测量误差与数据处理

本章主要内容

- 测量误差概述
- 测量误差的处理
- 误差的合成与分配
- 测量不确定度的评定

1 测量误差概述

主要内容：

- 误差的基本概念
  - 定义及表示
    - 绝对误差
    - 相对误差
    - 引用误差 → 仪表准确度
  - 分类
    - 随机误差
    - 系统误差
    - 粗大误差
  - 误差来源

误差的处理

绝对误差（简称误差）

误差 = 测得值-真值 ⟹ $\Delta x = x - A_0$

理论真值：三角形的三个内角和为180°

约定真值：1）由国家基准或当地最高计量标准复现而赋予该特定量的值；
（2）在没有系统误差的情况下，足够多次的测量值之平均值；
（3）采用权威组织推荐的该量的值 ⟹ 由国际数据委员会(CODATA)推荐的真空光速、阿伏加德罗常量等特定量的最新值。

绝对误差、相对误差和引用误差

通常用约定真值或理论真值(A)代替

(1) 绝对误差

绝对误差 = 测得值-真值

$$\Delta x = x - A$$

(2) 相对误差

实际相对误差：$\gamma_A = \dfrac{\Delta x}{A} \times 100\%$

示值相对误差：$\gamma_x = \dfrac{\Delta x}{x} \times 100\%$

绝对误差、相对误差和引用误差

(3) 引用误差

引用误差： $$\gamma = \frac{\Delta x}{L} \times 100\%$$

最大引用误差： $$\gamma_{\max} = \frac{\Delta x_{\max}}{L} \times 100\%$$

$\Delta x_{\max}$：仪表的最大绝对误差

L：仪表的量程

仪表准（精）确度等级：（**Leval of accuracy**） $$G\% \geq \left|\gamma_{\max}\right| = \left|\frac{\Delta x_{\max}}{L}\right| \times 100\%$$

仪表的准确度等级G

- G=0.005, 0.01, 0.02, 0.05； 0.1, 0.2, （0.4） , 0.5；
  - I级标准表 II级标准表
    - 1.0, 1.5, 2.5， （4.0） ； 等
      - 工业用表

•仪表的最大允许绝对误差：

$$\left|\Delta_{max}\right| = \underbrace{L}_{\text{量程}} \times G\%$$

■ 例：某台温度检测仪表的测温范围为100～600℃，校验该表时得到的最大绝对误差为3℃，试确定该仪表的准确度等级。

解：该测温仪表的实际最大引用误差为：

$$\gamma_{\max}=\frac{\Delta_{\max}}{L}\times 100\%=\frac{3}{600-100}\times 100\%=0.6\%$$

- 在国家规定的准确度等级中**0.6**介于**0.5**和**1.0**之间
- **0.5**级表和**1.0**级表的允许误差$\gamma_{表允}$分别为±**0.5%**和±**1.0%**
- 这台测温仪表的准确度等级只能定为**1.0**级。

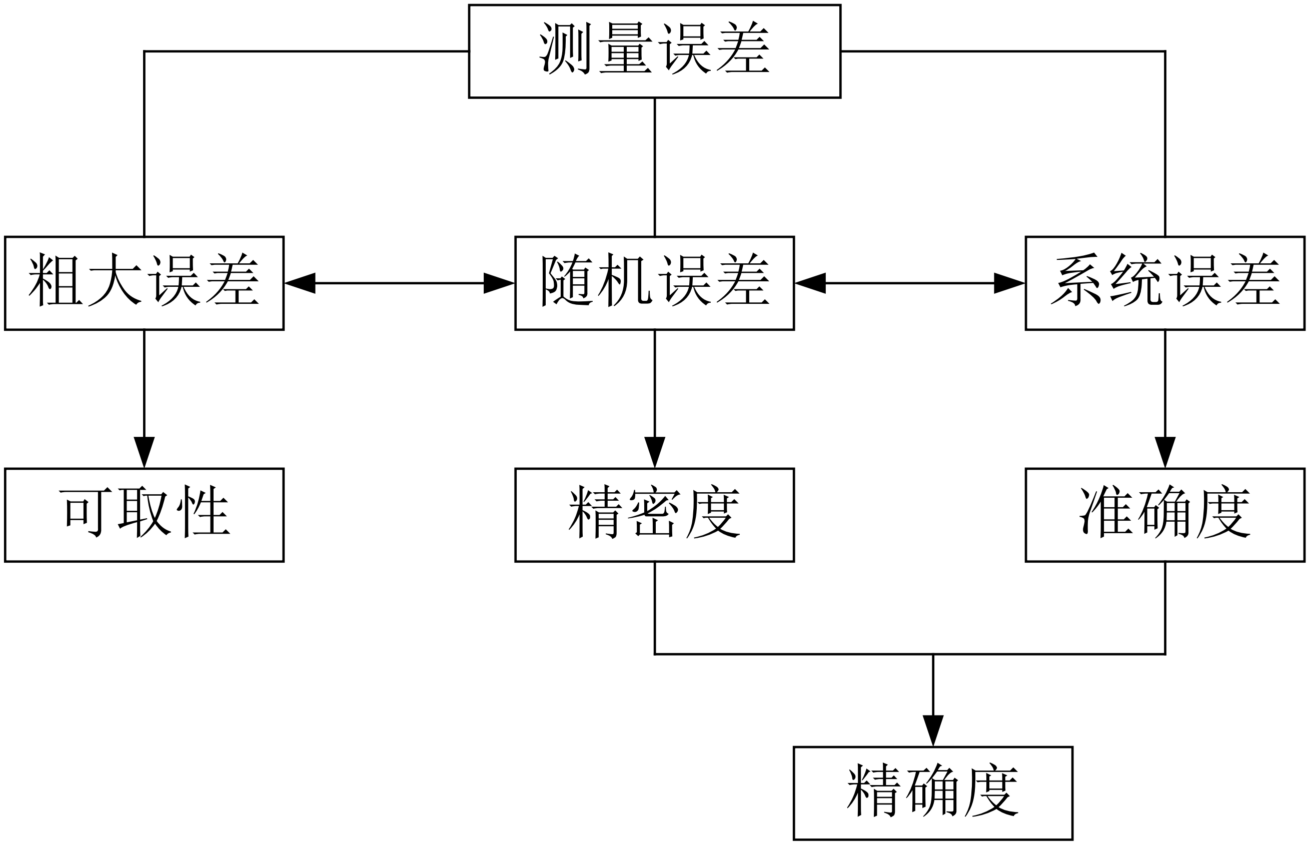
例：现需选择一台测温范围为0～500℃的测温仪表。根据工艺要求，温度指示值的误差不允许超过±4℃，试问：应选哪一级精确度等级的仪表？

