大学物理(下)

华 中 科 技 大 学
张智
zzhang@hust.edu.cn

题: 已知谐振动A=10cm ,T=2s , 当 t=0 时位移为 –5cm, 且向 x 负向运动。求:

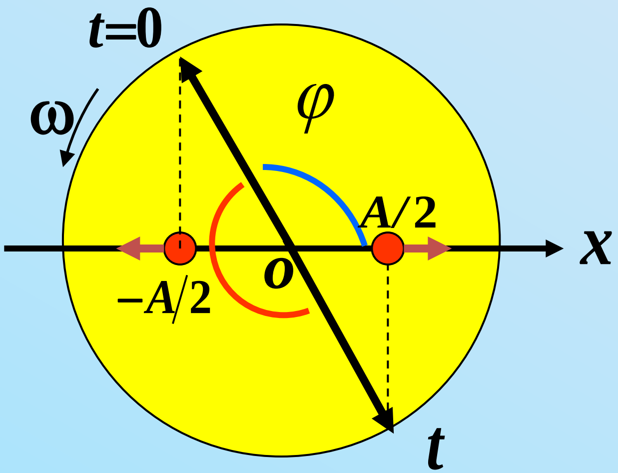
（1）振动方程。

（2） x=5cm 且向 x 正向运动时的速度、加速度及从这一位置回到平衡位置的最短时间。

解:（1）$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \ (\text{rad/s})$$

由旋转矢量得 $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$



$$x = 0.1\cos(\pi t + \frac{2\pi}{3})\ \text{m}$$

（2）先求 t 。由旋转矢量法

$$t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{\pi} = 1\text{s}$$ （半个周期）

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

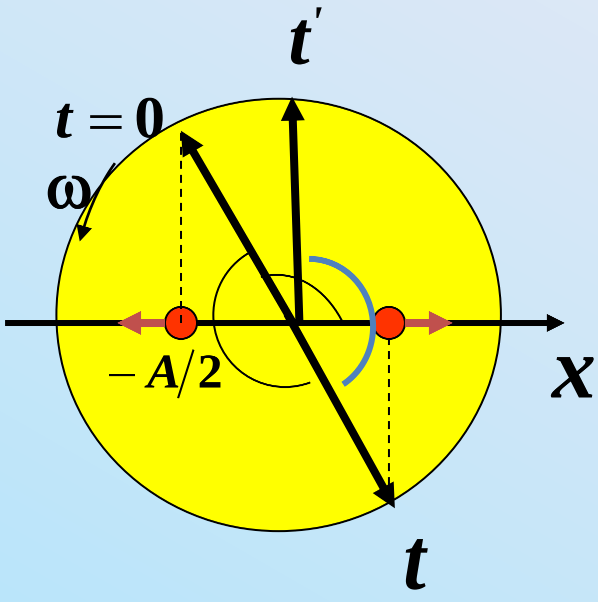
$$= -0.1\pi \sin(\pi + 2\pi/3)$$

$$= 0.27 \mathrm{m/s}$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= -0.1\pi^2 \cos(\pi + 2\pi/3)$$

$$= -0.49 \mathrm{m/s}^2$$



由旋转矢量法：

$$\Delta\varphi' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi'}{\omega} = \frac{5\pi/6}{\pi} = \frac{5}{6}\mathrm{s}$$

（也可用解析法）

二、平面简谐波

媒质中各质点都作谐振动，并且向一个方向传播。

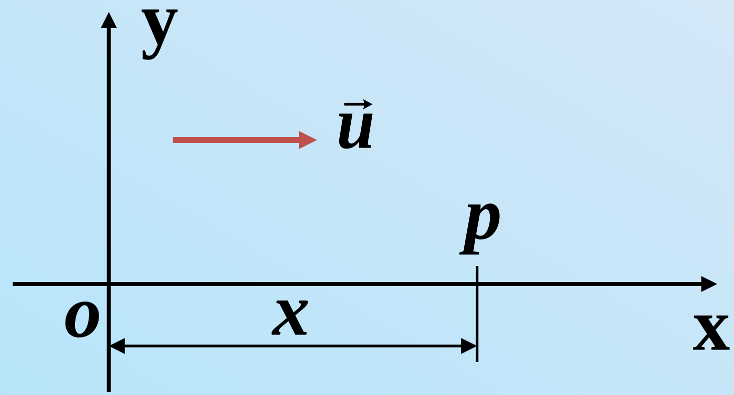
1. 波函数

能够描述任意质点在任意时刻的振动情况

以横波为例：

设一简谐波以速度u向x轴方向传播，

在坐标原点o处引起的振动为：



$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi)$$

要求给出任意一点的振动。

任选一点 p，且$op=x$

注意:x轴上一点的运动其实代表该点所在波阵面上所有质点的运动。x轴代表整个空间。

注：波传播的是质点的振动状态 ——传播波源的位相

即：波速=位相传播的速度（相速）

p点的振动是从o点振动传过来，

o点t时刻的位相，经 $\Delta t = \dfrac{x}{u}$ 传到p点

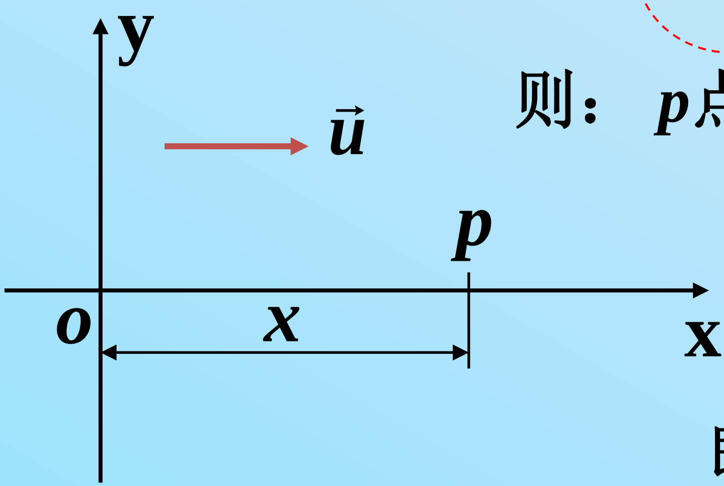
} p点的位相总是落后于o点的位相

即：波速=位相传播的速度 =相速

p点的振动是从o点振动传过来，

o点t时刻的位相，经$\Delta t=\frac{x}{u}$传到p点

p点的位相总是落后于o点的位相



则： p点t时刻的位相=o点$(t-\Delta t)$时刻的位相

o点的振动： $y_O=A\cos(\omega t+\varphi)$

o点 t 时刻的位相为： $\omega t+\varphi$

o点 $t-\Delta t$时刻的位相为： $\omega(t-\Delta t)+\varphi$

即p点在 t 时刻的位相为： $\omega(t-\Delta t)+\varphi$

任意点p的振动为：$y=A\cos[\omega(t-\Delta t)+\varphi]=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

即： $\boxed{y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]}$ （平面简谐波的波函数）

描述了整个空间任意质点在任意时刻的振动状态。

注意: u为速度的大小(正的)

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

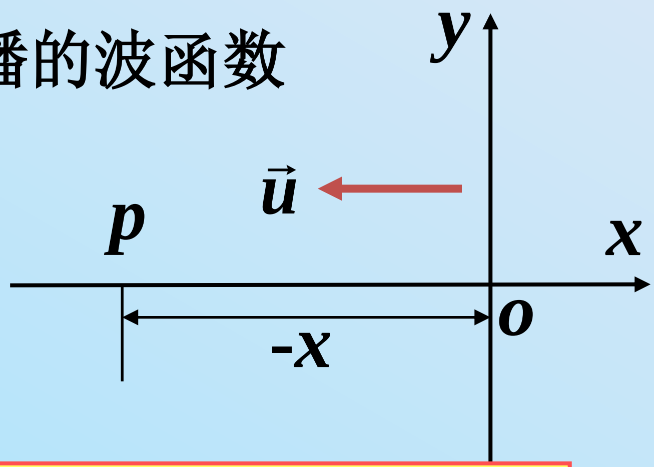
平面简谐波的波函数(正向传播)

2.讨论

$$\boxed{y_O=A\cos(\omega t+\varphi)}$$

(1)上式是由原点的振动方程给出了正向传播的波函数

若波向x轴负方向传播，y=?



$$y=A\cos[\omega(t-\Delta t)+\varphi] \qquad \Delta t=\frac{-x}{u}$$

$$y=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi]$$

平面简谐波的波函数(反向传播)

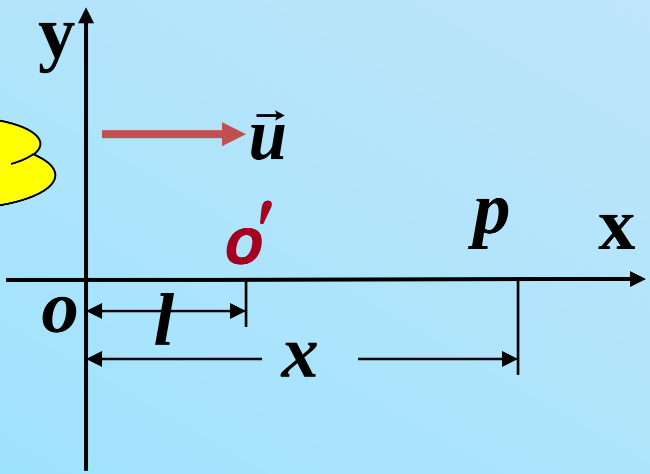
(2)若已知的是o'点(非原点)的振动，则

$$\Delta t=\frac{\Delta x}{u}=\frac{x-l}{u}$$

若向x轴负向传播?

