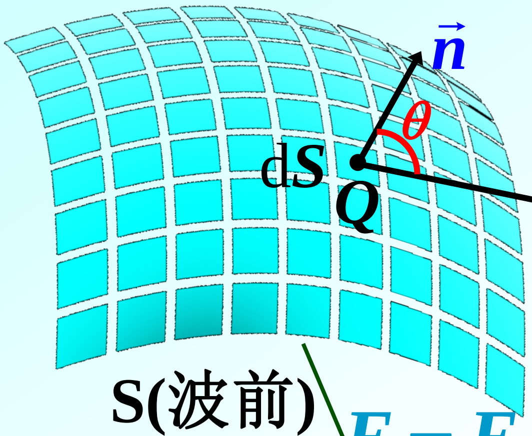
大学物理(下)

华 中 科 技 大 学
张智
zzhang@hust.edu.cn

第五篇
光学
(Optics)

●惠更斯——菲涅耳原理

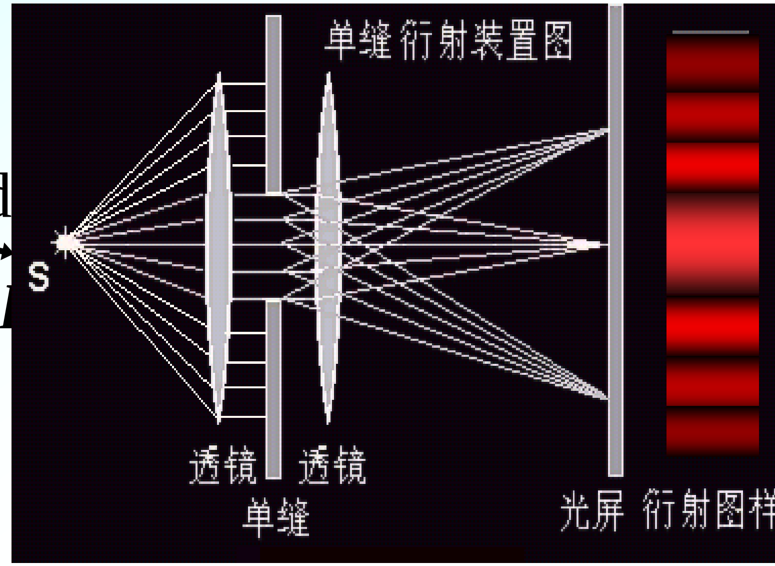
波阵面上各面积元所发出的球面子波在观察点p 的相干叠加决定了p 点的合振动及光强。



$E = E_0 cos\omega t$

设初位相为零

d



$cos(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})$

$=0, \quad f = f_{max}$

$\Rightarrow f(\theta)\downarrow$ I

$\geq \frac{\pi}{2}, f = 0$

点处的强度。

●单缝夫朗和费衍射

明暗纹位置

$\boxed{a\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, k = 1,2,3\cdots}$ (次级大) —明纹

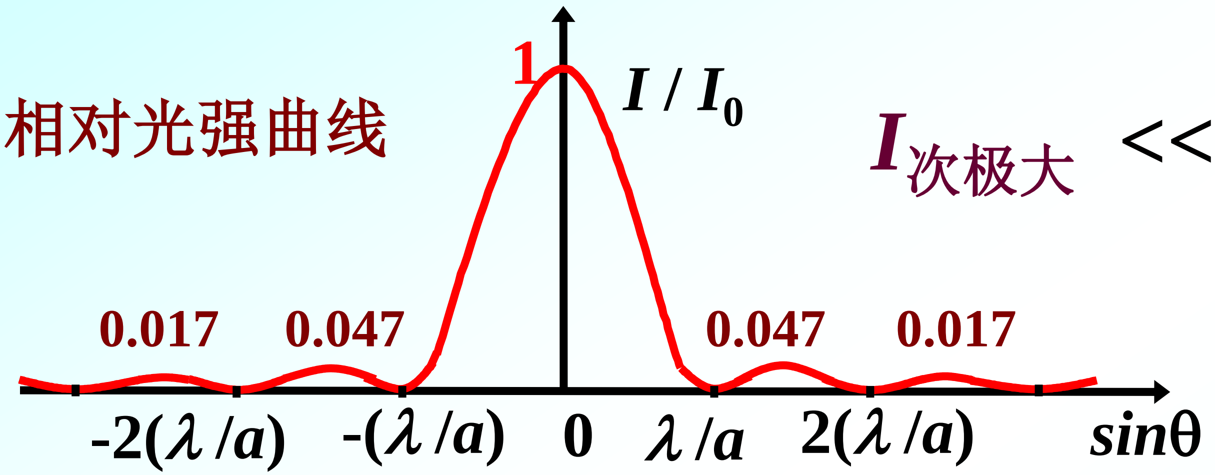
$\boxed{a\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 1,2,3\cdots}$ —暗纹

光强分布

$\boxed{I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$ $\boxed{\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}$

