大学物理(下)

华 中 科 技 大 学

张智

zzhang@hust.edu.cn

(4) 驻波中没有净能量传递，能流密度为0

◆ 各质点(同时)位移达最大时：

在波节处相对形变最大
在波腹处相对形变为零

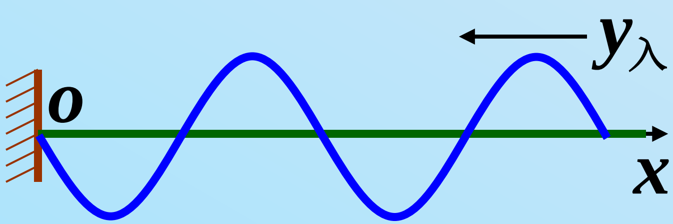
势能集中在波节

◆ 各质点(同时)回到平衡位置时：
介质的形变为零，系统的势能为零、 动能最大。

动能集中在波腹

□ 能量从波腹传到波节，又从波节传到波腹，往复循环。波节始终不动，能量不能经它们向外传播。所以驻波不传播能量。

4. 反射与半波损失



一弦线一端固定在墙上，如图示：

设入射波： $y_入 = A\cos w(t+\frac{x}{u})$

考虑固定端o点的振动方程。

◆ 显然，固定端o点的振动：$y_{o合}=0$。此振动为入射波和反射波在o点引起的**振动的叠加**，即

$y_{o合}=y_{o入}+y_{o反}=0$。 $y_{o入}$已知，那么 $y_{o反}=-y_{o入}$

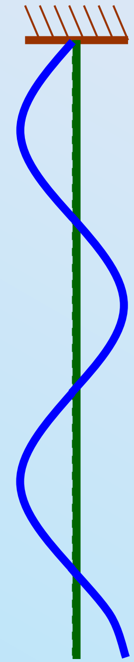
即 $y_{o入}=A\cos wt$ ， $y_{o反}=A\cos(wt+\pi)$ 。因此，

和入射波在反射点引起的振动相比，反射波在反射点引起的振动的位相有π的突变。 谓之 **半波损失** (半波突变)

$$\Delta\phi=\frac{\omega\Delta x}{u}=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x=\pi \qquad \Delta x=\frac{\lambda}{2}\ \text{（半个波长）}$$

一般地：**对半波损失产生条件的进一步讨论**

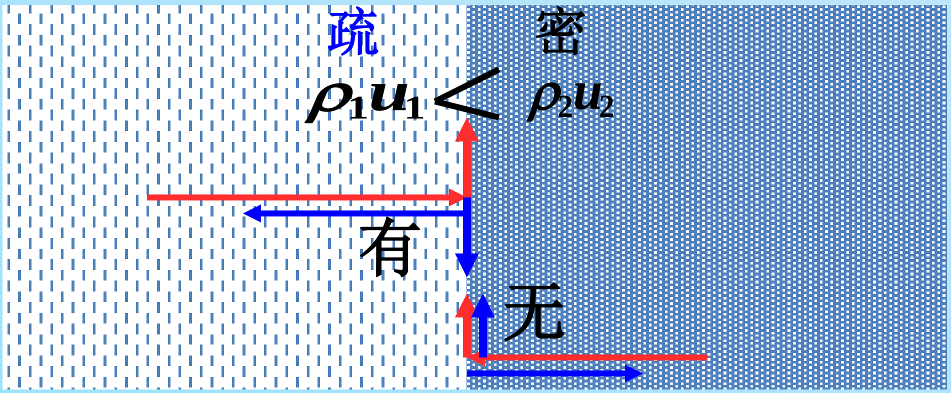
入射波
- 由波疏媒质→波密媒质→反射: 有半波损失(波节)
- 由波密媒质→波疏媒质→反射 :无半波损失(波腹)



波由波疏媒质传到波密媒质，在分界面上发生反射时，反射点一定是波节；但波在自由端反射时无半波损失，形成波腹。

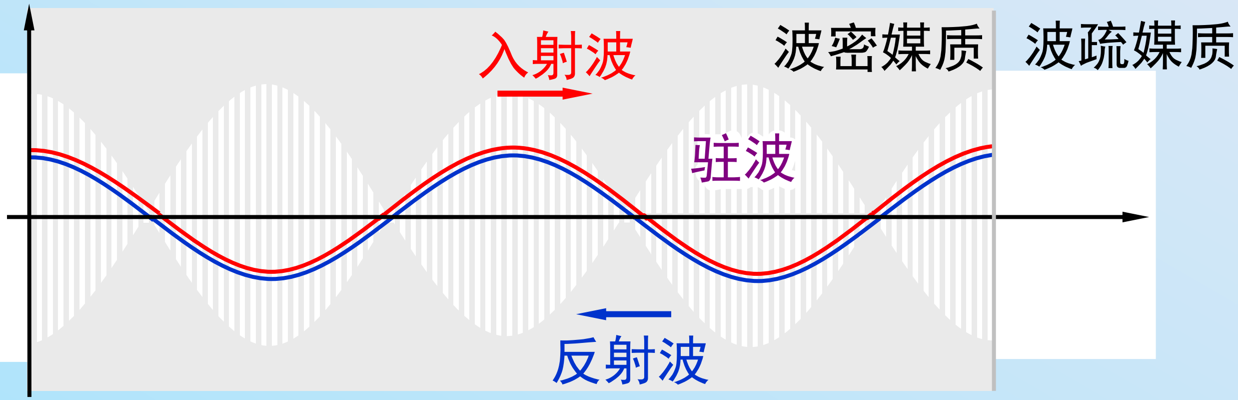
波疏媒质：ρu小的媒质。
波密媒质：ρu大的媒质。
(ρ是密度，u 是波速)