向x轴正向传播：

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x-l}{u})+\varphi]$$



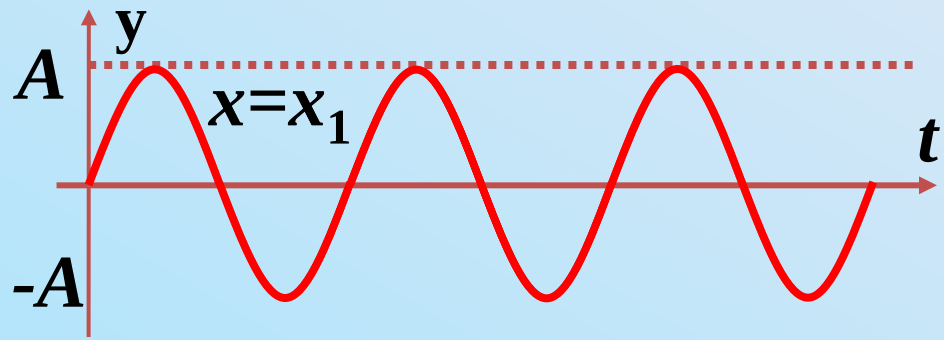
(3)波函数的物理意义

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

a. 当$x=x_1$=常数

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x_1}{u})+\varphi]$$

$$=A\cos[\omega t+\varphi_1]=f(t)$$



表示 x_1处质点随时间t的振动规律 —振动方程

若x取一系列值，表明具有不同x值的各质元都做同频率的谐振动，但位相各不相同。

在波的传播方向上，各质点的振动位相依次落后。--波动的基本特征

若x=λ， 则该处振动位相比原点（x=0）的位相落后2π，振动状态完全相同，因此，波长标志着波在空间上的周期性。

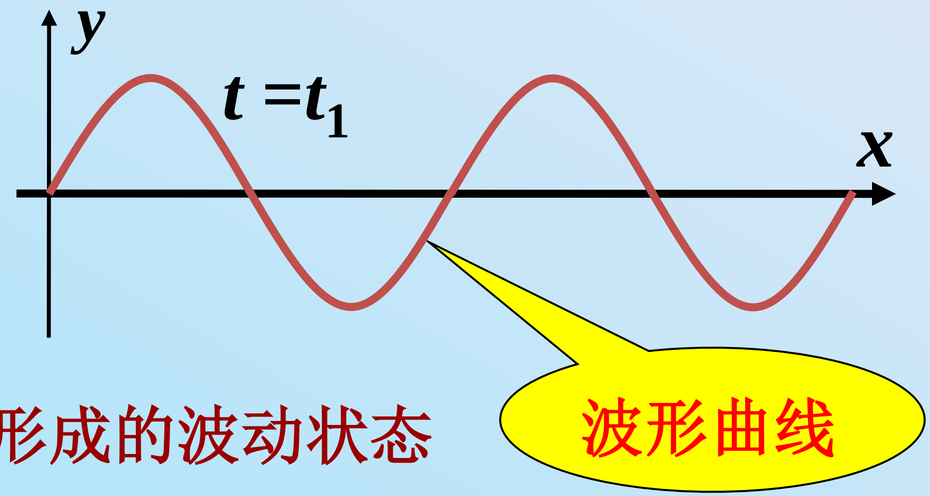
$$\boxed{y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]}$$

b. 当 $t = t_1$ = 常数

$$y = A\cos[\omega(t_1 - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

$$= A\cos[(\omega t_1 + \varphi) - \frac{x}{u}]$$

$$= f(x)$$

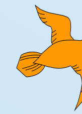


给出t_1时刻传播方向上所有质点的振动状态 —介质形成的波动状态

c. $x \neq$ 常数，$t \neq$ 常数 $y = A\cos[\omega\,(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$

描述不同时刻，不同位置质点的振动状态，每一时刻都有一波形曲线。

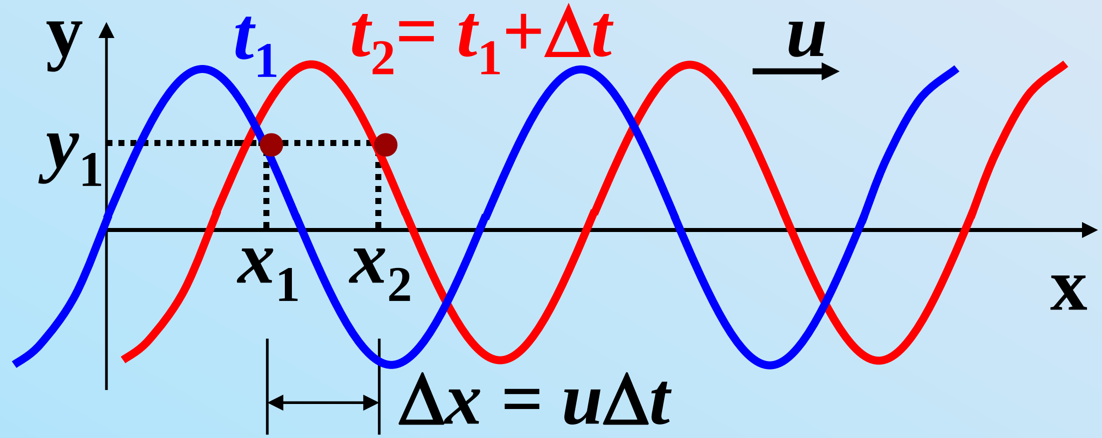
d. $x = x_1$，$t = t_1$，都是常数



$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$y = A\cos\left[\omega\left(t_1 - \frac{x_1}{u}\right) + \varphi\right] = y_1 = \text{常数}$$

表示 t_1时刻，
x_1处质点的位移。



当 $t = t_1 + \Delta t = t_2$时，

质点 $x_2 = x_1 + \Delta x = x_1 + u\Delta t$

其位移为：

$$y_2 = A\cos\left[\omega\left(t_2 - \frac{x_2}{u}\right) + \varphi\right] = A\cos\left\{\omega\left[(t_1 + \Delta t) - \frac{x_1 + \Delta x}{u}\right] + \varphi\right\}$$

$$= A\cos\left[\omega t_1 + \omega\Delta t - \frac{\omega x_1}{u} - \frac{\omega\Delta x}{u} + \varphi\right]$$

