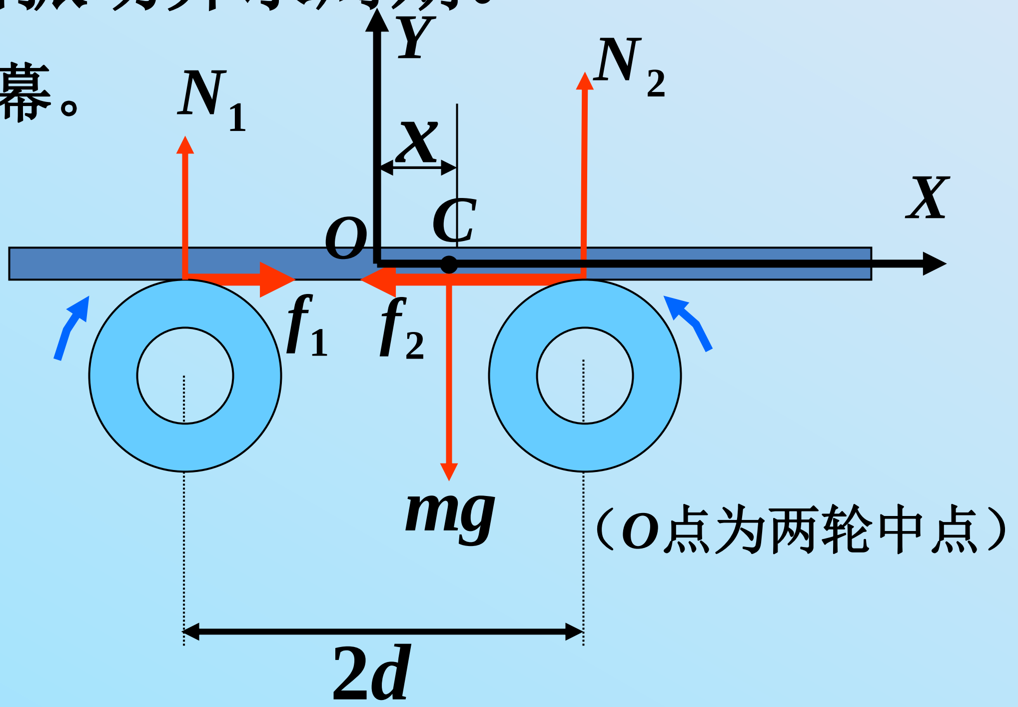
$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+mgh\cdot\theta=0 \text{ ?}$$

例: 两轮的轴相距 $2d$，且互相平行。两轮转速相同而方向相反, 将质量为m的一匀质薄板搁在两轮上，板与轮的摩檫系数为μ，若板的质心 C 起初距一轮较近（如图），试证明板作谐振动并求周期。



例: 两轮的轴相距 $2d$，且互相平行。两轮转速相同而方向相反，将质量为m的一匀质薄板搁在两轮上，板与轮的摩檫系数为μ，若板的质心 C 起初距一轮较近（如图），试证明板作谐振动并求周期。

解: 设转轴过O点,且垂直于屏幕。



$$F_x = f_1 + f_2 = \mu N_1 - \mu N_2$$

$$\therefore \mu(N_1 - N_2) = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$N_2 d - N_1 d - mgx = 0$$

$$N_1 - N_2 = -\frac{mgx}{d}$$

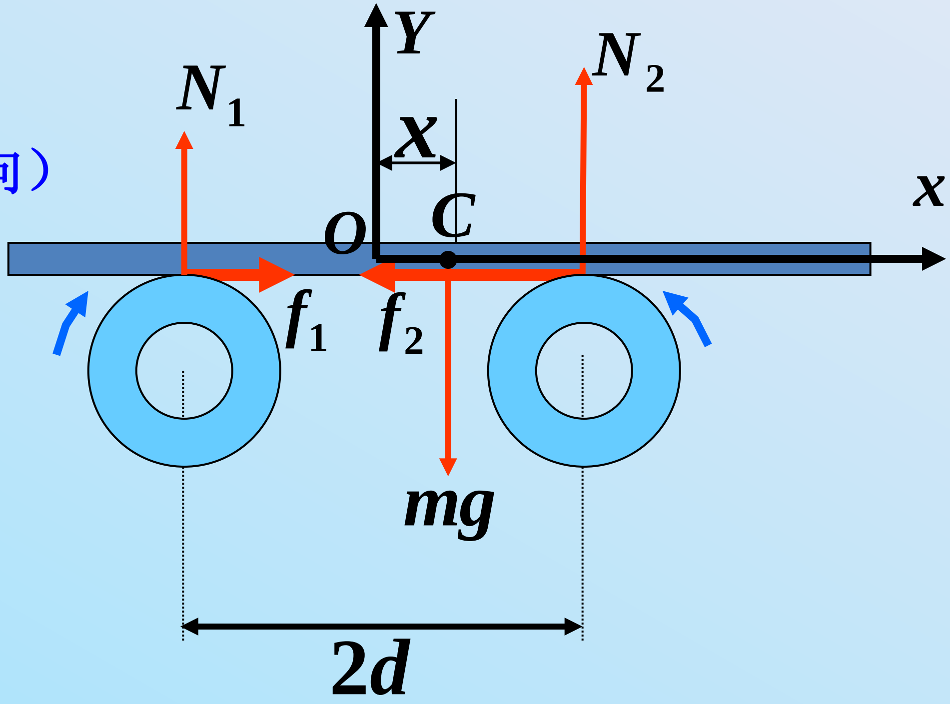
$$\therefore -\mu\frac{mgx}{d} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

另：亦可设转轴过C点求解。

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu g}{d}x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{\mu g}{d}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g}}$$

另解：设转轴过C点。

$$\mu N_1-\mu N_2=m\frac{d^2x}{dt^2}$$ （水平方向）



$$\begin{cases} N_1(d+x)-N_2(d-x)=0 \\ N_1+N_2=mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1=\dfrac{1}{2}mg(1-\dfrac{x}{d}) \\ N_2=\dfrac{1}{2}mg(1+\dfrac{x}{d}) \end{cases}$$

$$\therefore \mu N_1-\mu N_2=-\frac{\mu mgx}{d}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\mu mgx}{d}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu g}{d}x=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{\mu g}{d}} \qquad \therefore T=2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g}}$$

又解：水平方向上有

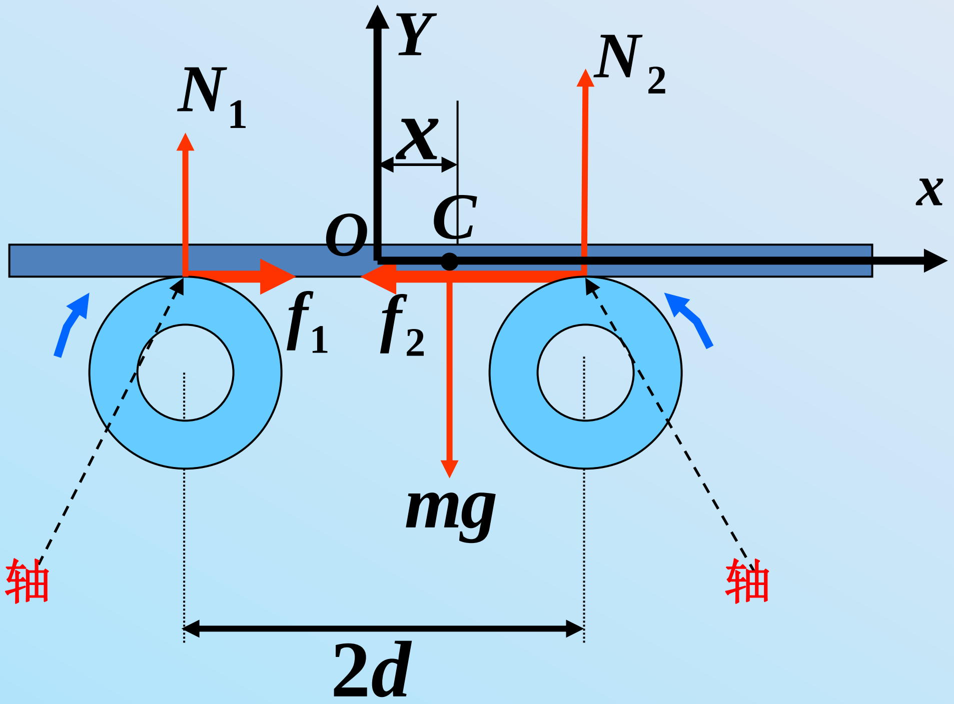
$$\mu N_1-\mu N_2=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$mg(d-x)-N_1 2d=0$$

$$N_1=\frac{1}{2}mg(1-\frac{x}{d})$$

$$mg(d+x)-N_2 2d=0$$

$$N_2=\frac{1}{2}mg(1+\frac{x}{d})$$



$$\therefore\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu g}{d}x=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{\mu g}{d}} \qquad \therefore T=2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g}}$$