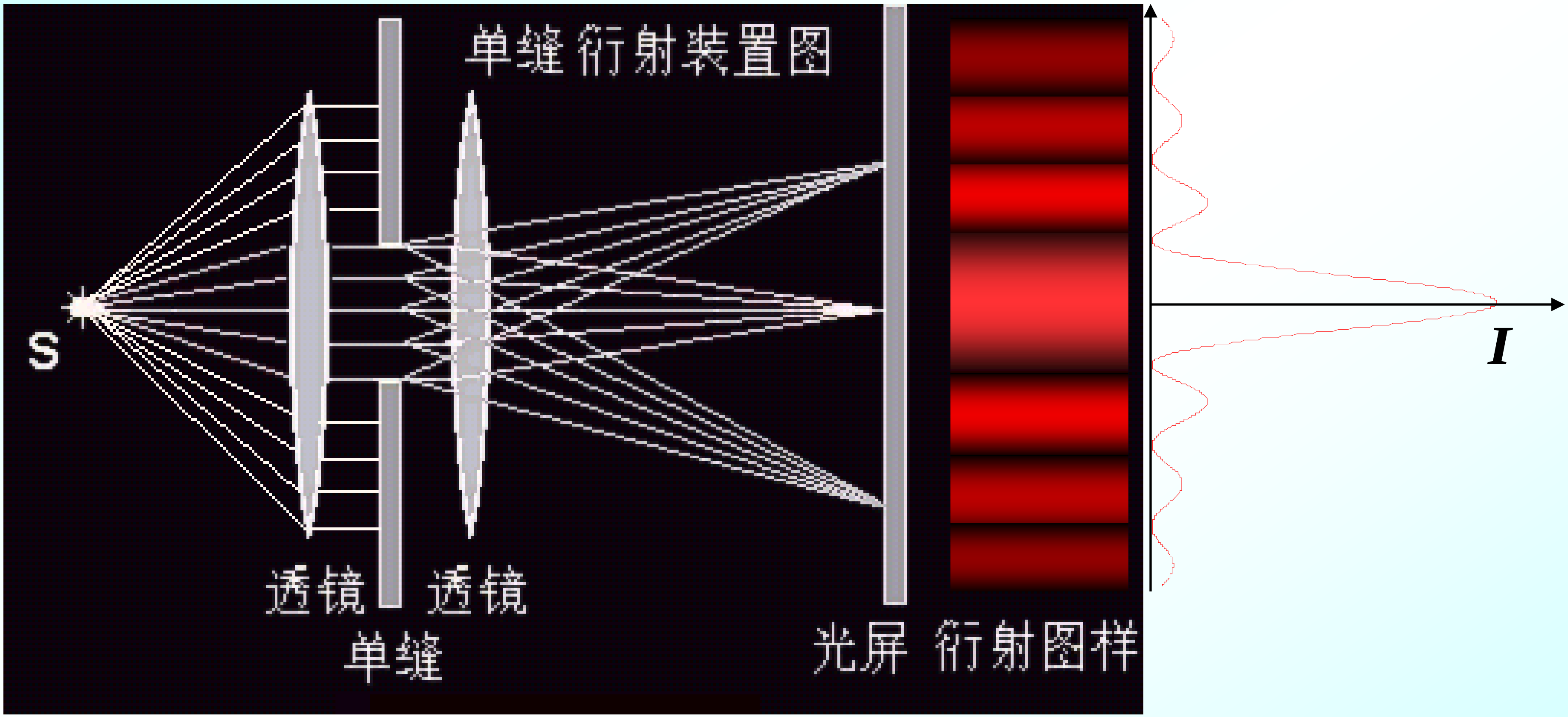
主极大：$a\sin\theta=0$

衍射次极大：$a\sin\theta=\pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$



$I_{次极大} << I_{主极大}$

三. 单缝夫朗和费衍射

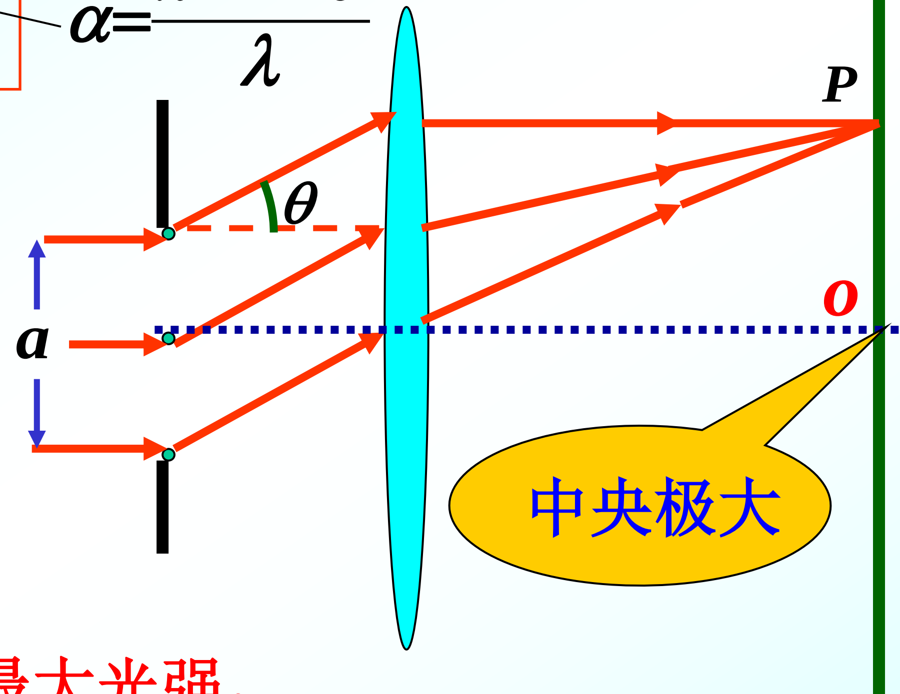


要研究的问题

- 明暗条纹位置分布
- 条纹强度分布

3.3 光强分布：

$$I_\theta=I_o\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \qquad \alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$



1）在屏上θ角相同处光强相同

即：相同光强的点分布在一条与缝平行的直线上

2）当 $\theta=0$, $\alpha=0$ 则：$\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$

$$I_{\theta=0}=I_o=I_{Max}$$

即：透镜L的主光轴与屏的交点处有最大光强，又称为主极大或零级衍射斑。

3）当 $\alpha\neq0$ $\sin\alpha=0$ 则：$\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}=\pm k\pi$ $k\neq0$

即：$\boxed{a\sin\theta=\pm k\lambda}$ $k=1,2,\cdots$ ——衍射极小条件

$I_\theta=0$ 此θ角处出现光强极小的暗条纹

$$I_\theta = I_o\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \qquad \alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$$

✓ 除了主极大外，屏上光强分布还有次极大存在。次极大的位置可以计算得到。

4）当 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = 0 \longrightarrow tg\alpha = \alpha$ 光强有极大值

