Chapter 15
周期性非正弦稳态电路

15.1 周期性函数的傅里叶级数

Trigonometric Fourier Series

15.2 平均功率和有效值

Average Power and rms Values

15.3 周期性非正弦电源激励下的稳态响应

Steady-state Response under Nonsinasoidal Input

目标：

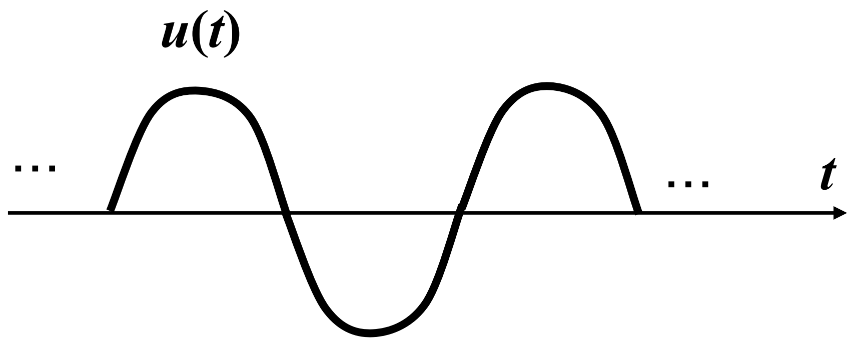
利用傅里叶级数和叠加原理计算周期电源下的稳态响应

15.1 周期性函数的傅里叶级数 Fourier Series

一、周期非正弦激励（*nonsinusoidal periodic excitation*）

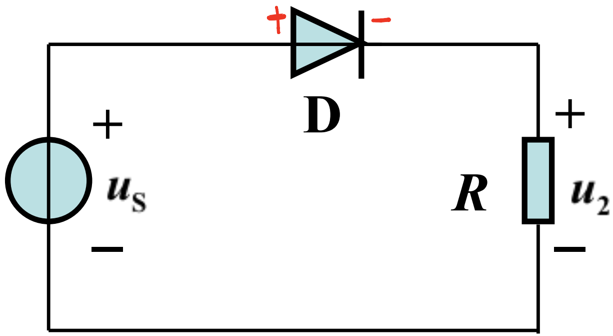
1. 常见的周期非正弦激励信号

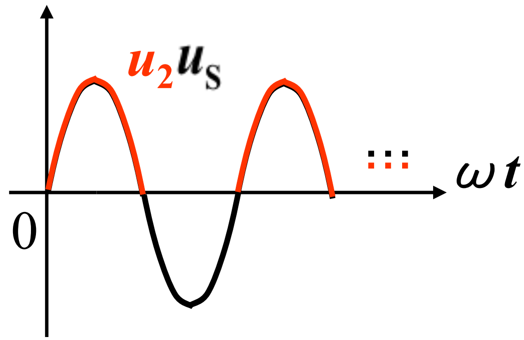
（1）发电机(*generator*)发出的电压波形，不可能是完全正弦的。



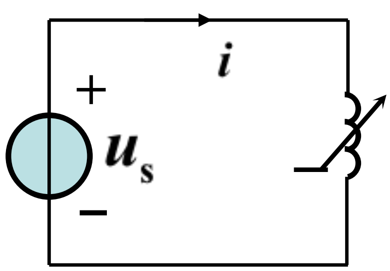
（2）当电路中存在非线性元件时也会产生非正弦电压、电流。

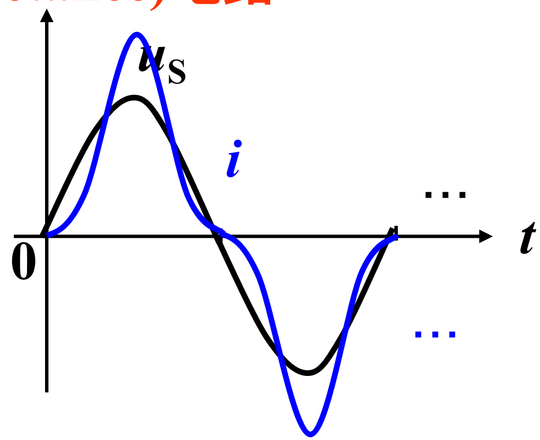
二极管整流电路



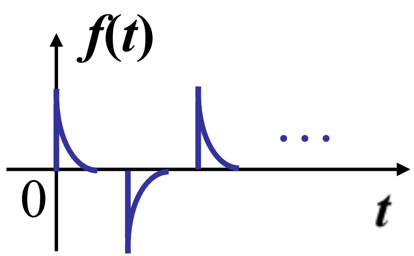


非线性电感(nonlinearity inductance)电路

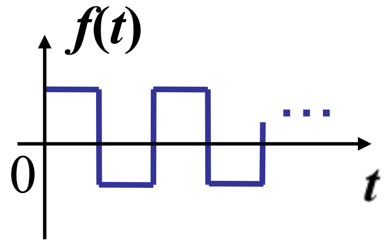




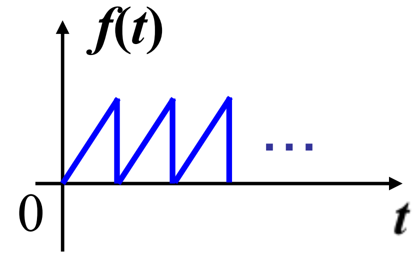
（3） 大量脉冲信号均为周期性非正弦信号。



尖脉冲



方波



锯齿波

2. 周期函数的谐波分析 ——傅里叶级数

任何满足狄里赫利条件的周期函数$f(t)$可展开成傅里叶级数。

$$f(t) = f(t + kT)$$

式中T为周期，$k = 0, 1, 2, 3$，…（k为正整数） $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

周期函数傅里叶级数展开式为

$$f(t) = a_0 + (a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t) + (a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t) + \cdots$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t]$$

将同频率余弦项与正弦项合并，$f(t)$还可表示成下式

