第2章
电阻电路等效变换

2.1 等效变换的概念 Concept of Equivalence

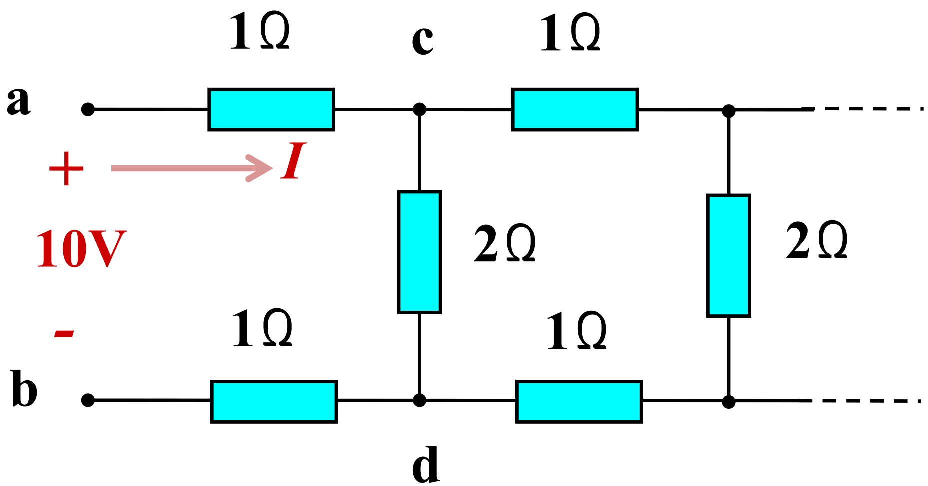
2.2 串联并联 Series and Parallel Connections

2.3 星－三角互换 Wye-Delta Transformation

2.4 电源变换 Source transformation

Motivation

电路如何**便捷/快速**分析?



§2-1 二端网络的等效变换

等效的概念：

等效是一种很重要的思维方法，是电路分析中一个基本的、重要的概念。

等效变换：对不关心的部分电路而言，力图用较简单的结构代替原来比较复杂的结构（复杂问题简单化）

等效过程：复杂的电路模型->将其中一部分用它的等效电路代替->简化电路，方便分析。

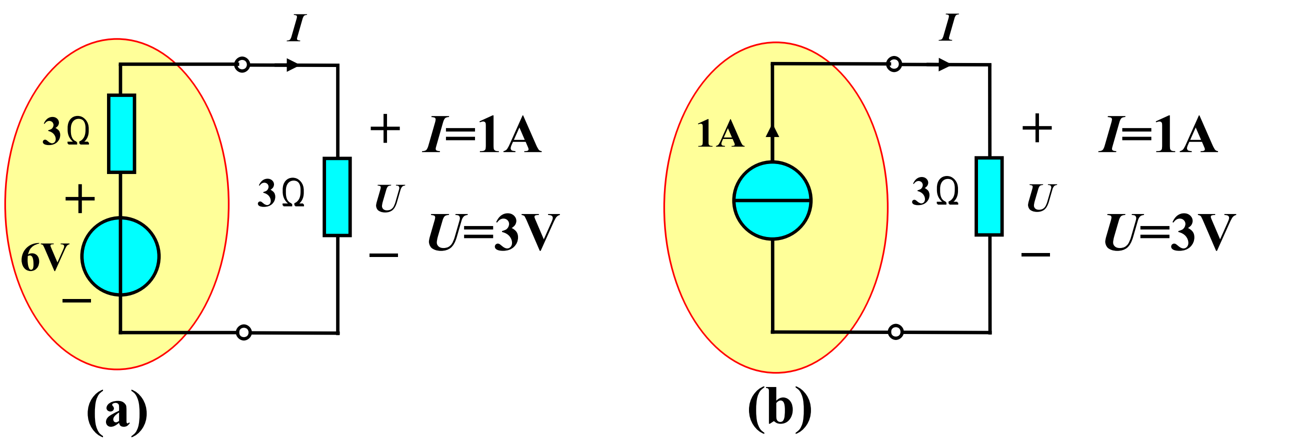
对所关心的部分电路（未变换部分）而言，作用效果相同。

电路分析的基本依据：KCL、KVL；元件特性

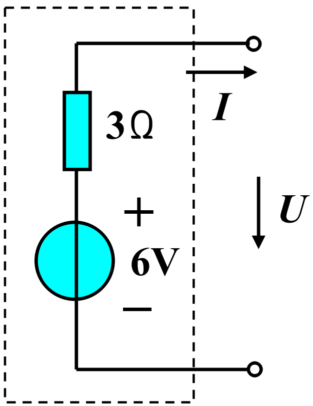
一、二端网络等效的概念

二端网络等效：不论内部结构如何，只要它们端口具有完全相同的电压电流关系（伏安关系）。

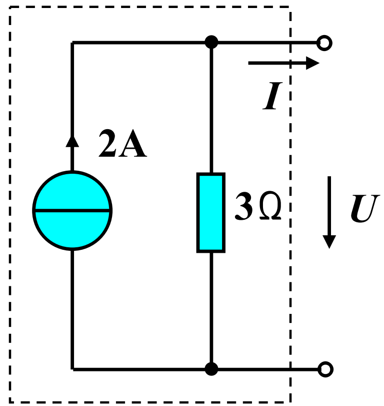
(1)端口处具有相同的伏安关系(仅一点不行)， 下面两个网络不等效。



(2)等效是对外部电路而言的，对于互相等效的两个电路部分**内部的工作一般是不等效的**。



开路时，不提供功率。



开路时，网络内部消耗功率 $P=2\times2\times3=12\text{W}$。

$U=6-3I$　　等效 $\longleftrightarrow$　　$I=2-U/3$

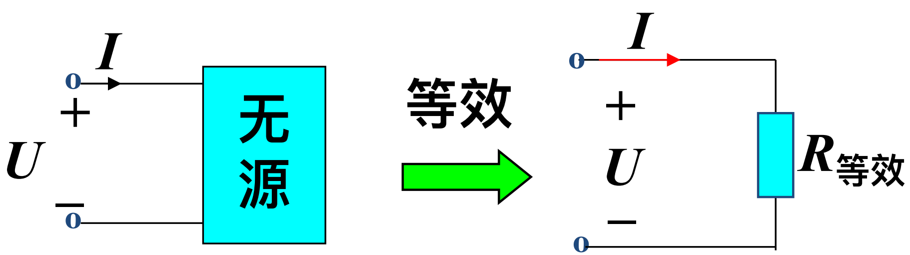
(3)一个电路被它的等效电路替代后，未被等效的电路中的所有电压、电流不变(KCL 、KVL均未改变) 。

§2-2 电阻元件的串、并联

电阻的串联、并联和串并联

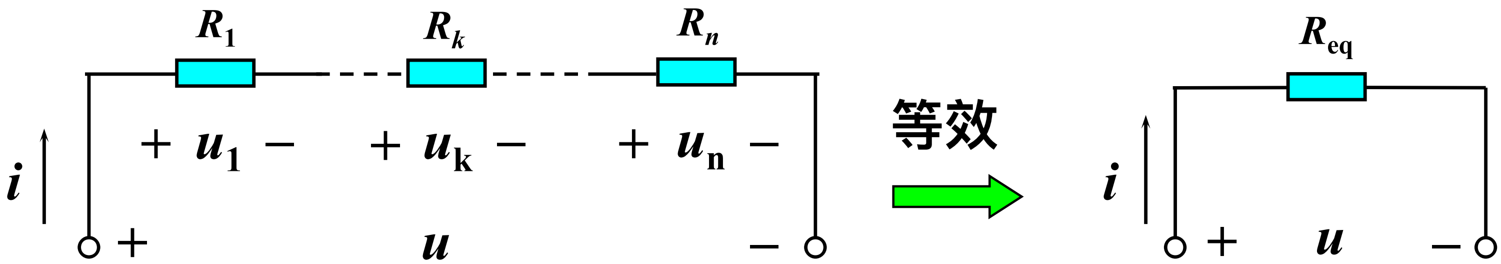
任何一个复杂的网络，向外引出两个端钮， 则称为**二端网络**（一端口)。网络内部没有独立源的二端网络，称为**无源二端网络**。

一个无源二端电阻网络可以用端口的入端电阻来等效。



$R_{等效}= U / I$

一、电阻串联 (Series Connection of Resistors)