$$= A\cos\left[\omega\left(t_1 - \frac{x_1}{u}\right) + \varphi\right] = y_1$$

即：t_2时刻，x_2质点振动的位移恰是 t_1时刻x_1质点的位移。

结论 经Δt 时间，整个波形向前移动了一段路程$\Delta x = u\Delta t$。

总之：各点位移变化，才使波形变化！

波形传播的速度 = u = 波速 = 相速

(4)波函数的几种等价表式：

向x轴正向传播的波

(A) $y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

(B) $y(x,t)=A\cos[\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi]$

(C) $y(x,t)=A\cos[\omega t-kx+\varphi]$

(D) $y(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$

(E) $y(x,t)=A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ut)+\varphi]$

(F) $y(x,t)=A\cos[k(x-ut)+\varphi]$

(G) $y(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T})+\varphi]$

$\omega=\frac{2\pi}{T}$

$u=\frac{\lambda}{T}$

$k=\frac{2\pi}{\lambda}$

也可写成复数形式 $y=Ae^{i(\omega t-kx+\varphi)}$（取实部）

以上讨论也适用于纵波。

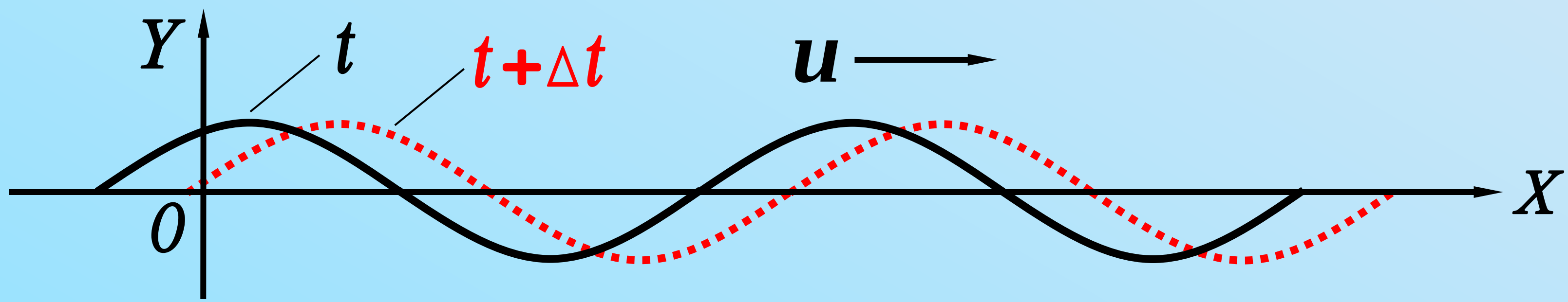
可将纵波的密集区看成波峰，疏散区看成波谷。 此说对否？

小结

写波函数的两个方法：**1)** 已知某确定点的振动方程，根据任意点*P*与此点的位相关系来写；**2)**若已知的是原点的振动方程，则可以直接套用波函数的标准形式。$y_0=A\cos[\omega t+\varphi]$

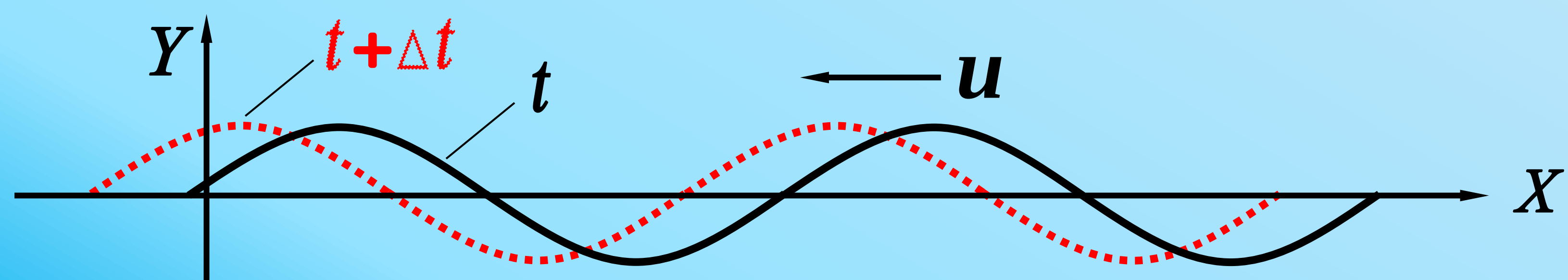
波沿*X*轴正方向传播:

$$y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]$$



波沿*X*轴负方向传播:

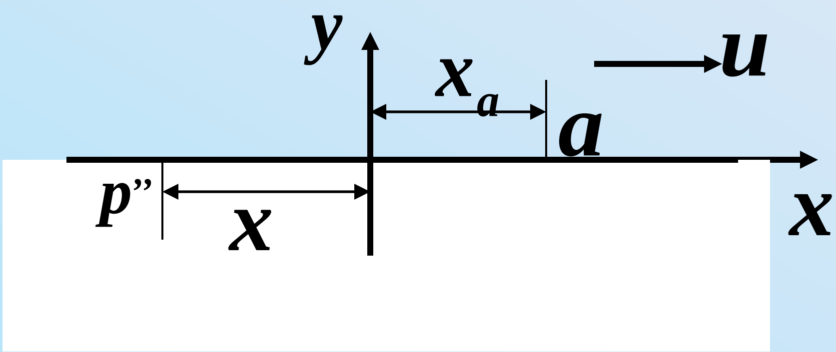
$$y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]$$



例：已知波沿 x 轴正向传播，波速为 u ，$x = x_a$ 处的振动方程为

$$y_a = A\cos(\omega t + \varphi)$$

试写出波的表达式。



解1: 从位相差考虑。

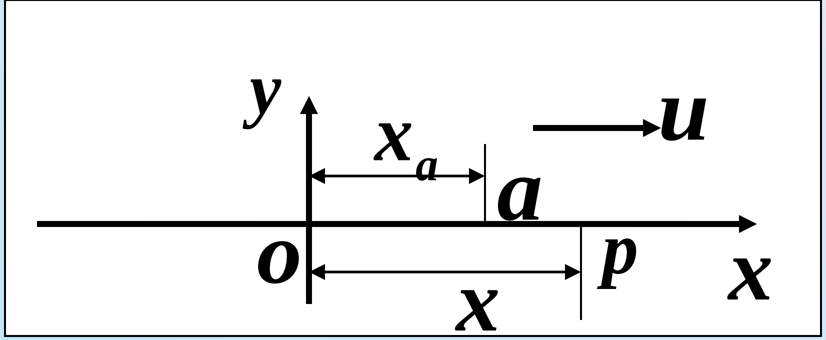
$$\Delta t = \frac{x - x_a}{u}$$ (a点的振动经过Δt的时间之后传到P点)

$$y = A\cos[\omega(t - \Delta t) + \varphi] = A\cos[\omega(t - \frac{x - x_a}{u}) + \varphi]$$

若 $p \rightarrow p'$ $\quad \Delta t = \frac{x_a - x}{u}$ 则 $(t + \frac{x_a - x}{u})$

若 $p \rightarrow p''$ $\quad \Delta t = \frac{-x + x_a}{u}$ 则 $(t + \frac{-x + x_a}{u})$

$$y_a = A\cos(\omega t + \varphi)$$



解2： 根据标准形式求解。

可设波函数为: $y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi]$

在上式中代入a点的坐标x_a可得a点的振动方程:

$$y_a = A\cos[\omega(t - \frac{x_a}{u}) + \phi]$$

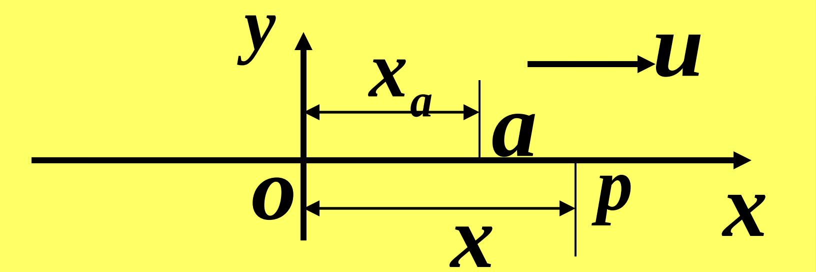
由题设有 $y_a = A\cos(\omega t + \varphi)$

以上两方程都是a 点的振动方程，故位相相同。所以，

$$\omega(t - \frac{x_a}{u}) + \phi = \omega t + \varphi \quad \Longrightarrow \quad \phi = \varphi + \frac{\omega x_a}{u}$$