$$f(t) = c_0 + c_1 \sin(\omega t + \theta_1) + c_2 \sin(2\omega t + \theta_2)$$

$$+ \cdots + c_k \sin(k\omega t + \theta_k) + \cdots$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega t + \theta_k)$$

两种表示式中系数间的关系：

$$c_0 = a_0$$

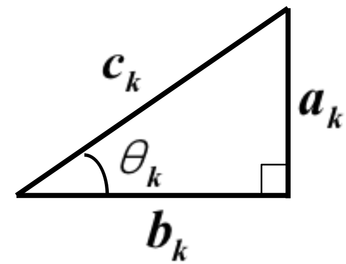
$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\tan\theta_k = \frac{a_k}{b_k}$$

或

$$a_k = c_k \sin\theta_k$$

$$b_k = c_k \cos\theta_k$$



求傅里叶系数(Fourier coefficient)的公式：

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t$$

即$f(t)$在一周期内平均值

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos k\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin k\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)$$

$$f(t) = c_0 + c_1 \sin(\omega t + \theta_1) + c_2 \sin(2\omega t + \theta_2)$$

$$+ \cdots + c_k \sin(k\omega t + \theta_k) + \ldots\ldots$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega t + \theta_k)$$

二次谐波

基波

直流分量

谐波分量

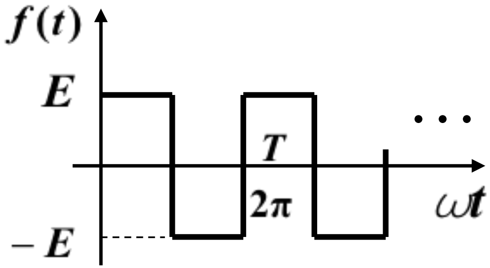
*k*次谐波

高次谐波(*higher harmonic*)— $k \geq 2$次的谐波

奇次谐波(*odd harmonic*)— *k*为奇次的谐波

偶次谐波(*even harmonic*)— *k*为偶次的谐波

例1　求周期函数$f(t)$的傅里叶级数展开式。



$$f(t)=\begin{cases} E & (0<t<\frac{T}{2}) \\ -E & (\frac{T}{2}<t<T) \end{cases}$$

