2017-2 期末试题解答

一、单项选择题

1. D　**2.** C　**3.** A　**4.** C　**5.** B　**6.** D

二、填空题

7. $\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z$　　8. $7/3$　　9. 0　　10. $x+y+z$

三、基本计算题

11. 由于 P 为切点，所求切线的方向矢量为

$$\tau=\{2x,2y,2z\}\times\{2x,2y,-5\}|_P=-14\{2,-1,0\}.$$

故切线方程为 $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{0}$.

12. 由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1+yf_2$，　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2yf_{11}+xf_{12}+f_2+2y^2f_{21}+xyf_{22}$，

由于 f 具有二阶连续导数，所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2yf_{11}+(x+2y^2)f_{12}+f_2+xyf_{22}$.

13. 将两个隐函数代入方程组，两边关于 x 求偏导得 $\begin{cases}1=2rr_x\cos\theta+r^2(-\sin\theta)\theta_x,\\0=r_x\sin\theta+r\cos\theta\cdot\theta_x.\end{cases}$

解上述方程组得到 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{\cos\theta}{r(1+\cos^2\theta)}$，$\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{-\sin\theta}{r^2(1+\cos^2\theta)}$.

14. 记 $A(1,0)$，$B(0,1)$. 则 $I=\int_{OA}(x+y^2)\mathrm{d}s+\int_{AB弧}(x+y^2)\mathrm{d}s+\int_{OB}(x+y^2)\mathrm{d}s$.

$\int_{OA}(x+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$，$\int_{OB}(x+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^1 y^2\mathrm{d}y=\dfrac{1}{3}$，

$\int_{AB弧}(x+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{\pi/2}(\cos\theta+\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=1+\dfrac{\pi}{4}$.

所以 $I=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{11}{6}$.

15. 补 $\Sigma: z=1, x^2+y^2\le 1$，下侧. 记 $V:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$，

利用高斯公式，有 $I=-\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v-\iint\limits_\Sigma x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

由于 $\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1(r^2+z^2)\mathrm{d}z=\dfrac{3\pi}{10}$；

$$\iint_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{x^2+y^2\le 1} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}.$$

故 $I = -\dfrac{\pi}{20}$.

16. 收敛半径为 1, 收敛域为 $[-1,1]$. 设和函数为 $S(x)$.

则 $xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-t^2)^n \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = \arctan x,$$

注意 $x=0$ 时， $S(0)=1$.

并利用和函数的连续性，则 $S(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan x}{x}, & 0 < |x| \le 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

从而 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n(2n+1)} = S\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\arctan\dfrac{1}{2}$.

四、 应用题

17. 作拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda) = xy^2z^3 + \lambda(x^2+2y^2+3z^2-6R^2)$.

令 $\nabla F = \vec{0}$，则有：

$F_x = y^2z^3 + 2\lambda x = 0$， $F_y = 2xyz^3 + 4\lambda y = 0$， $F_z = 3xy^2z^2 + 6\lambda z = 0$，

$F_\lambda = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6R^2 = 0$.

在第一卦限, 解得唯一驻点 (R,R,R).

由于函数有最大值，且驻点唯一，故最大值点为 (R,R,R).

因此对于任意的 $x,y,z>0$， $x^2+2y^2+3z^2=6R^2$ 的点 (x,y,z) 都成立

$\ln(xy^2z^3) \le \ln R^6$，即 $xy^2z^3 \le R^6 = \left(\dfrac{x^2+2y^2+3z^2}{6}\right)^3$.

特别地，取 $x=\sqrt{a}, y=\sqrt{b}, z=\sqrt{c}$ ，则有： $ab^2c^3 \le \left(\dfrac{a+2b+3c}{6}\right)^6$.

18.（1）$V=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad =\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r=\dfrac{32}{9}$.

（2）锥面块的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, 在 xy 面投影的区域为 $D: x^2+y^2\le 2x$, 面积微元为 $\mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $\quad S=\iint\limits_D\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi$.

五、分析证明题

19. 令 $P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}, Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$, 则 $P_y=\dfrac{-4x^2+y^2}{(4x^2+y^2)^2}=Q_x\ \left(x^2+y^2\ne 0\right)$.

当 $0<R<1$ 时，区域 $D:(x-1)^2+y^2\le R^2$ 不包含原点, 用 *Green* 公式, 有

$$I=\iint\limits_D 0\mathrm{d}\sigma=0.$$

当 $R>1$ 时，作 $l: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$（$\varepsilon>0$ 足够小, 使得 L 包围 l 在其内, 取逆时针方向), 在复连通区域 $D^*:(x-1)^2+y^2\le R^2, 4x^2+y^2\ge\varepsilon^2$ 上用 *Green* 公式

$$\oint_{L+l^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\iint\limits_{D^*}0\mathrm{d}\sigma=0,$$

故 $I=\oint_{L+l^-}-\oint_{l^-}=\oint_l=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\oint_l x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\varepsilon^2}2\sigma=\pi$,

其中 l^- 是 l 的反向曲线, $\sigma=\pi\cdot\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon$ 是椭圆 $4x^2+y^2\le\varepsilon^2$ 的面积.

20. 证法 1 记区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

$$I=\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x=\iint\limits_D \mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由二重积分的轮换对称性，则

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_D[\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}+\mathrm{e}^{f(y)-f(x)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$$

证法 2 记区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

$$I=\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x=\iint\limits_D \mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

对任意 x，有 $\mathrm{e}^x \geq 1+x$.

所以 $I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint\limits_D (1+f(x)-f(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

由轮换对称性知 $\iint\limits_D (f(x)-f(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，故 $I \geq \iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$.

证法 3 由 *Cauchy-Schwartz* 不等式得

$$I=\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x \geq \left(\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{f(x)}{2}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{f(x)}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2=1 .$$