概率论与数理统计

第七章 参数估计

7.1 参数估计概念

——根据样本给出参数的估计值

θ 是 $F(x,\theta)$ 中的未知参数 $\theta \in \Theta$

样本 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

估计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

估计区间 $\hat{\theta}_1(X_1, \cdots, X_n), \hat{\theta}_2(X_1, \cdots, X_n)$

估计值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$\theta \in (\hat{\theta}_1, \ \hat{\theta}_2).$

θ 　点估计

区间估计

第七章　参数估计

7.4 区间估计

7.4.1 区间估计的概念

设总体X的分布函数为$F(x;\theta)$，θ为未知参数，$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$为X的样本。给定$\alpha(0<\alpha<1)$，若统计量

$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$和$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，满足

$$P(\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta})=1-\alpha$$

置信上限

称$(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 为 θ 的**置信度(水平)**为$1-\alpha$ 的**置信区间**。

注 置信区间是随机区间，随样本观测值不同，$(\underline{\theta},\overline{\theta})$产生不同的具体数值区间。

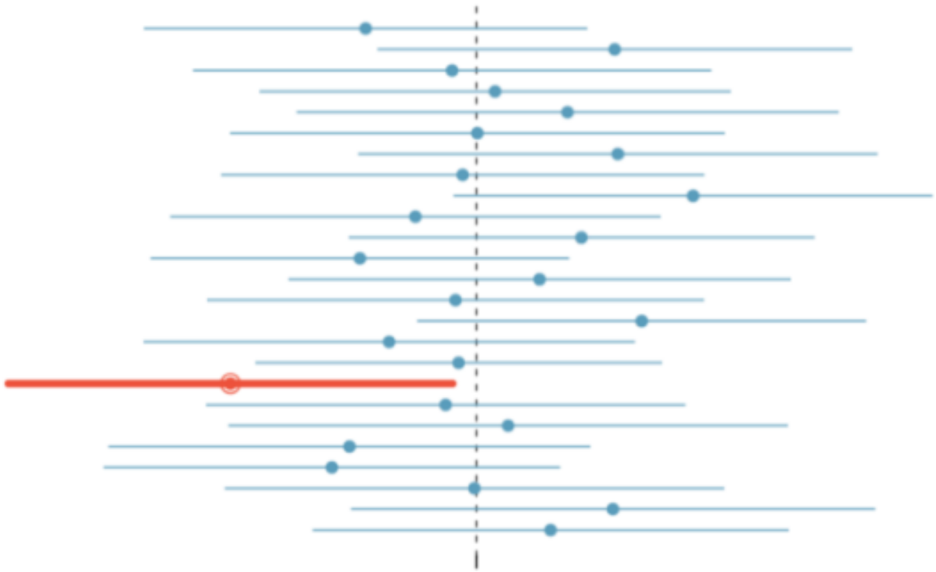
7.4.1 区间估计的概念

- 置信水平为95%的置信区间

表示真实值有95%的概率落到当前置信区间之内，这个说法是错误的。

真实值要么在区间内，要么不在区间之内。

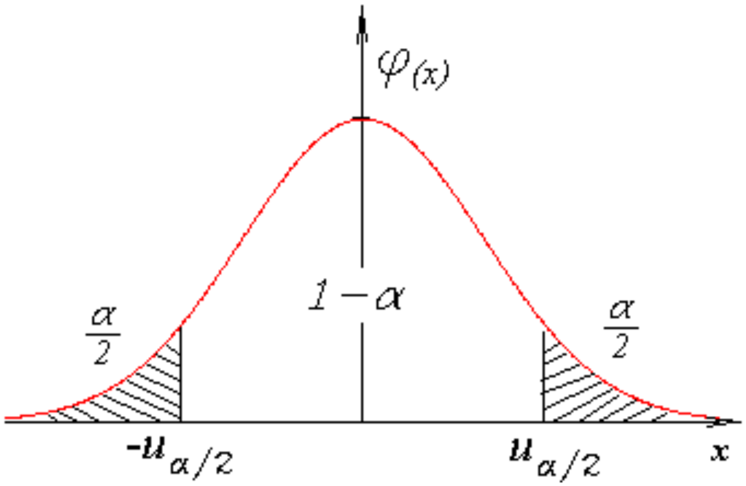
正确含义:多次抽样得到的多个区间里, 包含真实值的区间占95%。



7.4.2 单个正态总体均值的区间估计

1、 σ^2已知

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$



$$P\left(\frac{\left|\bar{X}-\mu\right|}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2} < \mu < \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