波在两媒质表面反射时

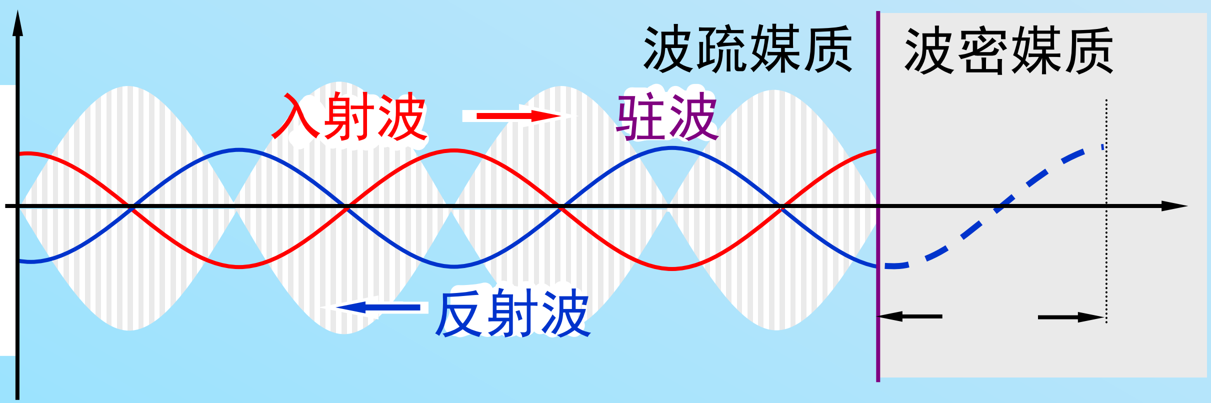


对光波，n 大为密媒质，也有上述结论。

由波密媒质入射在波疏媒质界面上反射，在界面处，反射波的振动相位总是与入射波的振动相位相同，形成驻波时，总是出现波腹。



由波疏媒质入射在波密媒质界面上反射，在界面处，反射波的振动相位总是与入射波的振动相位相反，即差了π，形成驻波时，总是出现波节。

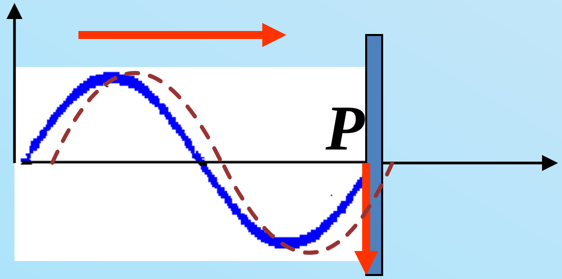


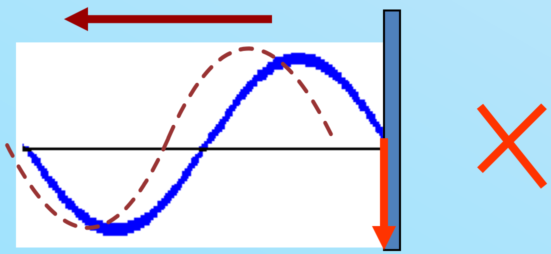
位相差了π，相当于波程差了λ/2，称为"半波损失"。

例：已知入射波 *t* 时刻的波动曲线，问：*A*、*B*、*C*、*D* 哪条曲线是*t* 时刻反射波曲线？（反射壁是波密媒质）

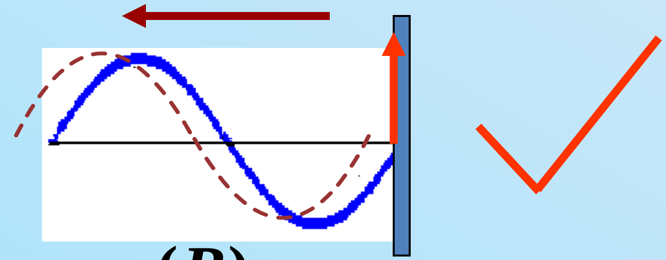
***P*点为波节**

（B）

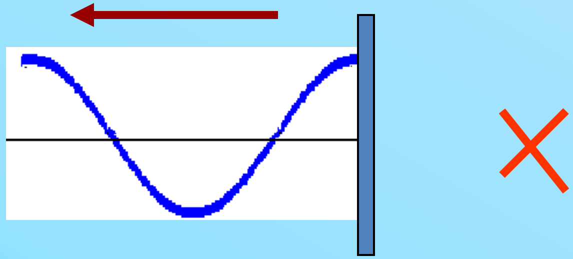




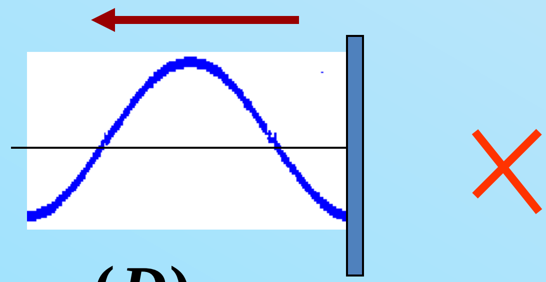
(*A*)



(*B*)