解：工艺允许误差为

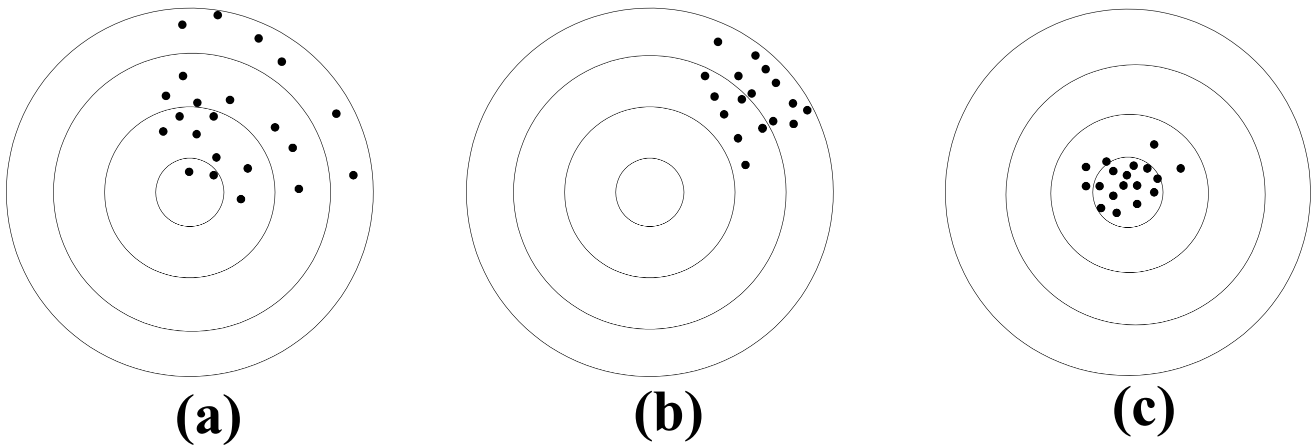
$$\gamma_A = \frac{\Delta_m}{L} \times 100\% = \frac{4}{500-0} \times 100\% = 0.8\%$$

- **0.8介于0.5～1.0之间**
- **0.5级表和1.0级表的允许误差$\gamma_{表允}$分别为±0.5%和±1.0%**
- 选择**0.5**级的仪表才能满足工艺上的要求。

误差分类与精度评定



精度的基本概念 (cont’d)

