信号分析

邹腊梅
zlmhust@163.com

QQ: 156685941

科技楼1008
智能科学与技术系
华中科技大学人工智能与自动化学院

第四章 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换

常用函数的拉普拉斯变换

拉普拉斯变换的性质

拉普拉斯反变换

线性系统的拉普拉斯变换分析法

- 傅里叶变换在分析信号的频谱等方面是十分有效的，但在系统分析方面有不足之处：
  - 对时间函数限制严，$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ 是充分条件。不少函数不能直接按定义求

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

    如增长的指数函数 e^{at}, a>0，傅里叶变换就不存在。
  - 不能解决零输入响应问题，只能解决零状态响应。
  - 求傅里叶反变换也比较麻烦。

- 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

用 $e^{-\sigma t}f(t)$来保证傅里叶积分收敛

$$\mathcal{F}\,[e^{-\sigma t}f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

令 $s=\sigma+j\omega$ 称为复频率

σ： 衰减因子

ω： 振荡因子

$$\therefore \quad F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

称为复傅里叶变换或双边拉普拉斯变换。也称为象函数。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

称为拉普拉斯反变换，也称原函数。

- 单边拉普拉斯变换

对于有始信号，$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ 记 $F(s)=\mathrm{L}[f(t)]$

积分下线定为0_-，是为了包括$\delta(t)$。

称为单边拉普拉斯变换或拉普拉斯变换。

$f(t)$拉氏变换存在的充分条件：$f(t)$在$t\geq 0$时分段连续，且满足下式$\int_{0_-}^{\infty}\left|f(t)e^{-\sigma t}\right|dt<\infty$

$f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds \qquad t>0$ 记 $f(t)=\mathrm{L}^{-1}[F(s)]$

称为单边拉氏反变换或拉氏反变换。简记：$f(t)\Leftrightarrow F(s)$

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

连续时间傅里叶变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

线性时不变系统：脉冲响应 **h(t)**

$$e^{j\omega t} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = H(\omega)e^{j\omega t}$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$e^{st} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = H(s)e^{st}$$

$$h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

拉氏变换：**x(t)**

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad s = \sigma + j\omega$$

$$X(s) = X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma + j\omega)t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$

$$X(s) = F\left\{x(t)e^{-\sigma t}\right\}$$

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$X(s)\big|_{s=j\omega} = F\left\{x(t)\right\} = X(\omega)$$

拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

双边拉普拉斯变换

$s=\sigma+j\omega$

$f(t)$存在于整个区间

$-\infty<t<\infty$

傅里叶变换

$s=j\omega$

$f(t)$存在于整个区间

$-\infty<t<\infty$

拉普拉斯变换

$s=\sigma+j\omega$

$f(t)$为因果信号

$f(t)=0,\ t<0$

傅里叶变换和拉普拉斯变换是双边拉普拉斯变换的特殊情况；

双边或单边拉普拉斯变换是傅里叶变换的推广。

- 利用拉普拉斯变换进行系统分析有几个优点，其中包括：
  - 可以只用代数运算就可以求解线性非时变系统的微分方程。
  - 可以同时求得系统的全响应，即强迫响应和自由响应；或零输入响应和零状态响应。
  - 可以建立网络的**S**域模型，对动态网络进行拉普拉斯变换分析。

第四章 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换

常用函数的拉普拉斯变换

拉普拉斯变换的性质

拉普拉斯反变换

线性系统的拉普拉斯变换分析法

三个基本函数的拉普拉斯变换

- 指数函数

$f(t)=e^{s_0 t}\varepsilon(t)$　s_0为复常数。也可写成$f(t)=e^{s_0 t}$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{s_0 t}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}dt=\frac{1}{s-s_0}$$

即 $e^{s_0 t}\varepsilon(t)\Leftrightarrow\dfrac{1}{s-s_0}$　　$e^{s_0 t}\Leftrightarrow\dfrac{1}{s-s_0}$

令 $s_0=\pm\alpha$ 实数，　则 $e^{\pm\alpha t}\varepsilon(t)\Leftrightarrow\dfrac{1}{s\mp\alpha}$　　$e^{\pm\alpha t}\Leftrightarrow\dfrac{1}{s\mp\alpha}$

令 $s_0=\pm j\beta$ 虚数，　则 $e^{\pm j\beta t}\varepsilon(t)\Leftrightarrow\dfrac{1}{s\mp j\beta}$　　$e^{\pm j\beta t}\Leftrightarrow\dfrac{1}{s\mp j\beta}$

无特殊说明，拉氏变换所指为单边拉普拉斯变换

三个基本函数的拉普拉斯变换

- 单位阶跃函数 ε(t)

已知 $e^{s_0 t}\varepsilon(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{s-s_0}$

令上例中s_0=0。则 $\varepsilon(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{s}$

- 单位冲激函数 δ(t)

$$F(s) = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

$$\therefore \quad \delta(t) \Leftrightarrow 1$$

第四章 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换

常用函数的拉普拉斯变换

拉普拉斯变换的性质

拉普拉斯反变换

线性系统的拉普拉斯变换分析法

拉普拉斯变换的性质

线性	$\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} k_i . LT[f(t)]$
微分	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
积分	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$
复频域微分/积分	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{t}^{\infty} F(s)$
时移	$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$
频移	$f(t)e^{-at}$	$F(s+a)$

拉普拉斯变换的性质

尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
初值定理	$\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$	
终值定理	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$	
卷积定理	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s).F_2(s)$
	$f_1(t).f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}F_1(s) * F_2(s)$

拉普拉斯变换的性质

例 1 余弦函数 $f(t)=\cos\beta t\cdot\varepsilon(t)$

频域微分性质

$$tf(t)\Leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{1}{s}\qquad \cos\beta t=\frac{1}{2}(e^{j\beta t}+e^{-j\beta t})$$

应用频移和线性性质

$$\therefore\ \cos\beta t\cdot\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\beta}+\frac{1}{s+j\beta}\right]=\frac{s}{s^2+\beta^2}$$

频域微分性质 →

$$t\cdot\cos(\beta t)\Leftrightarrow\frac{(s^2-\beta^2)}{(s^2+\beta^2)^2}$$

例 2 正弦函数 $f(t)=\sin\beta t\cdot\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{1}{s}\qquad \sin\beta t=\frac{1}{2j}(e^{j\beta t}-e^{-j\beta t})$$

应用频移和线性性质

$$\therefore\ \sin\beta t\cdot\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\beta}-\frac{1}{s+j\beta}\right]=\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$$

频域微分性质 →

$$t\cdot\sin(\beta t)\Leftrightarrow\frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$$

例 3 单位斜坡函数 $f(t)=t\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{1}{s}\qquad t\varepsilon(t)\Leftrightarrow-(\frac{1}{s})'=\frac{1}{s^2}$$

应用频域微分性质 $t^2\varepsilon(t)\Leftrightarrow\dfrac{2}{s^3}$

$$tf(t)\Leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$$

例 4 指数余弦函数 $f(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t\cdot\varepsilon(t)$

$\because \quad \cos\beta t\cdot\varepsilon(t)\Leftrightarrow \dfrac{s}{s^2+\beta^2}$

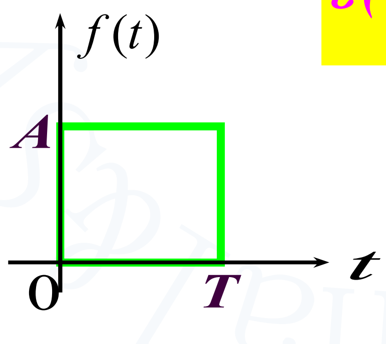
应用频移性质：

$$f(t)e^{-at}\Leftrightarrow F(s+a)$$

$$\therefore \quad e^{\alpha t}\cos\beta t\cdot\varepsilon(t)\Leftrightarrow \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