例： 在一平板上放一质量为m =2 kg的物体，平板在竖直方向作谐振动，其振动周期为T = 0.5 s， 振幅A = 4 cm， 求

(1) 物体对平板的压力的表达式。

(2) 平板以多大的振幅振动时，物体才能刚好离开平板？

解: (1)物体随平板在竖直方向作谐振动，

对物体：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

取当$x=A$时$t=0$，则可有 $\varphi=0$

即 $x=A\cos\omega t$

$$f=ma=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-m\omega^2A\cos\omega t$$

$$\therefore N-mg=-m\omega^2A\cos\omega t$$

物体对平板的压力F为:

$$F=-N=-mg+m\omega^2A\cos\omega t$$

(2)物体刚好离开平板即N=0

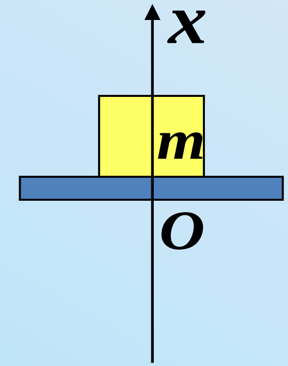
$$0-mg=-m\omega^2A\cos\omega t$$

(物体即将停止作谐振动)

$$\cos\omega t=\frac{g}{\omega^2A}$$

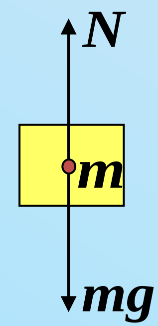
$$|\cos\omega t|=\frac{g}{\omega^2A}\le 1$$