(1)电路特点：

a 各电阻流过同一电流 (KCL)；

b 总电压等于各串联电阻的电压之和 (KVL)。

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots + u_n$$

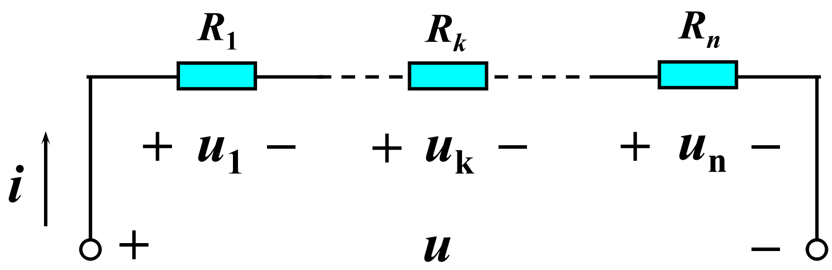
由欧姆定律：　$u_k = R_k i$　　$(k=1, 2, \ldots, n)$

$$u = (R_1 + R_2 + \ldots + R_k + \ldots + R_n)\, i = R_{eq} i$$

(2)等效电阻R_{eq}　　$R_{eq} = (R_1 + R_2 + \ldots + R_n) = \sum R_k$

结论：串联电路的总电阻等于各分电阻之和。

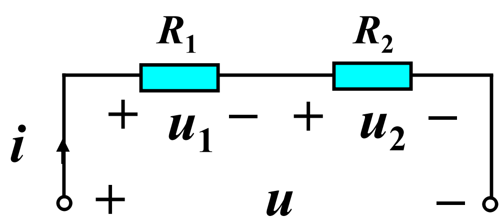
(3)串联电阻上电压的分配



由 $$\frac{u_k}{u}=\frac{R_k i}{R_{eq} i}=\frac{R_k}{R_{eq}}=\frac{R_k}{\sum R_k}$$

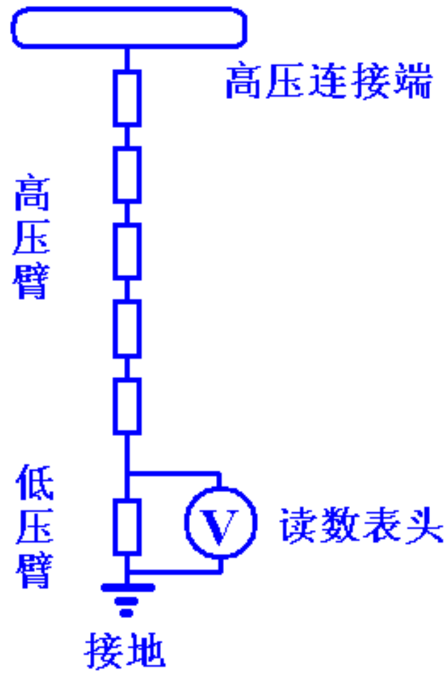
电压的大小与电阻的大小成正比

两个电阻串联：



$$u_1=\frac{R_1}{R_1+R_2}u \qquad u_2=\frac{R_2}{R_1+R_2}u$$

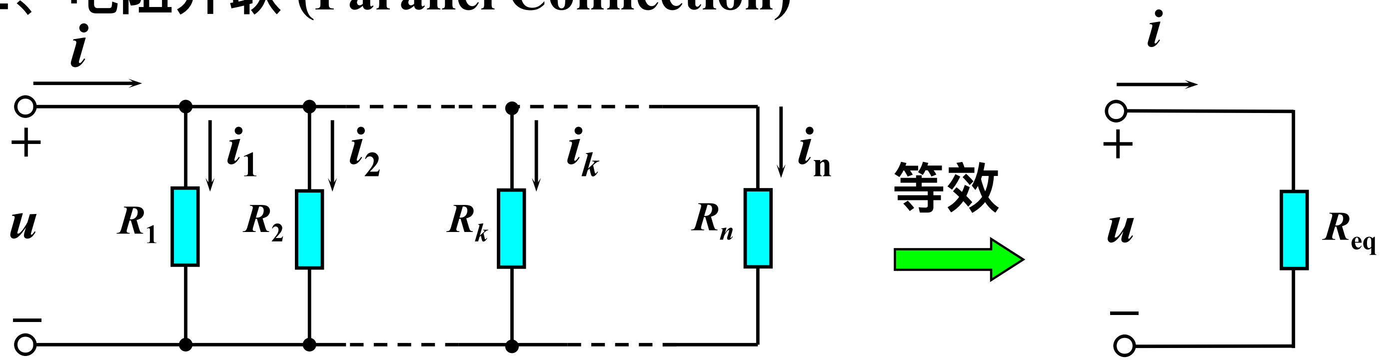
分压器的原理---直流分压器



取样电压：

$$U_L = U_H \frac{R_L}{R_H + R_L} \approx U_H \frac{R_L}{R_H}$$

二、电阻并联 (Parallel Connection)



(1) 电路特点：

a 两端为同一电压 (KVL)；

b 总电流等于流过各并联电阻的电流之和 (KCL)。

由KCL： $i = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + i_n = u / R_{eq}$

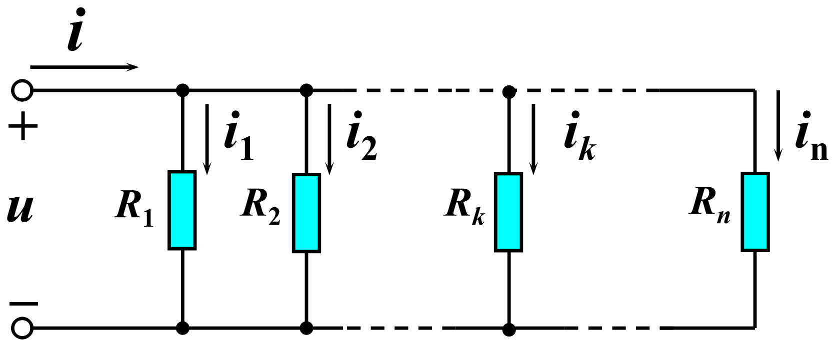
有： $u/R_{eq} = i = u/R_1 + u/R_2 + \ldots + u/R_n = u(1/R_1 + 1/R_2 + \ldots + 1/R_n)$

(2).等效电阻R_{eq}

$1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2 + \ldots + 1/R_n$　　　令 $G = 1/R$, 称为**电导**

$G_{eq} = G_1 + G_2 + \ldots + G_k + \ldots + G_n = \sum G_k = \sum 1/R_k$

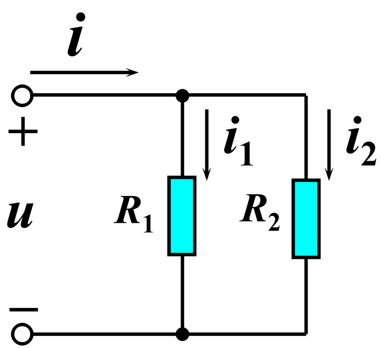
(3)并联电阻的电流分配



由 $$\frac{i_k}{i}=\frac{u/R_k}{u/R_{eq}}=\frac{G_k}{G_{eq}}$$

电流分配与电导成正比，与电阻大小成反比。

对于两电阻并联：



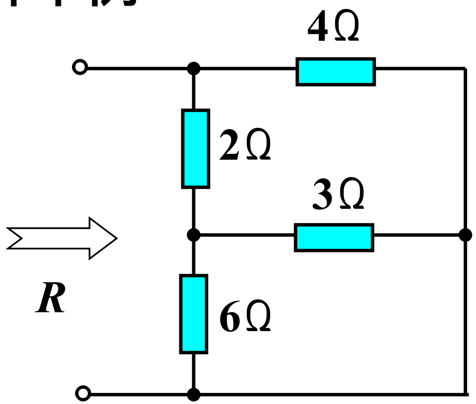
$$i_1=\frac{1/R}{1/R_1+1/R_2}i=\frac{R_2}{R_1+R_2}i$$