一个周期内的表达式

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} E\mathrm{d}t+\int_{\frac{T}{2}}^{T} -E\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{T}\left[E(\frac{T}{2}-0)+(-E)(T-\frac{T}{2})\right]=0$$

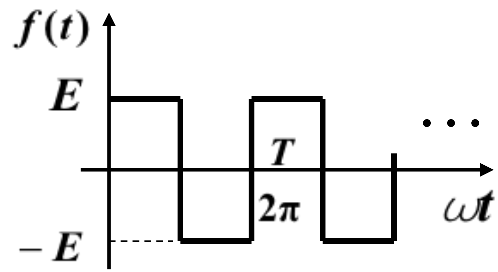
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos k\omega t \, \mathrm{d}(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} E\cos k\omega t \, \mathrm{d}(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} (-E)\cos k\omega t \, \mathrm{d}(\omega t)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{E}{k}\sin k\omega t\Big|_0^{\pi} + \frac{-E}{k}\sin k\omega t\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{E}{k\pi}\left[\sin k\pi - \sin 0 - (\sin 2k\pi - \sin k\pi)\right]$$

$$= 0$$

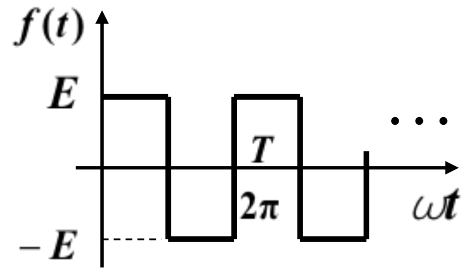


$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\times\sin k\omega t\ \mathrm{d}(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} E\sin k\omega t\,\mathrm{d}(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi}(-E)\sin k\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)\right]$$

$$= \frac{E}{k\pi}\left[-\cos k\omega t\Big|_0^{\pi} + \cos k\omega t\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{E}{k\pi}\left[-(\cos k\pi - \cos 0^\circ) + \cos 2k\pi - \cos k\pi\right]$$



$$= \frac{2E}{k\pi}(1-\cos k\pi) = \begin{cases} \dfrac{4E}{k\pi}, & k为奇数 \\ 0, & k为偶数 \end{cases}$$

则

$$f(t) = \frac{4E}{\pi}\sin\omega t + \frac{4E}{3\pi}\sin 3\omega t + \frac{4E}{5\pi}\sin 5\omega t + \cdots$$

$$= \frac{4E}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\right)$$

周期函数傅里叶级数展开式为

$$f(t)=a_0+(a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t)+(a_2\cos 2\omega t+b_2\sin 2\omega t)+\cdots$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t]$$

$$a_0=a_k=0$$

$$b_k=\frac{2E}{k\pi}(1-\cos k\pi)=\begin{cases}\dfrac{4E}{k\pi}, & k\text{为奇数}\\ 0, & k\text{为偶数}\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{4E}{\pi 3\pi 5\pi}\sin\omega t+\frac{4E}{}\sin 3\omega t+\frac{4E}{}\sin 5\omega t+\cdots$$

$$=\frac{4E}{\pi 3}(\sin\omega t+\frac{1}{5}\sin 3\omega t+\frac{1}{}\sin 5\omega t+\cdots)$$

二、周期电流的有效值、电路的平均功率

1. 非正弦周期电压，电流的有效值

设 $$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \sin(k\omega t + \theta_k)$$

根据周期函数有效值定义 $$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \mathrm{d}t}$$

将 i 代入，得

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \sin(k\omega t + \theta_k)\right]^2 \mathrm{d}t}$$

上式积分号中 i^2项展开后有四种类型：

（1） I_0^2 直流分量平方 $$\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 \mathrm{d}t = I_0^2$$