解得： $\alpha = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \cdots$

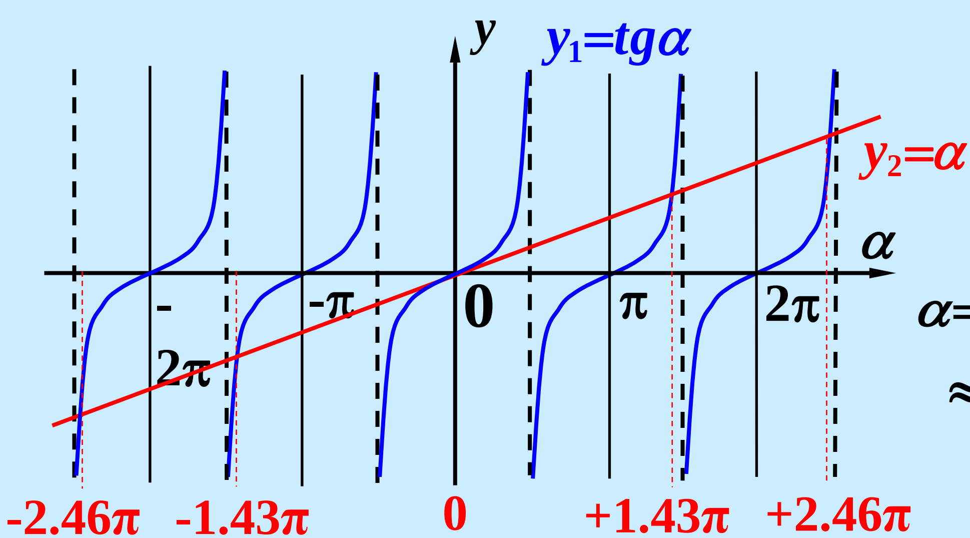
相应： $a\sin\theta = \pm 1.43\lambda, \pm 2.46\lambda, \pm 3.47\lambda, \cdots$

近似表示为

$k = 1, 2, \cdots$

$$a\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

衍射次极大
又称高级衍射斑



$$\alpha = 0, \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \cdots$$
$$\approx 0, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \cdots$$

超越方程 $tg\alpha = \alpha$ 图解法

主极大： $a\sin\theta=0$ 衍射次极大： $a\sin\theta=\pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$

$\boxed{I_\theta=I_0\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$

$\boxed{\alpha=\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}$

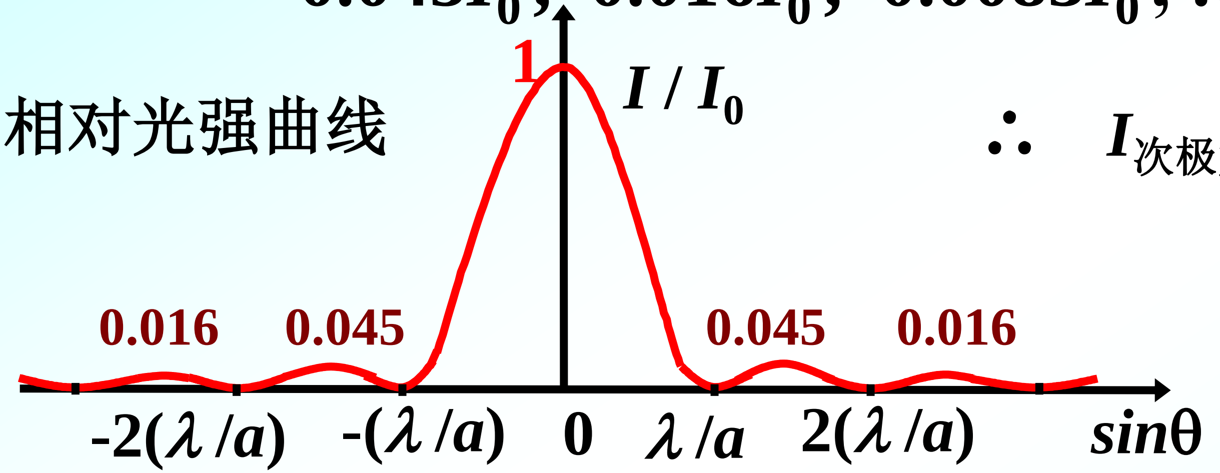
5)光强 ◻ 中央主极大的光强： $I_{Max}=I_0\propto(C''a)^2$