$$i_2=\frac{1/R_2}{1/R_1+1/R_2}i=\frac{R_1}{R_1+R_2}i$$

计算举例：

（弄清楚串、并联关系。）

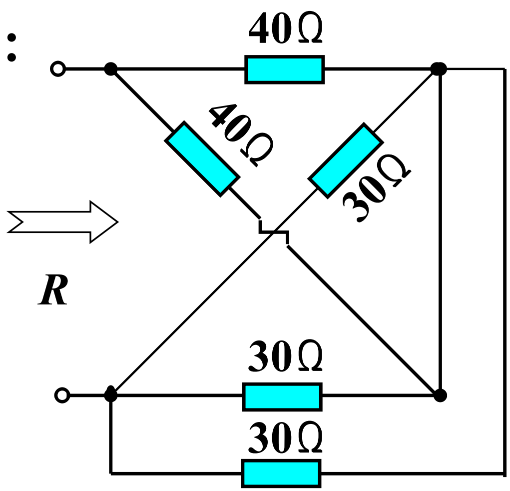
例：

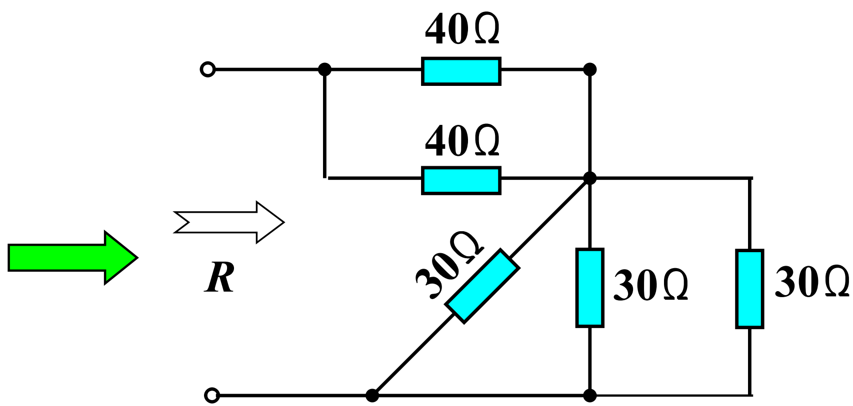


解：

$$R = 4 \parallel (2+3 \parallel 6) = 2\ \Omega$$

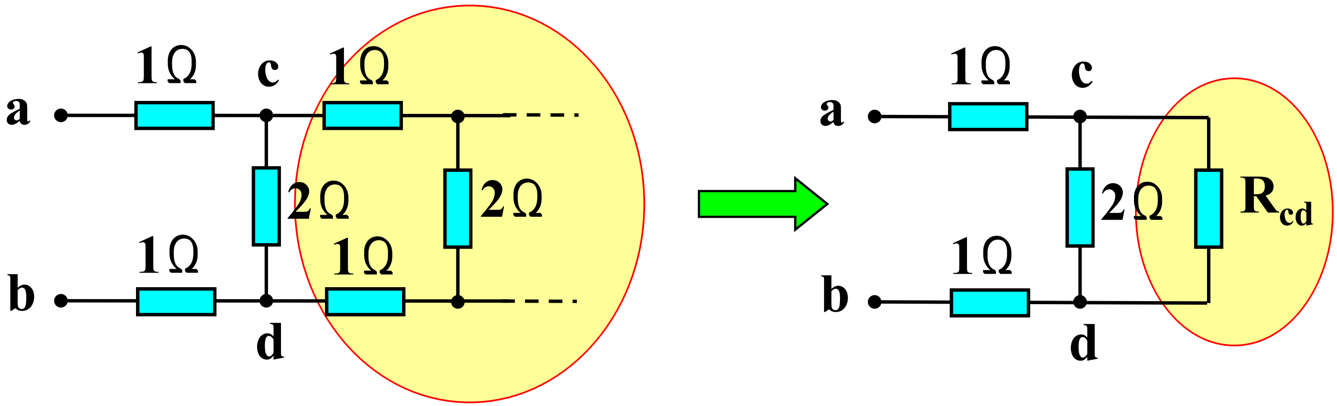
例：





$$R = (40 \parallel 40 + 30 \parallel 30 \parallel 30) = 30\Omega$$

例：如图为一无限梯形网络，试求其端口等效电阻电压R_{ab}。



解：　从cd看去仍是一无限网络。　　故有：$R_{ab}=R_{cd}$

由串并联

$$R_{ab}=1+1+\frac{2R_{cd}}{2+R_{cd}}$$

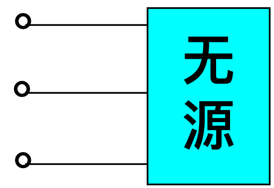
$$R_{ab}=\sqrt{5}+1=3.236(\Omega)$$

$$R_{ab}=-\sqrt{5}+1(\text{舍去})$$

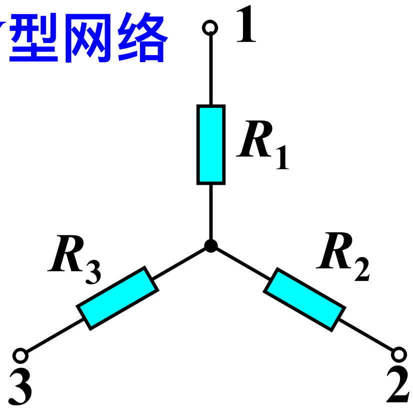
§2-3 电阻网络的Y —Δ等效变换

三端无源网络:引出三个端钮的网络，并且内部没有独立源。

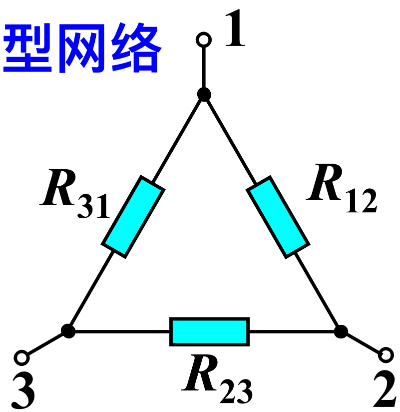
三端无源网络的两个例子：Y、Δ网络：



Y型网络

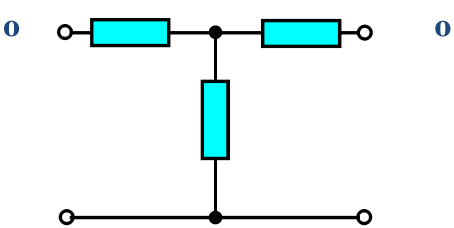


Δ 型网络

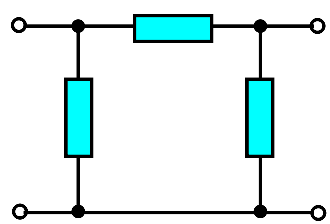


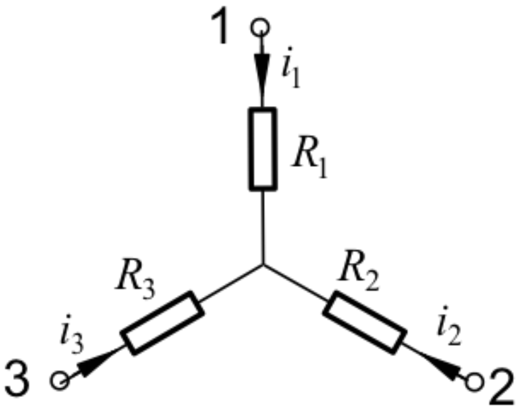
网络的变形

T 型电路 (Y 型)



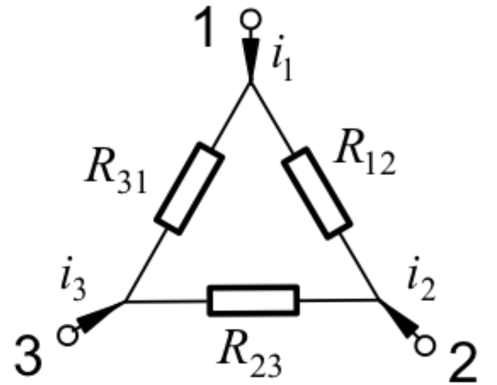
π 型电路 (Δ 型)





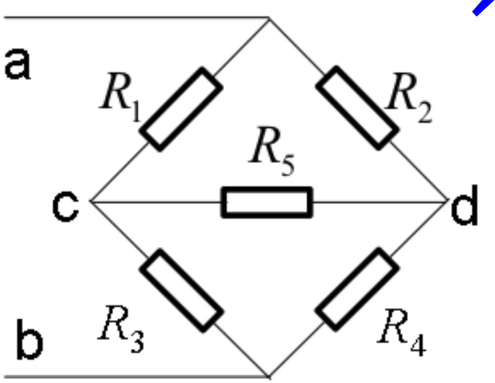
$$u_{ij} = f_k(i_1, i_2, i_3)$$

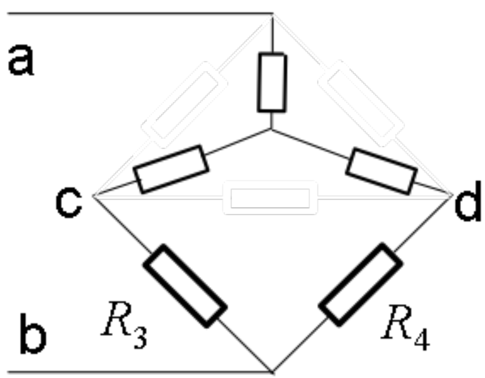
***u-i* 关系相同**



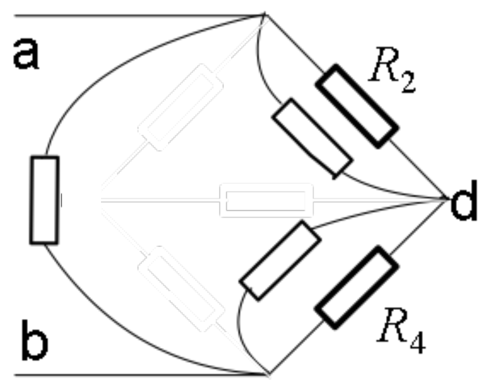
星形电路　　　**三角形电路**

星－三角变换





三角形→星形



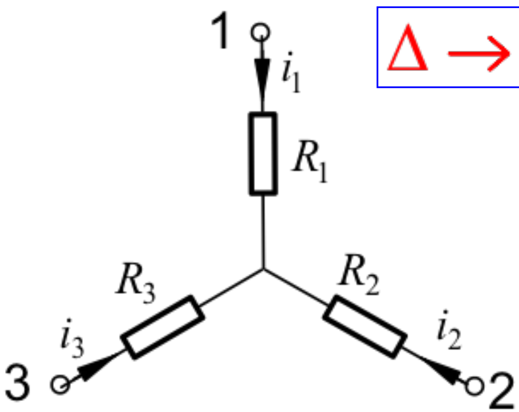
星形→三角形

星－三角变换 Wye-Delta Transformation （了解）

KVL、KCL确定*i*： $R_{12}i + R_{23}(i + i_2) - R_{31}(-i + i_1) = 0$

$$i = \frac{R_{31}i_1 - R_{23}i_2}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