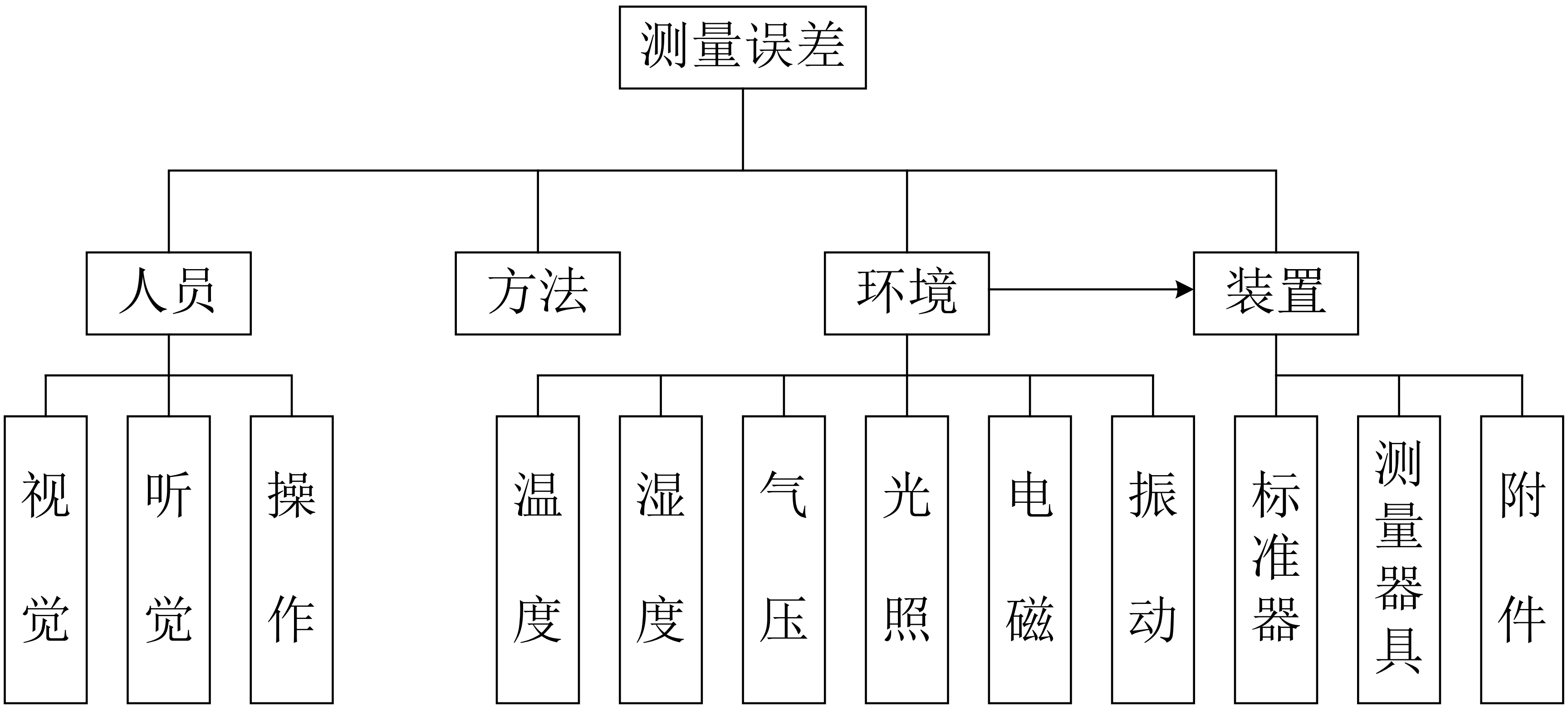


(a) 系统误差小而随机误差大，即准确度高而精密度低；

(b) 系统误差大而随机误差小，即准确度低而精密度高；

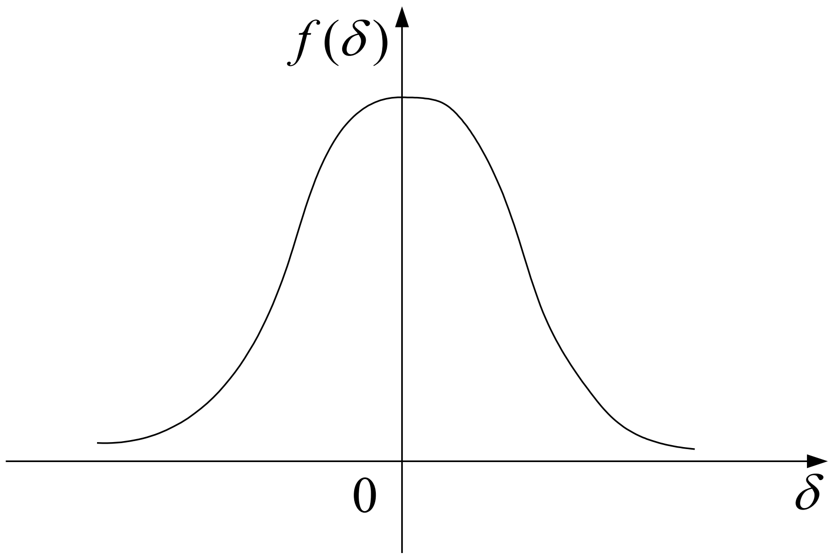
(c) 系统误差与随机误差都小，即精确度高。

误差的来源



随机误差的处理——等精度测量列

- 多数随机误差都服从正态分布



$$f(\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}$$

对称性：绝对值相等的正误差与负误差出现的次数相等；

单峰性：绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的次数多；

有界性：一定测量条件下，随机误差的绝对值不会超过一定界限；

抵偿性：随着测量次数的增加，随机误差的算术平均值趋向于零。

算术平均值和标准差

算术平均值 $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

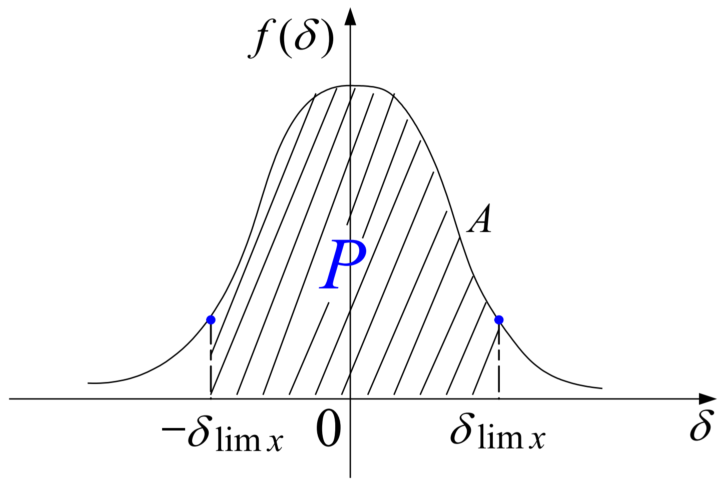
标准差 $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum \gamma_i^2}{n-1}} \Longleftarrow \gamma_i = x_i - \bar{x}$

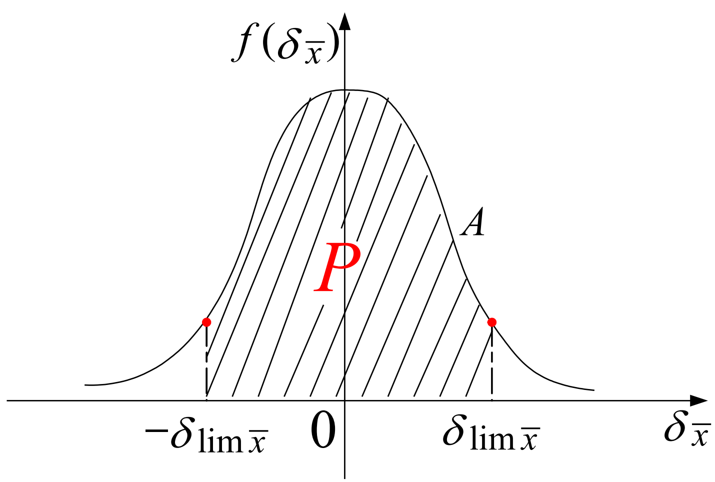
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- 增加测量次数难以保证测量条件的恒定，很难显著提高测量结果的准确性。
- 当σ一定时，通常取n<10较为适宜。