◻ 次极大的光强：计算可得各次极大的光强依次为：

$\alpha=\pm1.43\pi,\pm2.46\pi,\pm3.47\pi,\cdots$

$0.045I_0,\ 0.016I_0,\ 0.0083I_0,\ \ldots$

相对光强曲线



$\therefore\quad I_{次极大} \ll I_{主极大}$

$\boxed{a\sin\theta=\pm k\lambda}$

暗条纹位置

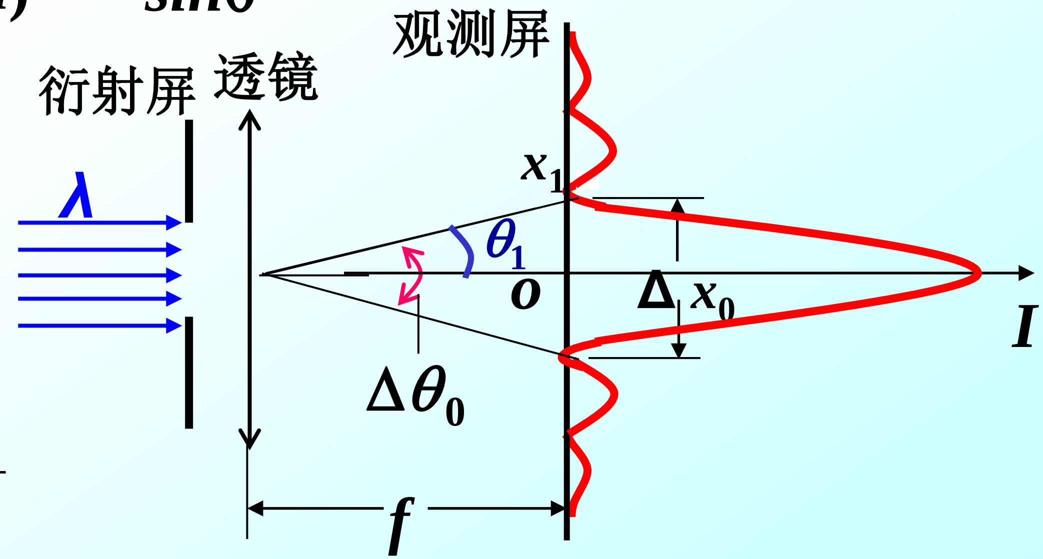
6) 条纹宽度

中央明纹： $a\gg\lambda$ 时， $\sin\theta_1\approx\theta_1$

角宽度 $\Delta\theta_0=2\theta_1\approx2\dfrac{\lambda}{a}$

线宽度 $\Delta x_0=2f\cdot tg\theta_1$

$=2f\theta_1=2f\dfrac{\lambda}{a}\propto\dfrac{\lambda}{a}$

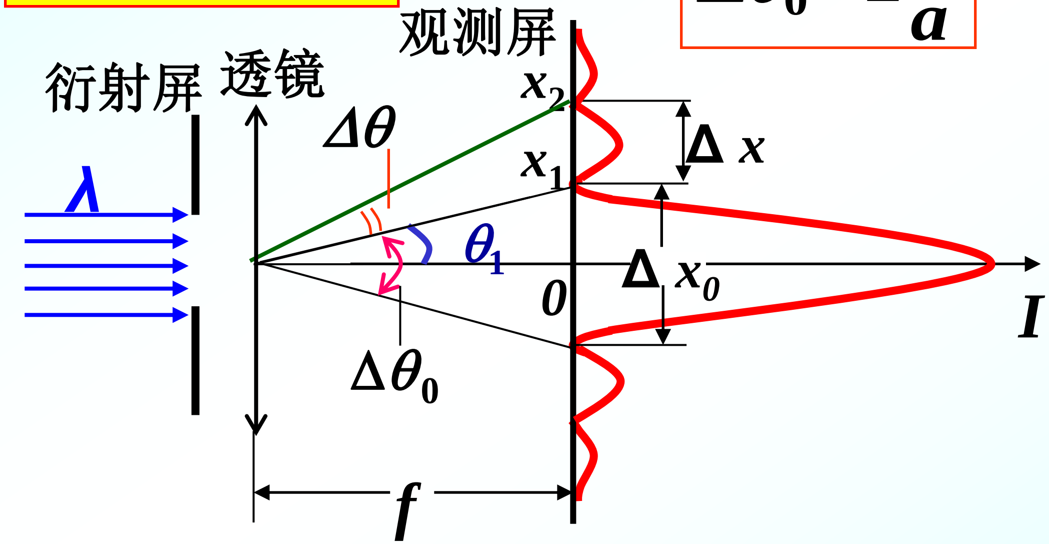


$a\sin\theta=\pm k\lambda$ $\quad \Delta\theta_0\approx 2\dfrac{\lambda}{a}$

次极大条纹的宽度：

$$\Delta\theta=\theta_{k+1}-\theta_k\approx\frac{\lambda}{a}=\frac{1}{2}\Delta\theta_0$$

$$\Delta x\approx\frac{f\lambda}{a}=\frac{1}{2}\Delta x_0$$



结论：次极大条纹的宽度是中央主极大宽度的一半。

讨论

* 波长对条纹宽度的影响

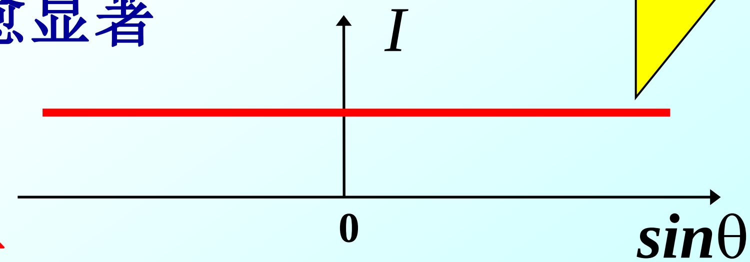
$\Delta x\propto\lambda$ 波长越长，条纹宽度越宽

** 缝宽变化对条纹的影响

$$\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x_0=f\frac{\lambda}{a}$$ 缝宽越小，条纹宽度越宽，衍射愈显著

当 $\dfrac{a}{\lambda}\to 0$ 时， 屏幕是一片明亮

中央极大占据了整个屏幕



当 $\dfrac{\lambda}{a}\to 0$ 时， $\Delta x\to 0$

只显出单一的明条纹

——单缝的几何光学像

∴几何光学是波动光学在$\lambda/a\to 0$时的极限情形

动画演示

3.4 半波带法(确定明暗条纹的位置)