例 5 门函数（矩形波） $f(t)=A[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]$

$$\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{1}{s}$$

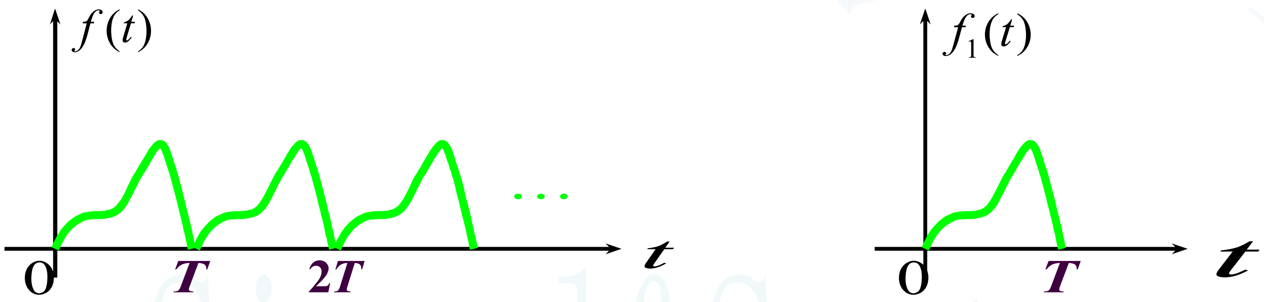


应用时移性质：

$$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\Leftrightarrow e^{-st_0}F(s)$$

$$\therefore \quad F(s)=\frac{A}{s}-\frac{A}{s}e^{-sT}=\frac{A}{s}(1-e^{-sT})$$

例 6 任意周期函数



设 $f_1(t)$为周期函数的第一周期，则周期函数可表示为：

$$f(t)=f_1(t)+f_1(t-T)+f_1(t-2T)+\cdots$$

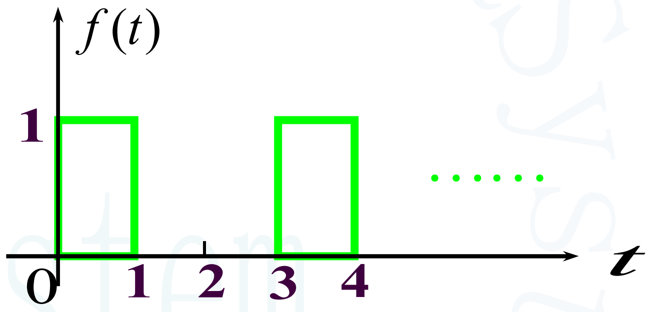
若 $f_1(t)\Leftrightarrow F_1(s)$，应用时移性质： $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\Leftrightarrow e^{-st_0}F(s)$

$$F(s)=F_1(s)+F_1(s)e^{-sT}+F_1(s)e^{-2sT}+\cdots$$

$$=F_1(s)[1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\cdots]=\boxed{\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}}$$

例 7 周期矩形波 $f_1(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$，T=3

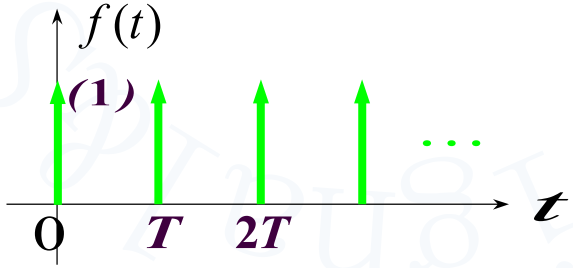
$$F_1(s)=\frac{1-e^{-s}}{s},$$



因为 $$\boxed{F(s)=\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}}$$

$$\therefore\quad F(s)=\frac{1-e^{-s}}{s}\cdot\frac{1}{1-e^{-3s}}=\frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-3s})}$$

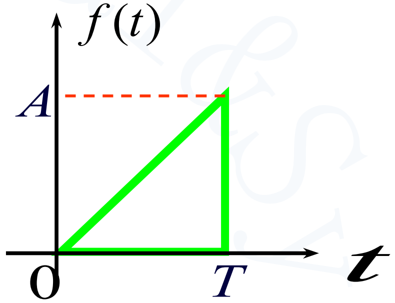
例 8 冲激串 $f_1(t)=\delta(t)$



$$F_1(s)=1,\quad \therefore\quad F(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

拉普拉斯变换的性质

例 9 锯齿波 $f(t)=\dfrac{A}{T}t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]$



方法一：用频域微分性质：$tf(t)\Leftrightarrow -\dfrac{dF(s)}{ds}$

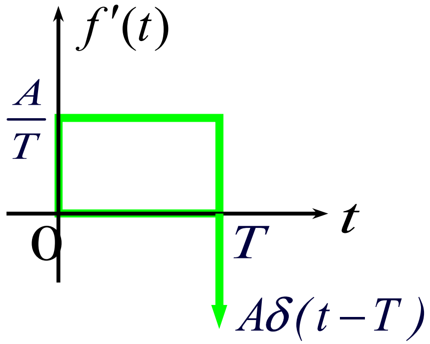
$$\because\quad \varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\Leftrightarrow \frac{1}{s}(1-e^{-sT})$$

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}(1-e^{-sT})\right]=-\frac{1}{s^2}(1-e^{-sT})+\frac{1}{s}Te^{-sT}\qquad \therefore\ F(s)=\frac{A/T}{s^2}(1-e^{-sT})-\frac{A}{s}e^{-sT}$$

方法二：用时域微分性质：$\dfrac{df(t)}{dt}\Leftrightarrow sF(s)-f(0^-)$

$$\because\quad f(0\_)=0$$

$$\therefore\quad \frac{df(t)}{dt}=\frac{A}{T}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]-A\delta(t-T)$$



$$\Leftrightarrow\frac{A}{Ts}(1-e^{-sT})-Ae^{-sT}=sF(s)$$

$$\therefore\quad F(s)=\frac{A/T}{s^2}(1-e^{-sT})-\frac{A}{s}e^{-sT}$$

初值定理和终值定理的应用

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF_0(s)$$

- 初值定理的应用条件：
  - *F*(s)必须是真分式，若不是真分式，则应用长除法将*F*(s)化成一个整式与一个真分式F_0(s)之和。
  - f(t)及其导数可以进行拉氏变换

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

- 终值定理的应用条件：
  - *F*(s)的极点必须位于S平面的左半平面；
  - *F*(s)在s=0处若有极点，也只能有一阶极点。

例 11　求下列各象函数反变换的初值与终值。$F(s)=\dfrac{1-e^{-2s}}{s(s^2+4)}$

$$f(0_+)=\lim_{t\to 0_+} f(t)=\lim_{s\to\infty} s\,\frac{1-e^{-2s}}{s(s^2+4)}=0$$

由于在*S*平面的jω轴上有一对共轭极点，故 *f*(t)不存在终值。

例 12 求下列各象函数反变换的初值与终值。

$$F(s)=\frac{s^3+s^2+2s+1}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{s^3+s^2+2s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

化为整数+真分式

$$F(s)=1+\frac{-(5s^2+9s+5)}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$f(0_+)=\lim_{t\to 0_+}f(t)=\lim_{s\to\infty}s\frac{-(5s^2+9s+5)}{s^3+6s^2+11s+6}=-5$$