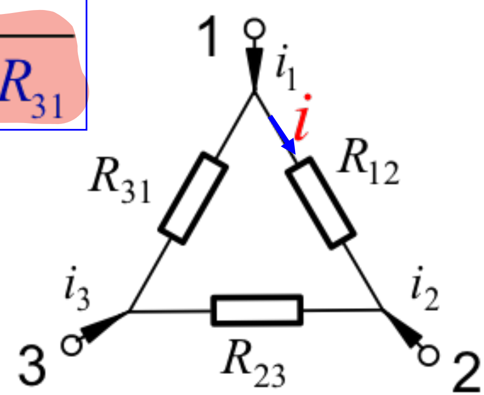
$$u_{12} = R_1 i_1 - R_2 i_2 \qquad = R_{12}i = \frac{R_{12}R_{31}i_1 - R_{12}R_{23}i_2}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$



$$\boxed{\Delta \rightarrow \mathrm{Y}} \quad \boxed{R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}}$$

$$u_{ij} = f_k(i_1, i_2, i_3)$$

***u-i* 关系相同**

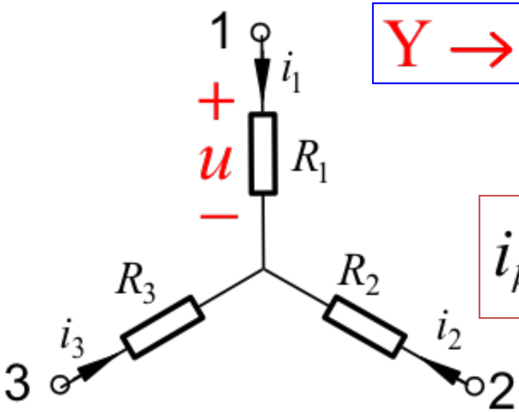


星－三角变换 Wye-Delta Transformation

KVL、KCL确定u： $G_1 u + G_2(u - u_{12}) + G_3(u + u_{31}) = 0$

$$u = \frac{G_2 u_{12} - G_3 u_{31}}{G_1 + G_2 + G_3}$$

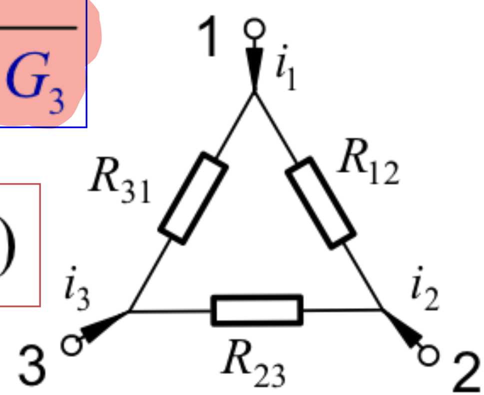
$$i_1 = G_1 u = \frac{G_1 G_2 u_{12} - G_1 G_3 u_{31}}{G_1 + G_2 + G_3} = G_{12} u_{12} - G_{31} u_{31}$$



$\boxed{Y \to \Delta}$ $\boxed{G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}}$

$\boxed{i_k = g_k(u_{12}, u_{23}, u_{31})}$

u-i **关系相同**



2.3 星形与三角形电路

星－三角变换 Wye-Delta Transformation

$\Delta \rightarrow Y$

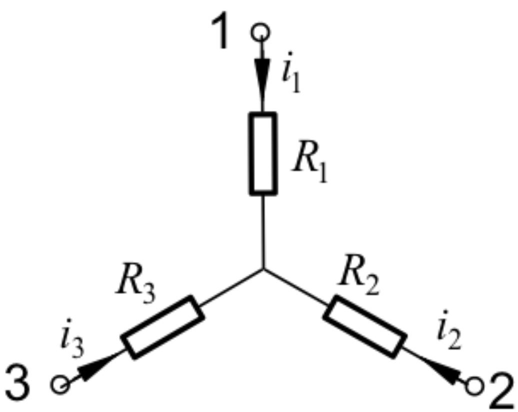
$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

$Y \rightarrow \Delta$

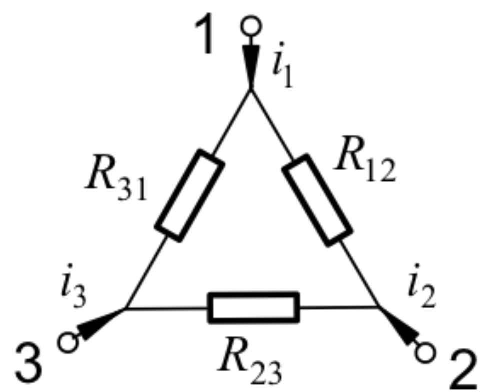
$$G_{12} = \frac{G_1G_2}{G_1+G_2+G_3}$$

$$R_{12} = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3}$$

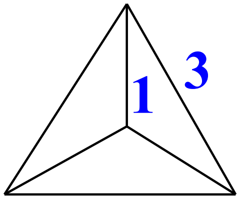
规律： 一个臂的电阻（导）＝ $\dfrac{\text{夹臂电阻（导）之积}}{\text{三个臂的电阻（导）之和}}$



u-i 关系相同

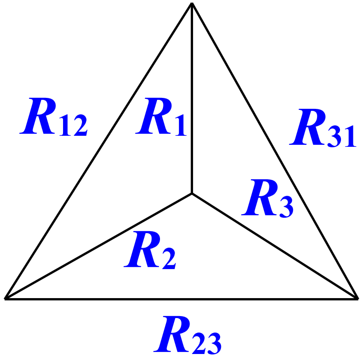


特例　若三个电阻相等(对称)，则有



$$R_{\Delta} = 3R_{Y}$$

(外大内小)