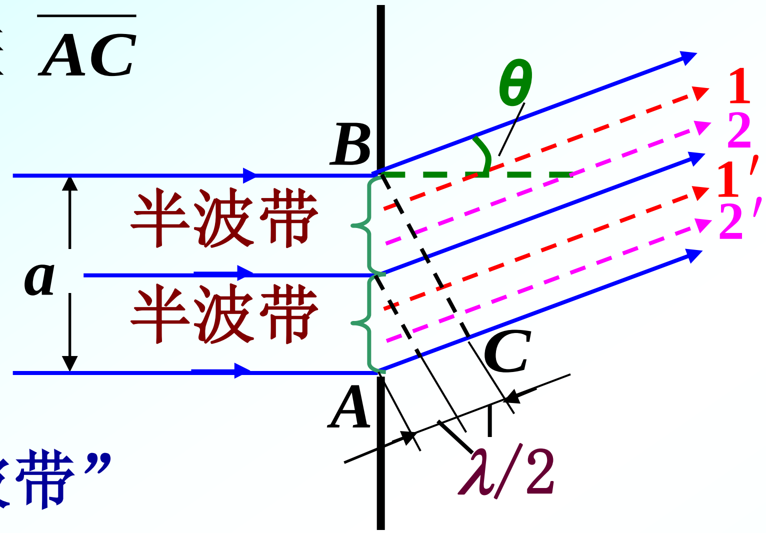
$a\sin\theta=\pm k\lambda$

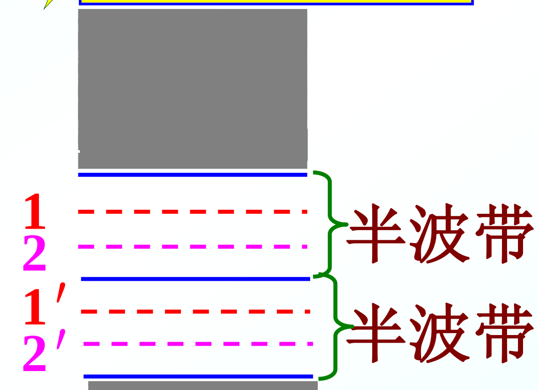
$A\rightarrow P$和$B\rightarrow P$的光程差 $\overline{AC}$

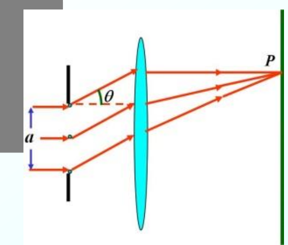
$\Delta r=a\sin\theta$

$\theta=0,\ \Delta r=0$

—— 中央明纹(中心)



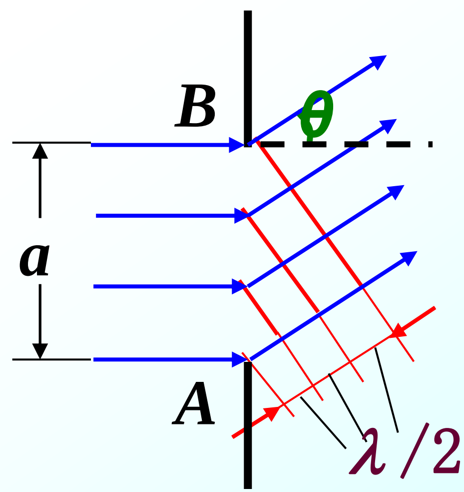




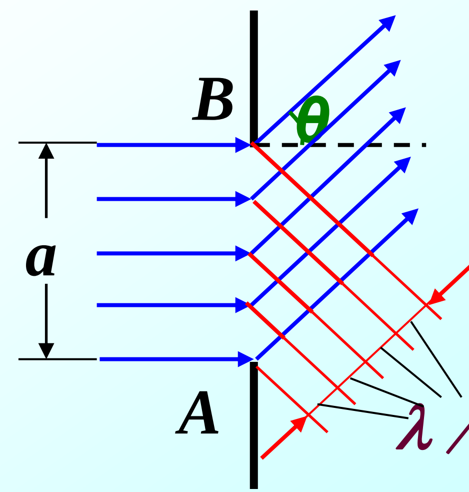
当 $a\sin\theta=\lambda$ 时，
可将缝分为两个“半波带”

两个“半波带”上发的光在P处干涉相消形成暗纹。

当 $a\sin\theta=\dfrac{3}{2}\lambda$ 时，
可将缝分成三个“半波带”
P处近似为明纹中心

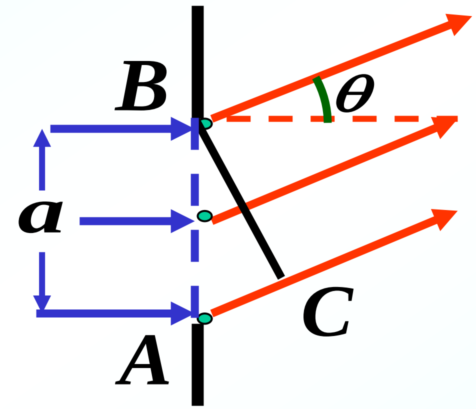


当 $a\sin\theta=2\lambda$ 时，
可将缝分成四个“半波带”，
形成暗纹。



一般情况：

*P*点产生干涉的情况可由*AC*间的半波长的倍数决定：



若：AC ＝ 偶数个半波长 $=2k\dfrac{\lambda}{2}$

$$AC = a\sin\theta$$

则： $a\sin\theta = \pm k\lambda$， $k=1,2,3\cdots$ ——暗纹

为什么k 从1而不是从0开始？

若$k=0$, 则

$\theta = \dfrac{\lambda}{2a} < \dfrac{\lambda}{a}$ (中央极大半角宽

无意义

若：AC ＝ 奇数个半波长 $=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$

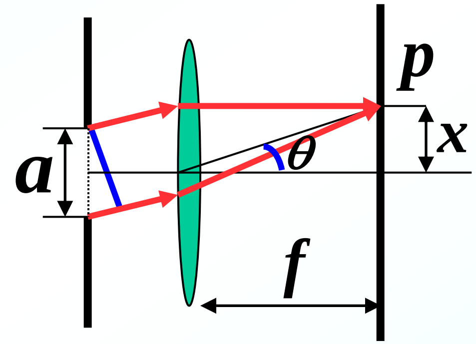
则： $a\sin\theta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$, $k=1,2,3\cdots$ ——(次级)明纹

$a\sin\theta = 0$ ——中央明纹

注：上述暗纹和中央明纹(中心)位置是准确的，其余明纹中心的位置较上稍有偏离。

若：$AC \neq$ 整数个半波长，则对应明暗纹之间的情况。

例：单缝衍射a=0.1mm, f=100mm, λ=500nm, p点(x=1.75mm)处是明纹.



求：（1）p点条纹级数k.