$$\therefore A\ge\frac{g}{\omega^2}$$



另：向下运动时 $a\ge g$

则脱离。



$$\omega^2A\cos\omega t>g$$

$$A>\frac{g}{\omega^2\cos\omega t}\ge\frac{g}{\omega^2}$$

（∵ t=0时$x=A$，a最大）

二、 谐振动的矢量表示法—旋转矢量法

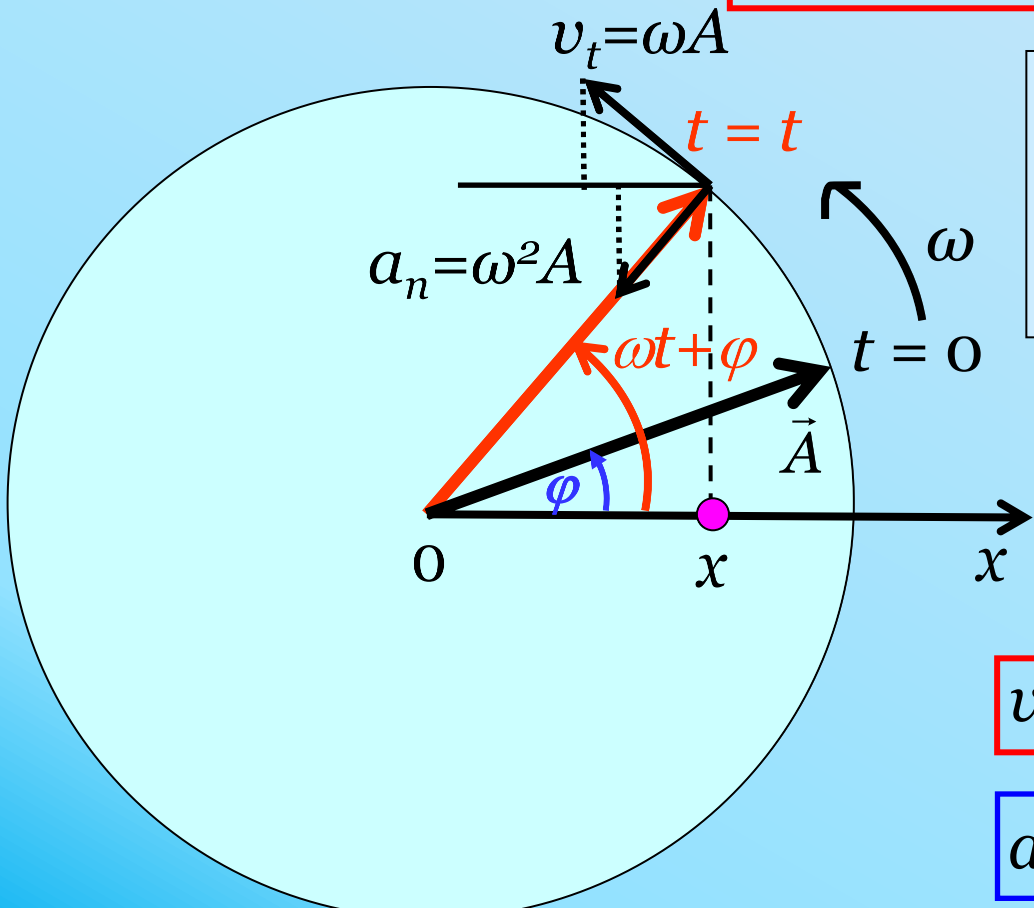
1. 旋转矢量与位移 x

设 t=0 时：$\vec{A}$ 与X轴的夹角为 φ

旋转矢量的末端在X轴上的投影：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

即：投影点的运动是谐振动。



旋转矢量 $\vec{A}$
以角速度 ω
逆时针转动

φ：初位相

$\omega t+\varphi$：位相

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

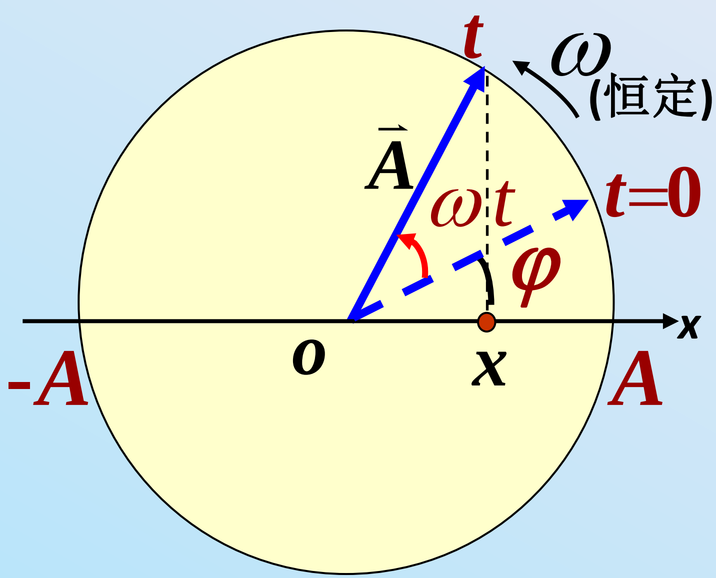
1. 旋转矢量与位移 x

设 t=0 时：$\vec{A}$ 与X轴的夹角为 φ

旋转矢量的末端在X轴上的投影：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

即：投影点的运动是谐振动。



三个特征量在此的含义：

- 振幅 A：圆周半径
- 圆频率 ω：匀角速度
- 位相 $\omega t+\varphi$：旋转矢量与 x 轴的夹角

讨论：几个特殊状态对应的旋转矢量的具体位置、速度正负。

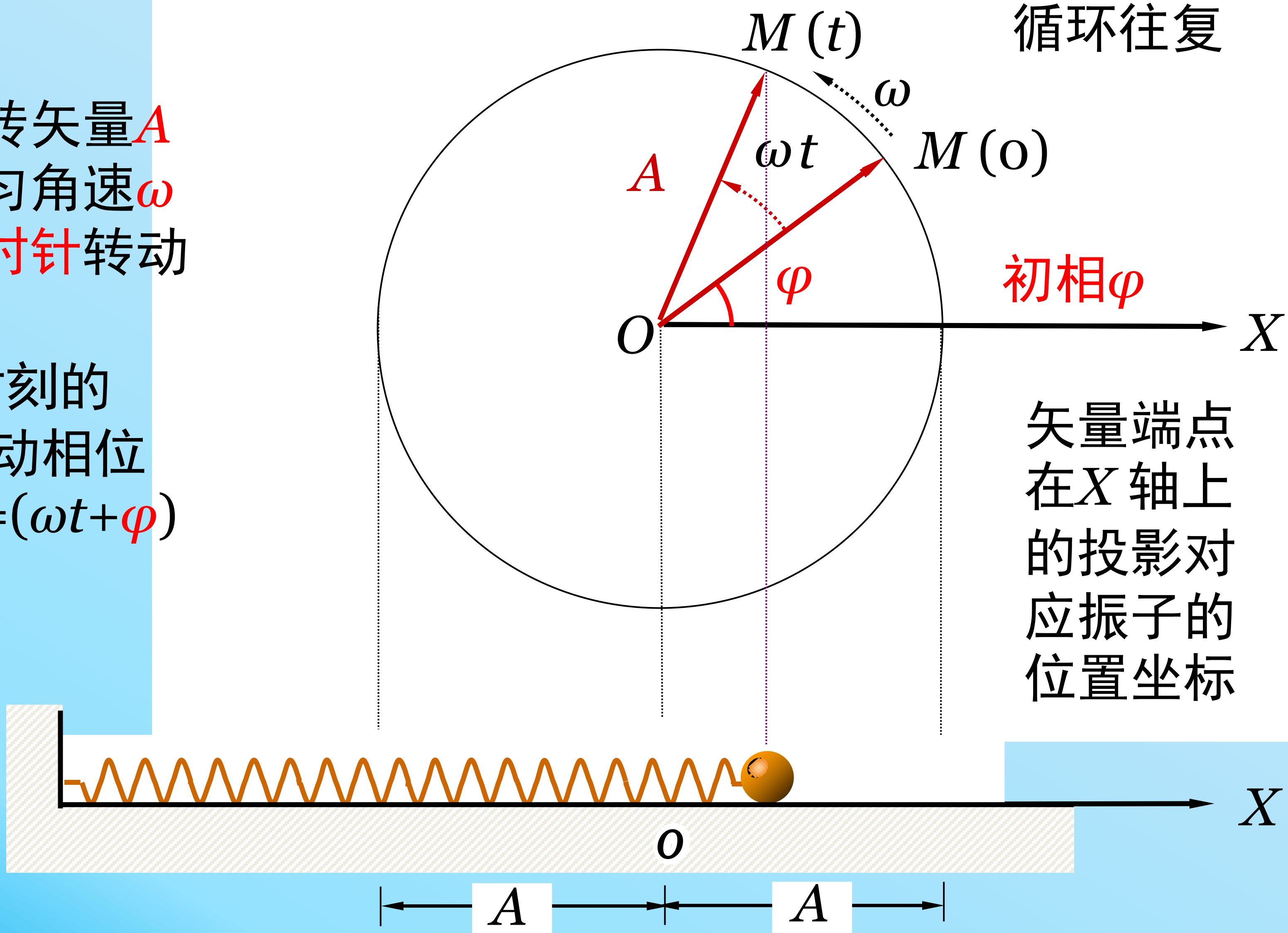
讨论：几个特殊状态对应的旋转矢量的具体位置、速度正负。

简谐振动方程 $\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$

旋转矢量A
以匀角速ω
逆时针转动

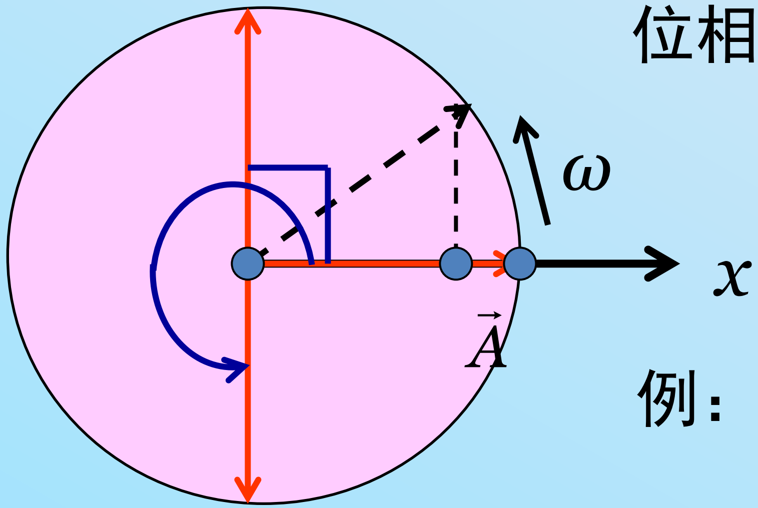
t时刻的
振动相位
$\Phi=(\omega t+\varphi)$

循环往复



矢量端点
在X轴上
的投影对
应振子的
位置坐标

讨论：几个特殊状态对应的旋转矢量的具体位置、速度正负。



位相 $\omega t+\varphi$：

表示物体任意时刻的运动状态。

例：由 $\omega t+\varphi$ 看 (x, v)

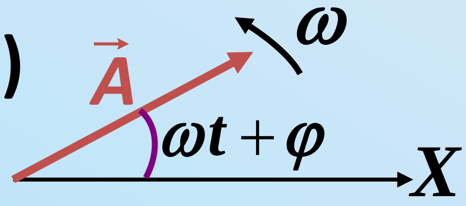
$\omega t+\varphi=0$
- 物体在正向位移极大处，速度为零。
- 下个时刻要向 x 轴的负方向运动。

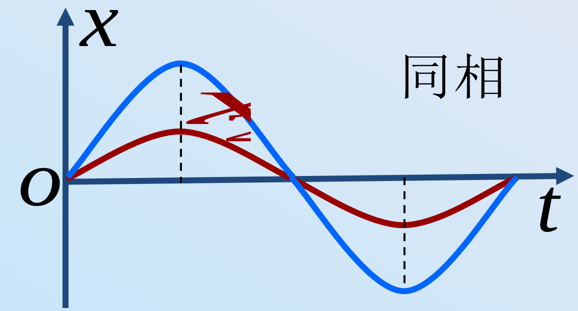
$\omega t+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$
- 物体正越过原点，以最大速率运动。
- 下个时刻要向 x 轴的负方向运动。

$\omega t+\varphi=\dfrac{3}{2}\pi$
- 物体正越过原点，以最大速率运动。
- 下个时刻要向 x 轴的正方向运动。

2. 旋转矢量与位相

1）位相 $(\omega t+\varphi)=(\widehat{\vec{A},\vec{X}})$





2）位相差

设两频率相等的谐振动：

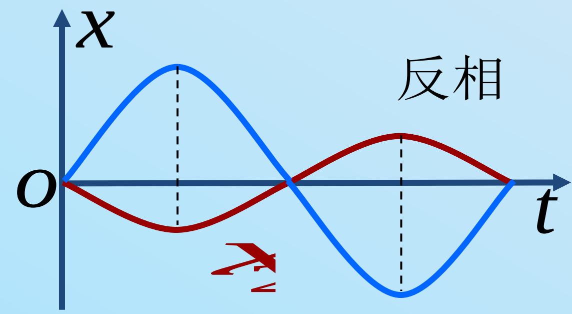
$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ $x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