(2) $I_{mk}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k)\ (k = 1,2,3,\cdots)$ 各次谐波分量平方

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_{mk}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k)\mathrm{d}t = \frac{I_{mk}^2}{2} = I_k^2$$

(3) $2I_0 I_{mk} \sin(k\omega t + \theta_k)\ (k = 1,2,3,\cdots)$ 直流分量与各次谐波乘积

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_0 \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \sin(k\omega t + \theta_k)\mathrm{d}t = 0$$

(4) $I_{mp} \sin(p\omega t + \theta_p) I_{mq} \sin(q\omega t + \theta_q)$ (不同频率各次谐波两两相乘)

$(k = 1,2,3\ldots\ldots, q = 1,2,\ldots\ldots, k \neq q)$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_{mk} \sin(k\omega t + \theta_k) I_{mq} \sin(q\omega t + \theta_q)\mathrm{d}t = 0$$

由此可得

$$I=\sqrt{I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+\cdots}$$

其中，I_1、$I_2\cdots$ 分别为各次谐波电流（正弦电流）的有效值

同理: 非正弦周期电压

$$u=U_0+\sum_{k=1}^{\infty} U_{mk}\sin(k\omega t+\theta_k)$$

其有效值

$$U=\sqrt{U_0^2+\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}$$

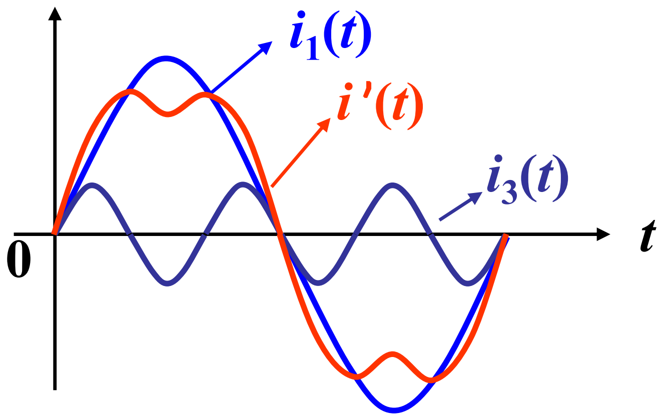
$$=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_2^2+\cdots}$$

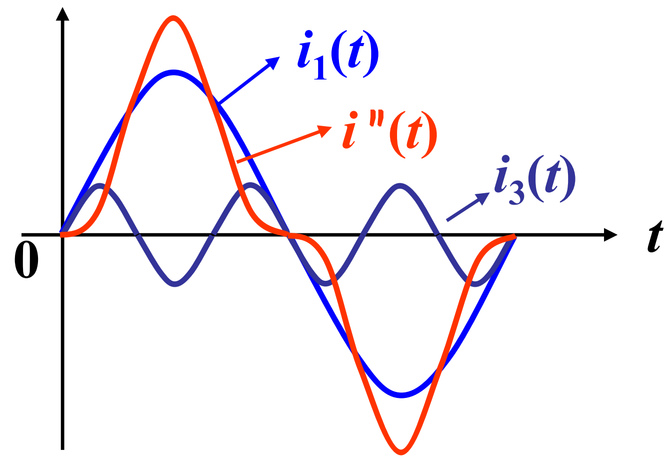
注意：

（1）周期性非正弦电流（或电压）有效值与最大值一 般无 $\sqrt{2}$ 倍关系。

（2） 有效值相同的周期性非正弦电压（或电流）其波形不一定相同。

例2.





$$i'(t)=i_1(t)+i_3(t) \quad \neq \quad i''(t)=i_1(t)-i_3(t)$$

$$I'=\sqrt{I_1^2+I_3^2} \quad = \quad I''=\sqrt{I_1^2+I_3^2}$$

2. 周期性非正弦电流电路的平均功率

平均功率定义公式与正弦电流相同。

瞬时功率 $$p = ui$$

平均功率 $$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T ui\mathrm{d}t$$

若

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{\mathrm{m}k} \sin(k\omega t + \theta_{ku})$$