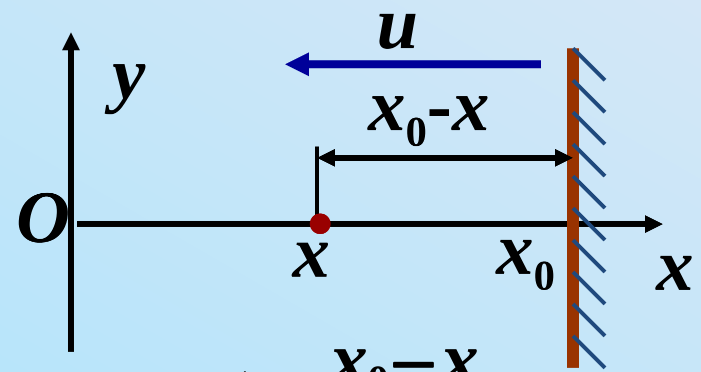
(*C*)



(*D*)

例:平面简谐波 $y=A\cos(\omega t-kx)$, 在$x_0=4\lambda$处(固定端)反射, 求:(1)反射波的波函数;(2)驻波的波函数;(3)0与x_0处之间的各个波节和波腹的位置。

解:(1) x_0处反射波的振动方程:



$$y_1=A\cos[(\omega t-kx_0)+\pi]$$

反射波的波函数:

$$\Delta t=\frac{x_0-x}{u}$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$y_{反}=A\cos[\omega(t-\Delta t)-kx_0+\pi]$$

$$=A\cos[\omega(t-\frac{x_0-x}{u})-kx_0+\pi]$$

$$=A\cos(\omega t+kx-15\pi)=A\cos(\omega t+kx-\pi)$$

另解:考虑波由$o \longrightarrow x_0 \longrightarrow x$

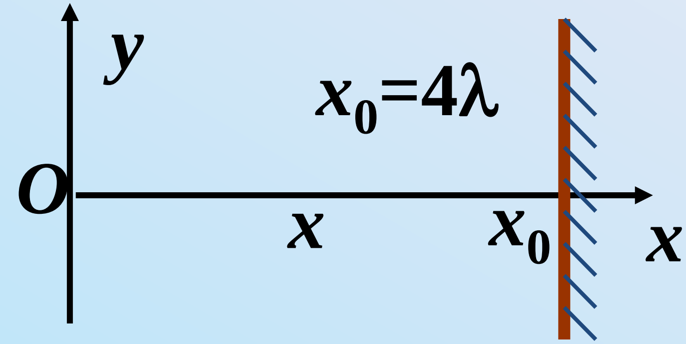
需时:$\Delta t=\dfrac{2x_0-x}{u}$

$$y_{反}=A\cos[\omega(t-\Delta t)-k\,0+\pi]=A\cos(\omega t+kx-\pi)$$

即:$y_{反}=A\cos(\omega t+kx-\pi)$

(2) 驻波的波函数： $y = A\cos(\omega t - kx)$　$y_{反} = A\cos(\omega t + kx - \pi)$

$$y = y_{入} + y_{反}$$
$$= 2A\cos(kx - \frac{\pi}{2})\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$



(3) O与x_0处之间的各个波节和波腹的位置:

波节的位置应满足： $2A\cos(kx - \frac{\pi}{2}) = 0$

即： $kx - \frac{\pi}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2}\quad (n = 0,1,2\cdots 8)$　$\boxed{x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda \cdots 4\lambda}$

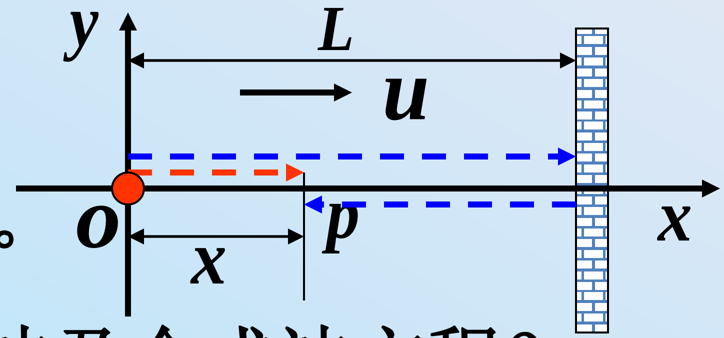
波腹的位置应满足： $2A\cos(kx - \frac{\pi}{2}) = 2A$

即： $kx - \frac{\pi}{2} = n\pi\quad (n = 0,1,2\cdots 7)$

$\therefore\ x = \frac{(2n+1)}{k}\frac{\pi}{2} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$　$\boxed{x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4} \cdots \frac{15}{4}\lambda}$

例： 已知：波源 $y_O = A\cos\omega t$

$L = \frac{5\lambda}{2}$ 处有一波密媒质反射壁。



求：（1）$x>0$ 处的入射波、反射波及合成波方程？并讨论干涉情况。

$$\Delta t = \frac{2L - x}{u}$$

解：

$$y_{入} = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$$

有半波损失 $\pm\pi$

$$y_{反} = A\cos[\omega(t - \frac{2L - x}{u}) - \pi]$$

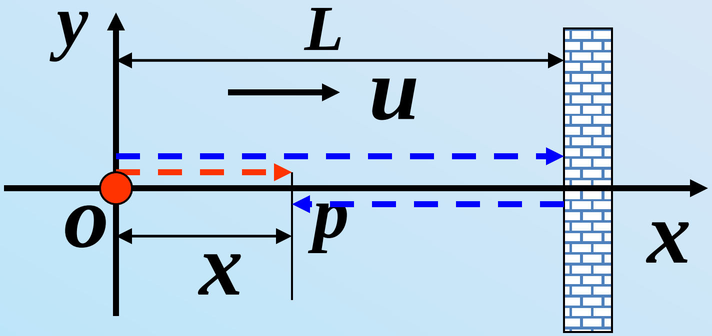
$$= A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) - \frac{2\pi}{\lambda} 2 \frac{5\lambda}{2} - \pi]$$

$$= A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) - \pi]$$

驻波方程

$$y_{驻} = y_{入} + y_{反} = \underline{2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2})\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$$y_{驻}=y_{入}+y_{反}=2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$



