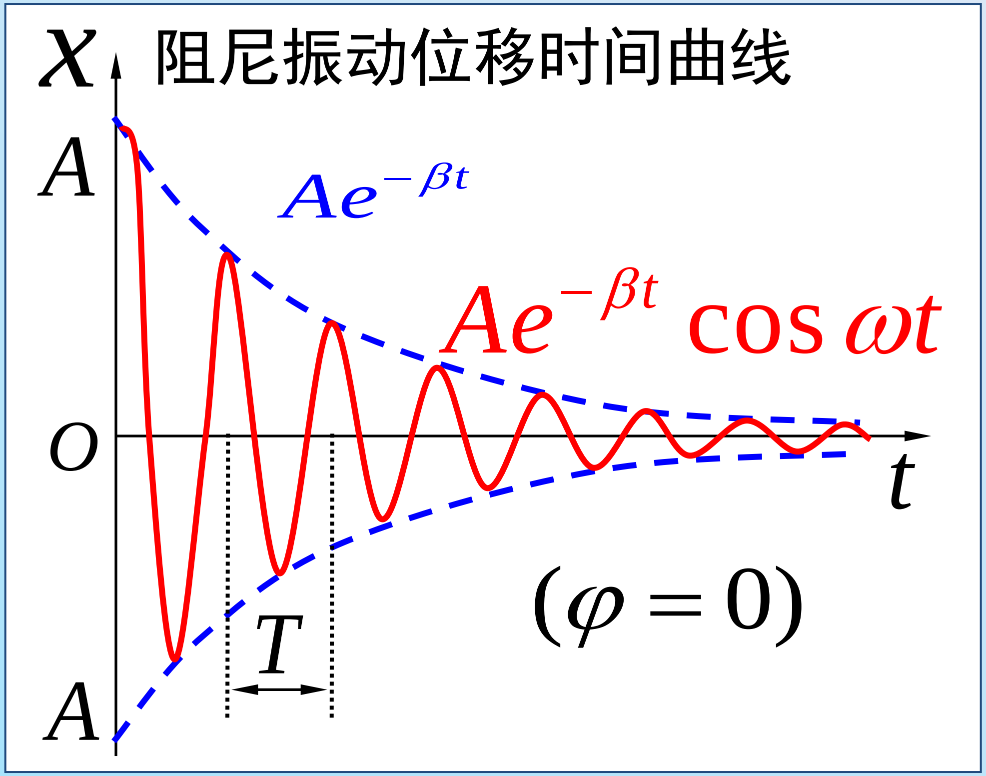
大学物理(下)

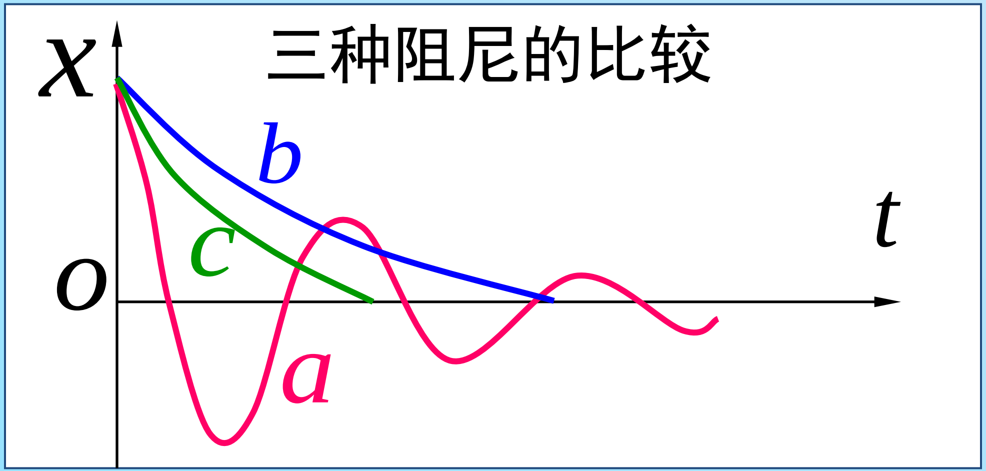
华 中 科 技 大 学
张智
zzhang@hust.edu.cn

第3节 阻尼振动、受迫振动和共振

1.谐振子的阻尼振动

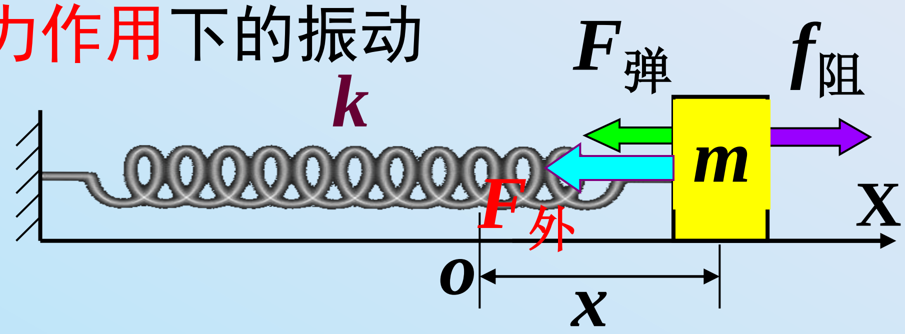
- a）欠阻尼　　$\omega_0^2 > \beta^2$
- b）过阻尼　　$\omega_0^2 < \beta^2$
- c）临界阻尼　　$\omega_0^2 = \beta^2$





2. 受迫振动

系统在周期性外力作用下的振动



1)谐振子的受迫振动方程

假设强迫力按余弦规律 $F_外=F_0\cos\omega_外 t$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_弹+f_阻+F_外 \qquad m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+kx=F\cos\omega_外 t$$