故：$y = A\cos[\omega(t - \frac{x - x_a}{u}) + \varphi]$

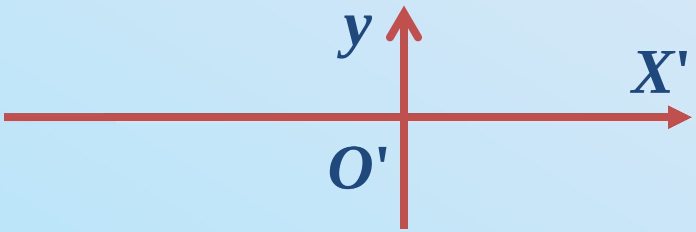
$$y_a = A\cos(\omega t + \varphi)$$



解3： 坐标变换法。

建新坐标$O'X'$与OX重合，

且O'点与a点重合。



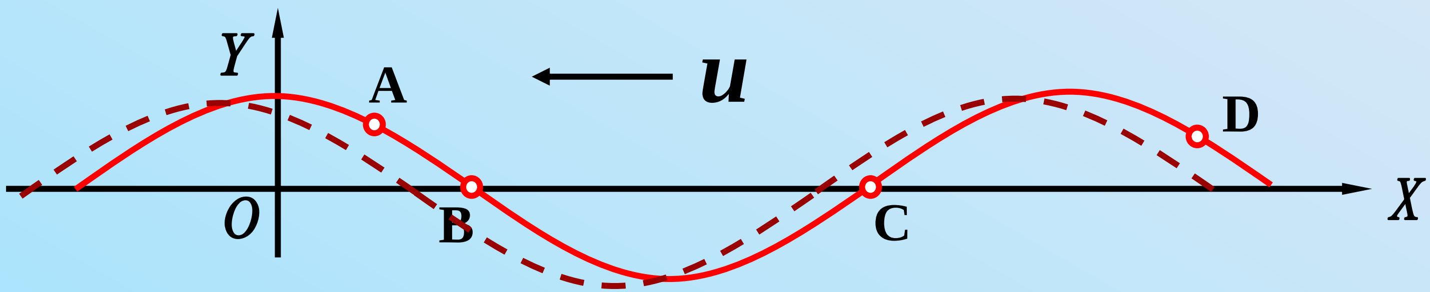
则在新坐标$O'X'$中，波函数为

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x'}{u}) + \varphi]$$

而 $x' = x - x_a$，代入上式得

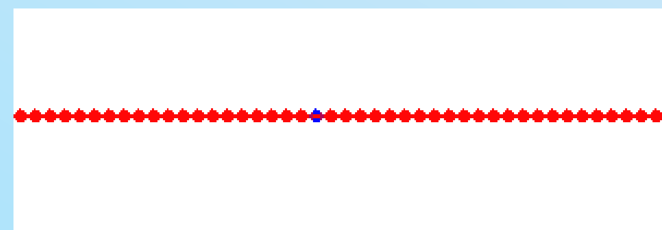
$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x - x_a}{u}) + \varphi]$$

例：以波速 *u* 沿 *X* 轴反方向传播的简谐波在 *t* 时刻的波形曲线如下图所示。则以下说法正确的是[　　]



（1）A点的速度大于零；

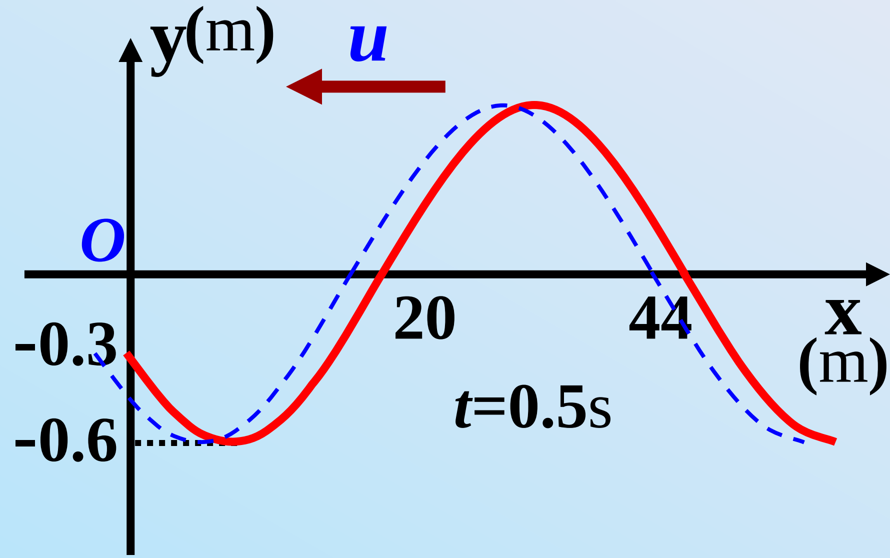
（2）B点静止不动；



（3）C点向下运动；

（4）D点的振动速度小于零。

例： 一平面简谐波在t=0.5s时的波形如图所示，该波以12m/s的速度沿x轴负方向传播，求波函数。



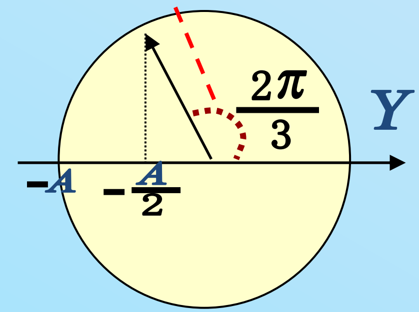
解： 先求原点处的振动方程

$$A = 0.6\,m$$

$$\lambda = 2\times(44-20) = 48\,(\mathrm{m}) \quad T = \frac{\lambda}{u} = 4\mathrm{s} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}\ (\mathrm{rad/s})$$

原点处振动方程： $y_O = 0.6\cos(\frac{\pi}{2}t+\varphi)$ (m)

t=0.5s 时， $y_O = -0.3$m 且 $v_O < 0$



$\varphi = ?$

$(A)\ \frac{2}{3}\pi$

$(B)\ \frac{5}{3}\pi$

$(C)\ \frac{5}{12}\pi$

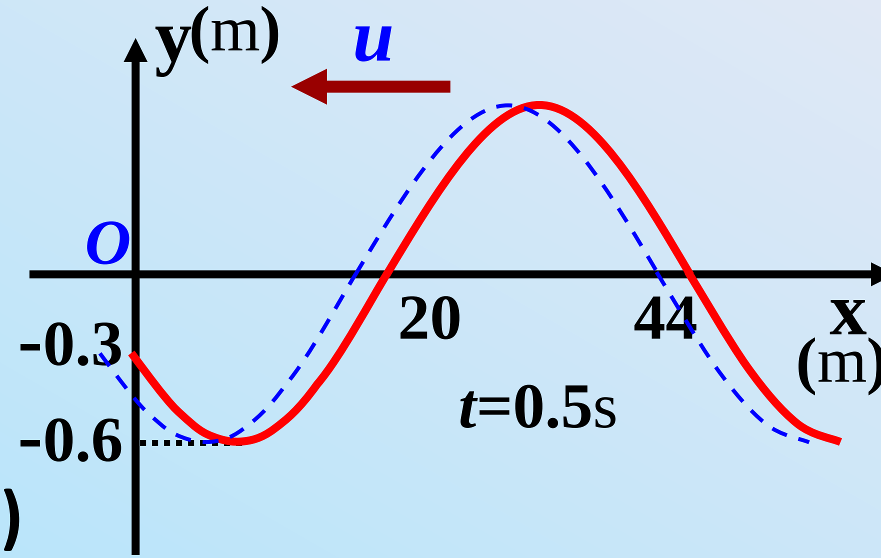
$(D)\ \frac{7}{12}\pi$

$$\therefore \frac{\pi}{2}\times 0.5+\varphi = +\frac{2\pi}{3} \qquad \varphi = \frac{5}{12}\pi$$

$$y_O = 0.6\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{5\pi}{12})\ (\mathrm{m})$$

波函数为： $y = 0.6\cos[\frac{\pi}{2}(t+\frac{x}{12})+\frac{5\pi}{12}]$ m

例：一平面简谐波在t=0.5s时的波形如图所示，该波以12m/s的速度沿x轴负方向传播，求波函数。



另解：$A = 0.6\ m$

$$\lambda = 2\times(44-20) = 48\ (\mathrm{m})$$

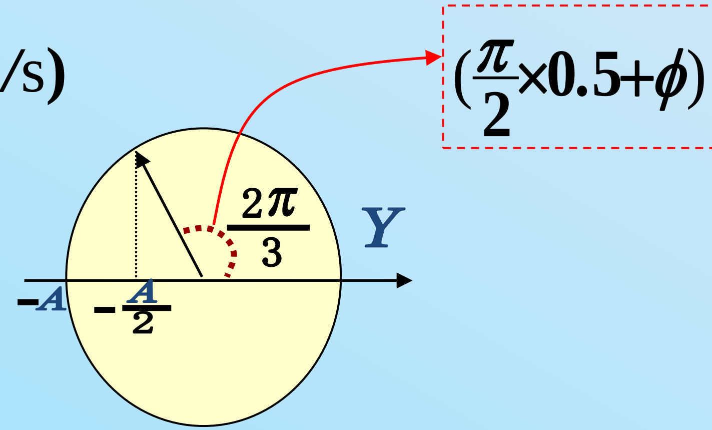
$$T=\frac{\lambda}{u}=4\mathrm{s} \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}\ (\mathrm{rad/s})$$