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{\mathrm{m}k} \sin(k\omega t + \theta_{ki})$$

则

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left[U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{\mathrm{m}k} \sin(k\omega t + \theta_{ku})\right]\left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{\mathrm{m}k} \sin(k\omega t + \theta_{ki})\right]\mathrm{d}t$$

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T\left[U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{mk}\sin(k\omega t+\theta_{ku})\right]\left[I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{mk}\sin(k\omega t+\theta_{ki})\right]\mathrm{d}t$$

ui 相乘之积分也可分为四种类型：

(1) $\frac{1}{T}\boxed{\int_0^T U_0 I_0\mathrm{d}t}=U_0 I_0=P_0$ 直流分量乘积之积分

(2) $\frac{1}{T}\boxed{\int_0^T U_0\times\sum_{k=1}^{\infty}I_{mk}\sin(k\omega t+\theta_{ki})\mathrm{d}t}=0$

$\frac{1}{T}\boxed{\int_0^T I_0\times\sum_{k=1}^{\infty}U_{mk}\sin(k\omega t+\theta_{ku})\mathrm{d}t}=0$

直流分量与各次谐波分量乘积之和的积分

(3) $\frac{1}{T}\boxed{\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}U_{mk}\sin(k\omega t+\theta_{ku})I_{mk}\sin(k\omega t+\theta_{ki})\mathrm{d}t}$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}U_k I_k\cos\theta_k=\sum_{k=1}^{\infty}P_k$$

同频电压、电流分量乘积之和的积分

其中 $U_k=\frac{1}{\sqrt{2}}U_{mk}$ $I_k=\frac{1}{\sqrt{2}}I_{mk}$ $\theta_k=\theta_{ku}-\theta_{ki}$

(4) $\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{p=1}^{\infty}U_{mp}\sin(p\omega t+\theta_{pu})\sum_{q=1}^{\infty}I_{mq}\sin(q\omega t+\theta_{qi})\mathrm{d}t}=0$

$(p\neq q)$

不同频电压、电流分量乘积之和的积分

则平均功率

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T uidt$$

$$=U_0I_0+U_1I_1\cos\theta_1+U_2I_2.\cos\theta_2+\cdots$$

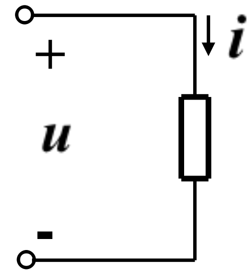
$$=P_0+P_1+P_2+\cdots$$

周期性非正弦电流电路平均功率等于直流分量产生的功率和各次谐波各自产生的平均功率之和。（同频率电压电流相乘才形成平均功率）。

例 已知：$u = 2 + 10\sin\omega t + 5\sin 2\omega t + 2\sin 3\omega t$

$i = 1 + 2\sin(\omega t - 30^\circ) + \sin(2\omega t - 60^\circ)$

求：电路吸收的平均功率和电压、电流的有效值。



$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3$$

$$= 2\times 1 + \frac{10\times 2}{2}\cos 30^\circ + \frac{1\times 5}{2}\cos 60^\circ + 0$$

$$= 2 + 8.66 + 1.25$$

$$= 11.9\ \text{W}$$

有效值

$$U = \sqrt{2^2 + \frac{10^2}{2} + \frac{5^2}{2} + \frac{2^2}{2}} = \sqrt{4 + 50 + 12.5 + 2} = \sqrt{68.5} = 8.28\ \text{V}$$

$$I = \sqrt{1^2 + \frac{2^2}{2} + \frac{1^2}{2}} = \sqrt{1 + 2 + 0.5} = 1.87\ \text{A}$$