则有：$\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\beta\dfrac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega_外 t$ ——运动方程

$$\omega_0^2=\frac{k}{m} \qquad 2\beta=\frac{\gamma}{m} \qquad f_0=\frac{F_0}{m}$$

方程的解： $x(t)=\underbrace{A_0e^{-\beta\cdot t}\cos(\omega_0 t+\varphi_0)}_{\text{反映系统的暂态行为}}+A_p\cos(\omega_外 t+\alpha)$

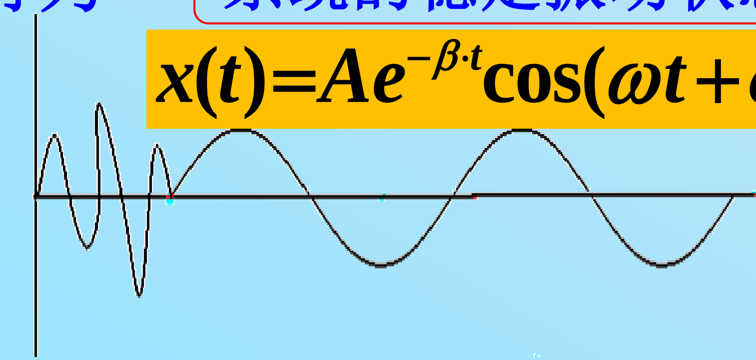
反映系统的暂态行为

系统的稳定振动状态

$x(t)=Ae^{-\beta\cdot t}\cos(\omega t+\varphi_0)$

经过足够长的时间，
变为稳态：

$$x(t)=A_p\cos(\omega_外 t+\alpha)$$



$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega_{外}t \xrightarrow{\text{稳态解}} x(t)=A_p\cos(\omega_{外}t+\alpha)$$

即：稳态时的受迫振动由强迫力决定。 $F_{外}=F_0\cos\omega_{外}t$ $f_0=\frac{F_0}{m}$

稳态频率： $\omega=\omega_{外}$

将稳态解代入方程可得：

振幅： $A_p=\dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_{外}^2)^2+4\beta^2\omega_{外}^2}}$

位相： $\tan\alpha=-\dfrac{2\beta\omega_{外}}{\omega_0^2-\omega_{外}^2}$

2) 稳定受迫振动与谐振动的区别

1. 受力不同： 弹簧振子— $F_{弹}$， 受迫振动—$F_{外}$

2. 三特征量的本质不同：

弹簧振子 ω_0 —系统固有；A、φ 由初始条件决定

受迫振动 $\omega_{外}$ —由外力决定；A、α 解方程得到

3. 能量情况不同：谐振动系统能量守恒

受迫振动系统阻力消耗的能量 = 外力的功

3. 共振 —— 位移共振

在一定条件下，振幅出现 极大值，振动剧烈的现象。

$$A_p = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_{外}^2)^2+4\beta^2\omega_{外}^2}}$$

令：$\dfrac{\mathrm{d}A_p}{\mathrm{d}\omega_{外}} = 0$

$$\omega_r=\omega_{外}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

共振频率

$$A_p=A_{Max}=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$ ——共振振幅

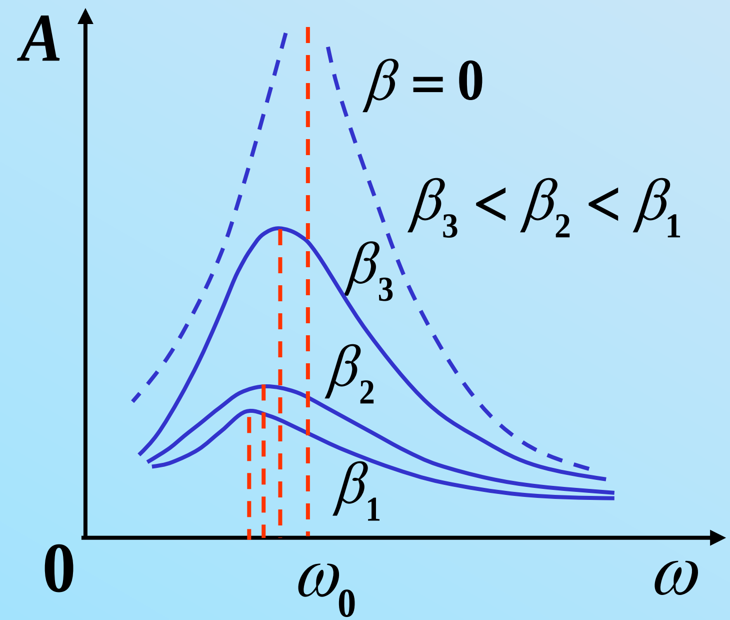
一般 $\omega_r<\omega_0$，与 β (阻尼系数)有关

β大， ω_r 小　　A_{max}—小

β小， ω_r大　　A_{max}—大

若$\beta \ll \omega_0$，则 $\omega_r \approx \omega_0$

$A_r \approx f_0/(2\beta\,\omega_0)$ ~~称尖锐共振



$\boxed{若\beta \to 0 \quad A_{max} \to \infty}$ ——→ 实际上不可能

$$A_p = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{外}^2)^2 + 4\beta^2\omega_{外}^2}}$$