它们的位相差： $\Delta\phi=\phi_2-\phi_1=\varphi_2-\varphi_1=\Delta\varphi$

由$\Delta\phi$可以比较两振动的步调：

(1) $\Delta\phi=2k\pi$ ——同相

(2) $\Delta\phi=(2k+1)\pi$ ——反相



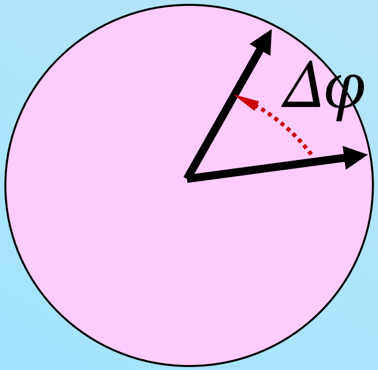
(3) $\Delta\phi\neq k\pi$ 则两振动不同相，若$\Delta\phi>0$，

则称x_2比x_1超前$\Delta\phi$的位相 (或x_1比x_2落后$\Delta\phi$的位相)

(4)不同物理量也可比较振动的步调

位相差: $\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\underline{\omega t + \varphi_1}) \\ x_2 = A_2\cos(\underline{\omega t + \varphi_2}) \end{cases}$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$



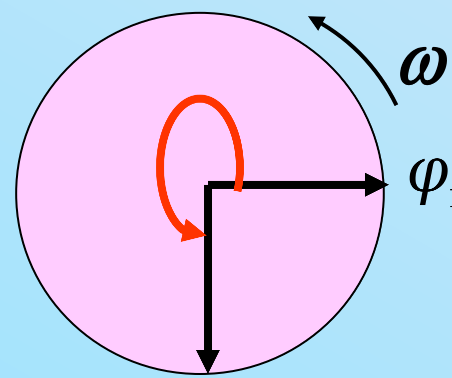
$$\Delta\varphi = \begin{cases} 0 \text{（或}2\pi\text{的整数倍）} & \text{步调一致} \\ \pi \text{（或}\pi\text{的奇数倍）} & \text{步调相反} \\ >0 \quad x_2 \text{ 比 } x_1 \text{ 超前}\Delta\varphi \\ \quad\ \text{或 } x_1 \text{ 比 } x_2 \text{ 落后}\Delta\varphi \end{cases}$$

注意:

当 $\Delta\varphi>\pi$ 时，　　例　$\Delta\varphi = \frac{3}{2}\pi$

一般不说x_2比 x_1超前　$\frac{3}{2}\pi$

而说x_1 比 x_2 超前　$\frac{\pi}{2}$



$\varphi_1 = 0$

$\varphi_2 = \frac{3}{2}\pi$

注意：

(*a*)比较两个振动的步调时，必须将所比的谐振动化成标准形式：

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$

初位相

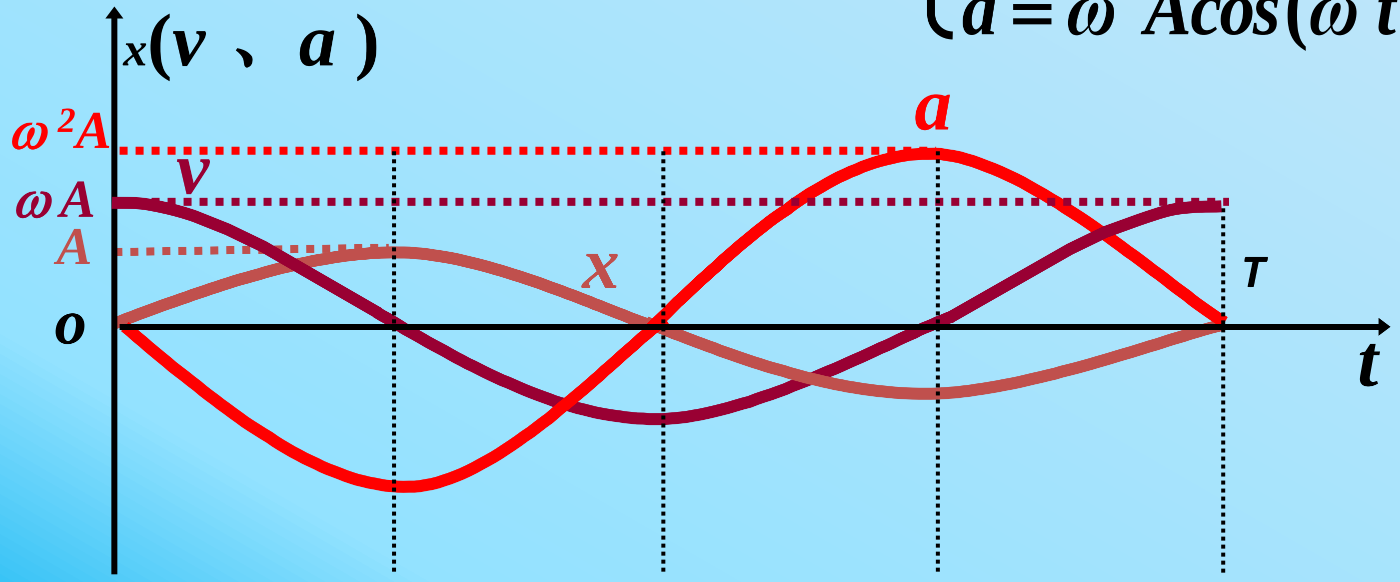
$$x_2 = -A_2\cos(\omega t+\varphi_2) = A_2\cos(\underbrace{\omega t+\varphi_2+\pi}_{\phi_2})$$

$$\Delta\phi = \Delta\varphi + \pi$$

(*b*)不同物理量比较振动的步调-例1

v比x超前0.5π，a比x超前π—反相

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi) \\ v = -\omega A\sin(\omega t+\varphi) \\ \quad = \omega A\cos(\omega t+\varphi+\dfrac{\pi}{2}) \\ a = \omega^2 A\cos(\omega t+\varphi+\pi) \end{cases}$$



(*c*)不同物理量比较振动的步调-例2 —— 交流电的功率

瞬时功率$P(t)$由瞬间电压和瞬间电流决定：

$$P(t)=u(t)i(t)$$

一般来说，瞬间电压和瞬间电流之间有位相差，

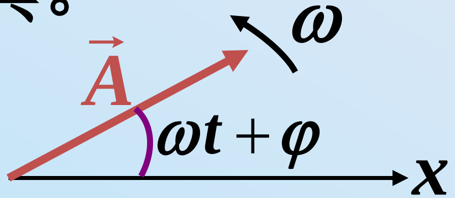
$$i(t)=I_0\cos\omega t$$

$$u(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\begin{aligned}P(t)&=U_0\cos(\omega t+\varphi)\cdot I_0\cos\omega t\\&=\frac{1}{2}U_0I_0\cos\varphi+\frac{1}{2}U_0I_0\cos(2\omega t+\varphi)\end{aligned}$$

平均功率 $\overline{P}=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T P(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}U_0I_0\cos\varphi$