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)=0$$

求下列函数的拉普拉斯变换。

(1) $f(t)=te^{-3t}\varepsilon(t)$

(2) $f(t)=t^2\varepsilon(t-1)$

(3) $f(t)=e^{-3t}\cos(2t)\varepsilon(t)$

(4) $f(t)=\cos(3t+\frac{\pi}{4})\varepsilon(t)$

解：(1) $f(t)=te^{-3t}\varepsilon(t)$

方法一： $t\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{1}{s^2}$ $\quad e^{-3t}t\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{1}{(s+3)^2}$

方法二： $e^{-3t}\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{1}{s+3}$ $\quad te^{-3t}\varepsilon(t)\Leftrightarrow-\frac{d}{dt}[\frac{1}{s+3}]=\frac{1}{(s+3)^2}$

(2) $f(t)=t^2\varepsilon(t-1)$

方法一：

$\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{1}{s}$ $\quad \varepsilon(t-1)\Leftrightarrow\frac{1}{s}e^{-s}$

$$t^2\varepsilon(t-1)\Leftrightarrow\frac{d^2}{dt^2}[\frac{1}{s}e^{-s}]=e^{-s}(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s})$$

方法二：

能否用时移定理？

$$f(t)=(t-1+1)^2\varepsilon(t-1)$$

$$=(t-1)^2\varepsilon(t-1)+2(t-1)\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-1)$$

$$F(s)=e^{-s}(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s})$$

(3) $f(t)=e^{-3t}\cos(2t)\varepsilon(t)$

$$\cos(2t)\varepsilon(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2+4} \qquad e^{-3t}\cos(2t)\varepsilon(t) \Leftrightarrow \frac{s+3}{(s+3)^2+4}$$

(4) $f(t)=\cos(3t+\frac{\pi}{4})\varepsilon(t)$

$$f(t)=\cos(3t+\tfrac{\pi}{4})\varepsilon(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3t\,\varepsilon(t)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3t\,\varepsilon(t)$$

$$F(s)=\frac{s/\sqrt{2}}{s^2+9}-\frac{3/\sqrt{2}}{s^2+9}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(s-3)}{s^2+9}$$

方法2：能否用时移定理？

$$\cos(3(t+\tfrac{\pi}{12}))\varepsilon(t)\neq\cos(3(t+\tfrac{\pi}{12}))\varepsilon(t+\tfrac{\pi}{12})$$

第四章 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换

常用函数的拉普拉斯变换

拉普拉斯变换的性质

拉普拉斯反变换

线性系统的拉普拉斯变换分析法

1.部分分式展开法

用部分分式展开法求拉普拉斯反变换，$F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$ 一般为有理函数。

- 单极点：$D(s)=0$的根也称为F(s)的极点。

F(s)可展开成 $$F(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s-p_i}$$

$p_i\ (i=1,2\cdots n)$ 为 n个不相等的单根。

$$K_i=(s-p_i)F(s)\Big|_{s=p_i} \qquad \therefore \quad f(t)=\sum_{i=1}^{n}K_i e^{p_i t}\varepsilon(t)$$

例 1　　已知 $F(s)=\dfrac{2s^2+16}{(s^2+5s+6)(s+12)}$，求 $f(t)$。

解：$$F(s)=\frac{2s^2+16}{(s+2)(s+3)(s+12)}=\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{s+3}+\frac{K_3}{s+12}$$

$$K_1=\left.\frac{2s^2+16}{(s+3)(s+12)}\right|_{s=-2}=\frac{24}{10}=2.4 \qquad K_2=\left.\frac{2s^2+16}{(s+2)(s+12)}\right|_{s=-3}=\frac{34}{-9}$$

$$K_3=\left.\frac{2s^2+16}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=-12}=\frac{304}{90}=\frac{152}{45}$$

$$\therefore \quad f(t)=\left(2.4e^{-2t}-\frac{34}{9}e^{-3t}+\frac{152}{45}e^{-12t}\right)\varepsilon(t)$$

- 多重极点： 若 $D(s)=(s-p_1)^n$，令 $n=3$

$F(s)$可展开成 $$F(s)=\frac{K_1}{(s-p_1)^3}+\frac{K_2}{(s-p_1)^2}+\frac{K_3}{s-p_1}$$

$$K_1=(s-p_1)^3F(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$K_2=\frac{d}{ds}[(s-p_1)^3F(s)]\Big|_{s=p_1}$$

$$K_3=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}[(s-p_1)^3F(s)]\Big|_{s=p_1}$$

$$K_m=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}[(s-p_1)^nF(s)]\Big|_{s=p_1} \qquad n\geq m$$

$$\therefore \quad f(t)=\left(\frac{K_1}{2}t^2e^{p_1t}+K_2te^{p_1t}+K_3e^{p_1t}\right)\varepsilon(t)$$

例 2　已知 $F(s)=\dfrac{1}{s^3(s^2-1)}$，求 $f(t)$。

解：

$$F(s)=\frac{1}{s^3(s+1)(s-1)}=\frac{K_1}{s^3}+\frac{K_2}{s^2}+\frac{K_3}{s}+\frac{K_4}{s+1}+\frac{K_5}{s-1}$$

$$K_1=\left.\frac{1}{s^2-1}\right|_{s=0}=-1 \qquad K_2=\left.\frac{-2s}{(s^2-1)^2}\right|_{s=0}=0$$

$$K_3=\frac{1}{2}\left.\frac{-2(s^2-1)^2+4s(s^2-1)2s}{(s^2-1)^4}\right|_{s=0}=-1$$

$$K_4=\left.\frac{1}{s^3(s-1)}\right|_{s=-1}=\frac{1}{2} \qquad K_5=\left.\frac{1}{s^3(s+1)}\right|_{s=1}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad f(t)=\left(-\frac{1}{2}t^2-1+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}\right)\varepsilon(t)$$

- 复数极点： 若 $D(s)=(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)$，

其根为 $p_{1,2}=\alpha\pm j\beta$

$F(s)$可展开成 $$F(s)=\frac{K_1}{s-\alpha-j\beta}+\frac{K_2}{s-\alpha+j\beta}=\frac{Ms+N}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$K_1=(s-\alpha-j\beta)F(s)\Big|_{s=\alpha+j\beta}=|K_1|\angle\theta_1=A+jB$$

由于$F(s)$是S的实系数有理函数，应有

$$K_2=K_1^*=|K_1|\angle-\theta_1=A-jB$$ 可证，了解

$$f(t)=K_1e^{(\alpha+j\beta)t}+K_2e^{(\alpha-j\beta)t}$$

$$=|K_1|e^{j\theta_1}e^{(\alpha+j\beta)t}+|K_1|e^{-j\theta_1}e^{(\alpha-j\beta)t}$$

$$=|K_1|e^{\alpha t}[e^{j(\beta t+\theta_1)}+e^{-j(\beta t+\theta_1)}]$$

$$=2|K_1|e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_1)\varepsilon(t)$$