$$\tan\alpha = -\frac{2\beta\omega_{外}}{\omega_0^2 - \omega_{外}^2}$$

当 $\beta \to 0$ 弱阻尼时

共振发生在固有频率处，称为尖锐共振。

$$\therefore \omega_r = \omega_0,\ A_p \to \infty,\ \alpha_r = -\pi/2$$

$$x(t) = A_p\cos(\omega_{外}t + \alpha) \qquad F_{外} = F_0\cos\omega_{外}t$$

受迫振动相位落后于强迫力相位 $\frac{\pi}{2}$，即振动速度与强迫力同位相，那么外力始终对系统做正功。这正是振幅急剧增大的原因。

但是，随着振幅的增大，阻力的功率也不断增大，最后与强迫力的功率相抵，从而使振幅保持恒定。共振时，外力做功的能量转化为共振质点的能量，称为共振吸收。

◆ 共振频率

$$\omega_{外} = \sqrt{\omega_{固}^2 - 2\beta^2}$$

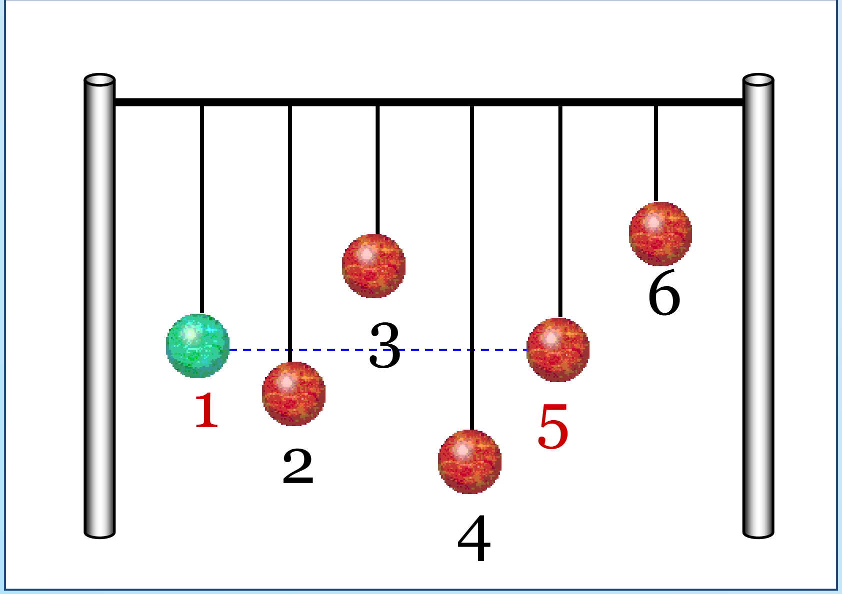
◆ 共振振幅

$$A = \frac{f_{固}}{2\beta\sqrt{\omega_{固}^2 - \beta^2}}$$

◆ 共振现象在实际中的应用

乐器、收音机　　……

共振演示实验



单摆1作垂直于纸面的简谐运动时，单摆5将作相同周期的简谐运动，其它单摆基本不动。

◈ 共振现象的危害

1940 年7月1日美国 Tocama 悬索桥因共振而坍塌

共振-Disaster

港珠澳大桥是连接香港、珠海、澳门的超大型跨海通道。

港珠澳大桥所在的伶仃洋海域6级以上大风天气全年超过200天。在台风高发季节，在**共振**的作用下，大桥主塔会不断从风流中吸取能量而导致结构损坏。根据伶仃洋海域的特殊环境，港珠澳大桥的抗风能力设计为抗16级。建设者对大桥模型进行多次风洞模拟试验，优化主塔结构，**使主塔的固有频率与风漩涡的频率相隔很远**，保证大桥结构安全。

港珠澳大桥-台风“山竹”

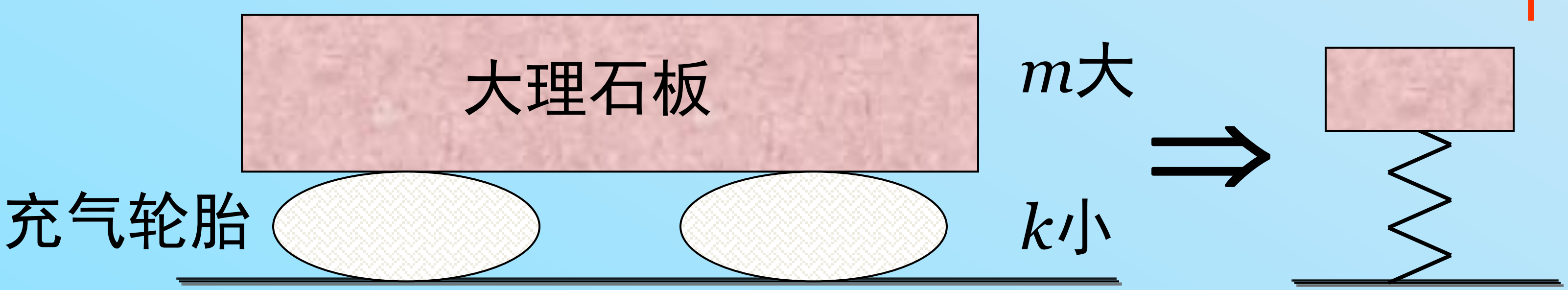
视频和图片来自网络

阻尼振动 $\xrightarrow{F}$ 受迫振动 $\xrightarrow{\omega_{外}=\omega}$ 共振

应如何设计一防振台？

要使 $\omega_{外} >> \omega$ ！

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



小测验

例: 已知谐振动A=10cm ,T=2s , 当 t=0 时位移为 –5cm,且向 x 负向运动。求:

（1）振动方程。

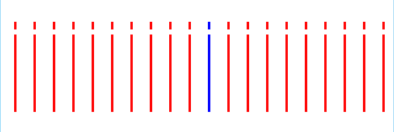
（2） x=5cm 且向 x 正向运动时的速度、加速度及从这一位置回到平衡位置的最短时间。