旋转矢量法只是直观描述谐振动的工具。

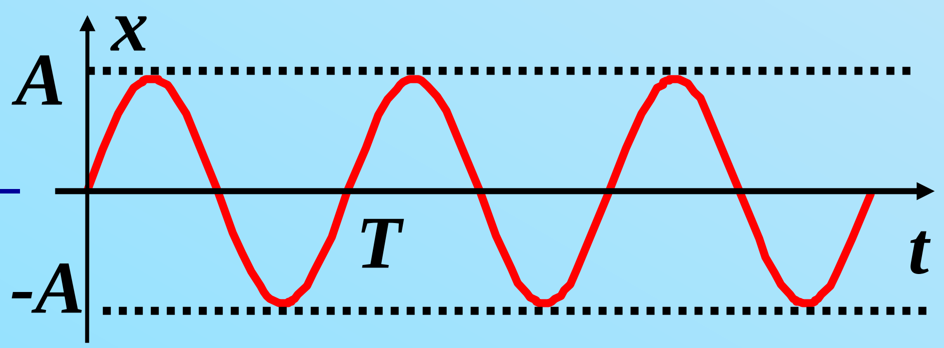


旋转矢量图

谐振动的另外两种表示：

振动方程 —— $\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$

振动曲线 ——

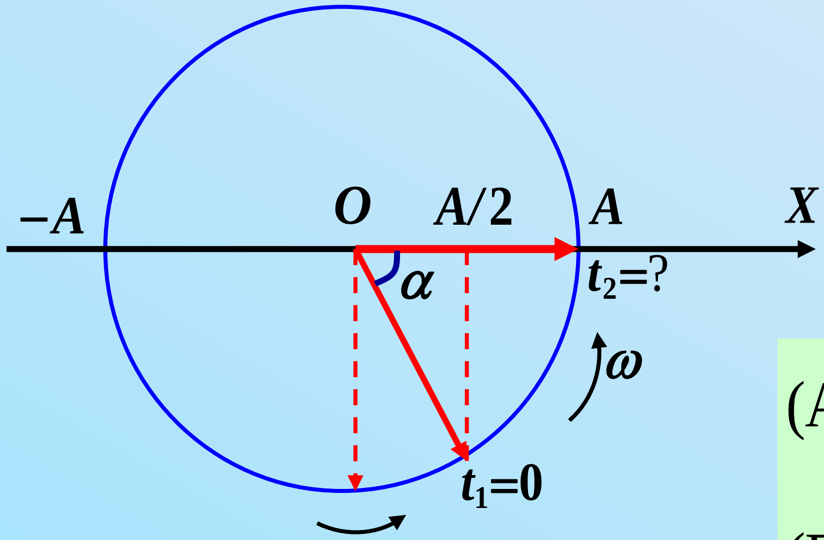


例: 一质点作谐振动，周期为T。当它由平衡位置向X轴正方向运动时，从二分之一最大位移处到最大位移处这段路程所需时间为多少？

解: 可根据旋转矢量图求解。

$$\Delta t = t_2 - t_1 = ?$$

$\cos\alpha = (A/2)/A = 1/2$



结合图知, $\alpha = \pi/3$

$$\Delta t = \alpha / \omega$$

$$\omega = 2\pi/T$$

$$\Delta t = \alpha / \omega = (\pi/3)/(2\pi/T) = T/6$$

(A) $\dfrac{T}{4}$

(B) $\dfrac{T}{3}$

(C) $\dfrac{T}{6}$

(D) $\dfrac{T}{2}$

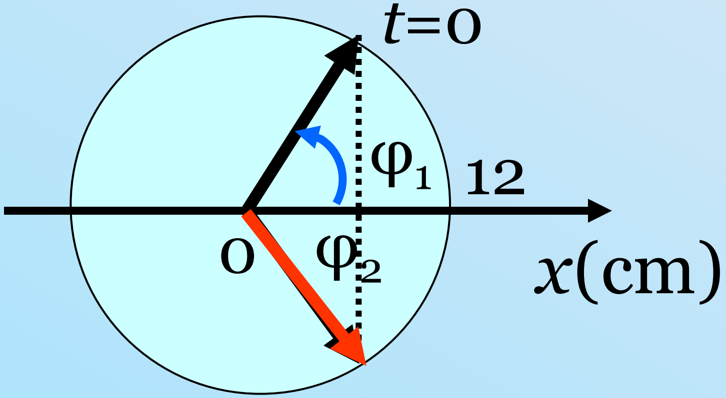
例. 一物体沿 x 轴作简谐振动，A= 12cm, T = 2s， 当t = 0时, x_0= 6cm, 且向x正方向运动。

求 (1) 初位相φ。

(2) t =0.5s 时, 物体的位置、速度、加速度。

解：(1) 由旋转矢量图看

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{3} \\ \varphi = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$



(2) t =0.5s 时

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) = 12\times\cos\left(\frac{2\pi}{2}\times 0.5-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 10.4\,\text{cm}$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi) = -18.9\,\text{cm/s}$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi) = -103\ \text{cm/s}^2$$

例. 一物体沿 x 轴作简谐振动，A= 12cm, T = 2s， 当t = 0时, x_0= 6cm, 且向x正方向运动。

求 (3)　在x =– 6cm处且向 x负方向运动时，物体的速度、加速度以及从这一位置回到平衡位置需的时间。

解:（用解析法）　$-6 = 12\times\cos(\pi t - \dfrac{\pi}{3})$

$$\Rightarrow (\pi t - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow t = 1\,\mathrm{s}$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) = -32.7\,\mathrm{cm/s}$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = 59.2\,\mathrm{cm/s^2}$$

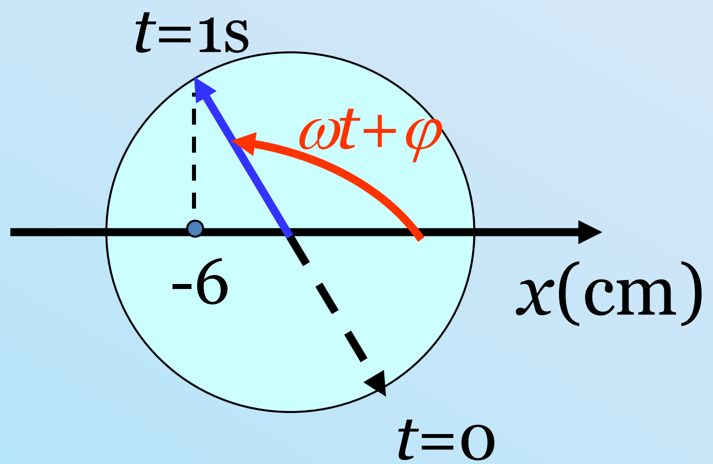
最简单的解法是用**旋转矢量法**

x=-6cm时，“$\omega t+\varphi$”如图

与t =0 相比较知：

振动物体经过了$T/2$

故t =1s　　再求得 v，a

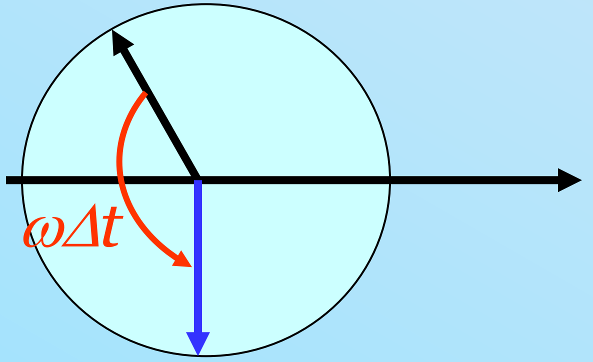


从这一位置回到平衡位置所需的时间：

$$\Delta t=?$$

$$\omega\Delta t=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$$

$$\Delta t=\frac{5\pi}{6\pi}\approx 0.8333\ \mathrm{s}$$



例. 一物体沿 x 轴作简谐振动，A= 12cm, T = 2s， 当t = 0时, x_0= 6cm, 且向x正方向运动。

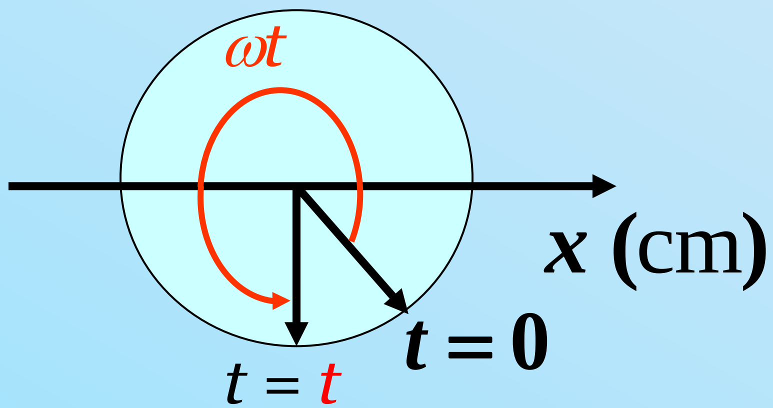
求 (4)　从初始时刻开始，第二次通过平衡位置的时刻t。

解: 如图所示, $t = t$ 时物体第二次过平衡位置

$$\omega t = \frac{\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{11\pi}{6}$$

$$t = \frac{11}{6}\ \mathrm{s}$$



例: 一质点作谐振动，速度最大值$v_{max}=5\text{cm/s}$，振幅$A=2\text{cm}$。令速度具有正最大值的那一刻$t=0$。求振动方程。