三、周期性非正弦电流电路的计算

采用谐波分析法，其步骤如下：

（1）将周期性非正弦电源，分解为傅里叶级数，根据要求取有限项；

（2）根据叠加定理，分别计算直流分量和各次谐波激励单独作用时产生的响应；

(a) 直流分量单独作用相当于解直流电路（L短路、C开路）；

(b) 各次谐波单独作用时均为正弦稳态电路，可采用相量法计算(要注意电感和电容的阻抗随频率ω的变化而变化)；

（3）将计算结果以瞬时值形式相加（各次谐波激励所产生的相量形式的响应不能进行相加，因其频率不同）。

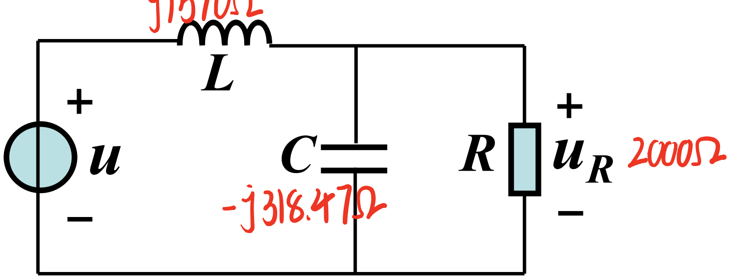
例　图示电路为全波整流滤波电路。其中U_m=157V。L=5H，C=10μF，R=2000Ω，ω=314rad/s。加在滤波器上的全波整流电压u如图所示。

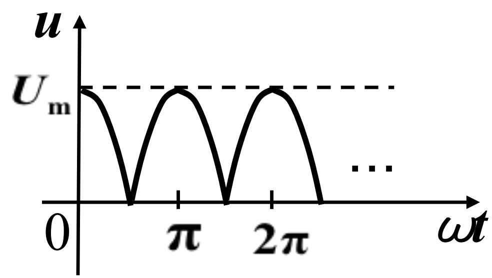
$j\omega L = j\cdot 314\times 5H =$

求：（1）电阻R上电压u_R及其有效值U_R。

$-j\cdot\frac{1}{\omega C} = -j\,\frac{10^5}{314\times 1\times 10^{5}}$

（2）电阻R消耗的的平均功率。





解

（1）上述周期性非正弦电压分解成傅氏级数为

$$u=\frac{4}{\pi}U_m\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cos 2\omega t-\frac{1}{15}\cos 4\omega t+\cdots\right)$$

$$=100+66.7\cos 2\omega t-13.33\cos 4\omega t\ \mathrm{V}$$

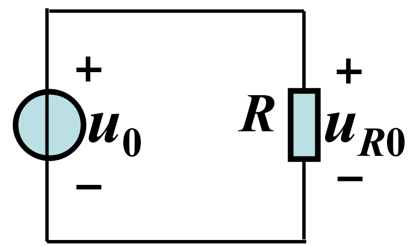
取到四次谐波

（2）计算各次谐波分量

（a）100V直流电源单独作用（*L*短路、*C*开路）

$$U_{R0} = 100\text{V}$$

$$P_0 = \frac{U_R^2}{R} = \frac{100^2}{2000} = 5\text{ W}$$



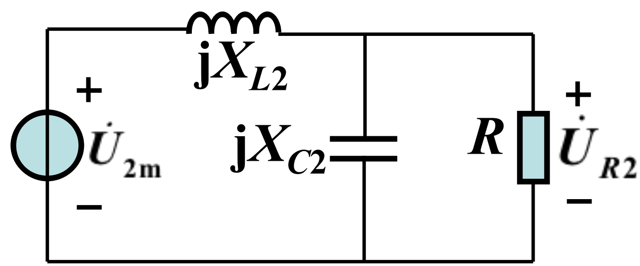
(b) 二次谐波$u_2 = 66.7\cos 2\omega t$ V 单独作用（用相量法）