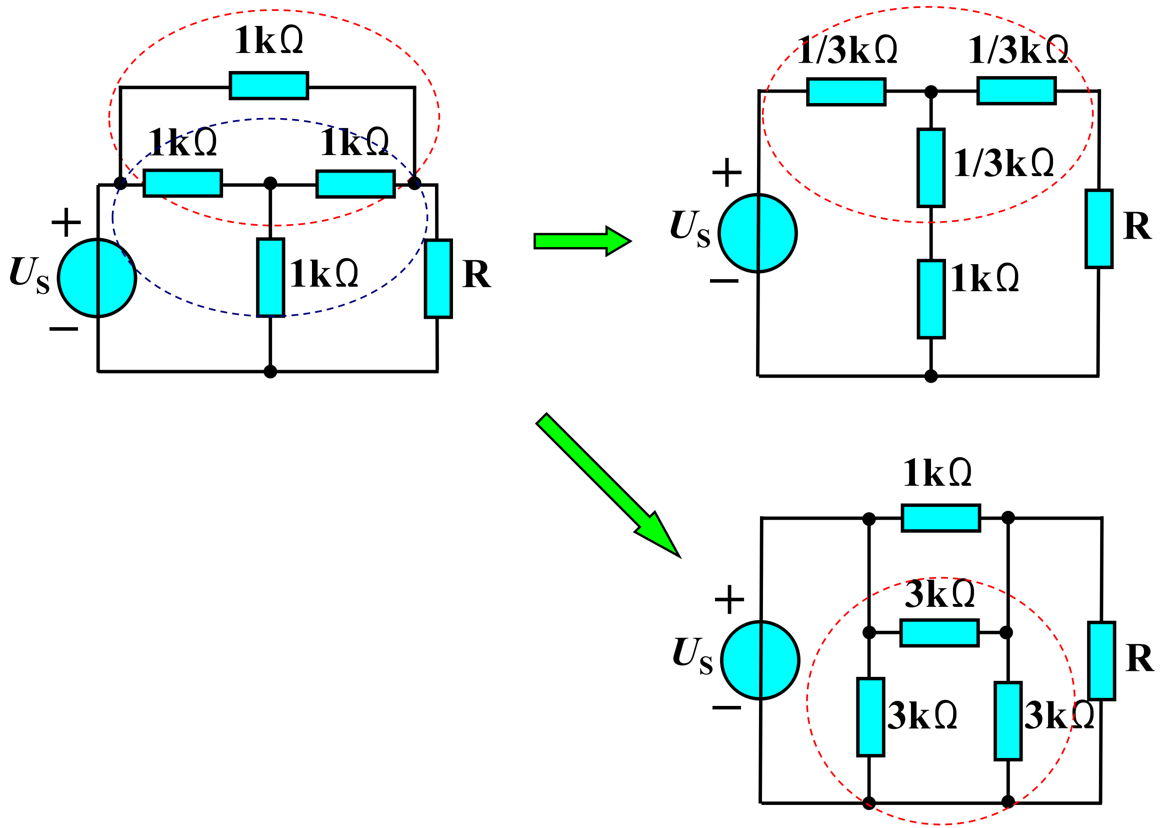
注意

(1) 等效是指对外部（端钮以外）电路而言，对内不成立；

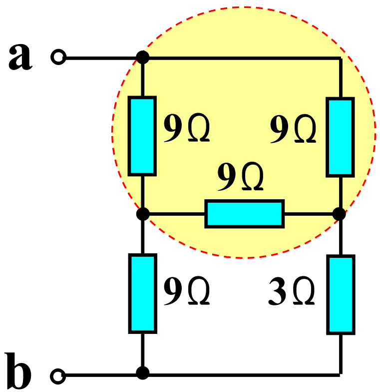
(2) 等效电路与外部电路无关。

应用：简化电路

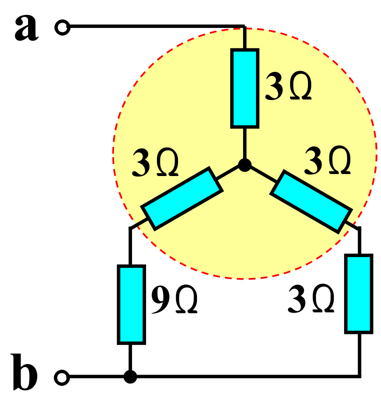
例：　桥 T 电路



例：电路如图所示，试求a、b两端之间的等效电阻R_{ab}。



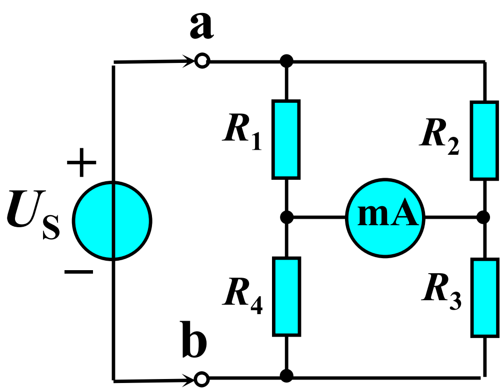
解：

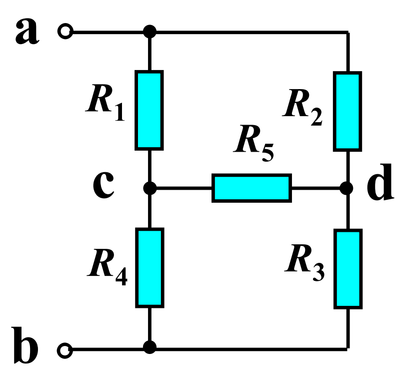


$$R_{ab}=3+\frac{12\times 6}{12+6}=7(\Omega)$$

二、平衡电桥电路

当R_1，R_2，R_3，R_4满足什么关系时?毫安表读数为零。



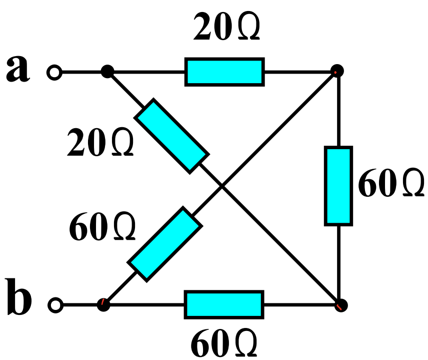


使$U_{cb} = U_{db}$

$$\left.\begin{aligned} U_{cb} &= \frac{R_4}{R_1 + R_4} U_{ab} \\ U_{db} &= \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_{ab} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{R_4}{R_1 + R_4} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

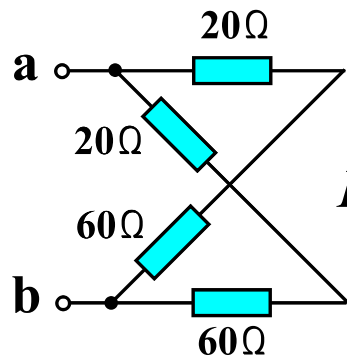
$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}$$