波腹：

$$\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{\pi}{2}=\pm k\pi$$

$$x_k=\left(\pm k+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$$

x在 0 —— $\frac{5\lambda}{2}$ 之间

$$k=0,1,2,3,4$$

$$x=\frac{\lambda}{4},\frac{3\lambda}{4},\frac{5\lambda}{4},\frac{7\lambda}{4},\frac{9\lambda}{4}$$

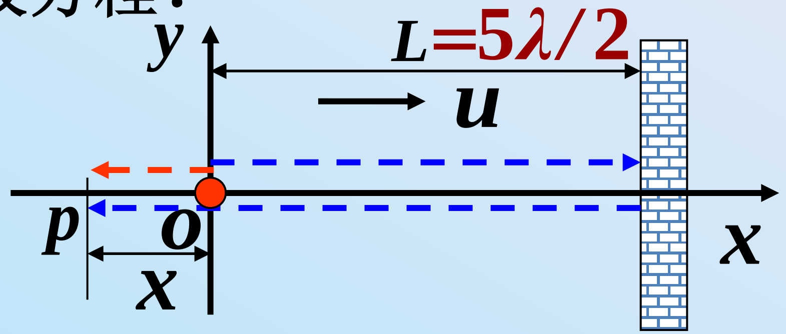
波节：

$$\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{\pi}{2}=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2}\longrightarrow x_k=\pm k\frac{\lambda}{2}$$

$$k=0,1,2,3,4,5$$

$$x=0,\frac{\lambda}{2},\lambda,\frac{3\lambda}{2},2\lambda,\frac{5\lambda}{2}$$

（2） $x<0$处的入射波、反射波及合成波方程？并讨论干涉情况。



$$y_{入} = A\cos\omega(t + \frac{x}{u})$$

$$y_{反} = A\cos[\omega(t - \frac{2L-x}{u}) - \pi] = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) - \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{5\lambda}{u} - \pi]$$

$$y_{反} = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) - \pi]$$

(实际上，这就是上一问中所求出的)

干涉静止

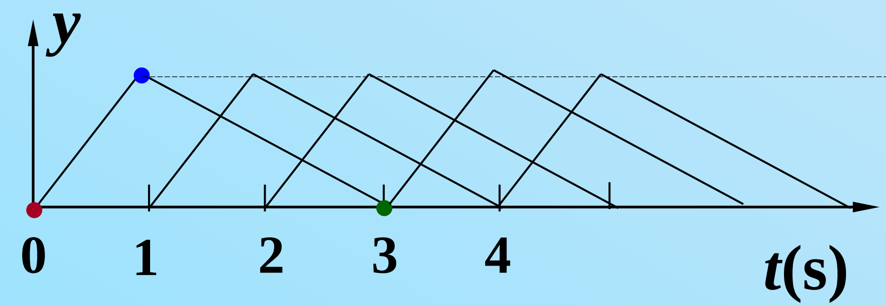
$$y_{合} = y_{入} + y_{反} = 2A\cos(-\frac{\pi}{2})\underline{\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) - \frac{\pi}{2}]} = 0$$

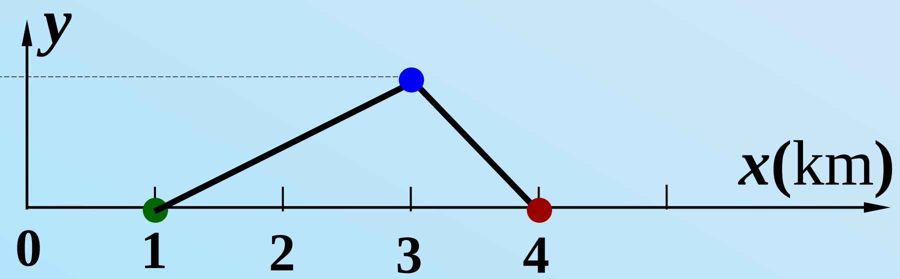
行波方程

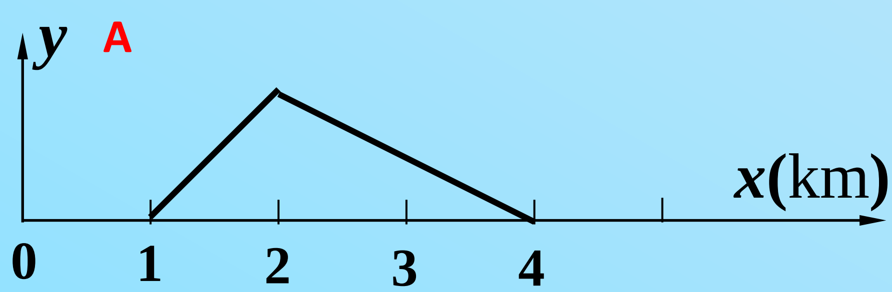
若 L为其它值（如5λ/4），则$y_{合}$ 可不为0，$x<0$合成为行波方程。