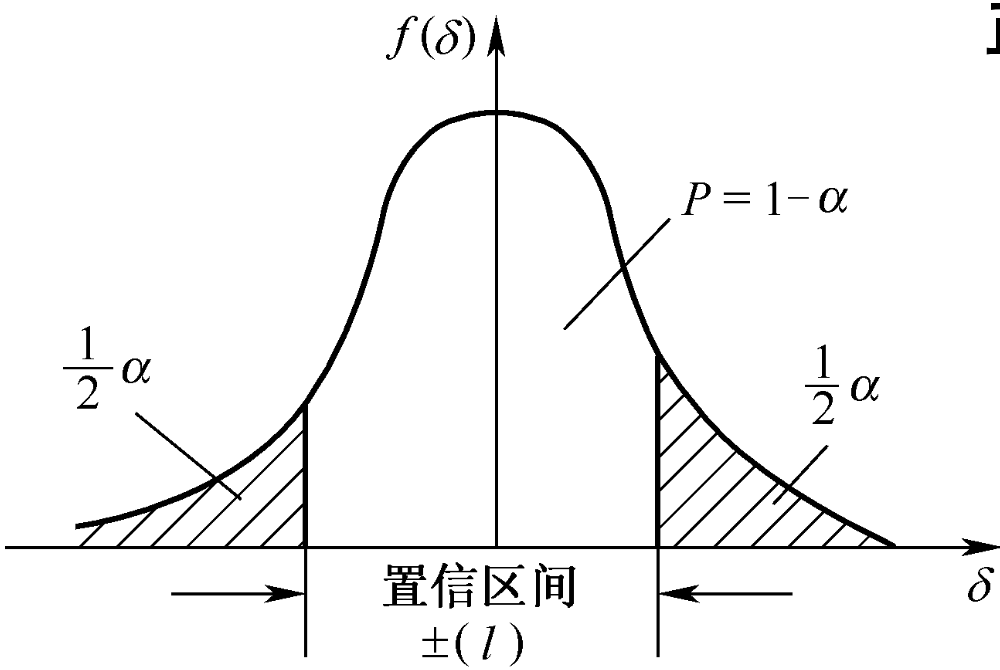
测量的极限误差

- 测量的极限误差是极端误差；
- 测量结果(单次测量或测量列的算术平均值)的误差不超过极限误差的概率为P，并使差值(1-P)可予忽略。





极限误差



正态分布： $\delta_{\lim} x = \pm t\sigma$

t分布： $\delta_{\lim} \bar{x} = \pm t_a \sigma_{\bar{x}}$

置信系数：由给定的置信概率和自由度来确定

算术平均值的标准差

P:置信概率(confidence probability)

t:置信系数(confidence factor)

随机误差的处理——不等精度测量列

- 各个测量结果的可靠程度不一样，可用一数值来表示；
- 测量结果的“权”：当该测量结果与另一测量结果比较时，对其所给予的信赖程度。

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i}$$

各组测量结果的均值

各组测量结果的权

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i v_{\bar{x}_i}^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{m} p_i}}$$

各组测量结果的残余误差

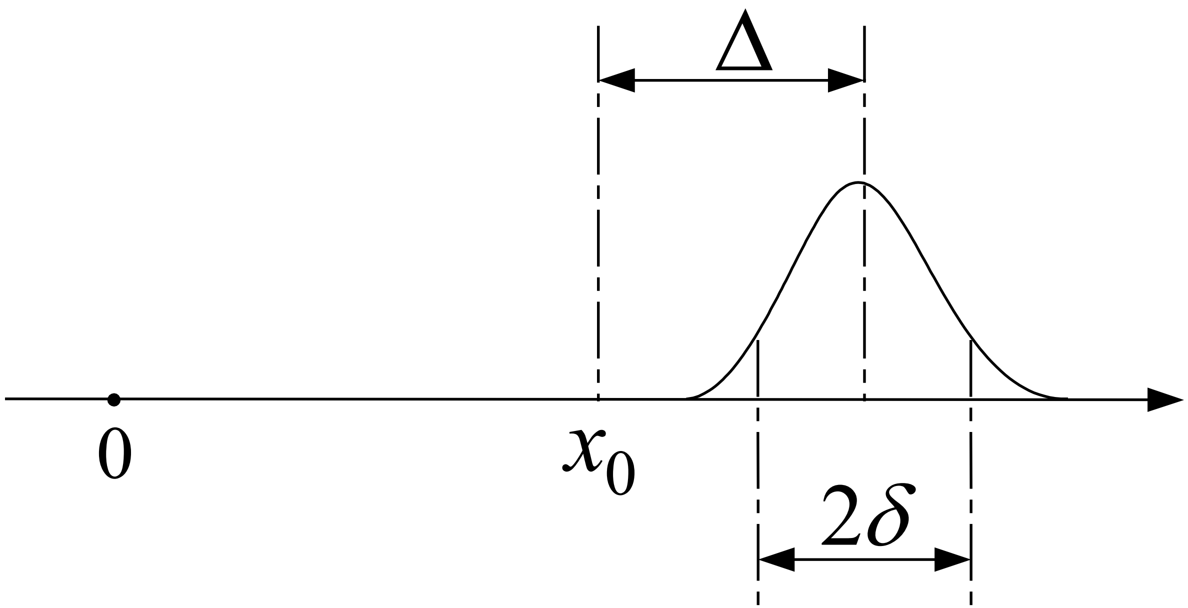
$$v_{\bar{x}_i} = \bar{x}_i - \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i v_{\bar{x}_i}{}^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{m} p_i}}$$

例如：工作基准米尺连续3天与国家基准器比较，得到基准米尺的平均长度为999.9425mm（三次测量）、999.9416mm（二次测量）、999.9419mm（五次测量）。则权重分别为3、2、5