可设波函数为：

$$y=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\phi]$$

$$=0.6\cos[\frac{\pi}{2}(t+\frac{x}{12})+\phi]$$

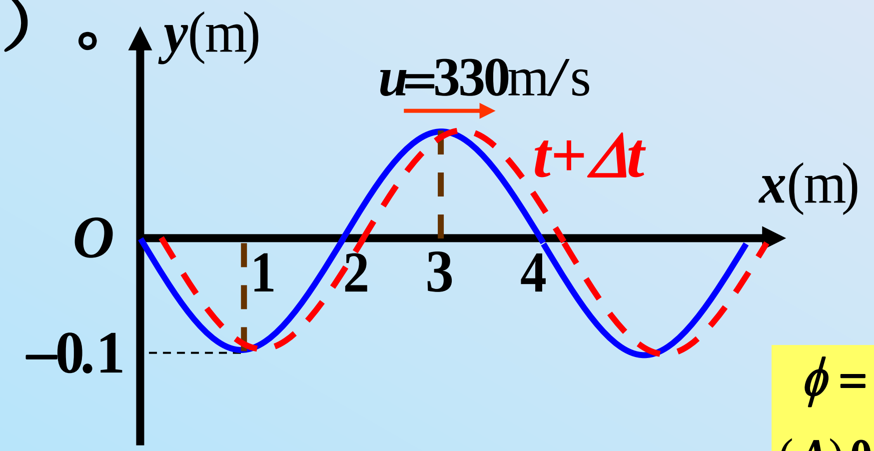
$$\therefore y_O=0.6\cos(\frac{\pi}{2}t+\phi)$$



$$(\frac{\pi}{2}\times0.5+\phi)=\frac{2\pi}{3} \qquad \phi=\frac{5\pi}{12}$$

波函数为：$$y=0.6\cos[\frac{\pi}{2}(t+\frac{x}{12})+\frac{5\pi}{12}]\ \mathrm{m}$$

例: 图为一平面简谐波在$t=T/4$时的波形曲线。求波动方程（波的表达式）。



解: 可设波函数为

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi]$$

由图知，$A=0.1$m, $u=330$m/s, $\lambda=4$m

$\phi=?$

(A) 0

(B) $\frac{\pi}{2}$

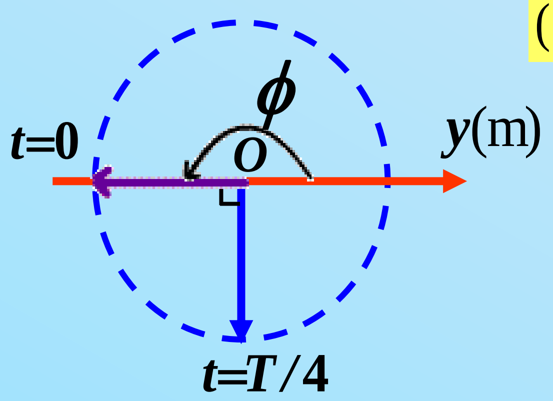
(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) π

$\therefore T=\lambda/u=2/165(\text{s})$，$\omega=2\pi/T=165\pi(\text{rad/s})$, $\phi=?$

下面求原点O的振动初位相ϕ:

从$t=0$到$t=T/4$, 旋转矢量扫过的角度为1/4个圆周。于是，$\phi=\pi$. 所以，

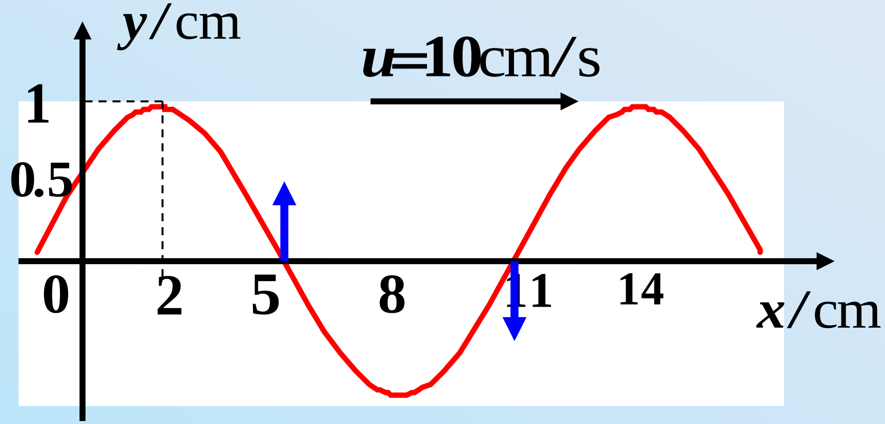


$$y=0.1\cos[165\pi(t-\frac{x}{330})+\pi](\text{m})$$

例： t=0 时的波形如图。

求 x_1=5cm, x_2=11cm

两处质点振动的位相差。



$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

解： x_1处 $y_1=A\cos[\omega(t-\frac{x_1}{u})+\varphi_0]$

x_2处 $y_2=A\cos[\omega(t-\frac{x_2}{u})+\varphi_0]$

位相差 $\Delta\varphi=[\omega(t-\frac{x_2}{u})+\varphi_0]-[\omega(t-\frac{x_1}{u})+\varphi_0]=-\frac{\omega}{u}(x_2-x_1)$

$$=-\frac{2\pi}{Tu}\Delta x=-\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x=\frac{2\pi}{12}(5-11)=-\pi$$ 反相

$\Delta\varphi=?$

$(A)\,0$

$(B)\,-\pi$

$(C)\,\frac{\pi}{3}$

$(D)\,\frac{\pi}{2}$

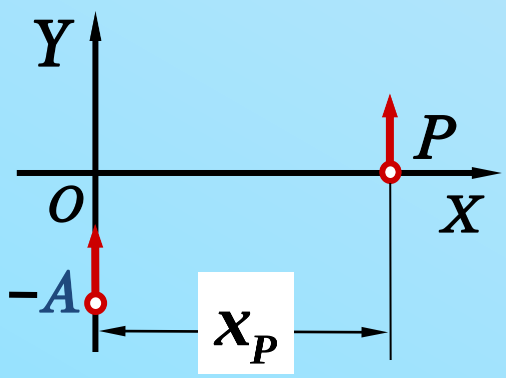
$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

位相差

波程差

例： 一正向余弦波，$\lambda=10\text{m}$，

t 时刻波线上两质元的振动情况如下：



$$0<x_P<\lambda$$

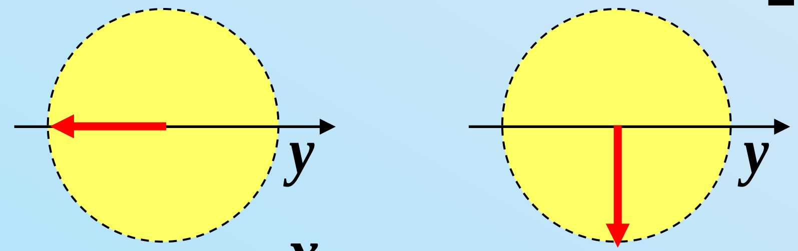
求：

1） x_P

2） 波形曲线

解： 1)正向余弦波方程 $y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

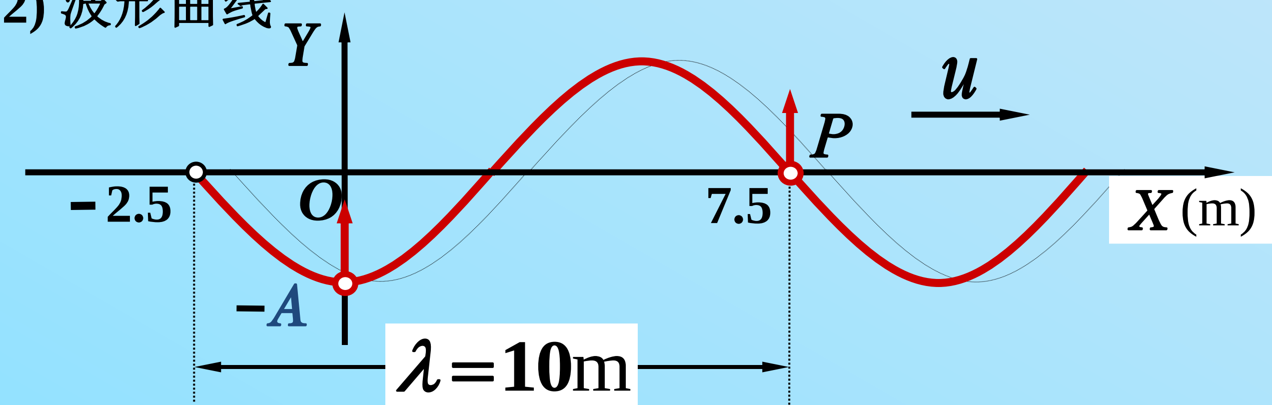
据旋转矢量法 $\begin{cases}\text{对质点}O：\varphi_O=\pi \\ \text{对质点}P：\varphi_P=\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$



$$\begin{cases}\varphi_P-\varphi_O=[\omega(t-\dfrac{x_P}{u})+\varphi]-[\omega t+\varphi]=-\omega\dfrac{x_P}{u} \\ \varphi_P-\varphi_O=\dfrac{3\pi}{2}-\pi-2\pi=-\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

$$x_P=\frac{3\pi}{2}\frac{u}{\omega}=\frac{3\pi}{2}\frac{\lambda}{2\pi}=\frac{3\lambda}{4}=7.5(\text{m})$$

