2016-2 期末试题解答

一、单项选择题

1. D　**2.** C　**3.** B　**4.** A　**5.** C　**6.** C

二、填空题

7. edx　**8.** $\frac{3}{4}\pi$　**9.** π　**10.** 4

三、基本计算题

11.设所求平面为$\pi_1: x+y+z+D=0$，

取直线L上的一个点$P(10,-4,0)$，将点P代入平面π_1，则$D=-6$，

所以$\pi_1: x+y+z-6=0$.

12. $z_x = 2e^{2x}f_1'(e^{2x},xy)+yf_2'(e^{2x},xy)$.

令$G(x,y)=2e^{2x}f_1'(e^{2x},xy)+yf_2'(e^{2x},xy)$，

则$G(0,y)=2f_1'(1,0)+yf_2'(1,0)$，

从而 $G_y'(0,3)=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=3}} = f_2(1,0)=2$.

所以$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=3}} = f_2(1,0)=2$.

13. 依题意，方程组$\begin{cases} x=F(t,y), \\ f(x+y+t)=3y \end{cases}$确定了$t=t(y), x=x(y)$，

对y求导：$\begin{cases} x'(y)=F_1 t'(y)+F_2, \\ (x'(y)+t'(y)+1)f'=3 \end{cases}$，

解得$\frac{dx}{dy}=\frac{f'F_2+(3-f')F_1}{(1+F_1)f'}$.

14. 补$L_1: y=0(x\text{从}1\to 0)$，则$L+L_1$封闭，且取正向，所以

$$I=\oint_{L+L_1}(1-y-e^x\sin y)dx+(1-e^x\cos y)dy-\int_{L_1}(1-y-e^x\sin y)dx+(1-e^x\cos y)dy$$

$$=\iint_D dxdy-\int_{L_1}dx = \frac{\pi}{8}-\int_1^0 dx=\frac{\pi}{8}+1.$$

不复制不外传

15. 补 $S_1: z=0, x^2+y^2\le 1$，下侧， 则 $S+S_1$ 封闭，指向内侧. 所以

$$I=\oiint\limits_{S+S_1} xyzdydz+x^2ydzdx+(\frac{1}{3}z^3+1)dxdy-\iint\limits_{S_1} xyzdydz+x^2ydzdx+(\frac{1}{3}z^3+1)dxdy$$

$$=-\iiint\limits_V (yz+x^2+z^2)dv-\iint\limits_{S_1} dxdy\text{，}$$

其中 $\iint\limits_{S_1} dxdy=-\pi$；

由对称性 $\iiint\limits_V (yz+x^2+z^2)dv=\iiint\limits_V (x^2+z^2)dv$，

且 $\iiint\limits_V x^2dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\rho^2\sin\varphi d\rho$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos^2\varphi-1)d(\cos\varphi)\int_0^1\rho^4d\rho=\frac{2}{15}\pi\text{，}$$

$$\iiint\limits_V z^2dv=\int_0^1 z^2\pi(1-z^2)dz=\frac{2}{15}\pi\text{，}$$

所以 $I=-\frac{4\pi}{15}+\pi=\frac{11}{15}\pi$.

16. 将 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展成 x 的幂级数 .

解 因 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, |x|<1$，

所以，当 $|x|<1$ 时， $f(x)=\int_0^x f'(x)dx+f(0)=\int_0^x f'(x)dx+\frac{\pi}{4}$，

$$\int_0^x f'(x)dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\text{，}$$

又 $x=-1$ 时， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ 收敛，

所以 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$， $x\in[-1,1)$.

四、应用题

17. 将 $x=y$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 代入函数 $f(x,y,z)=xy+z^2$，

得 $f=4-x^2$，（$-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$）.

令 $f'(x)=-2x=0$，得唯一驻点 $x=0$.

不复制 不外传

比较 $f(0)=4$， $f(\pm\sqrt{2})=2$ 知，

最大值为 $f(0,0,\pm 2)=4$，最小值为 $f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},0)=2$.

18. 对方程两边求导，将 $x=0$ 代入方程有 $\begin{cases}\varphi''(x)+\varphi(x)=e^x,\\ \varphi(0)=0,\varphi'(0)=1.\end{cases}$

特征方程 $r^2+1=0$ 有共轭复根 $r_{1,2}=\pm i$，故

对应的齐次方程的通解为 $\boldsymbol{\Phi}=C_1\cos x+C_2\sin x$，特解 $\varphi^*=\dfrac{1}{2}e^x$.

因 $\lambda=1$ 不是特征根，故设 $\varphi^*=Ae^x$，代入方程得 $A=\dfrac{1}{2}$.

从而方程的通解为 $\varphi=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}e^x$.

将初始条件代入，得 $C_1=-1/2, C_2=1/2$.

所以，所求定解为 $\varphi=\dfrac{1}{2}(-\cos x+\sin x+e^x)$.

五、分析证明题

18. 将级数看作是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[1-\cos\dfrac{(-1)^n}{n^p}]$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ 的差.

因 $1-\cos\dfrac{(-1)^n}{n^p}\sim\dfrac{1}{2n^{2p}}(n\to\infty)$，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[1-\cos\dfrac{(-1)^n}{n^p}]$ 当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时收敛，当 $0<p\le\dfrac{1}{2}$ 时发散；

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{(-1)^n}{n^p}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^p}$ 为交错级数，由莱布尼兹判别法，

当 $p>0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^p}$ 收敛，且 $\left|(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^p}\right|=\sin\dfrac{1}{n^p}\sim\dfrac{1}{n^p}$，

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时绝对收敛，当 $0<p\le 1$ 时条件收敛，

故原级数当 $p>1$ 时绝对收敛，当 $\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 时条件收敛，当 $0<p\le\dfrac{1}{2}$ 时发散.

19. $\int_a^b xf(x)dx\int_a^b\dfrac{x}{f(x)}dx=\iint\limits_D xy\dfrac{f(x)}{f(y)}dxdy$ （D 是正方形区域 $a\le x\le b, a\le y\le b$），

不复制不外传

$$=\iint_D xy\left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)dxdy \quad \text{（轮换性）}$$

$$\geq \frac{1}{2}\iint_D xy\cdot 2\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}\cdot\frac{f(x)}{f(y)}}dxdy \quad \text{（均值不等式）}$$

$$=\iint_D xydxdy=\frac{(b+a)^2(b-a)^2}{4}.$$

另证 由 *Cauchy-Schwartz* 不等式，得

$$\int_a^b xf(x)dx\int_a^b \frac{x}{f(x)}dx \geq \left[\int_a^b \sqrt{xf(x)}\cdot\sqrt{\frac{x}{f(x)}}dx\right]^2=\left(\int_a^b xdx\right)^2=\frac{(b^2-a^2)^2}{4}\ .$$

不复制 不外传