例：求如图所示电路的等效电阻R_{ab}。



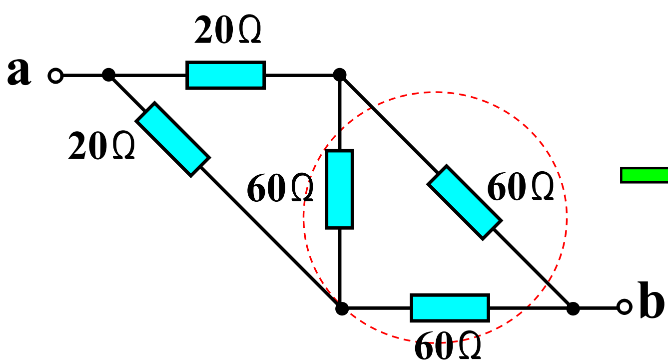
解法一：

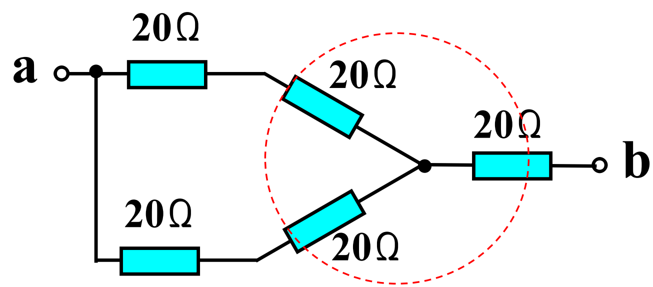
平衡电桥



$R_{ab}=40\ \Omega$

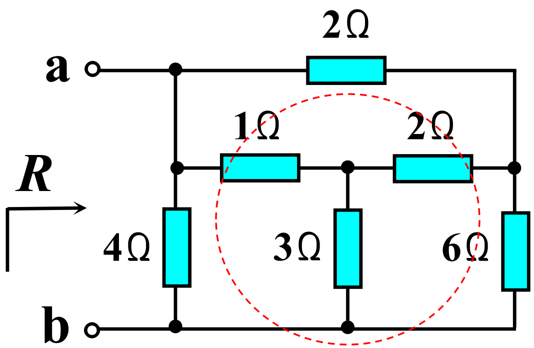
解法二：　Δ型－Y型变换



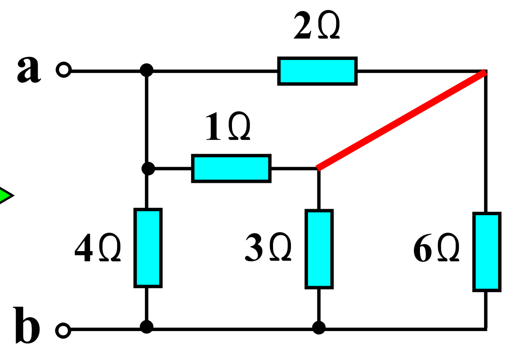


$R_{ab}=40\ \Omega$

例：求如图所示电路的等效电阻R。

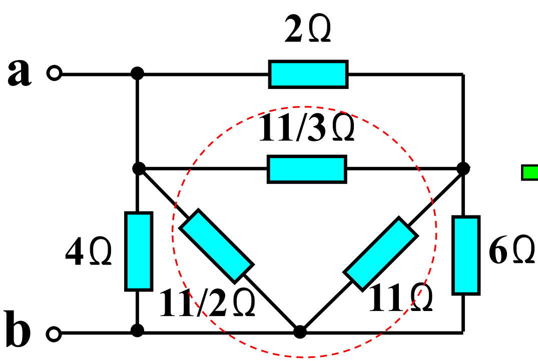


解：



R=1.6 Ω

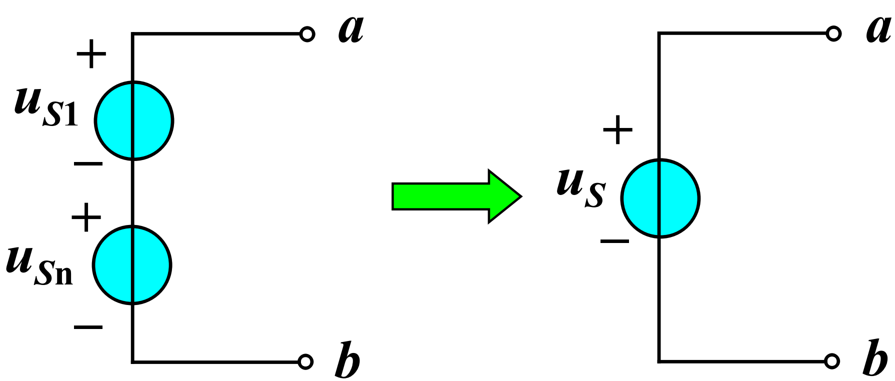
解法二： **Y型－Δ型变换**



R=1.6 Ω

§2-4 电源的等效变换

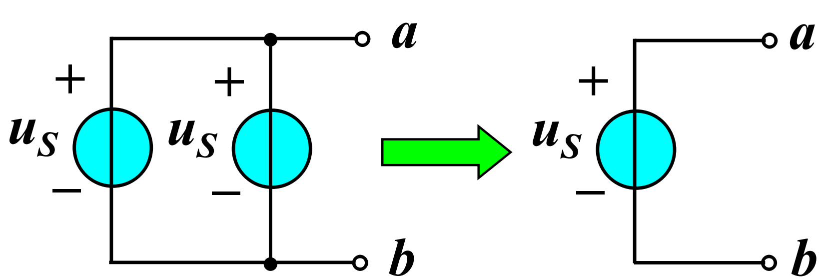
一、 理想电压源的串并联



串联：

$u_S=\sum u_{Sk}$

(注意参考方向)