2) 波形曲线



例：已知波函数为 $y = 0.02\cos\pi(20t - 0.5x)$ m

求：波的振幅、波长、波速及质点振动的最大速度

解: $y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$

已知 $y = 0.02\cos 20\pi(t - \frac{x}{40})$ m

$\therefore \quad A = 0.02$ m

$\omega = 20\pi \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 10$ Hz $\qquad T = 0.1$ s

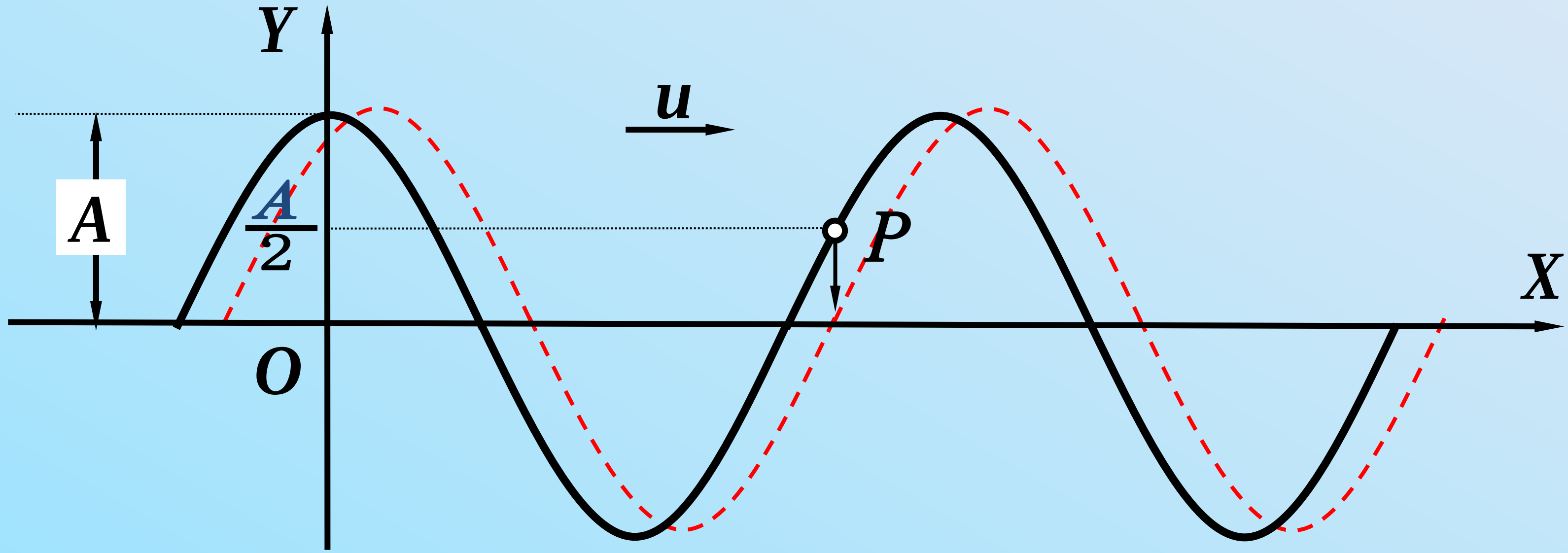
$u = 40$ m/s

$\lambda = uT = 4$ m

质点振动速度：$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -0.02 \times 20\pi \sin\pi(20t - 0.5x)$

最大速度：$v_{max} = 0.02 \times 20\pi = 1.26$ (m/s)

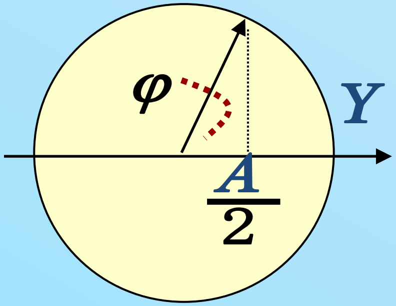
例：一简谐波$t = 0$时刻的波形曲线如图所示。



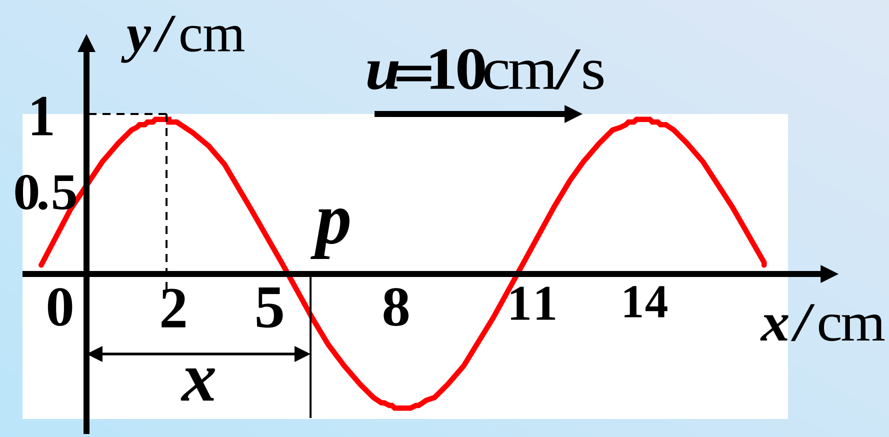
则此时P点的运动方向 ______，振动位相 = ______

解：波沿正方向传播，沿 X轴正方向稍微平移原波形图，可判断出 P点此时向下运动，即P点处质点速度小于零。

由旋转矢量图可知：$\varphi_P = \dfrac{\pi}{3}$



例： t=0 时的波形如图。试写出波的表达式。



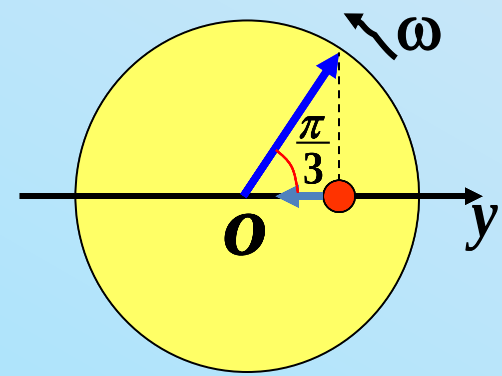
解： 先写 O点振动方程

由图可知

A=1cm　　λ=12cm

$$T=\frac{\lambda}{u}=\frac{12}{10}=1.2s$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{5\pi}{3}\text{rad/s}$$ 关键是确定 $\varphi_0=\frac{\pi}{3}$



$$y_O=A\cos(\omega t+\varphi_0)=\cos(\frac{5\pi}{3}t+\frac{\pi}{3})\ (\text{cm})$$

波的表达式

$$y=\cos[\frac{5\pi}{3}(t-\frac{x}{u})+\frac{\pi}{3}]=\cos[\frac{5\pi}{3}(t-\frac{x}{10})+\frac{\pi}{3}]\ (\text{cm})$$

3.平面波的波动方程

从 $y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$ 式中可求得：

波速：$u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$

与媒质的惯性和弹性有关

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{\omega^2}{u^2}A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\frac{\omega^2}{u^2}A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