解: $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

$=-v_{max}\sin(\omega t+\varphi)$

$v_{max}=A\omega, \Rightarrow 5=2\omega$

$\omega=2.5\ \text{rad/s}$

$t=0$ 时， $v=v_{max}>0$

而$v_{max}=-v_{max}\sin(\omega t+\varphi)$

故 $\sin\varphi=-1$, $\varphi=3\pi/2$

$\therefore x=2\cos(2.5t+3\pi/2)\ \text{cm}$

(A) $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$

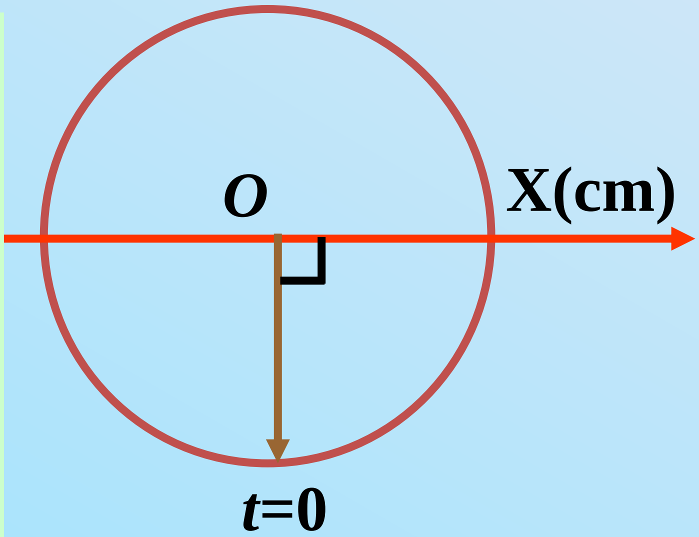
(B) $\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$

(C) $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$

(D) $\varphi=\pi$

另解: 根据旋转矢量图求φ。

$v_{max}=A\omega, \Rightarrow \omega=2.5\ \text{rad/s}$



所以，初位相$\varphi=3\pi/2$

$\therefore x=2\cos(2.5t+3\pi/2)\ \text{cm}$

例： 已知 x—t曲线，写出振动方程。

解： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$A = 2\text{cm}$ $\varphi = ?$

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$\omega = ?$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

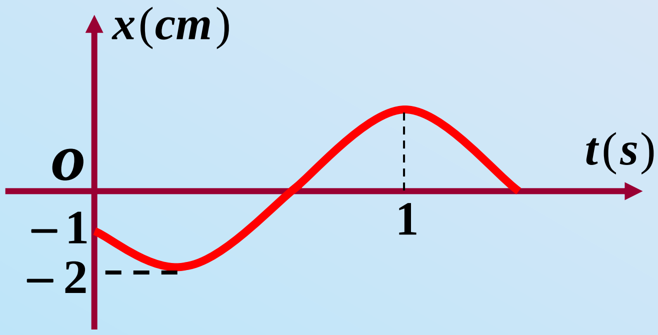
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{4\pi/3}{1} = \frac{4\pi}{3}\ \text{rad/s}$$

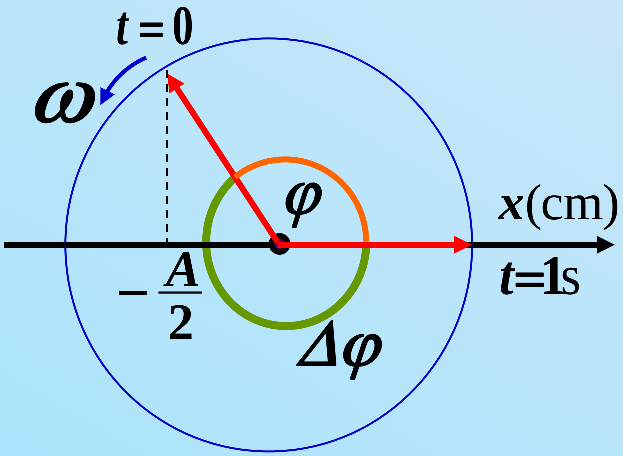
(A) $\omega = \frac{3\pi}{4}$ rad/s

(B) $\omega = \frac{4\pi}{3}$ rad/s

(C) $\omega = \frac{2\pi}{3}$ rad/s

(D) $\omega = \frac{3\pi}{2}$ rad/s





$$\therefore x = 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right)\text{cm}$$

例: 已知谐振动A=10cm ,T=2s , 当 t=0 时位移为 –5cm, 且向 x 负向运动。求:

（1）振动方程。

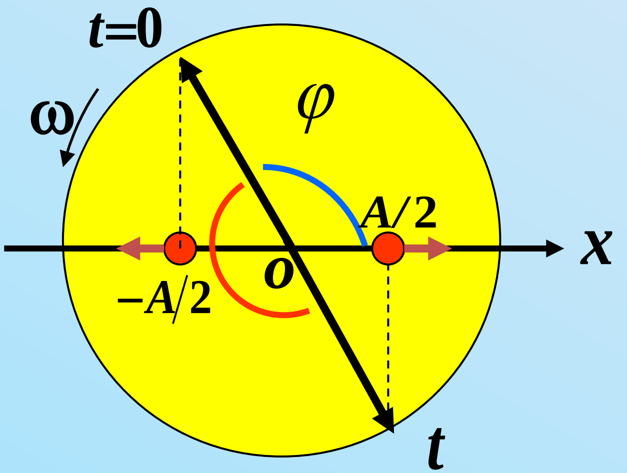
（2） x=5cm 且向 x 正向运动时的速度、加速度及从这一位置回到平衡位置的最短时间。

解:（1）$x = A\cos(\omega t+\varphi)$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi \quad (\mathrm{rad/s})$$

由旋转矢量得 $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$

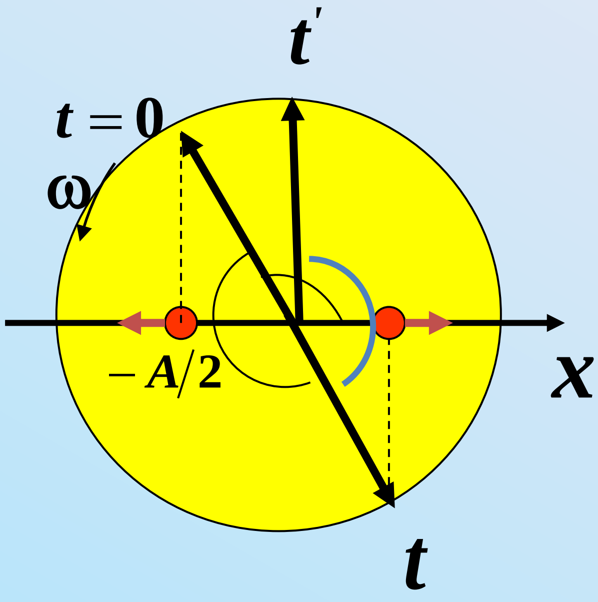
$$x=0.1\cos(\pi t+\frac{2\pi}{3})\ \mathrm{m}$$



（2）先求 t 。由旋转矢量法

$$t=\frac{\Delta\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{\pi}=1\mathrm{s}$$ （半个周期）

$$v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$
$$= -0.1\pi\sin(\pi + 2\pi/3)$$
$$= 0.27\,\text{m/s}$$
$$a = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$
$$= -0.1\pi^2\cos(\pi + 2\pi/3)$$
$$= -0.49\,\text{m/s}^2$$



由旋转矢量法：

（也可用解析法）

$$\Delta\varphi' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi'}{\omega} = \frac{5\pi/6}{\pi} = \frac{5}{6}\,\text{s}$$

例：轻质弹簧下挂一小盘,小盘作谐振动, 平衡位置在原点，位移向下为正，并用余弦表示。小盘处于最低位置的时刻有一小物体落到盘上并粘住。若以新的平衡位置为原点，并设新的平衡位置相对原平衡位置向下移动的距离小于原振幅，小物体与盘相碰为计时零点。那么，新的位移表达式的初位相在[　　　]

