

## 2017-2 期末试题

### 一. 单项选择题 (每小题 3 分, 6 个小题共 18 分. 将选择结果涂填在答题卡上.)

1. 函数  $f(x, y) = |x| \cos y$  在原点  $(0, 0)$  处 【 】.

- A.  $f'_x(0, 0)$  存在,  $f'_y(0, 0)$  存在      B.  $f'_x(0, 0)$  不存在,  $f'_y(0, 0)$  不存在  
C.  $f'_x(0, 0)$  存在,  $f'_y(0, 0)$  不存在      D.  $f'_x(0, 0)$  不存在,  $f'_y(0, 0)$  存在

2. 设  $\Omega: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ , 将  $I = \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dv$  化为球面坐标系下的逐次积分, 以下正确的是 【 】.

- A.  $I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 f(\rho) \rho^2 d\rho$       B.  $I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 f(\rho) d\rho$   
C.  $I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{1/\cos \varphi} f(\rho) \rho^2 d\rho$       D.  $I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{1/\cos \varphi} f(\rho) d\rho$

3. 设  $\Omega: 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $\Omega_1$  为  $\Omega$  在第一卦限的部分区域, 则下面式子正确的是 【 】.

- A.  $\iiint_{\Omega_1} x dv = \iiint_{\Omega_1} z dv$       B.  $\iiint_{\Omega_1} xy dv = \iiint_{\Omega_1} x^2 dv$       C.  $\iiint_{\Omega} z dv = 0$       D.  $\iiint_{\Omega} xy dv = 4 \iiint_{\Omega_1} xy dv$

4. 关于数项级数的敛散性, 下面说法正确的是 【 】.

- A. 若正项级数  $\sum a_n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$       B. 若  $\sum a_n$  收敛, 则  $\sum a_n^2$  收敛  
C. 若  $\sum (-1)^n a_n$  收敛, 则  $\sum (a_{2n-1} - a_{2n})$  收敛      D. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ , 则  $\sum a_n$  收敛

5. 若级数  $\sum a_n$  条件收敛, 对于幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$  以下结论正确的是 【 】.

- A.  $x=1$  条件收敛      B.  $x=3$  发散      C.  $x=2$  绝对收敛      D.  $x=0$  条件收敛

6. 若  $\int_L (2xe^{x^2} y^3 + ax \cos y) dx + (be^{x^2} y^2 - x^2 \sin y) dy$  在  $xoy$  面上积分与路径无关, 则 【 】.

- A.  $a=2, b=-3$       B.  $a=-2, b=3$       C.  $a=-2, b=-3$       D.  $a=2, b=3$

### 二. 填空题 (每小题 4 分, 4 个小题共 16 分, 将计算结果写在答题卡上.)

7. 函数  $u = \ln(xy^2 z^3)$  在  $(1, 1, 1)$  点的微分  $du|_{(1,1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 设区域  $D: |x| + |y| \leq 1$ , 则  $\iint_D (1-x)^2 dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 设  $f(x) = x + 1$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ , 将  $f(x)$  展成以  $2\pi$  为周期的傅立叶级数

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ . 则  $a_{2018} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 设矢量函数  $\mathbf{F} = \{x, y, z\}$ ,  $\mathbf{G} = \{y, z, x\}$ , 则  $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \underline{\hspace{1cm}}$ .

三. 基本计算题 (每小题 7 分, 6 个小题共 42 分, 必须写出主要计算过程.)

11. 求曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^2 + y^2 - 5z = 0 \end{cases}$  过点  $P(1, 2, 1)$  的切线方程.

12. 设  $u = f(x + y^2, xy)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

13. 设  $x = r^2 \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 当  $r \neq 0$  时确定隐函数  $r = r(x, y)$ ,  $\theta = \theta(x, y)$ , 求  $\frac{\partial r}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ .

14. 求  $I = \int_L (x + y^2) ds$ , 其中  $L$  是圆弧  $y = \sqrt{1 - x^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 与  $x$  轴和  $y$  轴所围平面图形的整个边界.

15. 设  $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , 定向为上侧, 求  $I = \iint_S xy^2 dy dz + yz^2 dz dx + zx^2 dx dy$ .

16. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$  的和函数, 并求数项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)}$  的和.

四. 应用题 (每小题 7 分, 2 个小题共 14 分, 必须写出主要过程.)

17. 已知函数  $u = \ln(xy^2 z^3)$  在椭球面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6R^2$  ( $R > 0$ ) 的第一卦限部分上存在最大值. 求出该最大值点, 并由此证明: 对任意正实数  $a, b, c$ , 成立  $ab^2 c^3 \leq \left( \frac{a + 2b + 3c}{6} \right)^6$ .

18. 设  $\Omega$  表示锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 柱面  $x^2 + y^2 = 2x$ , 以及  $xy$  坐标面围成的空间区域. 求  
(1)  $\Omega$  的体积  $V$ ; (2) 立体  $\Omega$  表面上锥面块的面积  $S$ .

五. 分析证明题 (每小题 5 分, 2 个小题共 10 分, 必须写出主要过程.)

19. 计算曲线积分  $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  是以  $(1, 0)$  为圆心, 以  $R$  ( $R > 0$ ,  $R \neq 1$ ) 为半径的圆周, 取逆时针方向.

20. 设  $f(x)$  是区间  $[0, 1]$  上的连续函数, 证明  $\int_0^1 e^{f(x)} dx \int_0^1 e^{-f(x)} dx \geq 1$ .