系统误差的处理

系统误差产生的原因： (1) 测量装置方面的因素
(2) 环境方面的因素
(3) 测量方法的因素
(4) 测量人员的因素



系统误差的特征

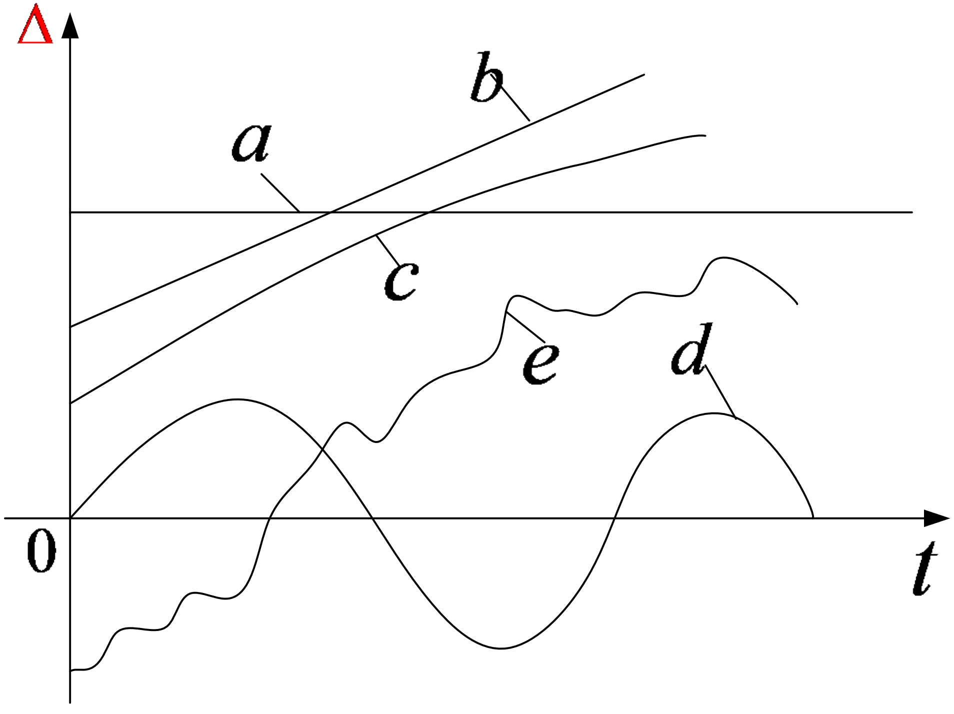
(1) 定值系统误差

(2) 变值系统误差

①累积性系统误差

②周期性系统误差

③复杂规律变化系统误差



系统误差的判别方法

实验对比法:用于发现测量列组内不变的系统误差;

残余误差观察法:用于发现测量列组内有规律变化的系统误差;

不同公式计算标准差比较法：用于发现测量列组内的系统误差;

计算数据比较法:用于发现各组测量之间的系统误差;

t检验法:用于发现各组测量之间的系统误差。

（一）实验对比法——系统误差的判别方法

- 改变产生系统误差的条件，进行不同条件的测量，以发现系统误差；

➢ 量块按公称尺寸使用时，在测量结果中就存在由于量块的尺寸偏差而产生的不变系统误差，用另一高一级精度的量块进行对比发现；

✓ 适于发现不变的系统误差；

✓ 用于发现测量列组内的系统误差。

（二）残余误差观察法——系统误差的判别

方法

- 根据测量先后顺序，将测量列的残余误差列表或作图进行观察，可判断有无系统误差；
- 主要适用于发现有规律变化的系统误差；
- 用于发现测量列组内的系统误差。

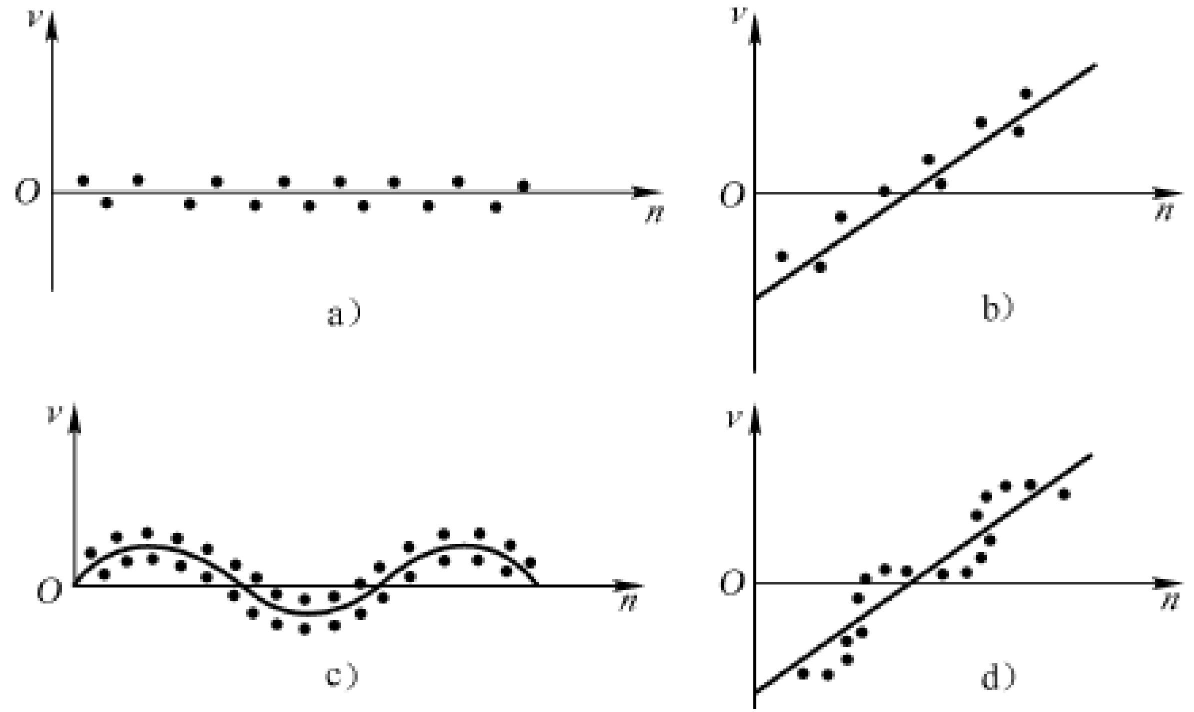


图 2-5　残余误差散点图

（三）不同公式标准差比较法——系统误差的判别方法

- 等精度测量 (测量列组内的系统误差)
- 用不同公式计算标准差，通过比较以发现系统误差

贝塞尔公式：$\sigma_1 = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \upsilon_i^2}{n-1}}$ ；别捷尔斯公式：$\sigma_2 = 1.253 \dfrac{\sum_{i=1}^{n} |\upsilon_i|}{\sqrt{n(n-1)}}$