平面波的波动方程

◆ 既适用于机械波，也适用于电磁波，反映了一切平面波的共同特征；

◆ 任何物理量只要运动规律满足此方程，就可以判定它是一波动过程，并按平面波的形式传播。

推广到三维空间：$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ ξ为空间位移

三、波的能量及传播

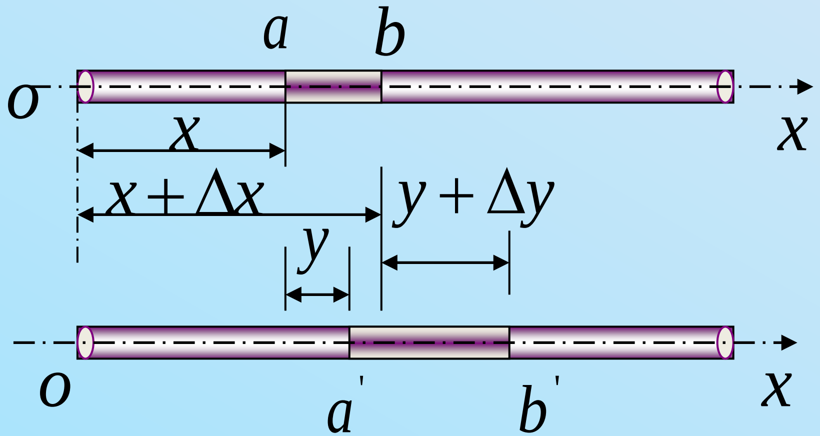
1. 波的能量

机械波的能量是媒质中各质元振动能量(振动动能、形变势能)的总和。

下面的分析以平面简谐纵波在棒中的传播为例。

设棒中平面简谐波的波函数为

$$y\ (x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})]$$



质元振动速度为

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin\omega(t-\frac{x}{u})$$

Δy :伸缩量

（形变的大小）

质元动能：$W_K=\frac{1}{2}(\Delta m)v^2=\frac{1}{2}\rho(\Delta V)v^2$

$$\boxed{W_K=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})}$$

应力：横截面内单位面积上的张力。

$$\text{应变}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

相对形变

胡克定律

$$\frac{F}{S}=-Y\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

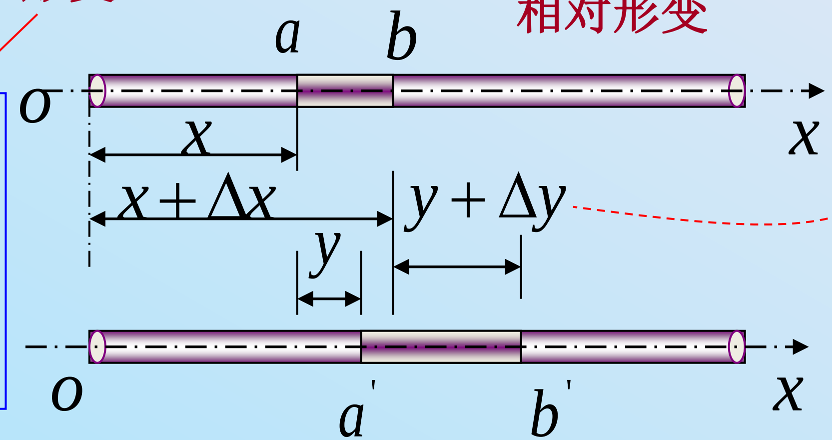
（Y:杨氏模量）

$$F=-k\Delta y$$

$$\therefore k=YS/\Delta x$$

形变

$$W_p=A_{外}=\int_0^{\Delta y}k\xi\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}k(\Delta y)^2$$



质元相对形变的弹性势能:

$$W_p=\frac{1}{2}k(\Delta y)^2=\frac{1}{2}\frac{YS}{\Delta x}(\Delta y)^2=\frac{1}{2}YS\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{2}Y\Delta V\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

弹性势能正比于相对形变

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=A^2\frac{\omega^2}{u^2}\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]$$

$$u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

$$\boxed{W_P=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)}$$

$$W_K=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

相等

$$\boxed{y\ (x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]}$$

在行波的传播过程中，质元的动能和势能同步变化，始终相等。

$$\boxed{W_P=W_k=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})}$$

质元的总机械能为

$$\boxed{W=W_K+W_P=\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})}$$

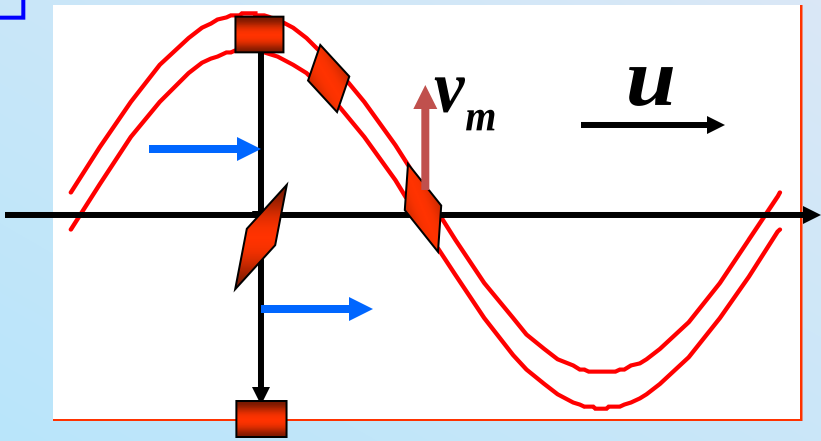
可见：

介质中质元（体积元）的机械能是不守恒的。

以上结果同样适用于横波。

$$W_P=W_k=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

（横波、纵波均适用）



结论：

（1）每个质元的波动动能与势能数值相同，位相相同。同时变大，同时变小。

W_k最大则 W_p也最大，如平衡位置.

W_k 最小则 W_p也最小，如最大位移处.

与振动能量的特点不同！

（2）ΔV 中$W=W_K+W_P=\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$

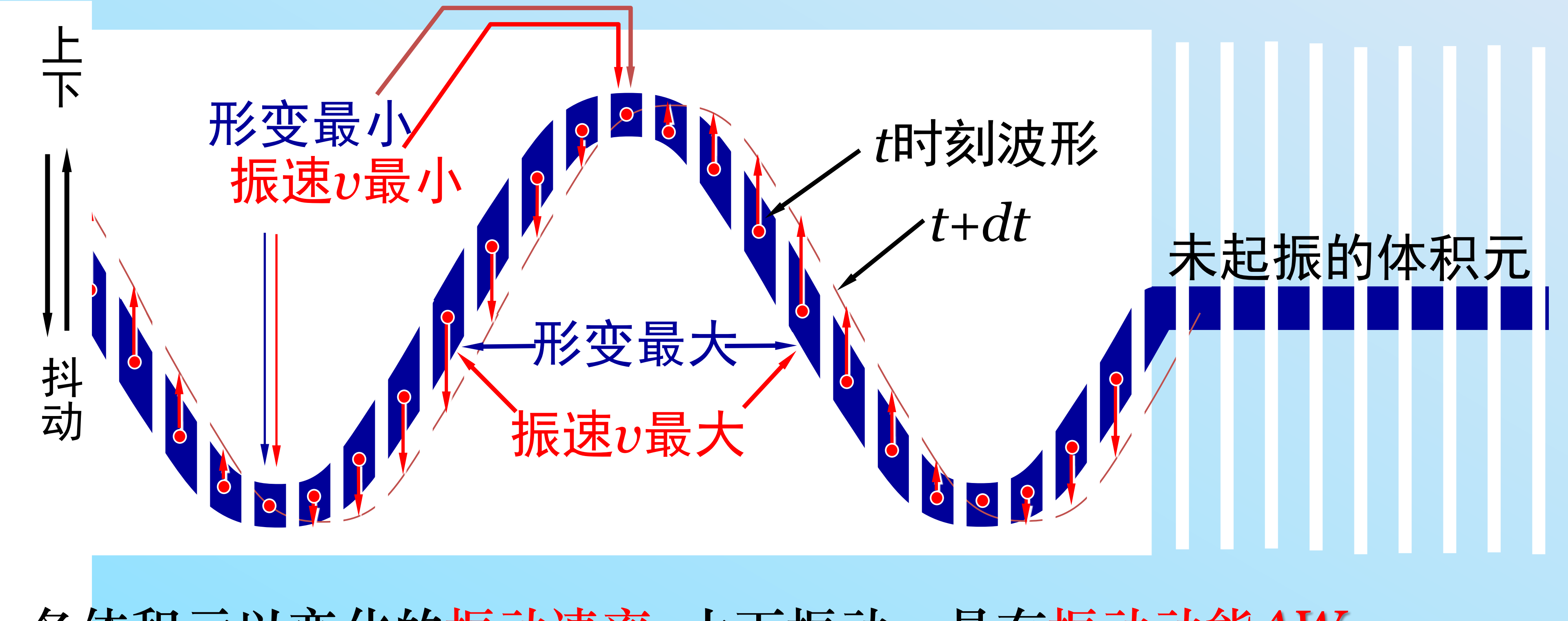
W 随 t 、x 变，不守恒 。能量传输！

最大位移 ⟶ 平衡位置，能量增大，从前面输入；

平衡位置 ⟶ 最大位移，能量减小，向后面输出。

若将一软绳（弹性媒质）划分为多个小单元（体积元）

在波动中，各体积元产生不同程度的弹性形变，具有弹性势能ΔW_P。



各体积元以变化的振动速率υ上下振动，具有振动动能ΔW_k。

当媒质中有行波传播时，媒质中一个体积元在作周期性振动的过程中，其弹性势能ΔW_P和振动动能ΔW_k同时增大、同时减小，而且其变化的量值相等，即$\Delta W_P = \Delta W_k$。