即参数μ 的置信度为1－α的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right) \quad \text{或} \quad \left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$$

7.4.2 单个正态总体均值的区间估计

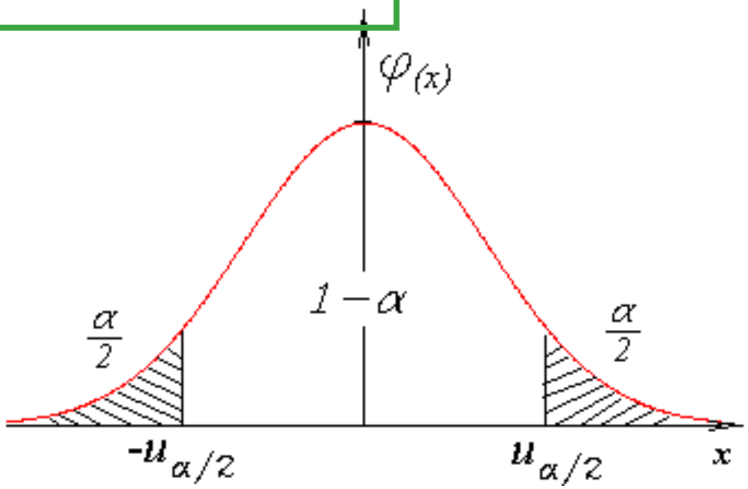
σ^2已知时，μ 的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right).$$

1.置信区间长度 $l=\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$

(1)给定α，n越大，l越小

(2)给定n，α越小，l越大



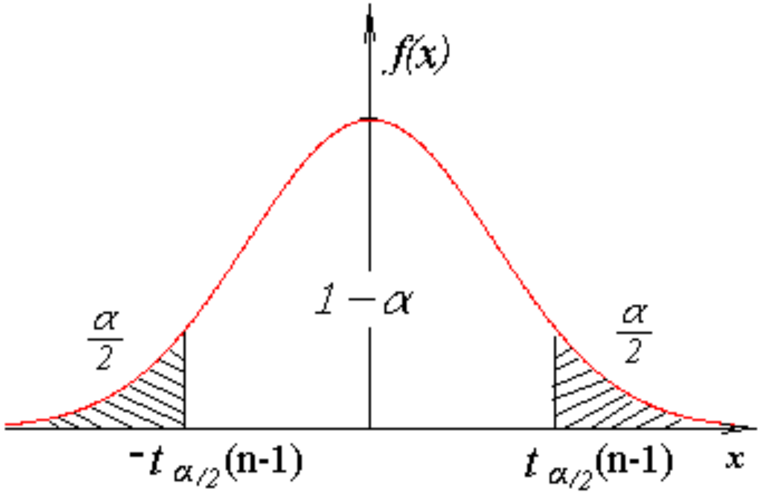
2.相同置信水平下，置信区间选取不唯一。

同一置信水平下，长度l越小，表示估计精度越高。

若R.V.的密度函数是单峰对称的，则n固定时，上述公式的置信区间是所有置信区间中长度最短的。

7.4.2 单个正态总体均值的区间估计

2、σ^2未知



$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$$

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$$

$$P(|T|<t_{\alpha/2}(n-1))=1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)<\mu<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha$$

σ^2未知时，μ 的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

7.4.2 单个正态总体均值的区间估计

例1 滚珠直径$X \sim N(\mu, 0.0006)$

$n=6$ ： **1.46 1.51 1.49 1.48 1.52 1.51**

求μ的置信度为95%的置信区间。

解 $\overline{x}=1.495,\ \alpha=0.05,\quad u_{0.05/2}=u_{0.025}=1.96,$

$$\Rightarrow\ (1.495 \pm \sqrt{\frac{0.0006}{6}} \times 1.96)=(1.4754,\ 1.5146)$$