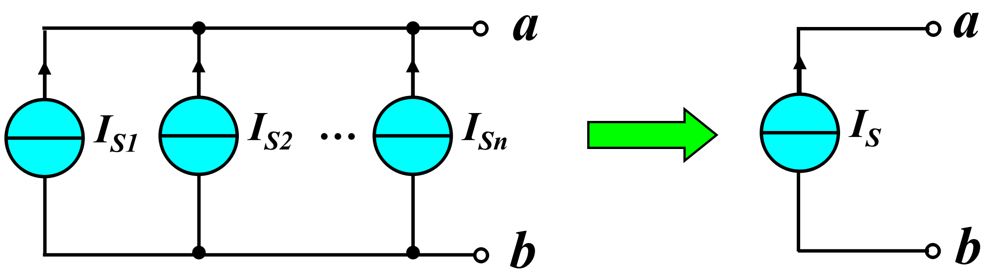


并联：

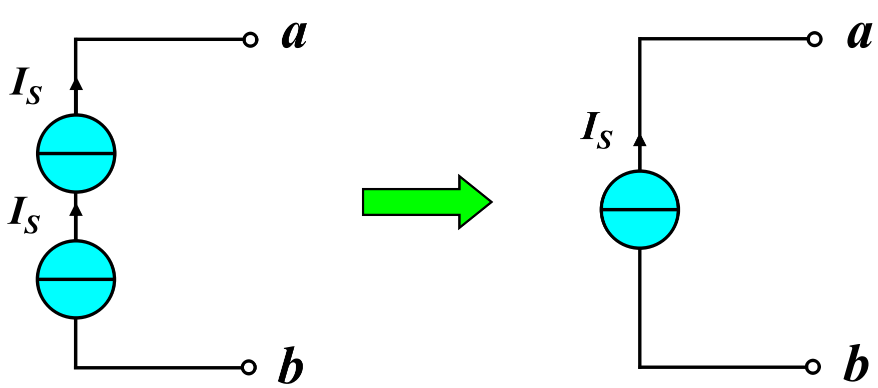
电压相同的电压源才能并联，且每个电源的电流不确定。

二、理想电流源的串并联

并联： 可等效成一个理想电流源 i_S 即 $i_S=\sum i_{Sk}$

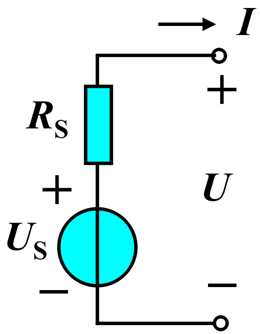


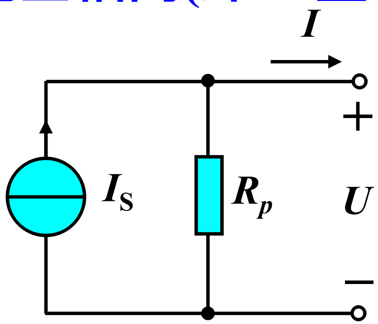
串联： 电流相同的理想电流源才能串联，并且每个电流源的端电压不能确定。



三、电源的等效变换

实际电压源、实际电流源模型可以等效，所谓的**等效**是指两种模型的**端口电压、电流关系完全相同(即*UI*直线重合)。**





$$U = U_S - R_S I$$

$$I = U_S/R_S - U/R_S \quad ①$$

$$I = I_S - U/R_P \quad ②$$

要使*UI*直线重合，则表达式①和②必须相同。

通过比较，得等效的条件：

$$I_S = U_S/R_S \qquad R_S = R_P$$

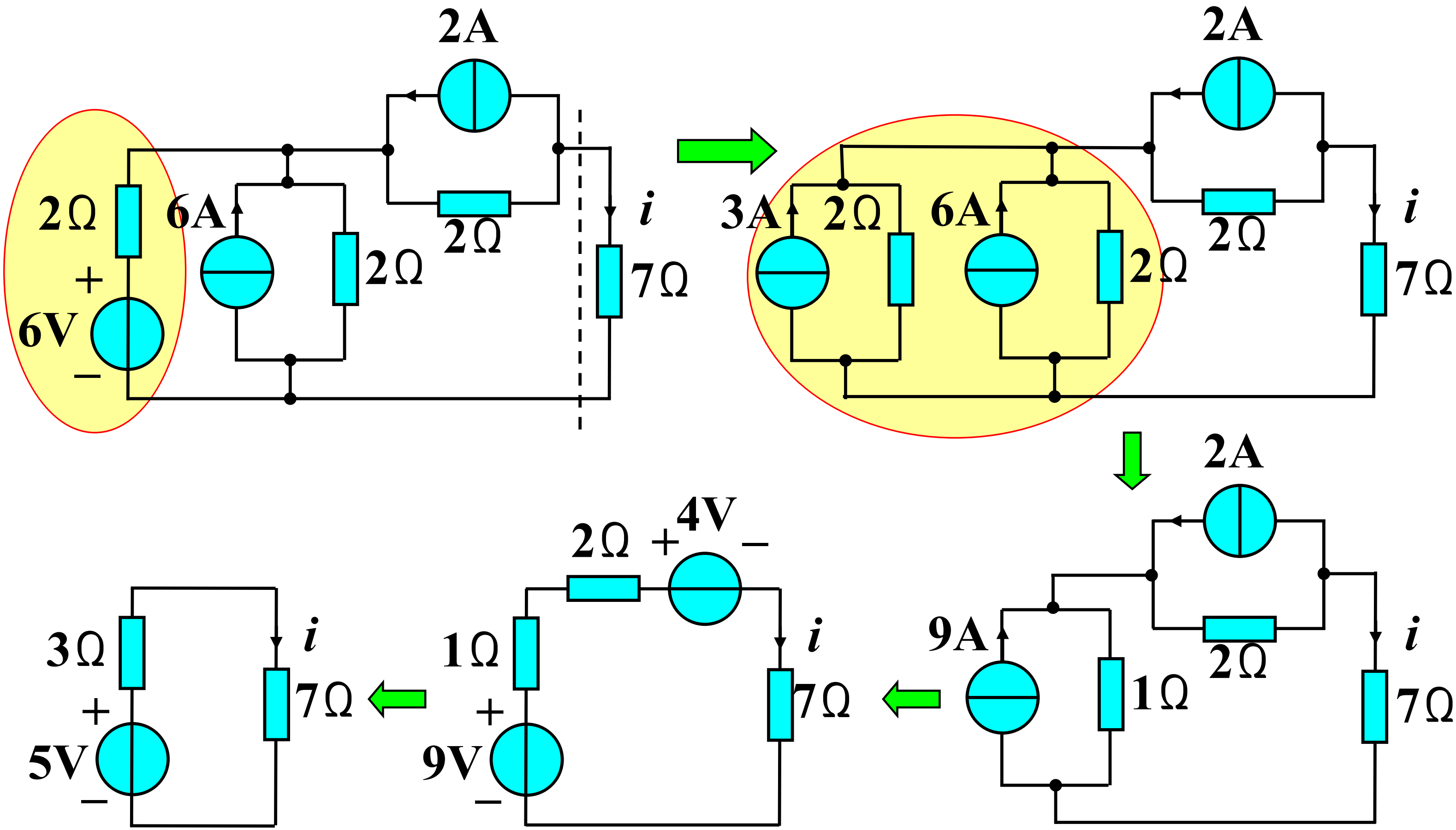
总结：

(1)方向：电流源电流方向与电压源电压方向相反。

(2)所谓的**等效**是对**外部电路**等效，对**内部电路**是不等效的。

(3)**理想电压源与理想电流源不能相互等效**。

例：求图中所示电路中电流i。

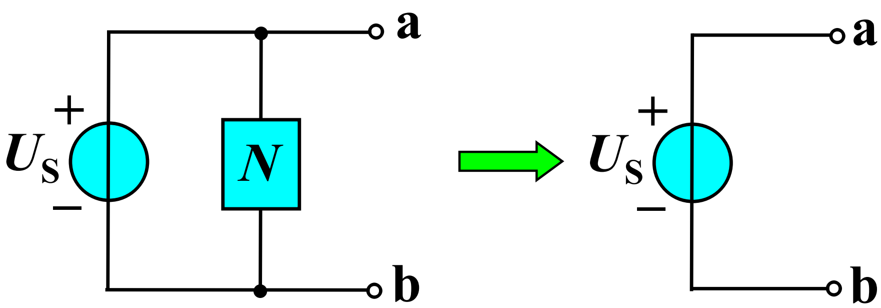


由化简后的电路可求得电流为：

$$i=\frac{5}{3+7}=0.5A$$

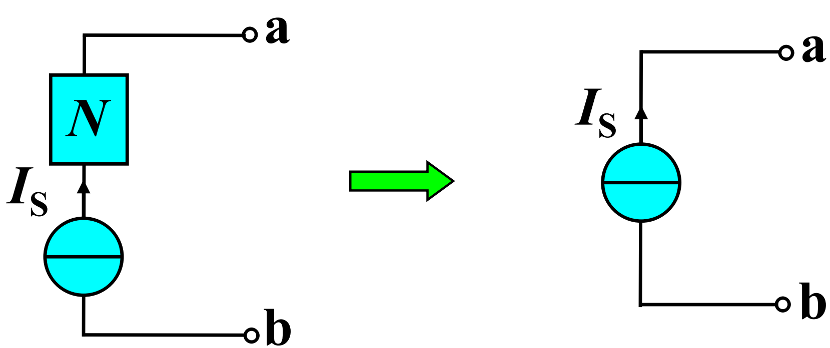
四、电源与其它支路的串、并联等效

电压源与其它元件的并联等效：



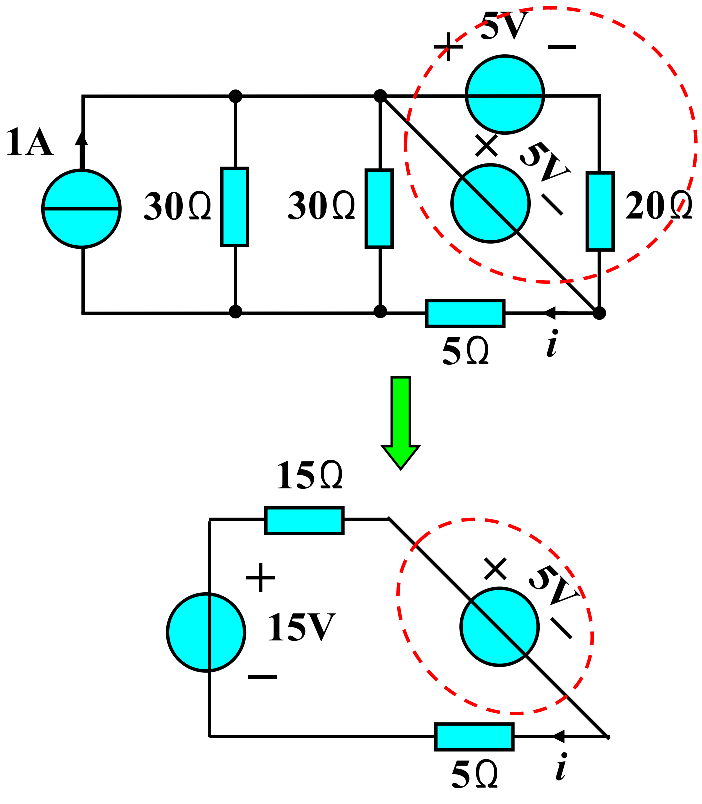
电压源与任意元件并联，等效为一个同值电压源（对外恒压）。

电流源与其它元件的串联等效：



电流源与任意元件串联，等效为一个等值电流源（对外恒流）。

例：如图所示，求电流i 。



解：

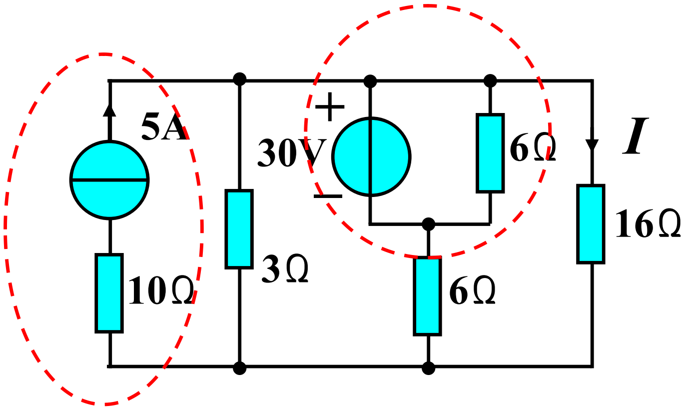
存在与电压源并联的支路

则电流为：

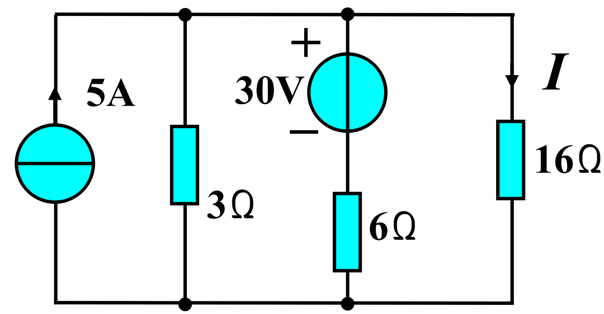
$$i=(15-5)/(15+5)=0.5(\mathrm{A})$$

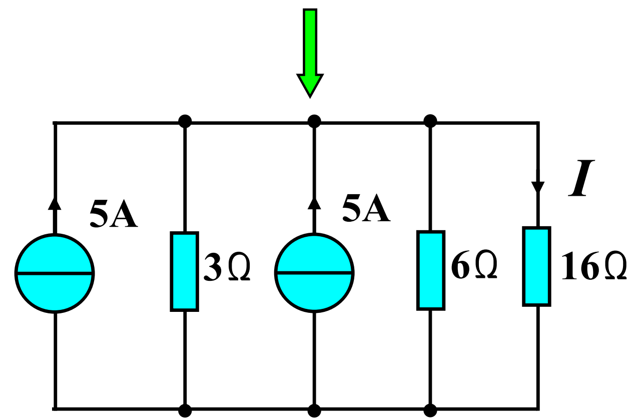
注意所求的量不在等效区域

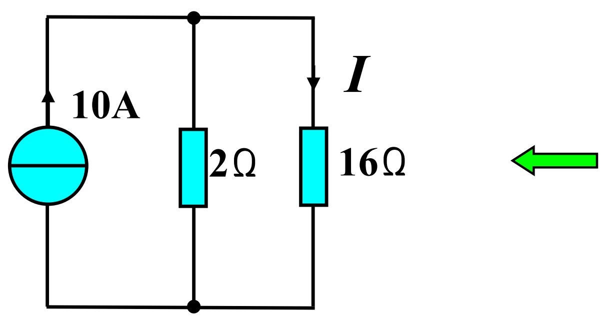
例：求图示电路中流过16Ω电阻的电流 I



解：





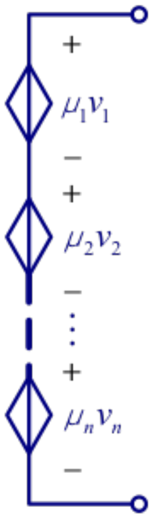


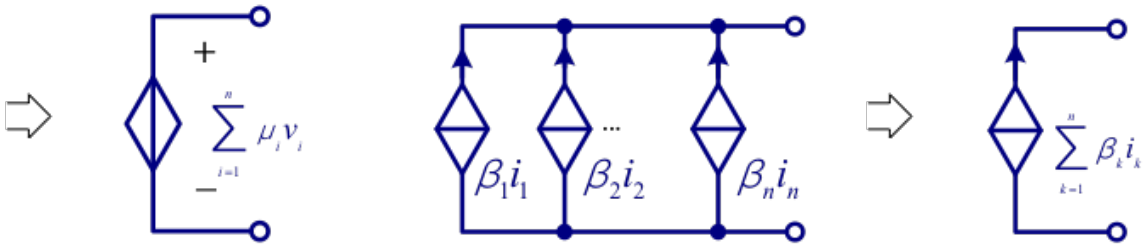
利用电阻并联分流公式：

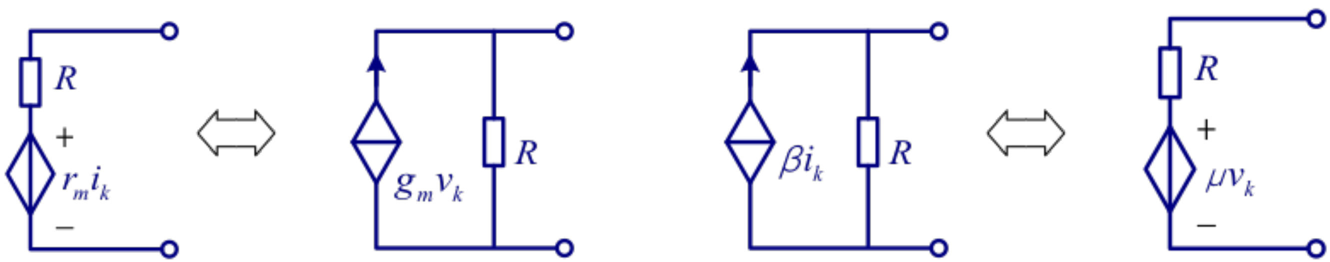
$$I = \frac{2}{2+16} \times 10 = \frac{2}{18} \times 10 = 1.1\text{A}$$