例 **3** 已知 $F(s)=\dfrac{1}{s(s^2-2s+5)}$，求 $f(t)$。

解： $s^2-2s+5=0$ 解得 $s_{1,2}=1\pm j2$

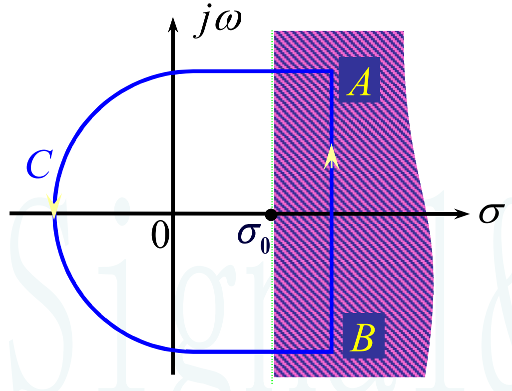
$$F(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s-1-j2}+\frac{K_2^*}{s-1+j2}$$

$$K_1=\left.\frac{1}{s^2-2s+5}\right|_{s=0}=\frac{1}{5}$$

$$K_2=\left.\frac{1}{s(s-1+j2)}\right|_{s=1+j2}=\frac{1}{(1+j2)\cdot j4}=\frac{1}{4\sqrt{5}}\angle-90^\circ-tg^{-1}2=\frac{\sqrt{5}}{20}\angle-153.4^\circ$$

$$\therefore\quad f(t)=\left(\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{5}}{10}e^{t}\cos(2t-153.4^\circ)\right)\varepsilon(t)$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}[F(s)e^{st}\text{在}AB\text{以左的极点}]\qquad t>0$$



t>0封闭积分路线

若s_k为单极点，则留数为：

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{k}}=[(s-s_k)F(s)e^{st}]_{S=S_k}$$

若s_k为p重极点，则留数为：

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{k}}=\frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}(s-s_k)^{p}F(s)e^{st}\right]_{S=S_k}$$

F(s)为无理函数时积分用留数法，大多数情况部分分式展开法可以解决

例 4

已知 $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$，求 拉氏反变换 $f(t)$。

解：留数法 $F(s)$的一阶极点 $p_1=-2$，二阶极点 $p_2=-1$。

故 $$\mathrm{Res}(p_1)=(s+2)F(s)e^{st}\Big|_{s=-2}=e^{-2t}$$

$$\mathrm{Res}(p_2)=\frac{d}{ds}(s+1)^2F(s)e^{st}\Big|_{s=-1}$$

$$=\left[\frac{-1}{(s+2)^2}e^{st}+\frac{s+3}{s+2}te^{st}\right]_{s=-1}=2te^{-t}-e^{-t}$$

故有 $$\therefore\quad f(t)=\left(2te^{-t}-e^{-t}+e^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

拉普拉斯变换的性质

	序号	时域 $f(t)$	复频域 $F(s)$
1	线性性	$a f_1(t)+b f_2(t)$	$aF_1(s)+bF_2(s)$
2	尺度性	$f(at) \quad a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
3	时移性	$f(t-t_0)\,\varepsilon(t-t_0) \quad t_0>0$	$e^{-st_0}F(s)$
4	频移性	$f(t)\,e^{-at}$	$F(s+a)$
5	时域微分	$\frac{d f(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0_-)$
6	时域积分	$\int_{0_-}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0)}{s}$
7	复频域微分	$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n F(s)}{ds^n}$
8	复频域积分	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(s)ds$
9	时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
10	复频域卷积	$f_1(t)\,f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}F_1(s)*F_2(s)$
11	初值定理	$f(0_+)=\lim_{t\to 0_+} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$	
12	终值定理	$f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$	

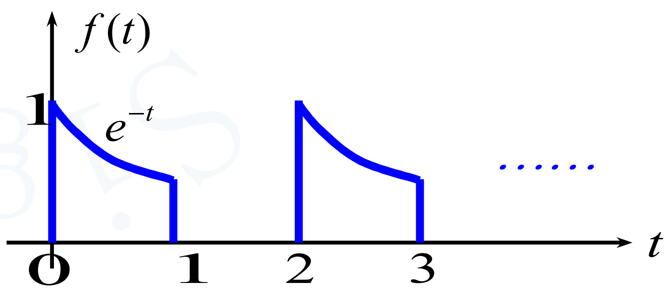
例 5 已知 $F(s)=\dfrac{1-e^{-(s+1)}}{(s+1)(1-e^{-2s})}$，求拉氏反变换 $f(t)$。

解：令 $F_1(s)=\dfrac{1-e^{-(s+1)}}{s+1}$ 已知 $\dfrac{1-e^{-s}}{s}\Leftrightarrow \varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$

根据频移特性：$F_1(s)=\dfrac{1-e^{-(s+1)}}{s+1}\Leftrightarrow [\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]\,e^{-t}=f_1(t)$

根据周期函数的拉普拉斯变换：$F(s)=\dfrac{F_1(s)}{1-e^{-2s}}$

$$\therefore\quad f(t)=e^{-t}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+e^{-(t-2)}[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-3)]+\cdots$$



第四章 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换

常用函数的拉普拉斯变换

拉普拉斯变换的性质

拉普拉斯反变换

线性系统的拉普拉斯变换分析法

用拉氏变换求解线性常系数微分方程，主要用到拉氏变换的微分性质：

- 对于一阶导数：$L[y'(t)] = sY(s) - y(0_-)$
- 对于二阶导数：

$$L[y''(t)] = s[sY(s) - y(0_-)] - y'(0_-)$$
$$= s^2Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-)$$

- 对于三阶导数：

$$L[y'''(t)] = s[s^2Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-)] - y''(0_-)$$
$$= s^3Y(s) - s^2y(0_-) - sy'(0_-) - y''(0_-)$$

例6：系统方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3f(t)$，其中 $f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$, $y(0_-)=1$, $y'(0_-)=-1$，求系统的响应。

解：$L[y''(t)]=s^2Y(s)-s\,y(0_-)-y'(0_-)=s^2Y(s)-s+1$

$$L[y'(t)]=sY(s)-y(0_-)=sY(s)-1$$

$$L[f(t)]=\frac{1}{s+1}$$

对微分方程进行拉氏变换为：

$$s^2Y(s)-s+1+5sY(s)-5+6Y(s)=3\frac{1}{s+1}$$

$$(s^2+5s+6)Y(s)=\frac{3}{s+1}+s+4$$

$$\therefore \quad Y(s)=\frac{\frac{3}{s+1}+s+4}{s^2+5s+6}=\frac{3+(s+4)(s+1)}{(s+1)(s^2+5s+6)}$$

$$=\frac{3+(s+4)(s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+2}+\frac{K_3}{s+3}$$

$$K_1=\frac{3+(s+4)(s+1)}{(s+2)(s+3)}\bigg|_{s=-1}=\frac{3}{2}$$

$$K_2=\frac{3+(s+4)(s+1)}{(s+1)(s+3)}\bigg|_{s=-2}=-1$$

$$K_3=\frac{3+(s+4)(s+1)}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-3}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad y(t)=\frac{3}{2}e^{-t}\varepsilon(t)-e^{-2t}\varepsilon(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}\varepsilon(t)$$