令 $\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 + u$，若 $|u| \geq \dfrac{2}{\sqrt{n-1}}$ $\longrightarrow$ 怀疑测量列中存在系统误差

（四）计算数据比较法——系统误差的判别

- 用于发现各组测量之间的系统误差

➢ 对同一量进行多组测量；

➢ 通过多组计算数据比较；

➢ 若不存在系统误差，其比较结果应满足随机误差条件，否则认为存在系统误差。

- 对同一量独立测得 **m** 组结果：$\bar{x}_1$，σ_1；…；$\bar{x}_m$，σ_m
- 任两组结果之差 $\Delta = \bar{x}_i - \bar{x}_j$；标准差 $\sigma = \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}$
- 任两组结果 $\bar{x}_i$ 与 $\bar{x}_j$ 间不存在系统误差的标志：

$$\left|\bar{x}_i - \bar{x}_j\right| < 2\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}$$

（四）t检验法——系统误差的判别方法

- 当两组测得值服从正态分布时，判断两组间是否存在系统误差

- 独立测得两组数据： x_i， $i=1,2,\cdots,n_x$

  y_j， $j=1,2,\cdots,n_y$

- 变量 $t=(\bar{x}-\bar{y})\sqrt{\dfrac{n_x n_y(n_x+n_y-2)}{(n_x+n_y)(n_x\sigma_x^2+n_y\sigma_y^2)}}$

  ⟹ 服从自由度为 n_x+n_y-2 的 t 分布

t检验法——系统误差的判别方法

- 变量$t=(\overline{x}-\overline{y})\sqrt{\dfrac{n_x n_y\left(n_x+n_y-2\right)}{\left(n_x+n_y\right)\left(n_x\sigma_x^2+n_y\sigma_y^2\right)}}$

  服从自由度为n_x+n_y-2的 t 分布

- $\overline{x}=\dfrac{1}{n_x}\sum x_i$　　　$\overline{y}=\dfrac{1}{n_y}\sum y_j$

  $\sigma_x^2=\dfrac{1}{n_x}\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2$　　　$\sigma_y^2=\dfrac{1}{n_y}\sum\left(y_j-\overline{y}\right)^2$

- 取显著度 α 和自由度n_x+n_y-2，由 t 分布表查$P\left(|t|>t_\alpha\right)=\alpha$中的$t_\alpha$；
- 若实测数列中算出的$|t|<t_\alpha$，则无根据怀疑两组间有系统误差。

系统误差的减小和消除

(1) 从误差产生根源上消除系统误差
(2) 加修正值法
(3) 交换法
(4) 抵消法
(5) 对称法
(6) 半周期法

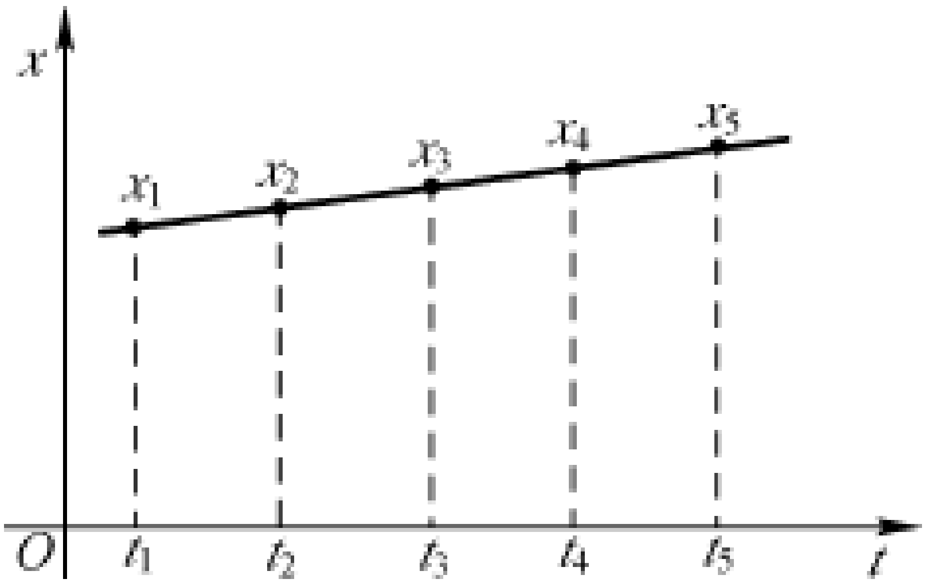
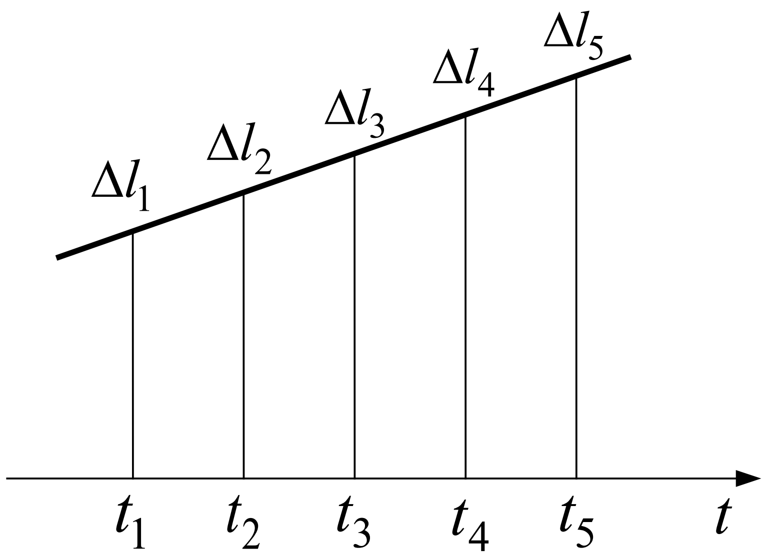