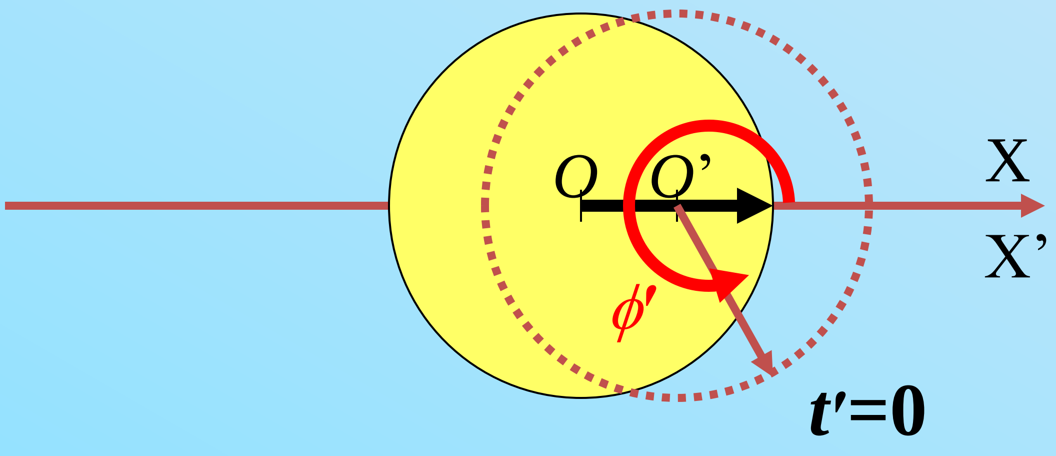
(A) 0~ π/2 之间　　　　(B) π/2 ~π 之间

(C) π ~ 3π/2之间　　　　(D) 3π/2 ~ 2π之间

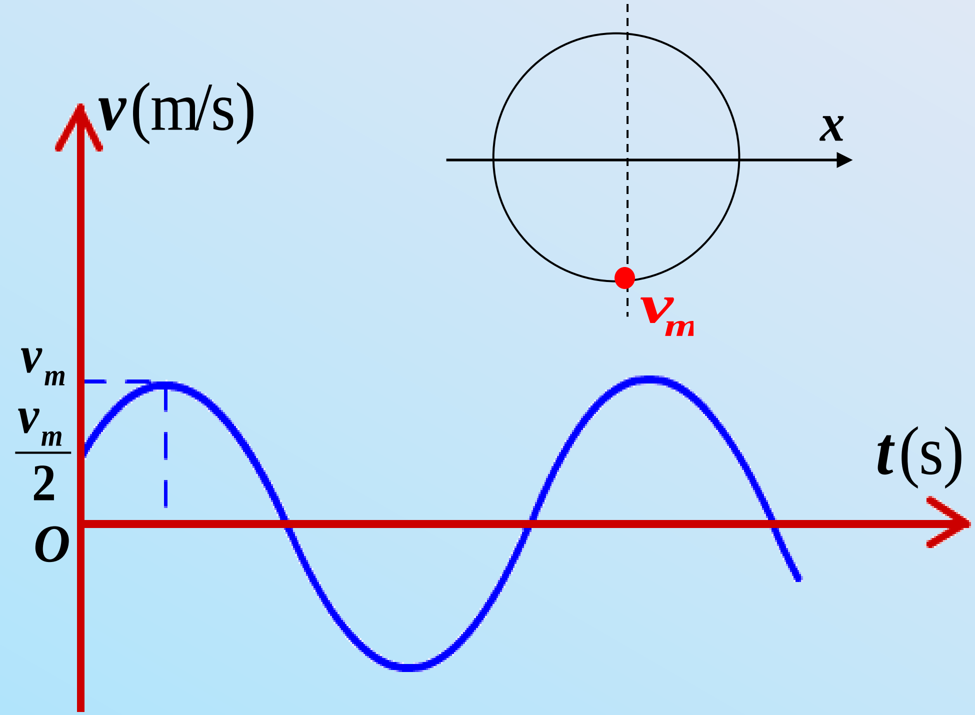
解：$t'=0$ 时，盘与小物体继续下移。故$v'>0$，　$x'>0$。

可作旋转矢量图：

所以 (D) 对。



例: 右图为一作谐振动的物体的**速度--时间**曲线. 若用余弦函数表示简谐振动，则振动的初位相是多少？



解： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$= -v_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$t = 0 \text{时}, v = \frac{v_m}{2}$$

$$\therefore \frac{v_m}{2} = -v_m \sin\varphi$$

$$\sin\varphi = -\frac{1}{2}$$

$\varphi = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ 应取哪一个值？

考虑 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v_m\omega\cos(\omega t + \varphi)$

$t=0$时, $a>0$ $\quad \therefore -v_m\omega\cos\varphi > 0$

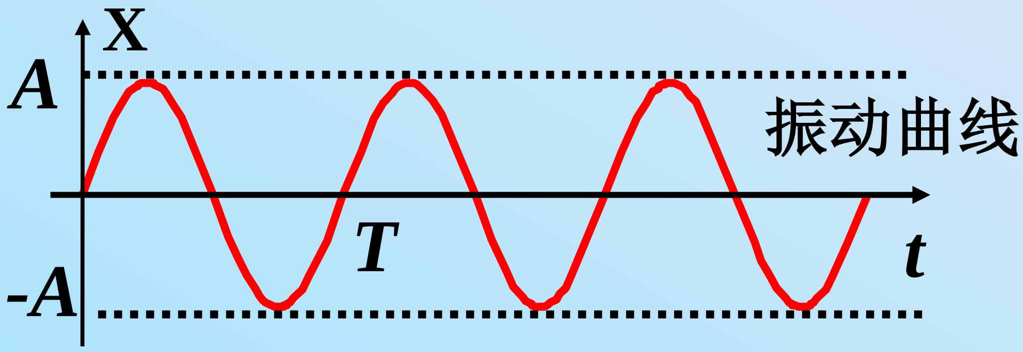
$\therefore \cos\varphi < 0$ $\quad$ 即 $\varphi = \frac{7\pi}{6}$

● 谐振动的表示法

1. 解析法

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

2. 振动曲线法

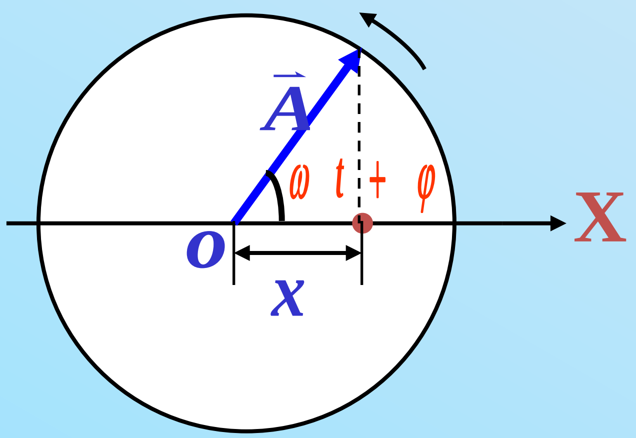


3. 旋转矢量法

旋转矢量的末端在X轴上的投影：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

即：投影点的运动是一谐振动。

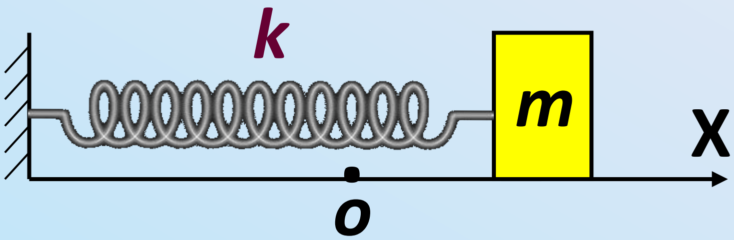


旋转矢量图

三、机械谐振动系统的能量

1. 简谐振动系统的动能和势能

(1)水平弹簧振子的能量



$$E_{总}=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$$

$$x=A\cos(w\ t+\varphi)$$

$$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

任意时刻:

动能 $E_k=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

势能 $E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$

随时间变化

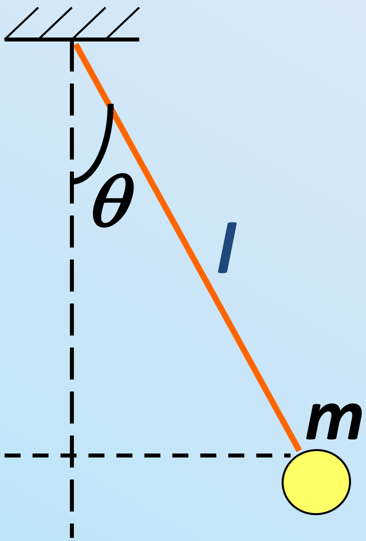
$$E_{总}=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m(\omega A)^2=常量$$