比较容易出错

$$X_{L2} = 2\omega L = 2 \times 314 \times 5 = 3140\ \Omega$$

$$X_{C2} = \frac{1}{2\omega C} = \frac{1}{2 \times 314 \times 10 \times 10^{-6}}$$

$$= 159\ \Omega$$



$$Z_2 = \mathrm{j}X_{L2} + \frac{R(\text{-j}X_{C2})}{R+(\text{-j}X_{C2})} = \mathrm{j}3140 + \frac{2000\times(-\mathrm{j}159)}{2000-\mathrm{j}159}$$

$$= \mathrm{j}3140 + 12.55 - \mathrm{j}158 \; = 12.55 + \mathrm{j}2982 \; = 2982\angle 89.76^{\circ}\ \Omega$$

经常在此设坑

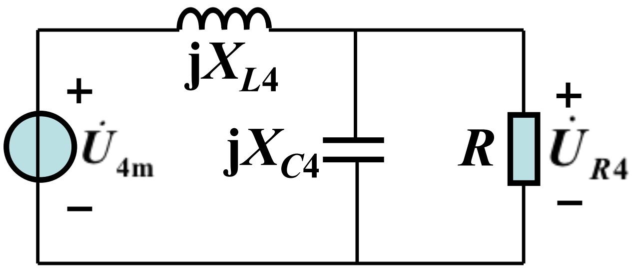
$$\dot{U}_{R2\mathrm{m}} = \frac{U_{2\mathrm{m}}}{Z_2}\cdot\frac{R(\mathrm{j}X_{C2})}{R+\mathrm{j}X_{C2}} = \frac{66.7\angle 0^{\circ}}{2982\angle 89.76^{\circ}}\times 158.5\angle -85.46^{\circ}$$

$= 3.55\angle -175^{\circ}\mathrm{V}$ 注意这里相量用幅值表示了，建议做题还是用有效值，这里只是给个印象

$$u_{R2} = 3.55\cos(2\omega t - 175^{\circ})\ \mathrm{V}$$

$$P_2 = \frac{U_{R2}^2}{R} = \frac{3.55^2/2}{2000} = 3.15\times 10^{-3}\ \mathrm{W}$$

(c) 四次谐波单独作用 $u_4 = 13.33\cos 4\omega t$ V



$$Z_4 = \mathrm{j}6280 + \frac{2000(-\mathrm{j}79.5)}{2000 - \mathrm{j}79.5}$$
$$= \mathrm{j}6280 + 3.16 - \mathrm{j}79.3$$
$$= 3.16 + \mathrm{j}6201$$
$$= 6201\angle 90^{\circ}\ \Omega$$

$$X_{L4} = 4\omega L = 4\times 314\times 5 = 6280\ \Omega$$

$$X_{C4} = \frac{1}{4\omega C} = \frac{1}{4\times 314\times 10\times 10^{-6}} = 79.5\ \Omega$$

$$\dot{U}_{R4\mathrm{m}} = \frac{13.33\angle 0^{\circ}}{6201\angle 90^{\circ}}\times 79.4\angle -87.72^{\circ} = 0.171\angle -178^{\circ}\ \mathrm{V}$$

$$u_{R4} = 0.171\cos(4\omega t - 178^{\circ})\ \mathrm{V}$$

$$P_4 = \frac{0.171^2/2}{2000} = 7.31\times 10^{-6}\ \mathrm{W}$$

电阻R上电压的瞬时值为

$$u_R = u_{R0} + u_{R2} + u_{R4}$$

$$= 100 + 3.55\cos(2\omega t - 175^\circ) - 0.171\cos(4\omega t - 178^\circ)\text{V}$$

电压u_R的有效值为

$$U_R = \sqrt{100^2 + \frac{3.55^2}{2} + \frac{0.171^2}{2}}$$

$$= \sqrt{10000 + 6.3 + 0.0146} = 100\ \text{V}$$

电阻R消耗的的平均功率为

$$P = P_0 + P_2 + P_4$$

$$= 5 + 3.15\times10^{-3} + 7.31\times10^{-6} = 5.003\ \text{W}$$

作业

- 16.2节：16-2
- 16.3节：16-11，16-16
- 16.4节：16-26
- 16.5节：16-30
- 综合：16-38
- 无作业，祝大家考试顺利！