- 可以分别求出零输入响应和零状态响应

$$s^2Y(s)-s+1+5sY(s)-5+6Y(s)=3\frac{1}{s+1}$$

系统激励

$$(s^2+5s+6)Y(s)=\frac{3}{s+1}+s+4$$

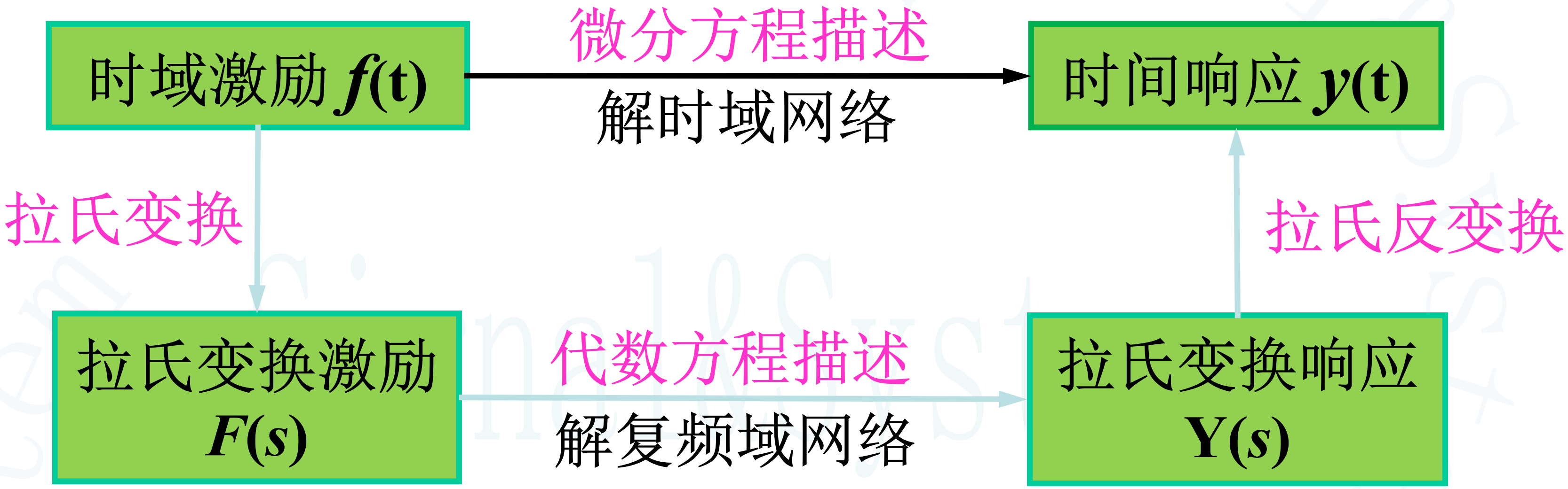
$$Y(s)=\frac{\frac{3}{s+1}}{s^2+5s+6}+\frac{s+4}{s^2+5s+6}$$

零状态响应　　零输入响应

$$\therefore\quad y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)$$

零状态响应：　0-状态响应值为0，由系统激励产生的响应。
零输入响应：　系统激励为零，由系统0-状态值产生的响应。

拉氏变换求微分方程的基本思想

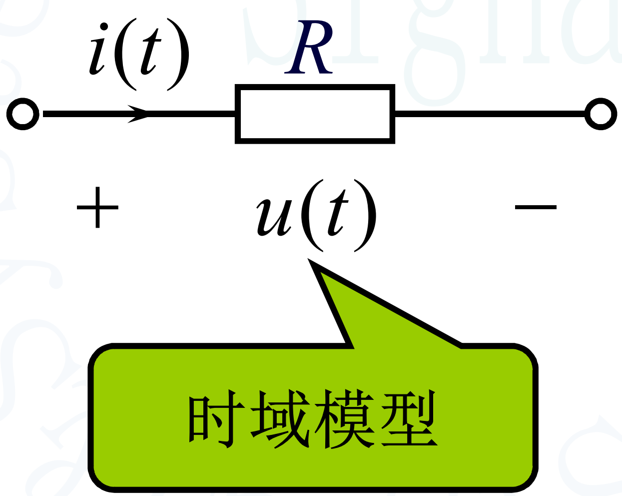


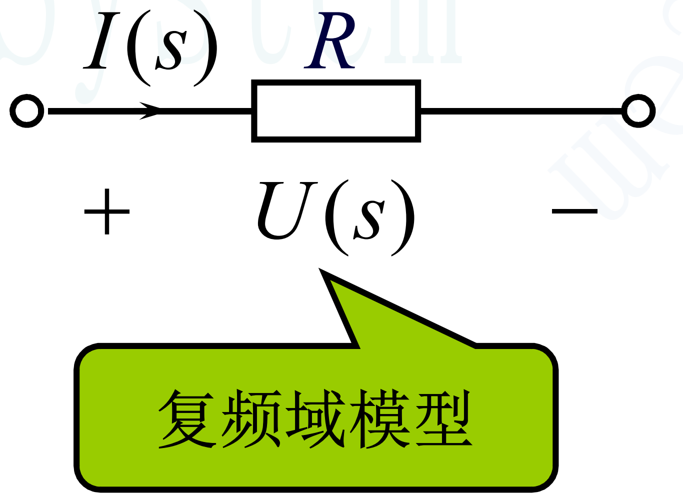
- 存在的问题
  - 高阶电路的微分方程不易列出；
  - 电路中不可能只有一个电源，电路中存在多个电源怎么办？
  - 与以前所学知识无法联系，不能统一起来。

电路元件的S域模型

- 电阻元件

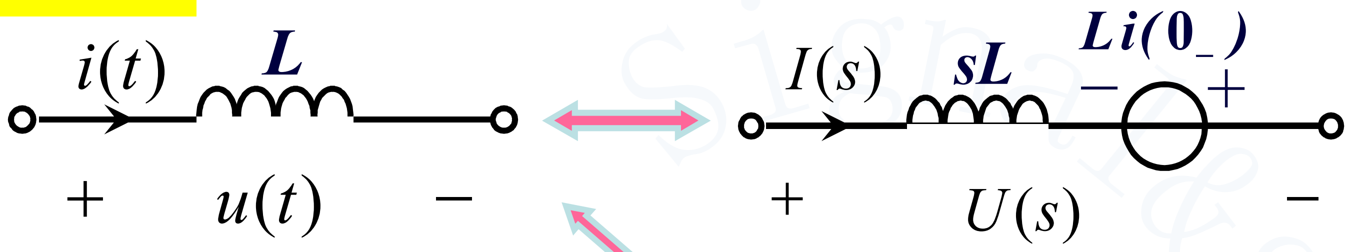
$$u(t) = R\,i(t) \Leftrightarrow U(s) = R\,I(s)$$

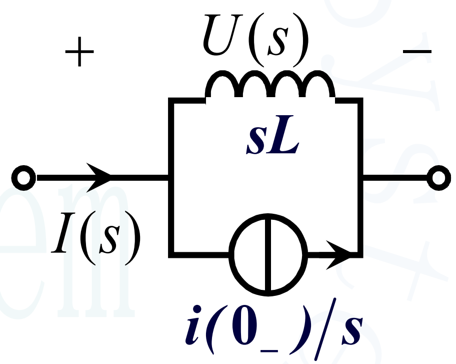




电路元件的S域模型

- 电感元件

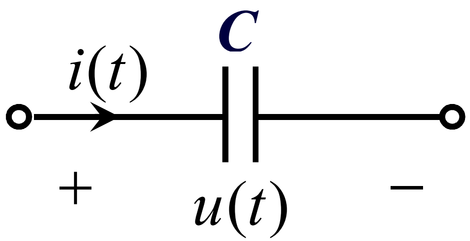


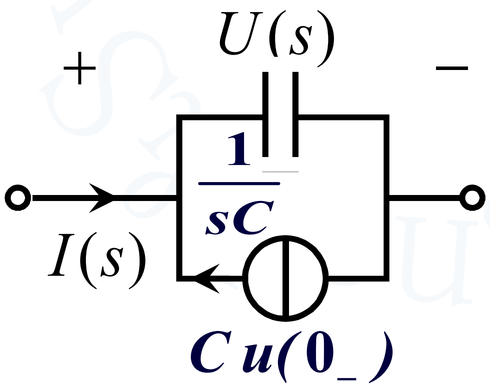


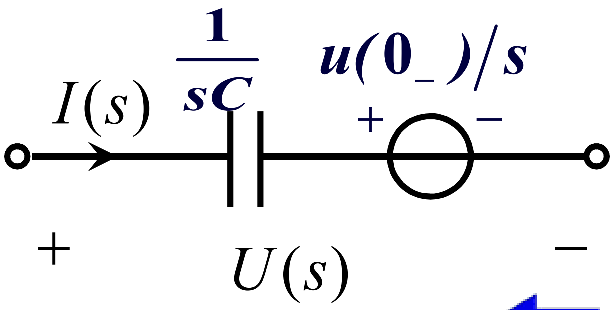
$$u(t)=L\frac{d\,i(t)}{dt} \Leftrightarrow U(s)=L\,s\,I(s)-L\,i(0\_)$$