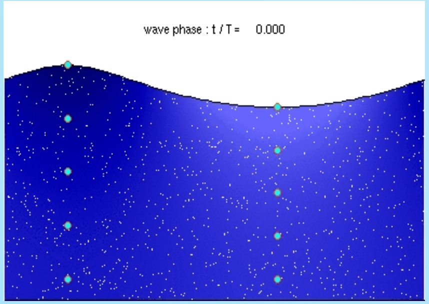
第5节 机械波

1.波的分类

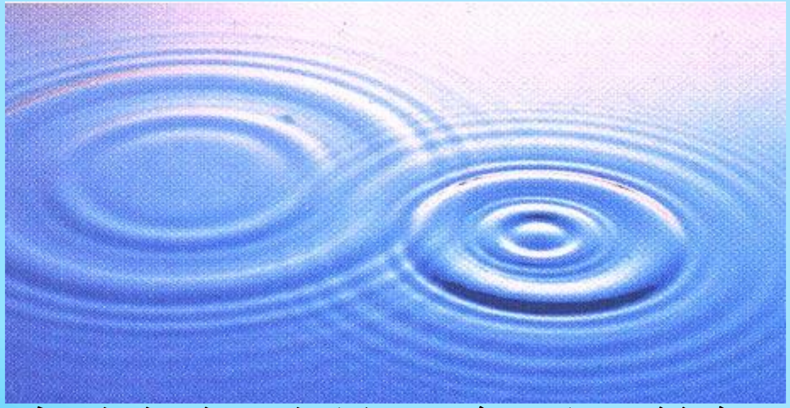
按性质分类
- 机械波： 机械振动在弹性媒质中的传播过程
- 电磁波： 电磁场周期性变化在空间的传播
- 引力波： 时空形变，以*c*的速度在空间传播

按振动方向与传播方向分类
- 横波： 振动方向与传播方向垂直 如:电磁波
- 纵波： 振动方向与传播方向相同 如:声波
- 混合波： 如 水波、地震波





各种类型的波有其特殊性，但也有普遍的共性。



——传播的是运动状态

波动与振动是两个不同的概念，但是又紧密相连。

振动是波动的基础，波动是振动的传播。

横波与纵波

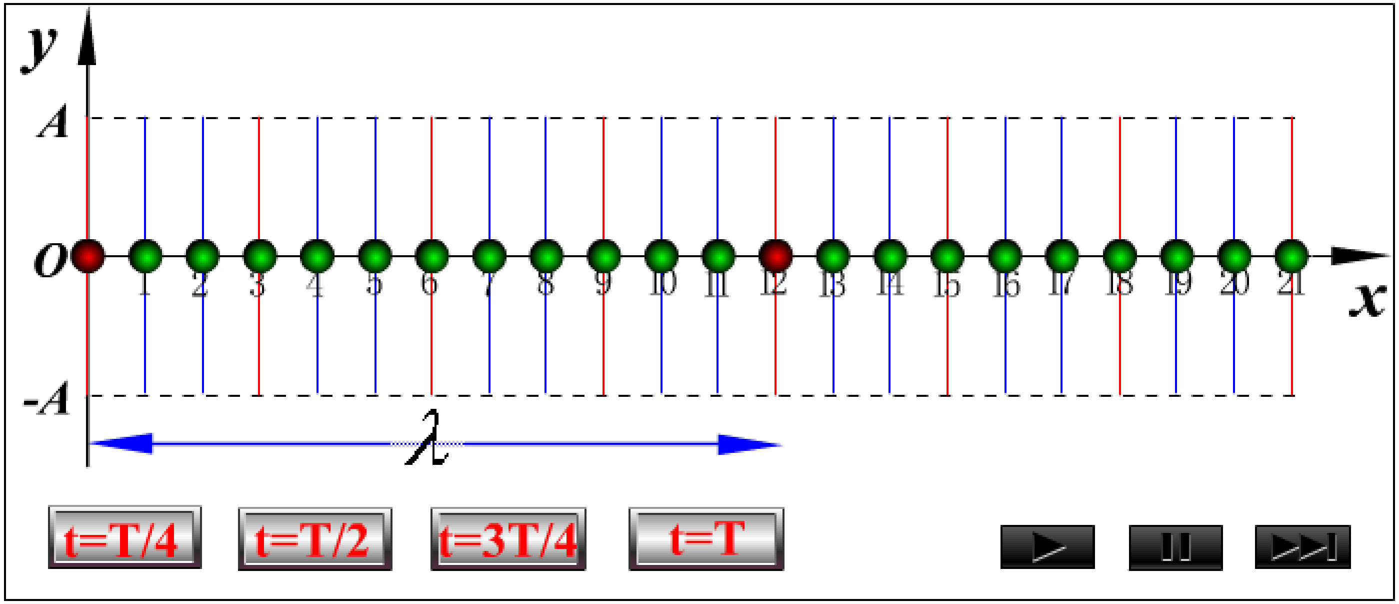
横波：质点振动方向与波的传播方向相垂直的波。
（仅在固体中传播，水面波是个例外 ）
特征：具有交替出现的波峰和波谷。