受控电源变换

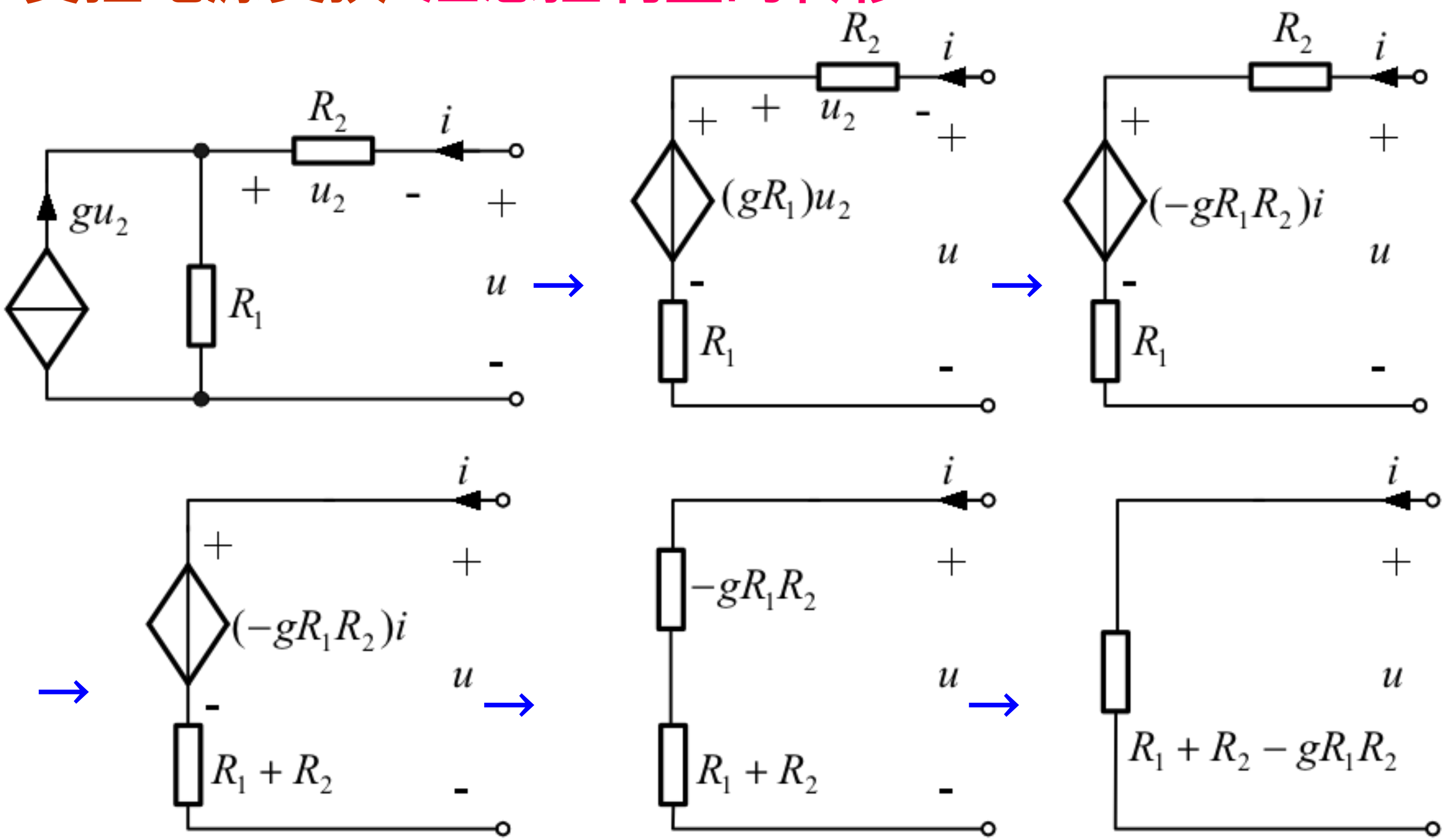
受控电源和独立电源有本质上的不同，但在列写网络方程和对网络进行化简时，可以把受控电源作为独立电源来对待。







受控电源变换 注意控制量的转移



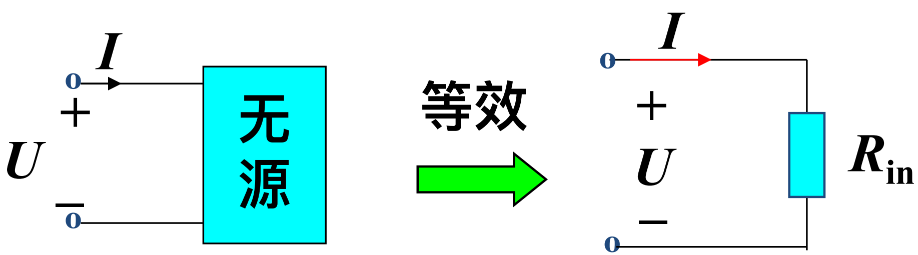
$$u-i\text{关系}: u = R_2 i + R_1(gu_2 + i) = (R_1 + R_2 - gR_1R_2)i$$

二端网络的输入电阻

如果一个网络具有两个引出端子与外电路相连而不管其内部结构，这样的网络叫做**一端口网络**（端口）或**二端网络**。

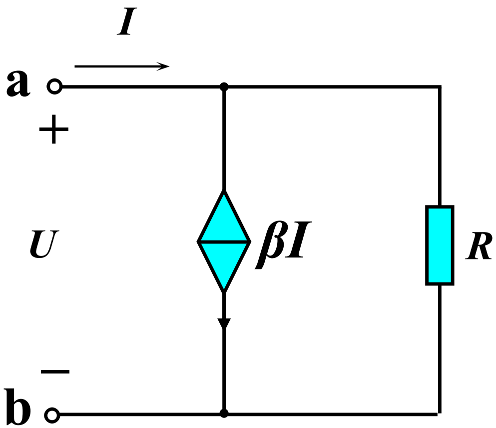
一、入端电阻的定义：

如果在端口处外施电压源U或电流源I，一端口的**输入（入端）电阻**R_{in}定义为：



$$R_{in} = U / I$$

例： 求 ab 两端的入端电阻 R_{ab}



解： 通常有两种求入端电阻的方法

① 加压求流法

② 加流求压法

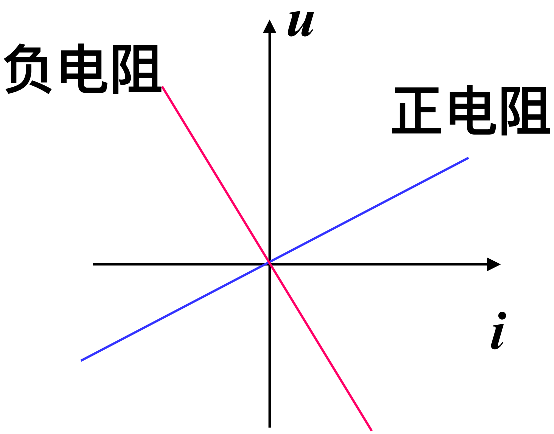
下面用加流求压法求R_{ab}

$U=(I-\beta I)R=(1-\beta)IR$

$R_{ab}=U/I=(1-\beta)R$

当$\beta<1$, $R_{ab}>0$，正电阻

当$\beta>1$, $R_{ab}<0$，负电阻



输入电阻的计算：

（1）只含有纯电阻的电路，应用电阻的串联、并联、混联及Y-△ 等效变换即可求出。

（2）如果一端口内部含电阻、受控源，但不含任何独立电源，则其端口电压与电流成正比。

作业：

2.2节：2-12，2-14

2.3节：2-16，2-20，2-24

2.4节：2-26，2-32

综合：2-36

要求把题目写在作业本上！

——End