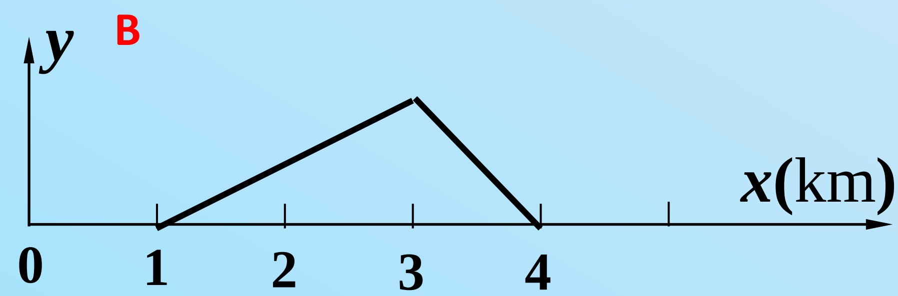
例：x轴原点O处质元的振动曲线为如图所示的三角形，该振动沿x轴正向以速度u=1km/s传播，试画出t=4s时的波形图(波形曲线)。

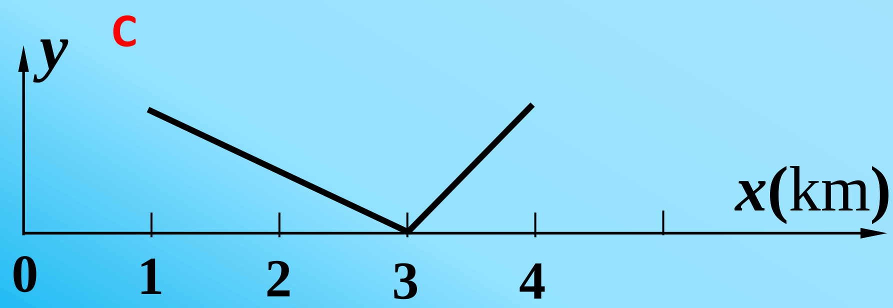
解：

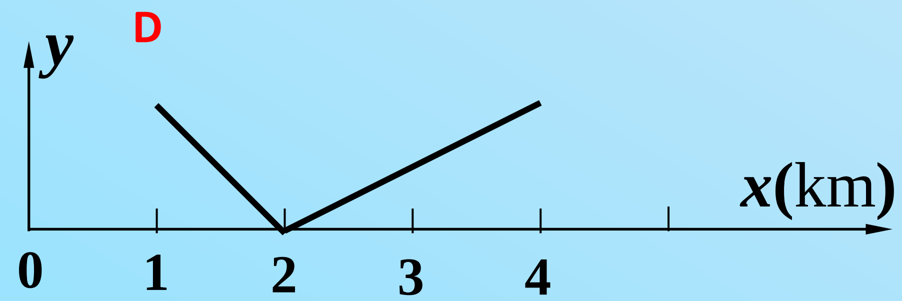








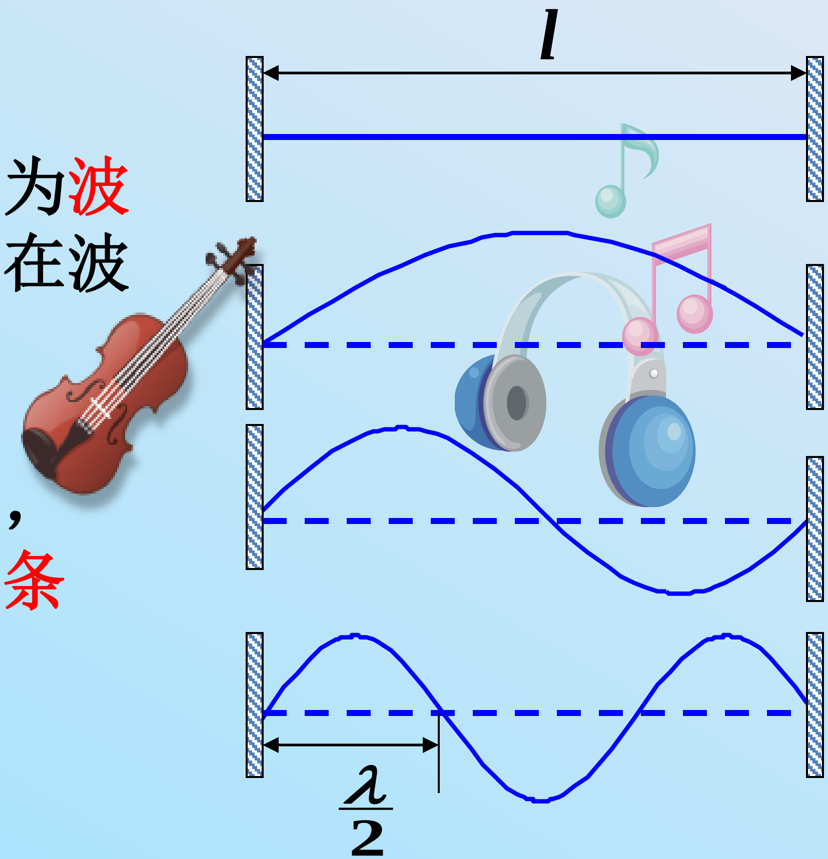




4. 弦线上的驻波

◆ 讨论两端固定的弦自由振动

要形成稳定驻波，两固定端一定为波节，此边界条件就限定了波长，在波速一定时也就限定了频率。



只有弦长等于半波长的整数倍时，才能保证两固定端为波节的边界条件，即

$$l = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 1,2,3\cdots$$

$$\lambda = \frac{2l}{n} \longrightarrow \nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{n}{2l}u$$