纵波：质点振动方向与波的传播方向互相平行的波。
（可在固体、液体和气体中传播）

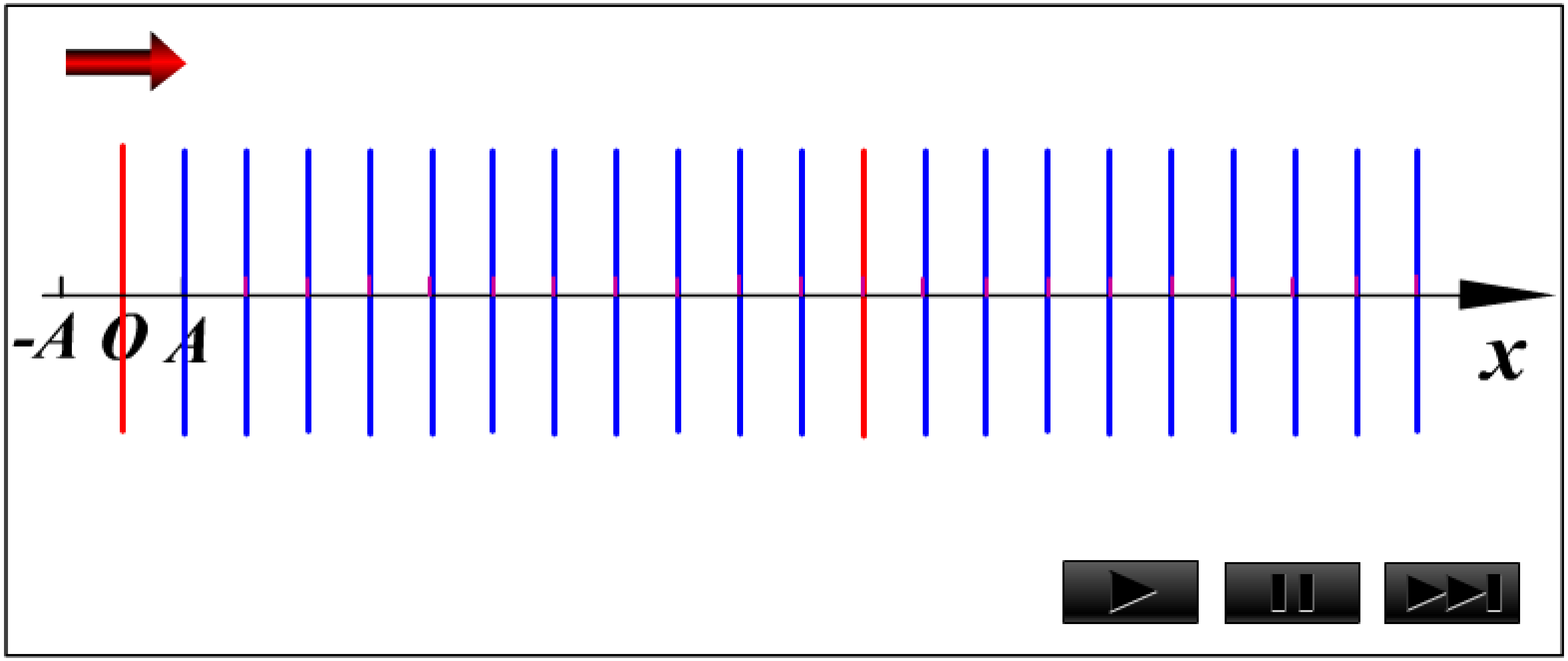
注意：

1° 波的传播过程是振动状态的传播过程。
（质点本身不随波运动）
是位相的传播，能量的传播。

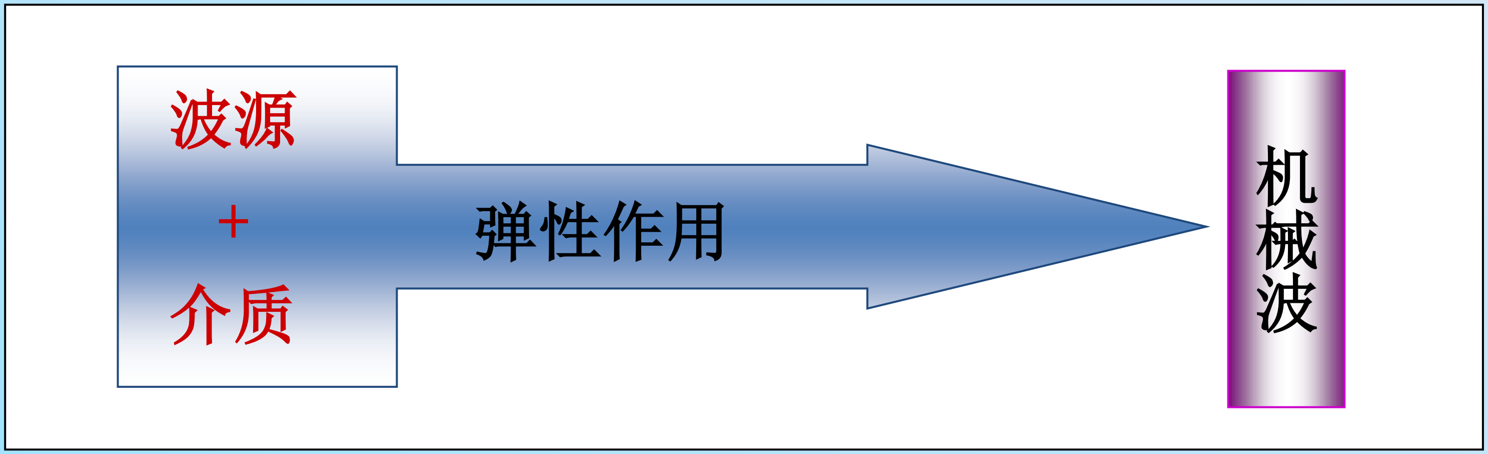
2° 波是指介质整体表现的运动状态，其特点是：
相邻质点的振动位相依次落后。


y
A
O
-A
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
λ
t=T/4
t=T/2
t=3T/4
t=T