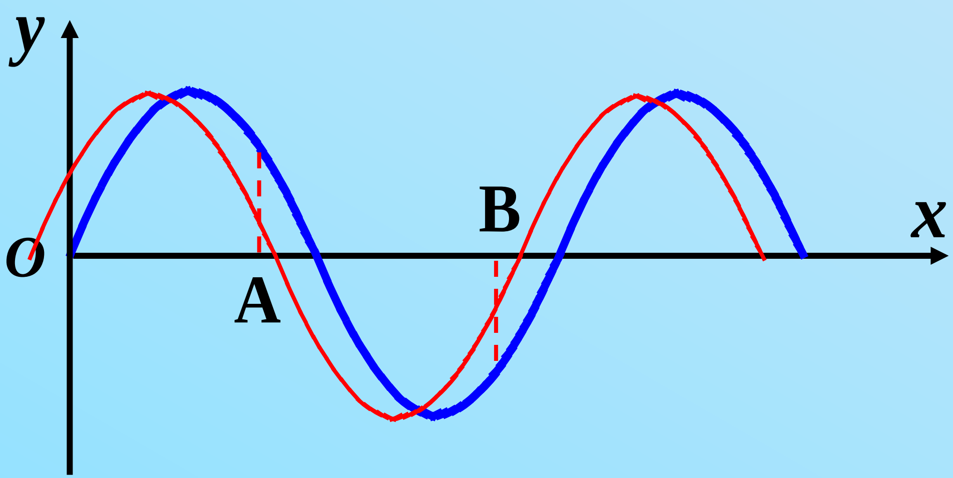
例: 图为一平面简谐机械波在 t 时刻的波形曲线。若此时A点处媒质质元的振动动能在增大，则 [**B**]

(A) A点处质元的弹性势能在减小

(B) 波沿 x 轴负方向传播

(C) B点处质元的振动动能在减小

(D) 各点的波的能量密度都不随时间变化



分析：

A点处媒质质元的振动动能在增大，

说明A点处媒质质元正向平衡位置运动，速度为负。

下一时刻的波形曲线向左平移。

（3）能量密度：单位体积中的能量

$$W=\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

$$w=\frac{W}{\Delta V}=\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

平均能量密度

$$\boxed{\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2} \propto A^2,\omega^2$$

在dt的时间内，dx范围内的能量dW均可以通过右端面.

因 dx足够小，故

$$\mathrm{d}W=w\mathrm{d}x\cdot\Delta s$$

$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=w\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\Delta s$$

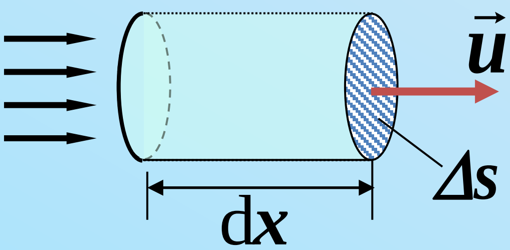
$$\boxed{P=wu\Delta s}$$

2. 能流、能流密度

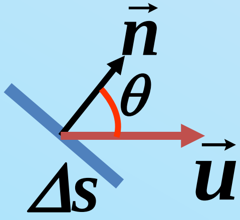
（1）能流P：单位时间通过某面的能量.

平均能流 $\overline{P}=\overline{w}u\Delta s$

$$\overline{P}=\overline{w}u\Delta S\cos\theta$$



dx=udt



（2）能流密度i：单位时间内通过垂直于波传播方向单位面积的能量。

$$\boxed{i=\frac{P}{\Delta s}=wu}$$

平均能流密度I（又称波的强度，如光强、声强）：

$$\therefore I=\bar{i}=\frac{\bar{P}}{\Delta s}=\bar{w}u=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u\propto A^2$$

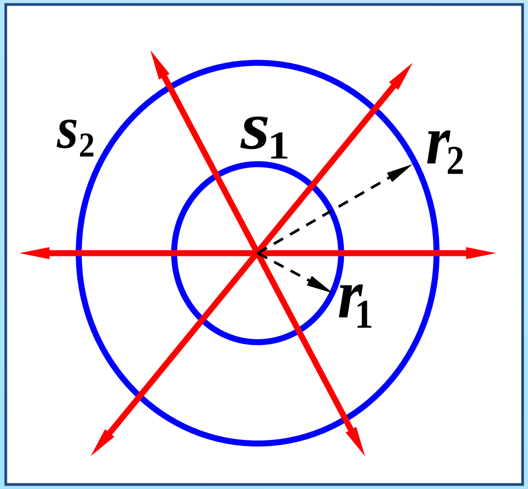
机械波

例：证明在无吸收的理想媒质中球面波的振幅与离开其波源的距离成反比，并求球面简谐波的波函数。

平均能流：$\bar{P}=\bar{w}u\Delta s$

$$\bar{w}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

$$i=\frac{P}{\Delta s}=wu$$



例：证明在无吸收的理想媒质中球面波的振幅与离开其波源的距离成反比，并求球面简谐波的波函数。

证：介质无吸收，通过两个球面的平均能流相等。

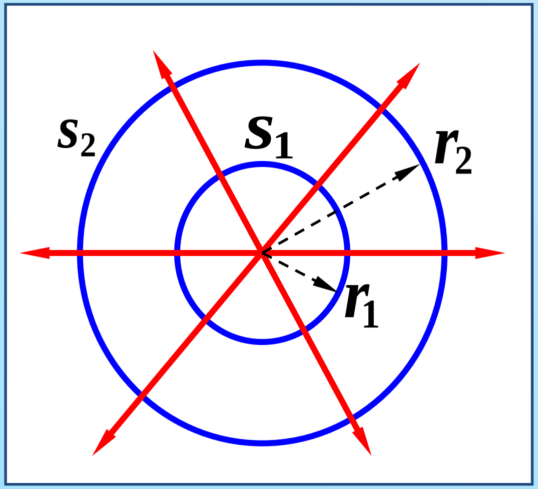
平均能流：$\overline{P}=\overline{w}u\Delta s$

$$\overline{w}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

$$\overline{w}_1 uS_1=\overline{w}_2 uS_2$$

即：

$$\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 u4\pi r_1^2=\frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 u4\pi r_2^2$$



故 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{r_2}{r_1}\longrightarrow\boxed{A\propto\frac{1}{r}}$

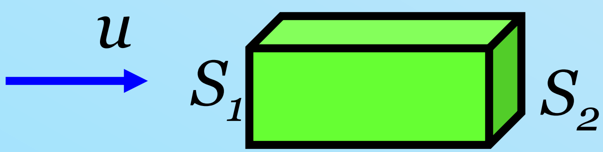
$$y=\frac{A_0}{r}\cos\omega[(t-\frac{r}{u})+\varphi]$$

$$\boxed{\overline{P}=\overline{w}\,Su=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 uS}$$

注意:

在无吸收的理想媒质中：$\overline{P_1}=\overline{P_2}$

1⁰ 对平面波

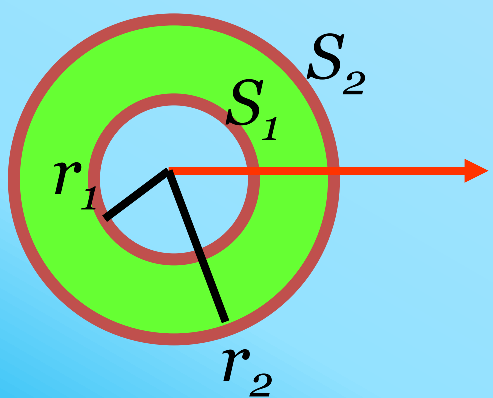


$$\frac{\overline{P_1}}{\overline{P_2}}=1=\frac{A_1^2\cancel{S_1}}{A_2^2\cancel{S_2}}$$

$$\therefore A_1=A_2$$

2⁰ 对球面波

一周期内穿过波面 S_1、S_2总能量相等



$$\frac{\overline{P_1}}{\overline{P_2}}=1=\frac{A_1^2S_1}{A_2^2S_2}=\frac{A_1^2\cancel{4\pi}r_1^2}{A_2^2\cancel{4\pi}r_2^2}$$

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{r_2}{r_1} \qquad \therefore A_1\neq A_2$$