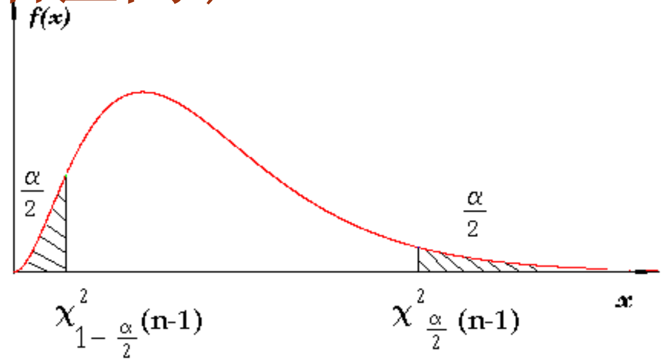
例2（续例1）若σ未知，则计算 s=**0.02258**，查表$t_{0.025}(5)=2.5706$，算得

μ ： $(1.495 \pm 0.0237)=(1.4716\ ,\ 1.5187)$
$(1.4754\ ,\ 1.5146)$

$l_2=0.0474$
$>l_1=0.0392$

7·4·3 单个正态总体方差的区间估计

μ未知时，σ^2 的置信度为1－α的置信区间呢？



μ未知 $\quad \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

μ未知时，σ^2的置信度为1－α的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

μ未知时，σ 的置信度为1－α的置信区间呢？

7·4·3 单个正态总体方差的区间估计

例3 零件长度$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $n=16$，求σ的95%置信区间。

解 计算（$\bar{x}=2.125$），$S^2=0.000293$，$\alpha=0.05$

查表 $\chi^2_{0.025}(15)=27.488$， $\chi^2_{0.975}(15)=6.262$

$$P\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}<\sqrt{\sigma^2}<\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)=1-\alpha$$

$$\sqrt{\frac{15\times0.000293}{27.488}}<\sigma<\sqrt{\frac{15\times0.000293}{6.262}}$$

$$\Rightarrow \quad (0.01265,\quad 0.02651)$$

7.4.6 单侧置信区间

设总体X的分布函数为$F(x;\theta)$，θ为未知参数，$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$为X的样本。给定$\alpha(0<\alpha<1)$，若统计量$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$分别满足

$$P(\underline{\theta}<\theta)=1-\alpha$$

单侧置信下限

或

$$P(\theta<\overline{\theta})=1-\alpha$$

单侧置信上限

称 $\underline{\theta}(\overline{\theta})$ 为 θ 的置信度(水平)为$1-\alpha$ 的置信下(上)限。

7.4.6 单侧置信区间

例　从一批灯泡中随机地抽取5只做寿命试验，测得寿命(单位：小时)

1050，1100，1120，1250，1280.

设灯寿命服从正态分布，求灯泡寿命平均值的置信水平为0.95的单侧置信下限。

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

$$\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$$

练习册习题

1.(练习十五2) 设$(X_1,\cdots,X_5)$是$X\sim N(12,2^2)$的样本, 求

(1)$P(X_5^*>15)=P(A)$ (2)$P(X_1^*<10)=P(B)$

(3)$P(X_5^*>15,X_1^*<10)=P(AB)$

解(3)
$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$
$$=P(A)+P(B)-(1-P(\bar{A}\bar{B}))$$

而$P(\bar{A}\bar{B})=P(X_5^*\le 15,X_1^*\ge 10)$

$$=P(10\le X_1\le 15,\cdots,10\le X_5\le 15)$$
$$=\prod_{i=1}^{5}P(10\le X_i\le 15)=(P(10\le X\le 15))^5$$
$$=\left(\Phi(\frac{15-12}{2})-\Phi(\frac{10-12}{2})\right)^5=\left(\Phi(\frac{3}{2})+\Phi(1)-1\right)^5$$

练习册习题

2. (练习十八3) 设总体$X \sim E(1/\theta)$，$(X_1, \cdots, X_n)$是X的样本，证明$nZ = n\min\{X_1, \cdots, X_n\}$是$\theta$的无偏估计。

解　即证$EnZ = \theta \Leftrightarrow EZ = \dfrac{\theta}{n}$.

$z \geq 0$　$F_Z(z) = P(\min\{X_1, \cdots, X_n\} \leq z)$

$$= 1 - (P(X > z))^n = 1 - e^{-\frac{n}{\theta}z}$$

$z < 0, F_Z(z) = 0$

$\therefore Z \sim E(\dfrac{n}{\theta}) \Rightarrow EZ = \dfrac{\theta}{n}$. 即证.