明纹 $a\sin\theta=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} \longrightarrow a\dfrac{x}{f}=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$

$\longrightarrow k=\dfrac{ax}{f\lambda}-\dfrac{1}{2}=3.5-0.5=3$ 第3级明纹

（2）对应于P点缝可分成多少个半波带？

$a\sin\theta=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}=(2\times3+1)\dfrac{\lambda}{2}=7\dfrac{\lambda}{2}$ 7个半波带

（3）p 点的相对光强？

$\alpha=\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$ $\quad I=I_0\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$

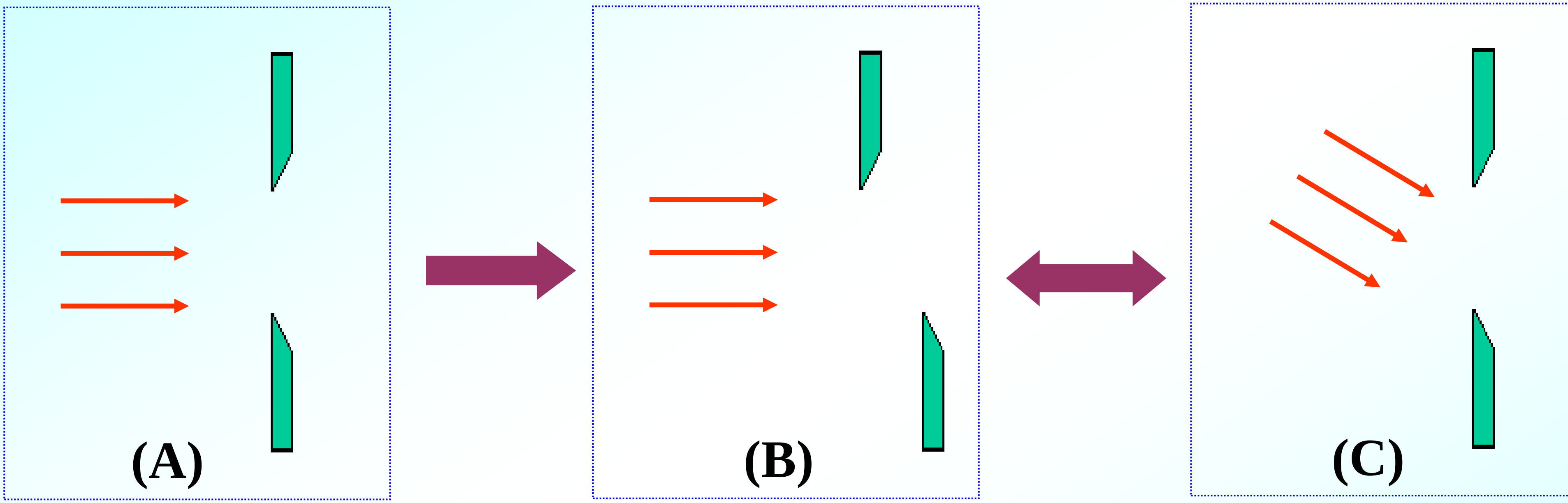
$\because k=3,\alpha=\dfrac{7\pi}{2} \longrightarrow \dfrac{I}{I_0}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{7\pi}{2}\right)^2}=0.0083=0.83\%$

（4）将缝宽增加1倍，P点将变为什么条纹？

$2a\sin\theta=2\times\dfrac{7\lambda}{2}=14\dfrac{\lambda}{2}=7\lambda$ 第7级暗纹 $\quad a\sin\theta=\pm k\lambda$

问题:

单缝衍射中单色光入射，求能看到的最大的明纹级次?



?

在折射率为n的气态或液态介质中，

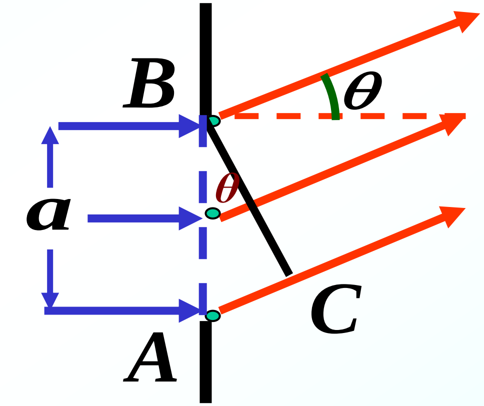
$na\sin\theta=\pm k\lambda$，$k=1,2,3\cdots$ ——暗纹

$na\sin\theta=\pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}, k=1,2,3\cdots$ ——明纹

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

最大级次

例： (1)在单缝衍射中，衍射角θ越大(级数越高)的那些明纹的亮度是越大还是越小？ 用菲涅耳半波带法加以解释。 (2)在单缝衍射中，如果把整个装置放入水中，衍射图样将怎样变化？



解：(1) $AC = a\sin\theta$

若：AC = 奇数个半波长

$$a\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, k = 1,2,3\cdots$$ ——明纹

$\theta\uparrow$，$k\uparrow$ 则级数越高， AC越长，缝AB分成的半波带越多， 每个半波带越窄，在P点处引起的光强越小。因此，衍射角越大的明纹的亮度越小.

(2) 如果把整个装置放入水中，

明纹满足 $$na\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, k = 1,2,3\ldots$$

暗纹满足 $$na\sin\theta = \pm k\lambda \quad k = 1,2,3\ldots$$

第k级明纹的衍射角的大小为 $$\theta_k \approx \sin\theta_k = \frac{(2k+1)\lambda}{2na}$$ $\downarrow$

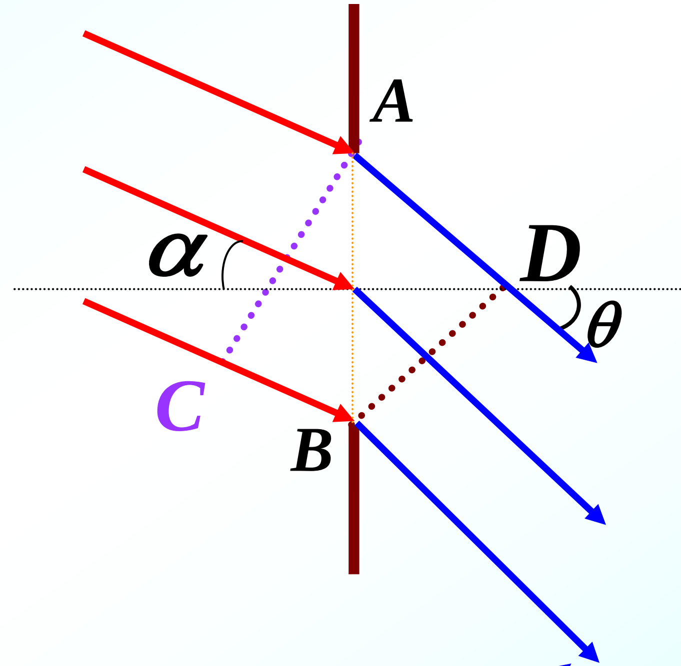
次极大条纹的宽度：$$\Delta\theta = \theta_{k+1} - \theta_k \approx \frac{\lambda}{na}$$ $\downarrow$