$n = 1$ 基频（基音）

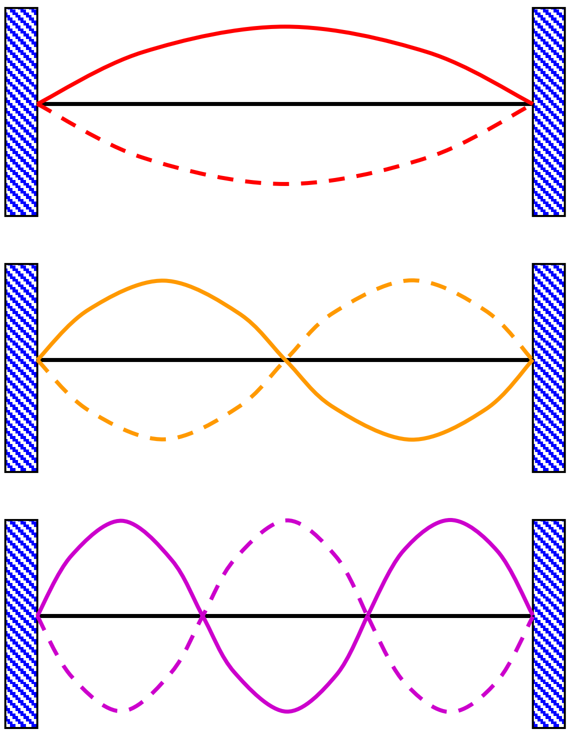
$n \geq 2$ 谐频（谐音）

本征频率 ⇨ 对应的驻波称为简正模式

■ 也就是说，只有波长或频率满足上述条件时，才能在弦上形成驻波，其波长和频率不是连续的，即是“量子化”的。

两端固定的弦振动的简正模式

$$l = n\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, \cdots$$



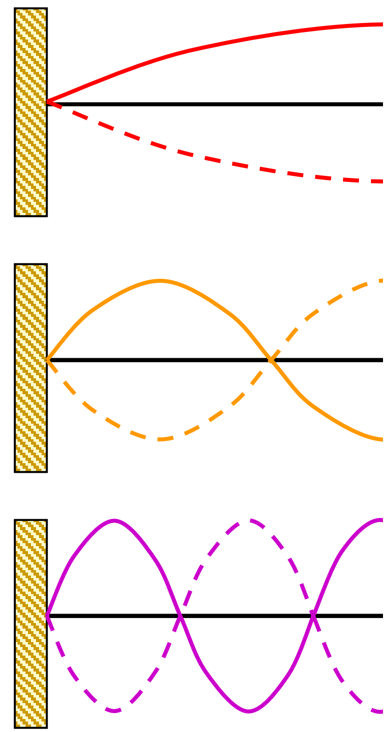
$$l = \frac{\lambda_1}{2}$$

$$l = \frac{2\lambda_2}{2}$$

$$l = \frac{3\lambda_3}{2}$$

一端固定一端自由的弦振动的简正模式

$$l = (n - \frac{1}{2})\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, \cdots$$

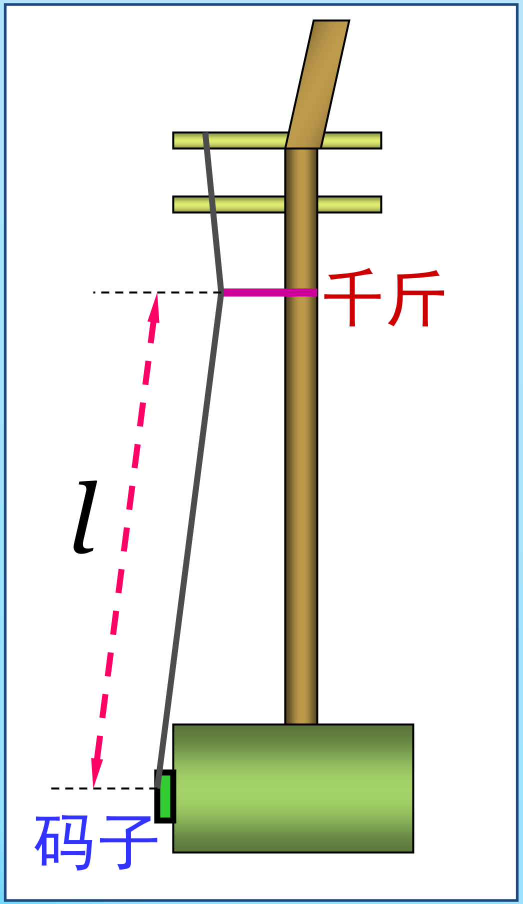


$$l = \frac{\lambda_1}{4}$$

$$l = \frac{3\lambda_2}{4}$$

$$l = \frac{5\lambda_3}{4}$$

举例：如图二胡弦长l=0.3m，张力T=9.4N。线密度ρ=3.8×10^{-4}kg/m，求弦发出的声音的基频与谐频。



解：弦两端为固定点，是波节。

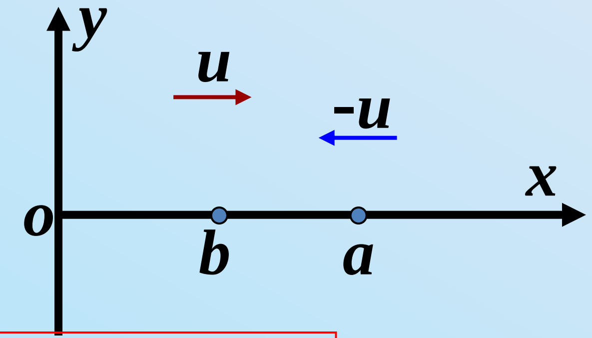
$$l = n\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, \cdots$$

频率 $\nu = \dfrac{u}{\lambda} = \dfrac{\mathrm{nu}}{2\mathrm{l}}$ 波速 $u = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

基频 $n = 1,$ $\nu_1 = \dfrac{1}{2\mathrm{l}}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}} = 262Hz$