视频


-A O A
x

2.机械波产生的条件

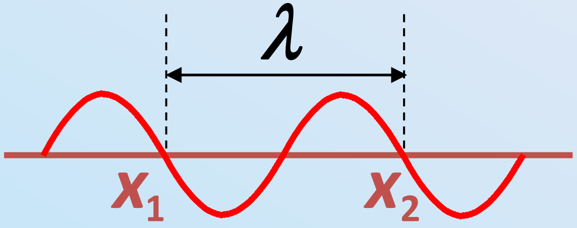


产生条件：1）波源；2）弹性介质。

注意

波是运动状态的传播，介质的质点并不随波传播。

3. 描述波的几个基本概念



1）波长λ：

空间周期

在波的传播方向上，两相邻位相差为2π的质点间的距离 。

2）周期 T：波向前传播一个波长所用的时间。

$$T_{波}=\frac{\lambda}{u}=\frac{2\pi}{\omega}=T_{振}$$

即 $T_{波}=T_{振}$

时间周期

3）频率ν：

单位时间内，波推进的距离中包含的完整的波长的数目。

$$\nu=\frac{u}{\lambda}=\frac{u}{uT}=\frac{1}{T_{波}}=\frac{1}{T_{振}}$$

$\nu_{波}=\nu_{振}$

4）波速 u：

振动状态(位相)在媒质中的传播速度。 $u=\dfrac{\lambda}{T}$ $\boxed{u_{波}\neq u_{振}}$

波速的大小决定于媒质的性质

——媒质的密度和弹性模量

ρ为介质的密度

固体

$u=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ 切变弹性模量 横 波

$u=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ 杨氏弹性模量

纵 波

流体 $u=\sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$ 体变模弹性量

如声音的传播速度

空气 u=343 m/s

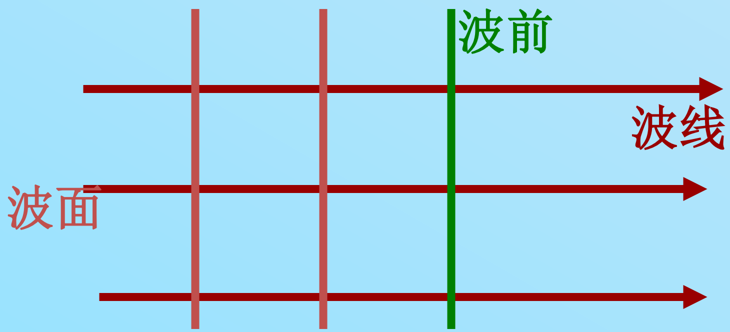
混凝土 $u\approx$4000 m/s

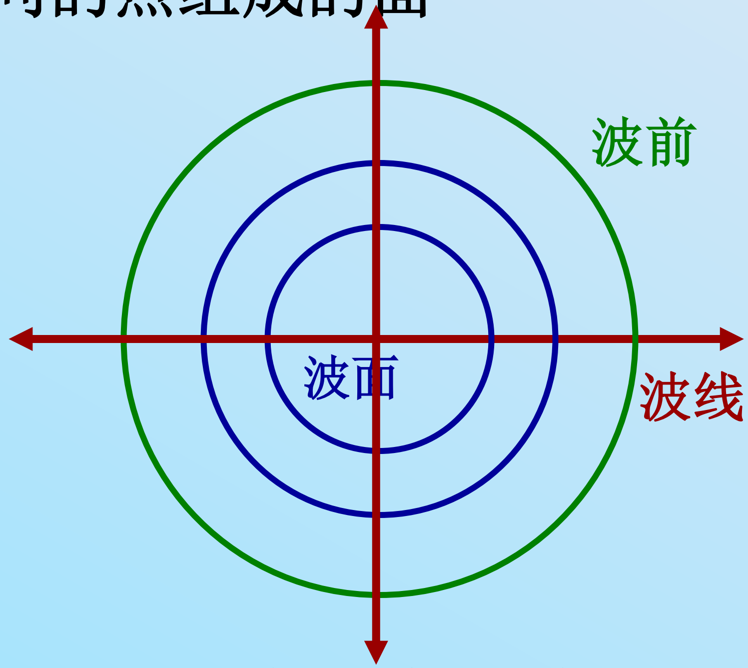
5）波数 k： 在波的传播方向上 2π 长度内包含的波长的个数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$