- 电容元件

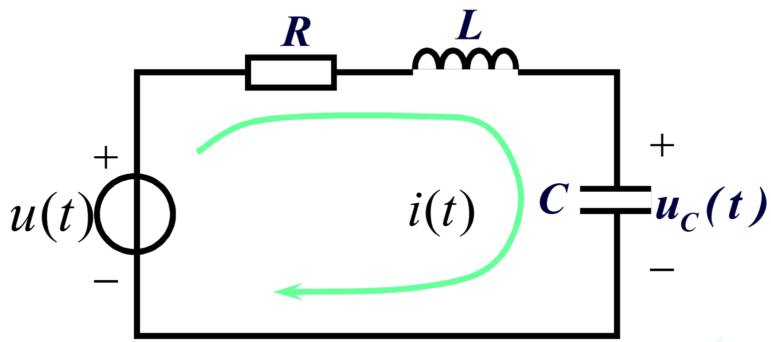
$$i(t)=C\frac{d\,u(t)}{dt} \Leftrightarrow I(s)=C\,s\,U(s)-C\,u(0\_)$$

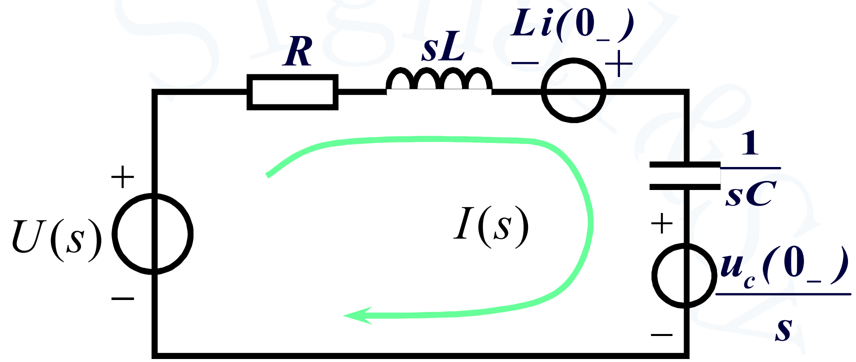






*RLC*串联电路的S域模型





设初始值为 $\quad i(0)=I_0, u_C(0)=U_0$

零状态响应

零输入响应

$$I(s)=\frac{U(s)+LI_0-\dfrac{U_0}{s}}{R+sL+\dfrac{1}{sC}}=\frac{U(s)}{R+sL+\dfrac{1}{sC}}+\frac{LI_0-\dfrac{U_0}{s}}{R+sL+\dfrac{1}{sC}}$$

其中： $\quad Z(s)=R+sL+\dfrac{1}{sC}\quad$ 称复频域阻抗或运算阻抗

- S 域网络的电源分为激励源和初始电源。初始电源单独作用产生零输入响应；激励源单独作用产生零状态响应。

线性系统的拉普拉斯变换分析法

直流电路	正弦稳态电路	复频域电路
I	$\dot{I}$	$I(s)$
U	$\dot{U}$	$U(\mathrm{s})$
R	$Z=R+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}$	$Z(s)=R+sL+\dfrac{1}{sC}$
$U=RI$	$\dot{U}=Z\dot{I}$	$U(\mathrm{s})=Z(\mathrm{s})I(\mathrm{s})$
$\sum U=0,\quad \sum I=0$	$\sum\dot{U}=0,\ \sum\dot{I}=0$	$\sum U(\mathrm{s})=0,\ \sum I(\mathrm{s})=0$

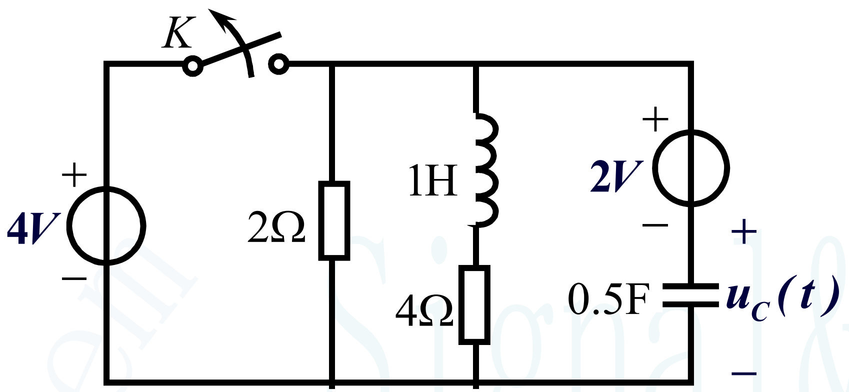
- 引入拉氏变换，和复频域阻抗 **Z(s)**, 直流电路所用的的分析方法和定理，完全适用于复频域分析。
- 由于初始条件化为信号源，由初始值引起的响应即零输入响应，由等效信号源（等效激励源）单独作用引起的零状态响应。

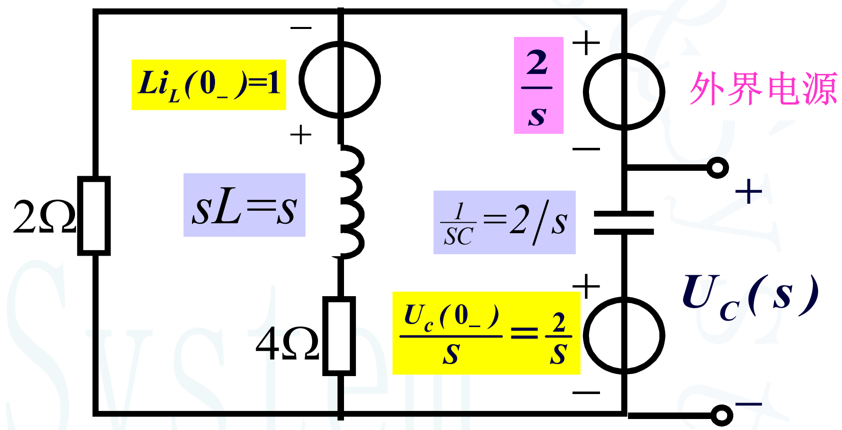
用拉氏变换分析动态电路的步骤:

- 将网络中电源的时间函数进行拉氏变换;
  - 常用的拉氏变换有：常数A⇔A/s，$e^{-at}\varepsilon(t)\Leftrightarrow 1/(s+a)$
- 画出 S 域电路图（特别注意初值电源）；
  - 电感、电容分别用其S域模型代替;
  - 检查初值电源的方向和数值;
  - 电源用其象函数(拉氏变换)代替;
  - 电路变量用其象函数代替：$i(t)\Leftrightarrow I(s)$, $u(t)\Leftrightarrow U(s)$
- 运用直流电路的方法求解象函数;
- 反变换求原函数。