(2)单摆系统的能量

$$\theta=\Theta\cos(\omega t+\varphi)$$

$$E_{总}=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2+mgh$$

$$=\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+mgl(1-\cos\theta)$$



任意时刻:

动能 $E_k=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}ml^2\omega^2\Theta^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

势能 $E_p=mgh=mgl(1-\cos\theta)$

$$=\frac{1}{2}ml^2\omega^2\Theta^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

随时间变化

（$\sin\theta\approx\theta$）

$$\boxed{1-\cos\theta\approx\frac{\theta^2}{2}}$$

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

$$\boxed{gl=\omega^2 l^2}$$

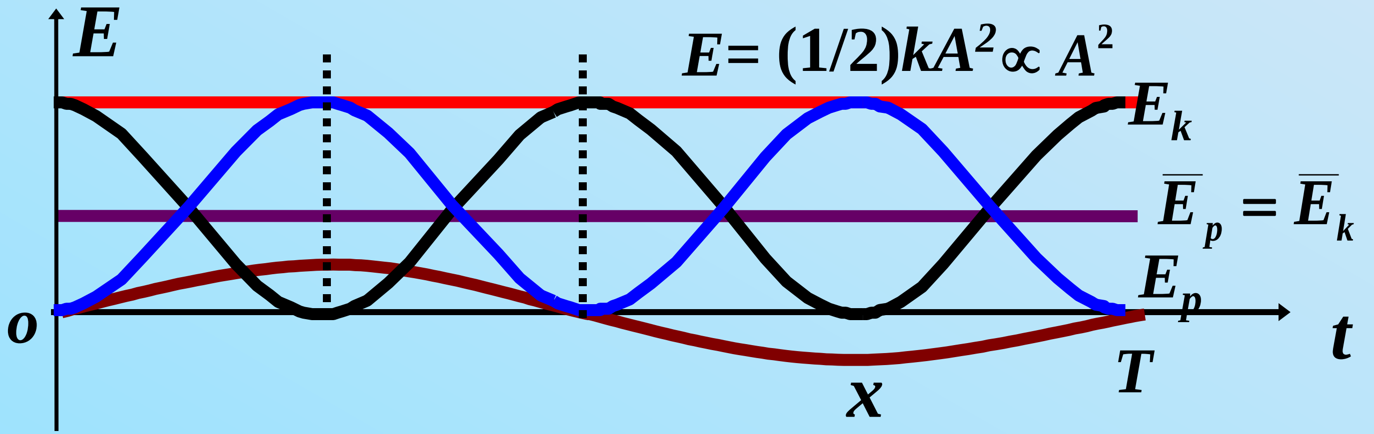
$$E_{总}=E_k+E_p=\frac{1}{2}ml^2\omega^2\Theta^2=\frac{1}{2}mgl\Theta^2$$ =常量

2. 谐振动系统能量的特点

1）E_K、E_p各自随时间作周期性变化

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)}\qquad\boxed{E_p=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)}$$

E_k、E_p 总是此涨彼消



可见：谐振动的过程是动能与势能相互转换的过程。

2）$E_{总}$=常量

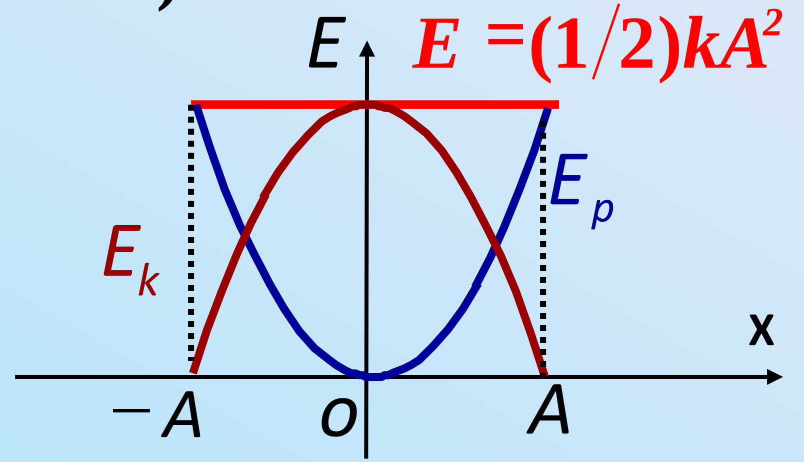
3）动能与势能的时间平均值: $\overline{E_p}=\overline{E_k}=\frac{1}{2}E_{总}$

$$\overline{E_k}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)\mathrm{d}t=\frac{kA^2}{2T\omega_0}\int_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi_0}\sin^2 x\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E_P}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)\mathrm{d}t=\frac{kA^2}{2T\omega_0}\int_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi_0}\cos^2 x\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{4}kA^2$$

$$E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi) \longrightarrow E_k=\frac{1}{2}k(A^2-x^2)$$

$$E_p=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \longrightarrow E_p=\frac{1}{2}kx^2$$



4）$E_{总}$正比于振幅的平方A^2

可见：

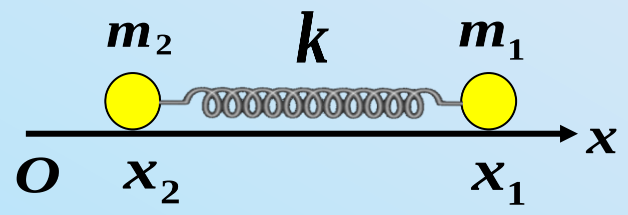
*a.*弹簧振子的动能和势能的平均值相等，
均为总机械能的一半。

b.谐振动的总能量与振幅的平方成正比 $\boxed{E_{总} \propto A^2}$

*c.*振幅不仅给出谐振动运动的范围，而且还
反映了振动系统总能量的大小及振动的强度。

这些结论适用于任何谐振动。

例：如图所示，有两个质量各为m_1, m_2并有轻弹簧连系着的小球放在水平光滑桌面上，弹簧的强度是：当m_1固定时m_2能够每秒振动n次。试求(1)当m_2固定时，m_1每秒振动的次数；(2)当m_1, m_2均自由时，它们每秒振动的次数N。（设每次振动的方向均沿弹簧的直线方向）



解：(1)

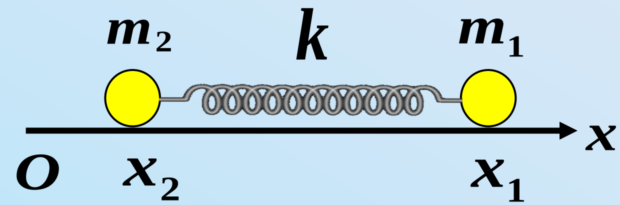
$$\omega_2 = 2\pi n = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

$$\omega_1 = 2\pi n' = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$$

$$\therefore n' = n\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

例：如图所示，有两个质量各为m_1, m_2并有轻弹簧连系着的小球放在水平光滑桌面上，弹簧的强度是：当m_1固定时m_2能够每秒振动n次。试求(1)当m_2固定时，m_1每秒振动的次数；(2)当m_1, m_2均自由时，它们每秒振动的次数N。（设每次振动的方向均沿弹簧的直线方向）



解：(2) 设弹簧原长为l

弹簧总的伸缩量为$[(x_1-x_2)-l]$

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}&=-k[(x_1-x_2)-l] \\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}&=k[(x_1-x_2)-l] \end{aligned}\right\} \quad \frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{d^2x_2}{dt^2}=-k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)[(x_1-x_2)-l]$$

令$x=x_1-x_2-l, \frac{1}{m}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x=-\omega^2x$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}$$

$$\omega=2\pi N=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}$$

$$\boxed{\omega_2=2\pi n=\sqrt{\frac{k}{m_2}}}$$

$$\therefore N=n\sqrt{\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}\cdot\sqrt{\frac{m_2}{k}}=n\sqrt{\frac{m_2+m_1}{m_1}}$$