另一种表示：单位长度内包含的波长的个数 $k=\frac{1}{\lambda}$

6）波阵面（波面）：振动位相相同的点组成的面

平面波





点波源产生球面波

7）波前：传播在最前的波面

8）波线：

发自波源，与波面垂直指向波的传播方向的射线

二、平面简谐波

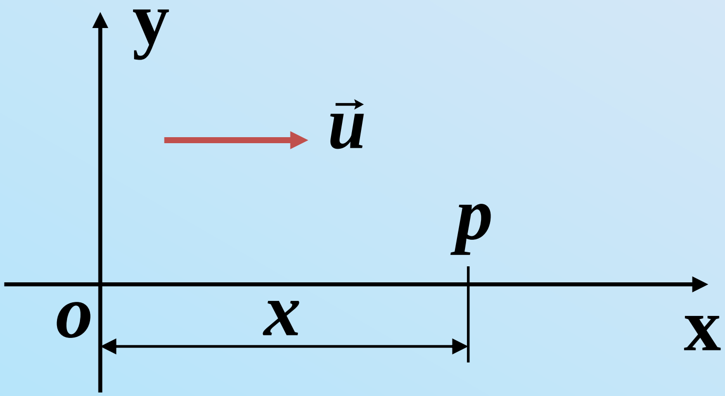
媒质中各质点都作谐振动，并且向一个方向传播。

1. 波函数 能够描述任意质点在任意时刻的振动情况

以横波为例：

设一简谐波以速度u向x轴方向传播，

在坐标原点o处引起的振动为：



$$y_O = A\cos(\omega t+\varphi)$$

要求给出任意一点的振动。

任选一点 p，且$op=x$

注意:x轴上一点的运动其实代表该点所在波阵面上所有质点的运动。x轴代表整个空间。

注：波传播的是质点的振动状态 ——传播波源的位相

即：波速=位相传播的速度（相速）

p点的振动是从o点振动传过来，

o点t时刻的位相，经 $\Delta t=\dfrac{x}{u}$ 传到p点

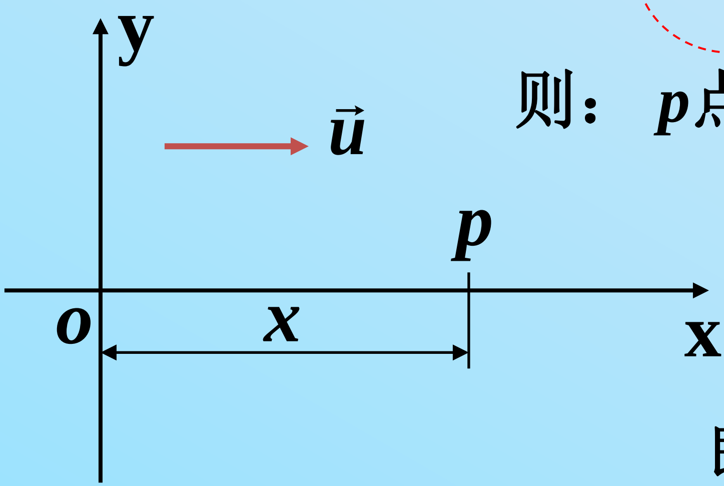
$\Big\}$ p点的位相总是落后于o点的位相

即：波速=位相传播的速度 =相速

p点的振动是从o点振动传过来，

o点t时刻的位相，经 $\Delta t=\dfrac{x}{u}$ 传到p点

p点的位相总是落后于o点的位相



则： p点t时刻的位相=o点$(t-\Delta t)$时刻的位相

o点的振动： $y_O=A\cos(\omega t+\varphi)$

o点 t 时刻的位相为： $\omega t+\varphi$

o点 $t-\Delta t$时刻的位相为： $\omega(t-\Delta t)+\varphi$

即p点在 t 时刻的位相为： $\omega(t-\Delta t)+\varphi$

任意点p的振动为：$y=A\cos[\omega(t-\Delta t)+\varphi] =A\cos[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi]$

即：$\boxed{y=A\cos[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi]}$ （平面简谐波的波函数）

描述了整个空间任意质点在任意时刻的振动状态。

注意: u为速度的大小(正的)

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

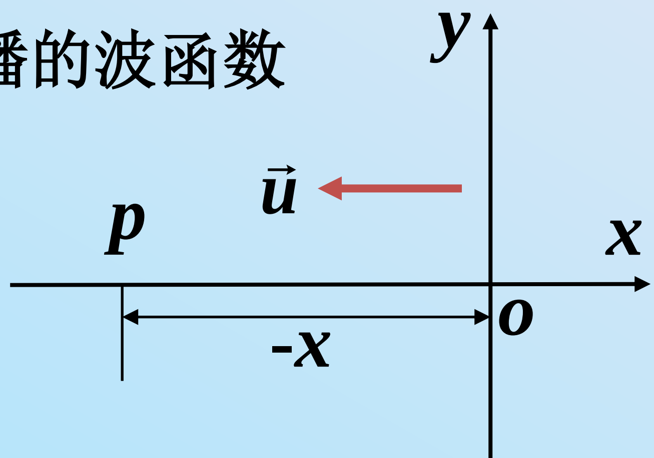
一维简谐波的波函数(正向传播)

2.讨论

$$\boxed{y_O=A\cos(\omega t+\varphi)}$$

(1)上式是由原点的振动方程给出了正向传播的波函数

若波向x轴负方向传播，y=?

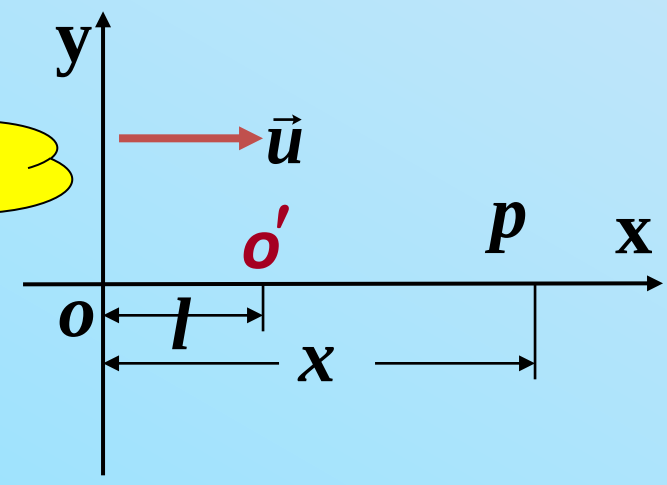


$$y=A\cos[\omega(t-\Delta t)+\varphi] \qquad \Delta t=\frac{-x}{u}$$

$$y=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi]$$

平面简谐波的波函数(反向传播)

(2)若已知的是o'点(非原点)的振动，则



$$\Delta t=\frac{\Delta x}{u}=\frac{x-l}{u}$$

若向x轴负向传播?

向x轴正向传播：

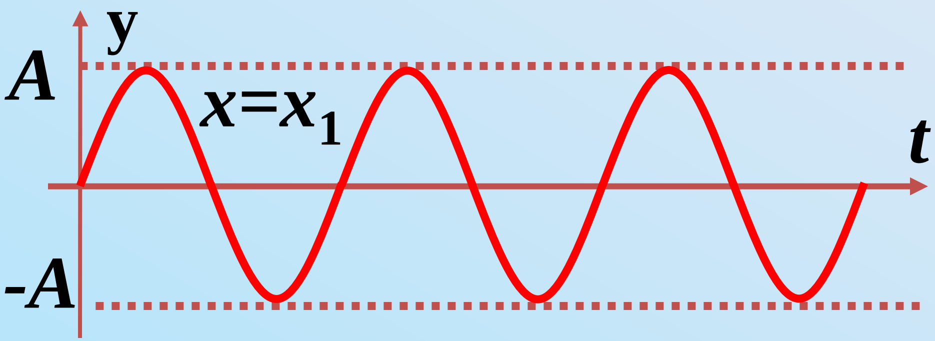
$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x-l}{u})+\varphi]$$