例 7

如图所示电路中，开关K闭合已久，在 t=0时K断开，试求电容电压$u_C(t)$。





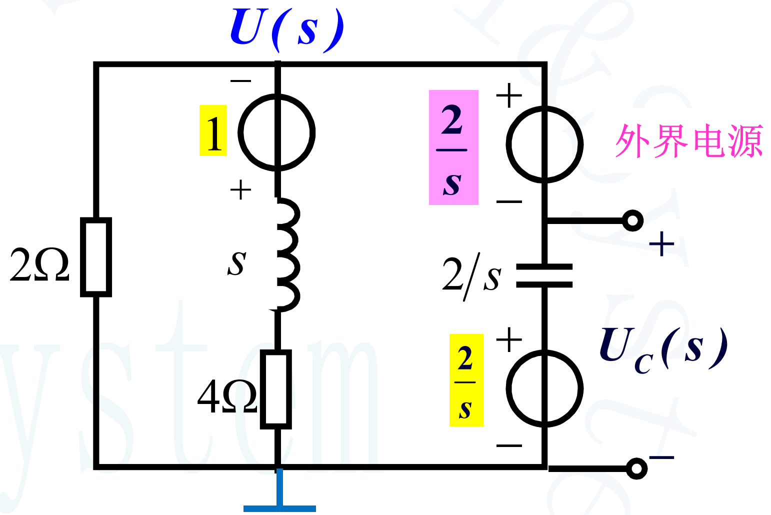
S域模型

解：电路初始值为

$i_L(0-)=1A$，$u_C(0-)=2V$，　画复频域模型

复频域模型如图所示。用**KCL**节点法：
$$\frac{U(s)+1}{s+4}+\frac{U(s)}{2}+\frac{U(s)-4/s}{2/s}=0$$

$$\frac{U(s)+1}{s+4}+\frac{U(s)}{2}=\frac{4/s-U(s)}{2/s}$$



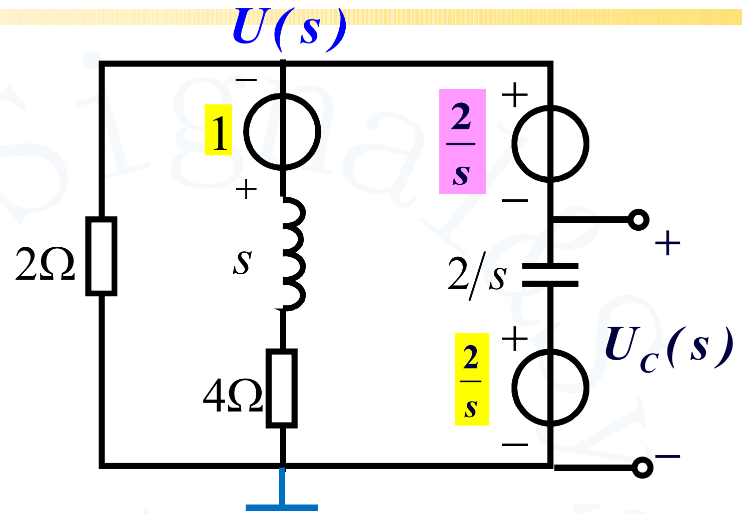
$$U(s)=\frac{-\frac{1}{4+s}+\frac{4}{s}\cdot\frac{s}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{s+4}+\frac{1}{2}s}$$

$$=\frac{4s+14}{s^2+5s+6}=\frac{6}{s+2}-\frac{2}{s+3}$$

$$U_C(s)=U(s)-\frac{2}{s}=\frac{6}{s+2}-\frac{2}{s+3}-\frac{2}{s}$$

$$\therefore\ u_C(t)=(6e^{-2t}-2e^{-3t}-2)\varepsilon(t)$$

求例7中的电压$u_C(t)$的零输入响应$u_{Czi}(t)$和零状态响应$u_{Czs}(t)$

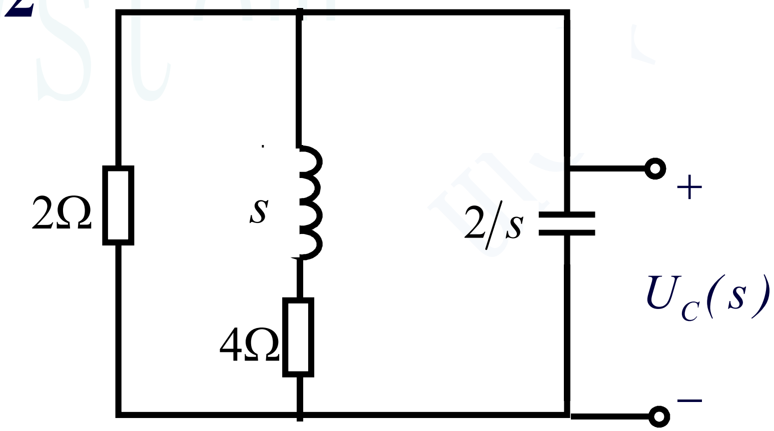


零输入响应

$$\frac{U(s)+1}{s+4}+\frac{U(s)}{2}=\frac{2/s-U(s)}{2/s}$$

$$U_{Czi}(s)=\frac{-\frac{1}{s+4}+\frac{2}{s}\cdot\frac{s}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{s+4}+\frac{s}{2}}=\frac{2s+6}{s^2+5s+6}=\frac{2}{s+2}$$

$$\therefore\ u_{Czi}(t)=2e^{-2t}\varepsilon(t)$$



零状态响应

$$\frac{U(s)}{s+4}+\frac{U(s)}{2}=\frac{2/s-U(s)}{2/s}$$

$$U_{Czs}(s)=\frac{-2(s+6)}{s(s+2)(s+3)}=\frac{-2}{s}+\frac{4}{s+2}+\frac{-2}{s+3}$$

$$\therefore\ u_{Czs}(t)=(-2+4e^{-2t}-2e^{-3t})\varepsilon(t)$$

通过系统函数或者传递函数H(s)求零状态响应

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}=\frac{\text{零状态响应的拉氏变换}}{\text{输入的拉氏变换}}$$

求零状态响应 $y_{zs}(t)$步骤

（1）求激励 $f(t)$ 的象函数 $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$。

（2）找出在 s 域中联系零状态响应 与输入激励的运算形式的系统函数 $H(s)$。

（3）求零状态响应 $y_{zs}(t)$ 的象函数 $Y(s)=F(s)H(s)$。

（4）求 $y_{zs}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)H(s)\}$

求 $H(s)$ 的常用方法:

（1）由零状态下系统的微分方程经过 **LT** 求得

例8：已知 $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$，求该系统的 **H(s)**。

解：对上式取零状态下的**LT**，得

$$s^2Y_{zs}(s)+3sY_{zs}(s)+2Y_{zs}(s)=2sX(s)+3X(s)$$

$$Y_{zs}(s)(s^2+3s+2)=X(s)(2s+3)$$

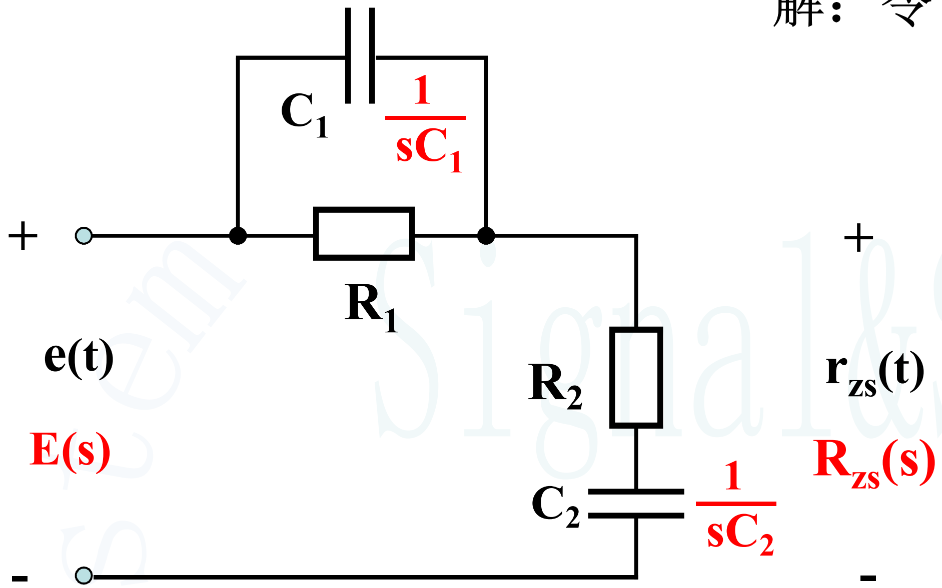
$$\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{2s+3}{s^2+3s+2}$$

$$\therefore \quad H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{2s+3}{s^2+3s+2}$$

（2）由系统的单位冲激响应经过 **LT** 求得，即 $\mathcal{L}\{h(t)\}=H(s)$。

（3）对具体网络，可由零状态下的 s 域等效电路应用电路分析方法求得。

例9：求 H(s)。



解：令

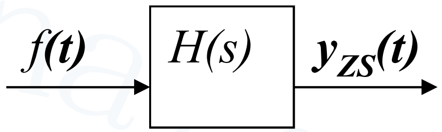
$$Z_1(s)=\frac{R_1\cdot\frac{1}{sC_1}}{R_1+\frac{1}{sC_1}}=\frac{R_1}{1+R_1C_1s}$$

$$Z_2(s)=R_2+\frac{1}{sC_2}=\frac{1+R_2C_2s}{sC_2}$$

$$H(s)=\frac{R_{zs}(s)}{E(s)}=\frac{\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}E(s)}{E(s)}=\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}=\frac{\frac{1+R_2C_2s}{sC_2}}{\frac{R_1}{1+R_1C_1s}+\frac{1+R_2C_2s}{sC_2}}$$

$$=\frac{(1+R_1C_1s)(1+R_2C_2s)}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

例10 已知 $H(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+2}, f(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$，求 $y_{ZS}(t)$



解： 1）求 $F(s)$： $F(s)=L\{f(t)\}=\dfrac{1}{s+3}$， $s=-3$ 源极点

2）$H(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+2}=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$， $s=-1,-2$ 系统极点

3）$Y_{ZS}(s)=H(s)F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s+3}$

4）$y_{ZS}(t)=L^{-1}\{Y_{ZS}(s)\}=\dfrac{1}{2}(e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-3t})\varepsilon(t)$

$\dfrac{1}{2}(e^{-t}-2e^{-2t})\varepsilon(t)$ ——自由分量

$\dfrac{1}{2}e^{-3t}\varepsilon(t)$ ——强迫分量

$\dfrac{1}{2}(e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-3t})\varepsilon(t)$ ——均为瞬态分量

例11 已知某系统当激励 $f_1(t)=\delta(t)$时，全响应为$y_1(t)=\delta(t)+e^{-t}\varepsilon(t)$；当激励 $f_2(t)=\varepsilon(t)$时，全响应为 $y_2(t)=3e^{-t}\varepsilon(t)$。

(1)求系统的冲激响应$h(t)$与零输入响应$y_{zi}(t)$;

解：当 $f_1(t)=\delta(t)$时： $Y_1(s)=H(s)+Y_{zi}(s)$

即 $$1+\frac{1}{s+1}=H(s)+Y_{zi}(s) \qquad (1)$$

当 $f_2(t)=\varepsilon(t)$时： $Y_2(s)=H(s)\frac{1}{s}+Y_{zi}(s)$

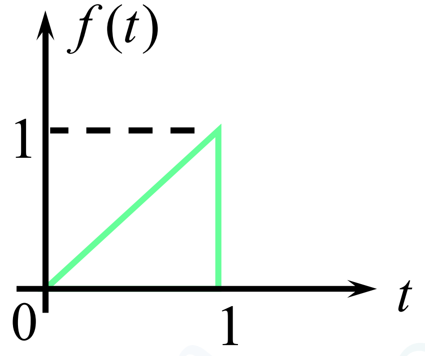
即 $$\frac{3}{s+1}=H(s)\frac{1}{s}+Y_{zi}(s) \qquad (2)$$

(1)、(2)式联立解得： $H(s)=\frac{s}{s+1}$， $Y_{zi}(s)=\frac{2}{s+1}$

故系统的冲激响应： $h(t)=\delta(t)-e^{-t}\varepsilon(t)$

故系统的零输入响应： $y_{zi}(t)=2e^{-t}\varepsilon(t)$

（2）求当激励为如图所示的$f(t)$时的全响应y(t)。



解：先求f(t)的拉氏变换：

$$f(t)=t(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1))=t\varepsilon(t)-(t-1)\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-1)$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-s}$$

$$Y_{zs}(s)=H(s)F(s)=\frac{s}{s+1}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-s}\right)=\frac{1}{s(s+1)}(1-e^{-s})-\frac{1}{s+1}e^{-s}$$

$$=\frac{1}{s}(1-e^{-s})-\frac{1}{s+1}(1-e^{-s})-\frac{1}{s+1}e^{-s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s+1}$$

故零状态响应 $y_{zs}(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)-e^{-t}\varepsilon(t)$

全响应 $y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)+e^{-t}\varepsilon(t)$

考虑下列系统：

$$f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)=2e^{-t}\varepsilon(t)-\delta(t)} \longrightarrow y(t)$$

(1)令 $f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$ ，用拉普拉斯变换求出响应$y(t)$，并用时域的卷积检验结果。

$$H(s)=\frac{2}{s+1}-1=\frac{1-s}{s+1}$$

$$Y(s)=\frac{1-s}{s+1}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{1-s}{(s+1)^2}=\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)}$$

$$y(t)=[-e^{-t}+2te^{-t}]\varepsilon(t)$$

(2)令$f(t)=\varepsilon(t)$，用拉普拉斯变换求出响应$y(t)$，并用时域的卷积检验结果。

$$Y(s)=\frac{1-s}{s+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1-s}{s(s+1)}$$

$$y(t)=(1-2e^{-t})\varepsilon(t)$$

本章总结

- 定义：
  - 单边拉氏变换、常用函数的拉氏变换
- 拉氏变换的性质
  - 线性、原函数微分、原函数积分、时域平移、**s**域平移、尺度变换、初值、终值
- 拉氏逆变换
  - 部分分式展开法（求系数）
  - 留数法
  - 拉普拉斯性质法
- 用拉普拉斯变换法分析电路
  - 用拉氏反应求响应，包括零输入响应和零状态响应
  - 画**S**域网络，求响应。
  - 求**H(s)**，利用**H(s)**求零状态响应

第四章习题

拉式变换及其性质

- 4-1 （6） （12） （15） （17）
- 4-3

拉式逆变换

- 4-4（14） （17） （19）

拉式变换法分析电路

- 4-9、4-11

系统应用示例

- 二阶系统并联：语音合成器，语言学习机
  第21讲 36:20-40:00,40:20-42:00

- 反馈倒立摆
  第26讲 30:00-33:20