谐频……

例:振幅为A，频率为γ，波长为λ的简谐波沿弦线传播，在自由端a点反射。假设反射后波不衰减。已知$oa=7\lambda/8$，$ob=\lambda/2$. $t=0$ 时, $x=0$处质元的合振动经平衡位置向y负方向运动。 求b点处入射波和反射波的合振动方程。



解: 设入射波为

$$y_1=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi]$$

$$=A\cos(2\pi\gamma t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\phi)$$

$$\boxed{y_{O入}=A\cos(2\pi\gamma t+\phi)}$$

$(t-\Delta t)$

a点为自由端，故无半波损失。反射波在o点引起的振动为

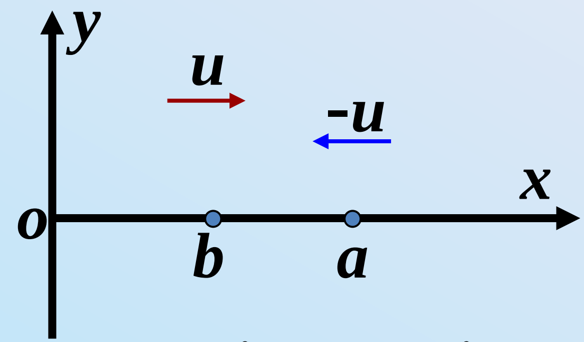
$$y_{O反}=A\cos[2\pi\gamma(t-\frac{2\overline{oa}}{u})+\phi]=A\cos[2\pi\gamma t-\frac{2\pi\times 2\overline{oa}}{\lambda}+\phi]$$

$$=A\cos(2\pi\gamma t-2\pi\times2\times7\lambda/8/\lambda+\phi)$$

$$=A\cos(2\pi\gamma t+\phi-\frac{3\pi}{2})$$

$$y_1 = A\cos(2\pi\gamma t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \phi)$$

$$y_{O反} = A\cos(2\pi\gamma t + \phi - \frac{3\pi}{2})$$



$oa = 7\lambda/8$，$ob = \lambda/2$

所以反射波为

$$y_2 = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \phi - \frac{3\pi}{2}]$$

合成波为

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda} - \frac{3\pi}{4})\cos(2\pi\gamma t + \phi - \frac{3\pi}{4})$$

故 $x=0$ 处质元 o 点的合振动为

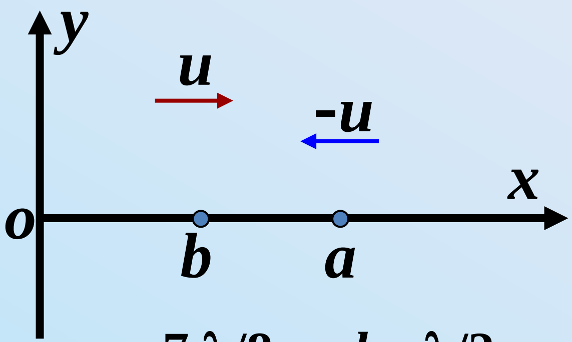
$$\boxed{y_{O入} = A\cos(2\pi\gamma t + \phi)}$$

$$y_O = 2A\cos(-\frac{3\pi}{4})\cos(2\pi\gamma t + \phi - \frac{3\pi}{4})$$

$$= -\sqrt{2}A\cos(2\pi\gamma t + \phi - \frac{3\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2}A\cos(2\pi\gamma t + \phi + \frac{\pi}{4})$$

$$y_O=\sqrt{2}A\cos(2\pi\gamma t+\phi+\frac{\pi}{4})$$



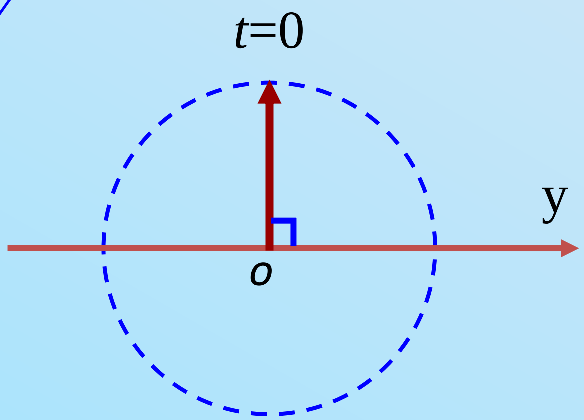
$oa=7\lambda/8$，$ob=\lambda/2$

而$t=0$ 时, $x=0$处质元的合振动经平衡位置向负方向运动，

由旋转矢量图知,

$$\phi+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\phi=\frac{\pi}{4}$$



合成波为

$$y=y_1+y_2=2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda}-\frac{3\pi}{4})\cos(2\pi\gamma t+\phi-\frac{3\pi}{4})$$

$$=2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda}-\frac{3\pi}{4})\cos(2\pi\gamma t+\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4})$$

所以，b点($x_b=\lambda/2$) 的合振动方程为

$$y_b=2A\cos(2\pi\frac{\lambda/2}{\lambda}-\frac{3\pi}{4})\cos(2\pi\gamma t+\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4})$$

$$=\sqrt{2}A\cos(2\pi\gamma t-\frac{\pi}{2})$$

教学视频-驻波

第8节　多普勒效应

此效应是出生于德国的奥地利物理学家多普勒(Johann Doppler，1802－1853)在1842年首次发现的.