(3)波函数的物理意义

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

a. 当$x=x_1=$常数

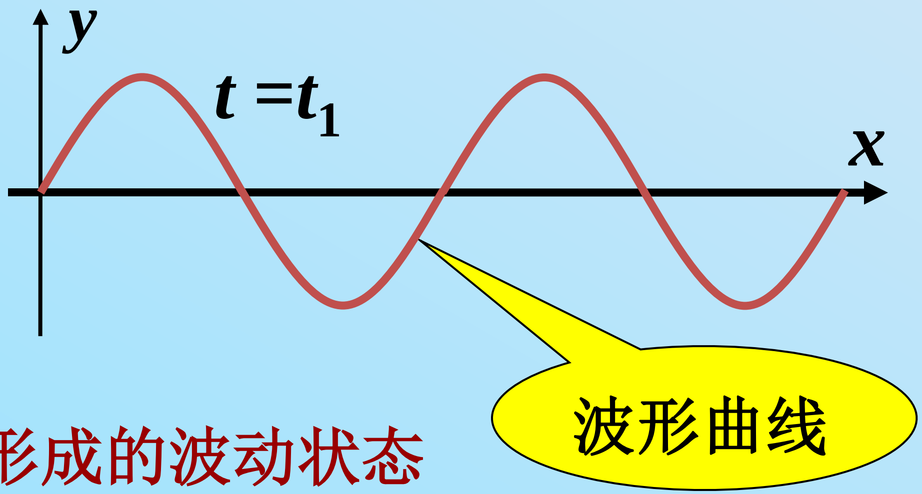
$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x_1}{u})+\varphi]$$
$$=A\cos[\omega t+\varphi_1]=f(t)$$



表示 x_1处质点随时间t的振动规律 —振动方程

b. 当 $t=t_1=$常数

$$y=A\cos[\omega(t_1-\frac{x}{u})+\varphi]$$
$$=A\cos[(\omega t_1+\varphi)-\frac{x}{u}]$$
$$=f(x)$$



给出t_1时刻传播方向上所有质点的振动状态 —介质形成的波动状态

c. $x\neq$常数，$t\neq$常数 $y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

描写不同时刻，不同位置质点的振动状态，每一时刻都有一波形曲线。

d. $x = x_1$，$t = t_1$，都是常数

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

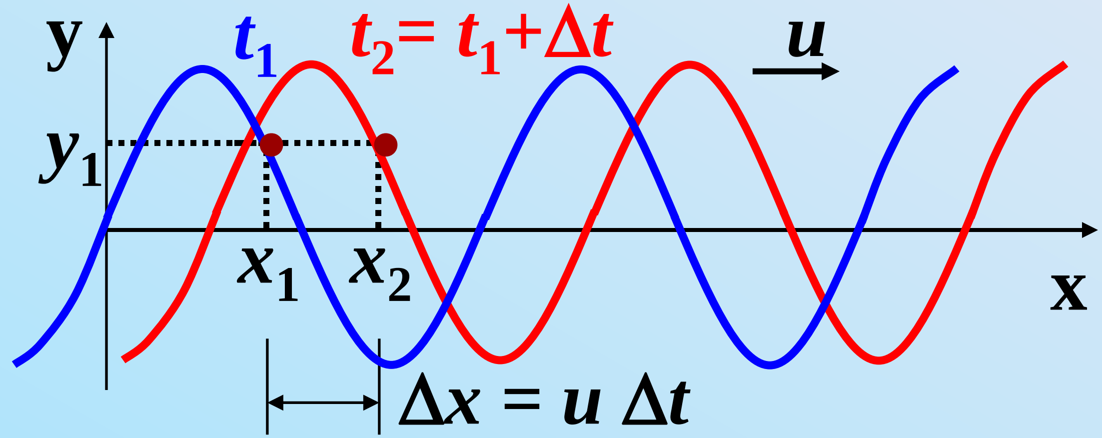
$$y=A\cos[\omega(t_1-\frac{x_1}{u})+\varphi)] = y_1 = \text{常数}$$

表示 t_1时刻，
x_1处质点的位移。

当 $t = t_1+\Delta t = t_2$时，

质点 $x_2 = x_1+\Delta x = x_1+u\Delta t$

其位移为：



$$y_2=A\cos[\omega(t_2-\frac{x_2}{u})+\varphi)] = A\cos\{\omega[(t_1+\Delta t)-\frac{x_1+\Delta x}{u}]+\varphi)\}$$

$$=A\cos[\omega t_1+\omega\Delta t-\frac{\omega x_1}{u}-\frac{\omega\Delta x}{u}+\varphi]$$

$$=A\cos[\omega(t_1-\frac{x_1}{u})+\varphi)] = y_1$$

即：t_2时刻，x_2质点振动的位移恰是 t_1时刻x_1质点的位移。

结论 经Δt 时间，整个波形向前移动了一段路程$\Delta x=u\Delta t$。

总之：各点位移变化，才使波形变化！

波形传播的速度 = u = 波速 = 相速

(4)波函数的几种等价表式:

向x轴正向传播的波

(A) $y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

(B) $y(x,t)=A\cos[\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi]$

(C) $y(x,t)=A\cos[\omega t-kx+\varphi]$

(D) $y(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$

(E) $y(x,t)=A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ut)+\varphi]$

(F) $y(x,t)=A\cos[k(x-ut)+\varphi]$

(G) $y(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T})+\varphi]$

$\omega=\frac{2\pi}{T}$

$u=\frac{\lambda}{T}$

$k=\frac{2\pi}{\lambda}$

也可写成复数形式 $y=Ae^{i(\omega t-kx+\varphi)}$（取实部）

以上讨论也适用于纵波。

可将纵波的密集区看成波峰，疏散区看成波谷。 此说对否?