所以，衍射图样将向中间收缩，条纹宽度变小。

讨论

1. 平行光斜入射问题

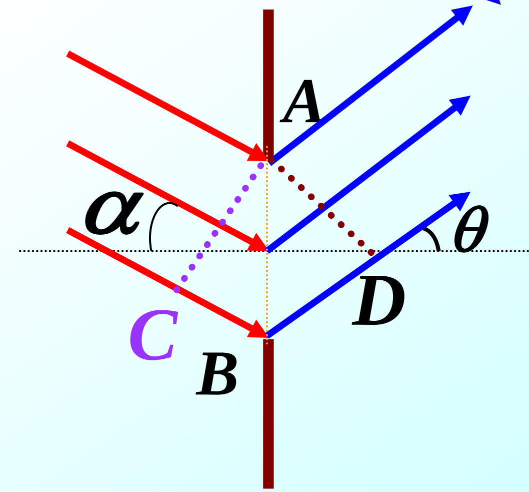
单缝上下沿光线光程差为：



$$\delta = AD - BC = a(\sin\theta - \sin\alpha)$$

$$\delta' = a(\sin\theta + \sin\alpha)$$

$$a(\sin\theta \pm \sin\alpha) = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{暗纹中心} \\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{明纹中心} \end{cases}$$



α与θ 在法线同侧时取“＋”

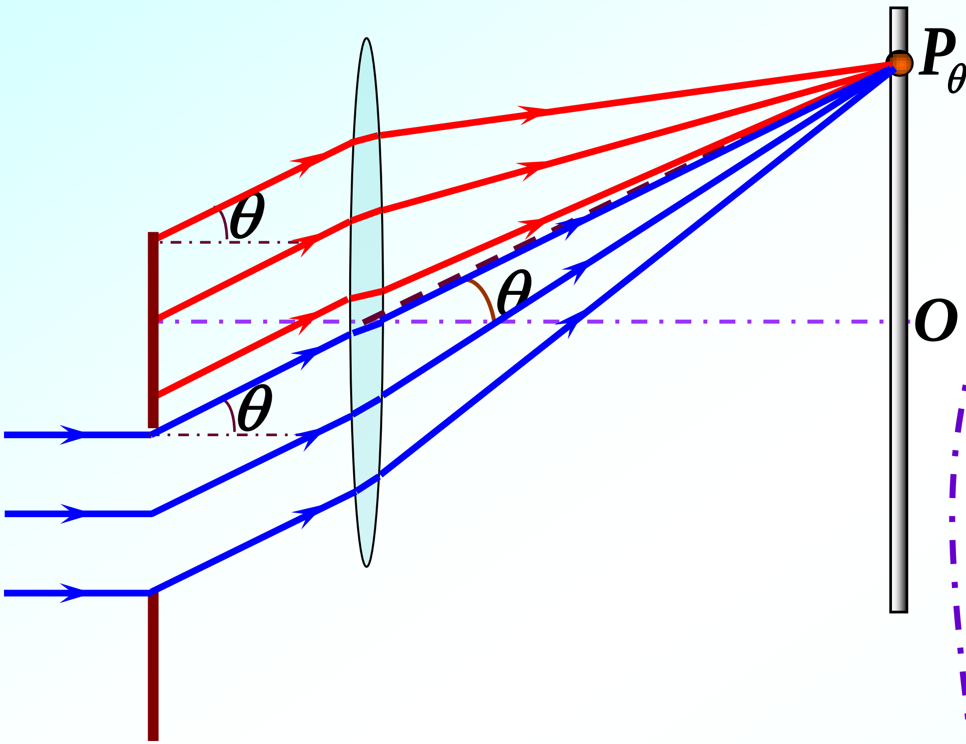
在法线异侧时取“－”