◆ 当观察者与波源之间有相对运动时，观察者所测得的频率不同于波源的频率，这种现象称为多普勒效应。

比如：当鸣笛的火车驶向站台时，站台上的观察者听到的笛声变尖，即频率升高；相反，当火车驶离站台时，听到的笛声频率降低。

奥地利物理学家多普勒(Johann Doppler，1802－1853)

波源的频率ν_S 是单位时间内波源作完整振动的次数或发出的‘完整波长’的个数。

观察者接收到的频率ν_R是观察者在单位时间内接收到的完整的振动次数或完整的波长数。

波速u是单位时间内振动状态 (相位)传播的距离。

相对于媒质

波源的周期T_S 是波源作一次完整的振动所需的时间。

观察者测得的周期T_R 是观察者观测到的一次完整的振动所经历的时间。

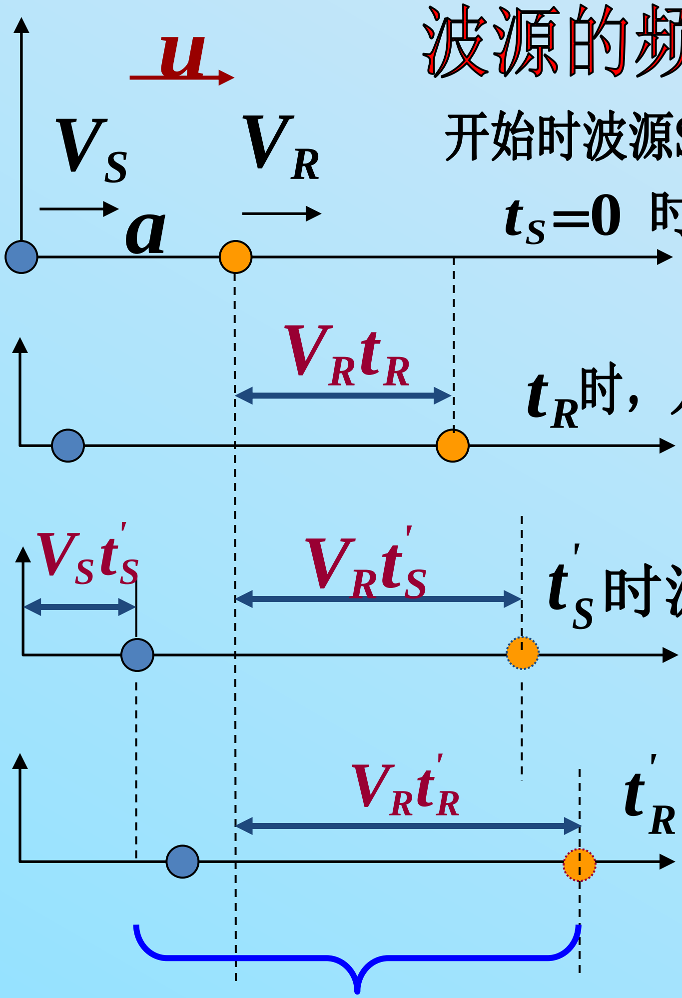
◆ 以下考虑波源的频率和观测频率的关系

思路：先考虑周期之间的关系，再进而得到频率的关系。

■ 为此，取媒质为参考系，设波速为u，波源的速度为V_S，观察者的速度为V_R，且波源和观察者在同一条直线上运动。

比如：

波源的频率与观测频率的关系式



开始时波源S刚好在坐标原点，与观察者R相距 a

$t_S=0$ 时，波源S到达振动状态H并将之向右传出

t_R时，人R测到由波源传来的振动状态H

$$\begin{cases} t_R=\dfrac{a+V_R t_R}{u} \\ \therefore t_R=\dfrac{a}{u-V_R} \end{cases}$$

t'_S时波源S回到并传出振动状态H

$$\boxed{T_S=t'_S-t_S=t'_S}$$

t'_R 时，人R再次测到振动状态H

$$\boxed{T_R=t'_R-t_R}$$

$$=\frac{a+(u-V_S)t'_S}{u-V_R}-\frac{a}{u-V_R}$$

$$=\frac{u-V_S}{u-V_R}t'_S=\frac{u-V_S}{u-V_R}T_S$$

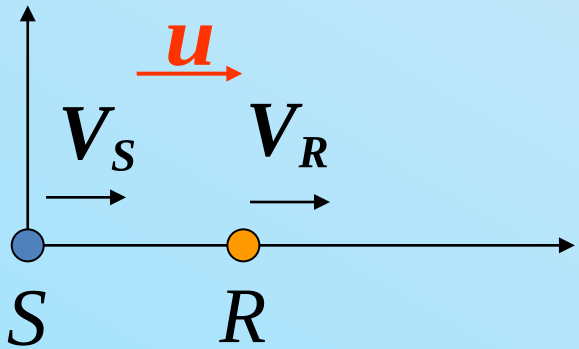
$$t'_R=t'_S+\frac{a+V_R t'_R-V_S t'_S}{u}$$

$$t'_R=\frac{a+(u-V_S)t'_S}{u-V_R}$$

$$\boxed{\nu_R=\frac{u-V_R}{u-V_S}\nu_S}$$

实际上已把 u 的方向定为正方向。

波源的频率与观测频率的关系式



$$\boxed{\nu_R = \frac{u - V_R}{u - V_S}\nu_S}$$

以 u 的方向为正方向。

注意：上式中波源和观察者的速度可正可负。

当 $V_R = V_S$ 时，波源和观察者无相对运动， $\nu_R = \nu_S$ $\boxed{\lambda_R = \dfrac{u}{\nu_R}}$

当 $V_S = 0$ 时，

若观察者向波源运动，则 $\nu_R > \nu_S$；波长变短。

若观察者背离波源运动，则 $\nu_R < \nu_S$；波长变长。

当 $V_R = 0$ 时，

若波源向观察者运动，则 $\nu_R > \nu_S$；波长变短。

若波源背离观察者运动，则 $\nu_R < \nu_S$；波长变长。