图 2-6　对称法

对称法——消除线性系统误差

- 可有效消除随时间变化而产生的线性系统误差；
- 线性系统误差 ⟹ 不变系统误差



$$\frac{\Delta l_1+\Delta l_5}{2}=\frac{\Delta l_2+\Delta l_4}{2}=\Delta l_3$$

- 将测量对称安排，取各对称点两次读数的算术平均值作为测得值，即可消除线性系统误差；
- 很多随时间变化的误差，在短时间内均可认为是线性规律；按复杂规律变化的误差，也可近似作为线性误差处理；
- 尽可能采用对称法消除系统误差。

粗大误差的处理

粗大误差的产生原因

– 测量人员（主观）：读数或记录错误；
– 客观外界条件(意外改变)：机械冲击、外界振动；

防止和消除粗大误差的方法

•认真测量；

•保证测量条件稳定，避免在外界条件发生激烈变化时测量；

•采用不等精度测量和互相之间进行校核的方法；

➢不同的测量者；不同的仪器；不同的测量方法

粗大误差的判别准则

- 3σ 准则：适用测量次数较多的测量列；或测量次数较少但要求不高的测量列；

$$|v_d| = |x_d - \bar{x}| > 3\sigma$$

- 罗曼诺夫斯基准则（***t*** 检验准则）、格罗布斯准则、狄克松准则 ⟹ 适用测量次数较少但要求较高的测量列；

➢ 格罗布斯准则可靠性最高；狄克松准则判别最迅速。

➢ 测量次数很少时用罗曼诺夫斯基准则。

误差的合成与分配

间接测量：通过直接测量与被测量之间有一定函数关系的其他量，按照已知的函数关系计算出被测量。

误差的合成（函数误差）：间接测量的量是直接测量所得各个测量值的函数。

- 随机误差的合成
- 系统误差的合成
- 总误差的合成（随机误差和系统误差的合成）

随机误差的合成

间接测量： $y = f\left(x_1,\ \ x_2,\cdots,\ \ x_n\right)$

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2 + 2\sum_{1\le i<j}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\rho_{ij}\sigma_{xi}\sigma_{xj}\right)$$

各测量值的随机误差相互独立

$$\sigma_y = \sqrt{a_1^2\sigma_{x1}^2 + a_2^2\sigma_{x2}^2 + \cdots a_n^2\sigma_{xn}^2} \Leftarrow \partial f / \partial x_i = a_i$$

极限误差的合成：

$$\delta_{\lim y} = \pm\sqrt{a_1^2\delta_{\lim x_1}^2 + a_2^2\delta_{\lim x_2}^2 + \cdots + a_n^2\delta_{\lim x_n}^2}$$

系统误差的合成

间接测量： $y = f(x_1, \ x_2, \cdots, \ x_n)$

已定系统误差： $\Delta = \sum_{i=1}^{r} a_i \Delta_i \qquad \partial f / \partial x_i = a_i$

未定系统误差： $u = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} (a_i u_i)^2 + 2 \sum_{1 \le i < j}^{s} \rho_{ij} a_i a_j u_i u_j}$

$$u = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} (a_i u_i)^2} \qquad \rho_{ij} = 0$$

总误差的合成：

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} a_i u_i^2 + \sum_{i=1}^{q} a_i \sigma_i^2}$$

误差的分配

给定测量结果总误差的允差，要求确定各个单项误差。

若各误差皆为随机误差，且互不相关

$$\sigma_y=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_2^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_n^2}$$

$$=\sqrt{a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2+\cdots+a_n^2\sigma_n^2}=\sqrt{D_1^2+D_2^2+\cdots D_n^2}$$

函数的部分误差

$$\sigma_y\le\sigma_{允}$$

HOW?

误差分配的步骤

(1) 按等作用原则分配误差

$$\sigma_y = \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2} = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \cdots D_n^2}$$

$$D_1 = D_2 = \cdots = D_n = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_i = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} \frac{1}{\partial f / \partial x_i} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} \frac{1}{a_i}$$

(2) 按可能性调整误差

(3) 验算调整后的总误差

最佳测量方案的确定

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2}$$

(1) 选择最佳函数误差公式

- 若在间接测量中可由不同函数公式来表示被测量，则应选取包含直接测量值最少的函数公式；
- 若不同的函数公式所包含的直接测量值数目相同，则应选取误差较小的直接测量值的函数公式；

(2) 使误差传递系数等于零或为最小

3 测量不确定度（uncertainty of measurement）

主要内容：

- 测量不确定度
  - 基本概念
  - 标准不确定度的评定
    - A类评定
    - B类评定
    - 自由度及其确定
  - 测量不确定度的合成
    - 合成标准不确定度
    - 扩展（展伸）不确定度
  - 测量结果的表示

测量不确定度的基本概念

- **测量不确定度：测量结果变化的不肯定程度，是表征被测量的真值所处量值范围的评定，是测量结果含有的一个参数，用以表示被测量值的分散性。**

- **一个完整的测量结果应包含被测量值的估计与分散性参数两部分。**

$$\underbrace{Y = y}_{\text{估计值}} \pm \underbrace{U}_{\text{测量不确定度}}$$

● 测量结果所表示的并非一确定值，而是分散的无限个可能值所处于的一个区间。

测量不确定度与测量误差的比较

测量不确定度与测量误差是测量结果质量评价的两种表示方法

概率统计　　　　**误差 = 测得值-真值**

误差的分类

- 随机误差：精密度，precision
- 系统误差：正确度 correctness
- 粗大误差

误差与测量不确定度的比较

测量不确定度和误差：误差理论中的重要概念，评价测量结果质量高低的重要指标，作为测量结果的精度评定参数。

✓误差是测量结果与真值之差，而测量不确定度是以被测量的估计值为中心；

✓误差一般不能准确知道，难以定量；测量不确定度反映人们对测量认识不足的程度，可定量评定；

✓误差是不确定度的基础，研究不确定度首先需研究误差，只有对误差的性质、分布规律、相互联系及对测量结果的误差传递关系等有了充分的认识和了解，才能更好地估计各不确定度分量，正确得到测量结果的不确定度。

标准不确定度的评定

A类评定

用统计分析法评定，其标准不确定度u等同于由系列观测值获得的标准差 σ，即$u=\sigma$。

B类评定

基于经验或其他信息所认定的概率分布

2.B 类标准不确定度的评定

①当测量估计值 X 受到多个独立因数影响，且影响大小相近，则假设为正态分布，有所取置信概率 P 的分布区间半宽 a 与包含因子 K 来估计标准不确定度，即

$$\mu_x = \frac{a}{K_p}$$

②当估计值 X 取自有关资料，所给出的测量不确定度 U_x 为标准差的 K 倍时，则其标准不确定度为

$$\mu_x = \frac{U_x}{K}$$

③已知估计值 X 落在区间$(x-a，x+a)$内得概率为 1，且在区间各处出现得机会相等，则 X 服从均匀分布，其标准不确定度为

$$\mu_x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

④当估计值 X 受到两个独立且皆是具有均匀分布的因素影响，则 X 服从在区间$(x-a，x+a)$内的三角分布，其标准不确定度为

$$\mu_x = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

⑤当估计值 X 服从在区间$(x-a，x+a)$内的反正弦分布，则其标准不确定度为

$$\mu_x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

自由度的概念

- **自由度**：在 **n** 个变量 υ_i 的平方和 $\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i^2$ 中，如果 **n** 个 υ_i 之间存在着 **k** 个独立的线性约束条件，即 **n** 个变量中独立变量的个数仅为 **n-k**，则称平方和 $\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i^2$ 的自由度为 **n-k**。
- 贝塞尔公式计算单次测量标准差 **σ** 的自由度为 **n-1**（唯一的线性约束条件 $\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right) = 0$）。

标准不确定度的自由度

- 系列测量标准差的可信赖程度与自由度有密切关系；
  ➢自由度愈大，标准差愈可信赖；
- 不确定度用标准差来表征，不确定度评定的质量也可用自由度来说明；
- 每个不确定度都对应着自由度
- A类评定：自由度**ν**即为标准差**σ**的自由度；

B 类评定：自由度 $\nu = \dfrac{1}{2\left(\dfrac{\sigma_u}{u}\right)^2}$

σ_u——评定 **u** 的标准差；σ_u/u——评定 **u** 的相对标准差。

3 测量不确定度

3.3 测量不确定度的合成

（1）合成标准不确定度(combined standard uncertainty)

$$\mu_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)\mu_{\overline{X}_i}{}^{2}}$$

直接测量值的
标准不确定度

上式间接测量中，被测量的估计值 $y=f(X_1, X_2, \cdots, X_N)$

测量不确定度的合成

合成标准不确定度 $u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u_{xi}^2 + 2\sum_{1\le i<j}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\rho_{ij}u_{xi}u_{xj}}$

展伸不确定度 $U = k\mu_c$

包含因子

通常取 k=2~3

查t分布表： $k = t_p(\nu)$

$$\nu = \frac{\mu_c^4}{\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu_i^4}{\nu_i}}$$

测量结果的表示

（1）用合成标准不确定度表示

$$y = 100.02147g，\ u_c = 0.35mg$$

$$Y = 100.02147(35)\,\mathrm{g}$$

$$Y = 100.02147(0.00035)\,\mathrm{g}$$

$$Y = (100.02147 \pm 0.00035)g$$

（2）用展伸不确定度表示

$$Y = y \pm U = (100.02147 \pm 0.00079)\,\mathrm{g}$$

（3）用相对不确定度表示

$$y = 100.02147g，\ u_c = 0.00035\%$$

不确定度数值的修约

- 合成不确定度或展伸不确定度，其有效数字一般不超过两位，不确定度的数值与被测量的估计值的末尾对齐。

位数较多时需要修约，依据“三分之一准则”

例：已知被测量的估计值为20.0005mm，若有两种情况：

① U=0.00124mm $\xrightarrow{\text{末尾对齐}}$ 12.4 $\xrightarrow{\text{三分之一准则}}$ 13 $\xrightarrow{\text{修约后}}$ U=0.0013mm

② U=0.00123mm $\xrightarrow{\text{末尾对齐}}$ 12.3 $\xrightarrow{\text{三分之一准则}}$ 12 $\xrightarrow{\text{修约后}}$ U=0.0012mm

作业：1.　设有压力传感器的校准数据列于下表，试求（1）端基拟合直线；（2）端基线性度；（3）滞环误差。

次数	$y_i(V)$ \ $x_i \times 10^5 (Pa)$	0	1	2	3	4	5
1	正行程	0.0020	0.2015	0.4005	0.6000	0.7995	1.0000
	反行程	0.0030	0.2020	0.4020	0.6010	0.8005	
2	正行程	0.0025	0.2020	0.4010	0.6000	0.7995	0.9995
	反行程	0.0035	0.2030	0.4020	0.6015	0.8005	
3	正行程	0.0035	0.2020	0.4010	0.6000	0.7995	0.9990
	反行程	0.0040	0.2030	0.4020	0.6010	0.8005	

END !