中央明纹： $\sin\theta = \sin\alpha$

条纹将向下方平移

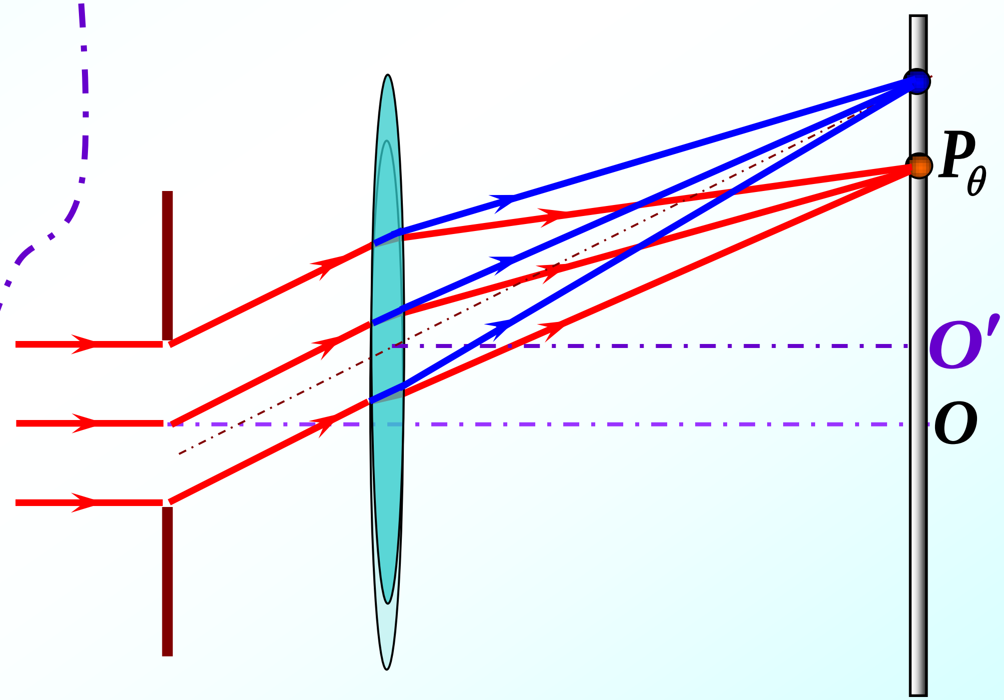
（间距不变）

2. 单缝位置上下移动时，屏上条纹如何变化？



单缝衍射图样，不随缝的上下移动而变化。

3. 若将*L*上下平移，条纹又如何变？

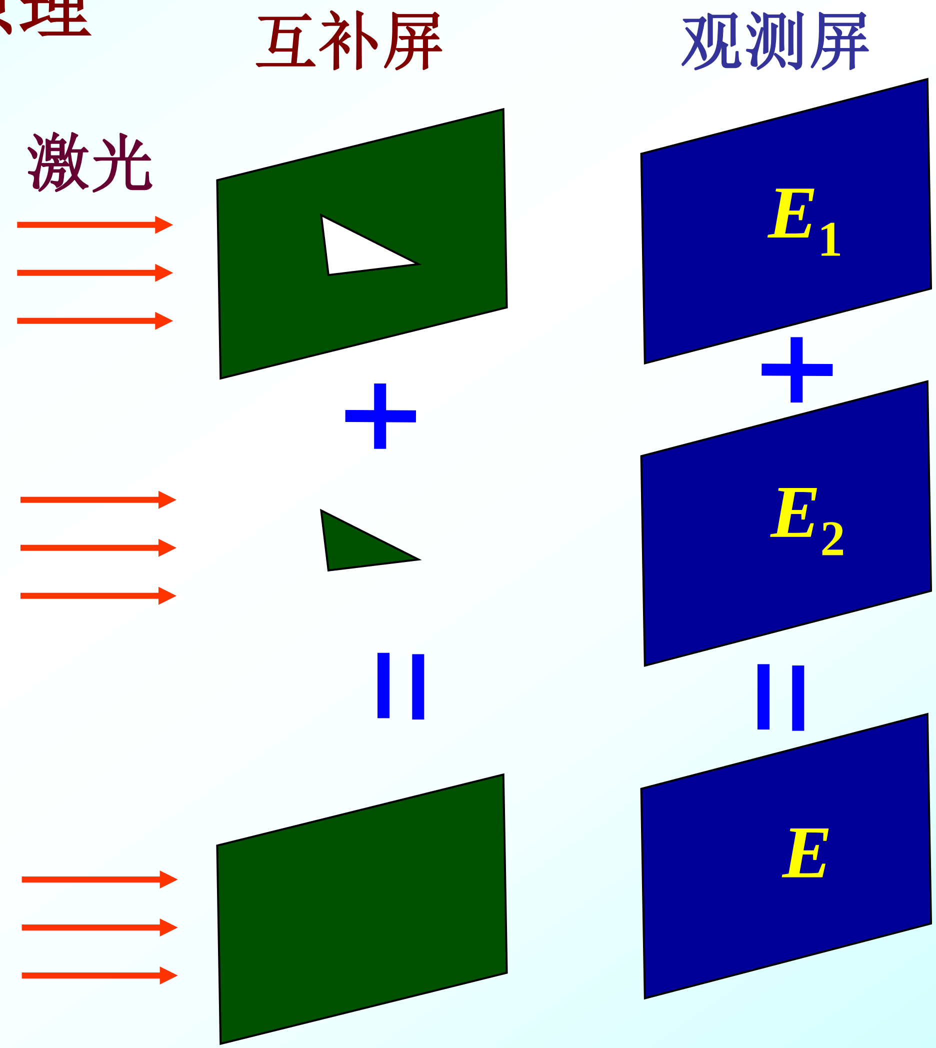


沿*L*的移动方向作等距离的平移。

细丝的衍射测量———巴俾涅原理

单丝衍射

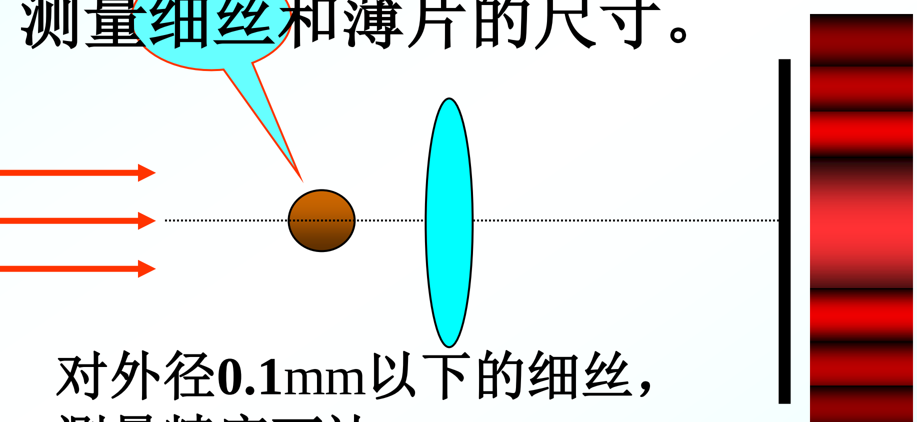
两个互补屏产生的衍射条纹和光强分布是完全相同的，仅位相相差 π.



$$E = E_1 + E_2 = 0$$

故 $I_1 = I_2$

根据巴俾涅原理可用互补法测量细丝和薄片的尺寸。



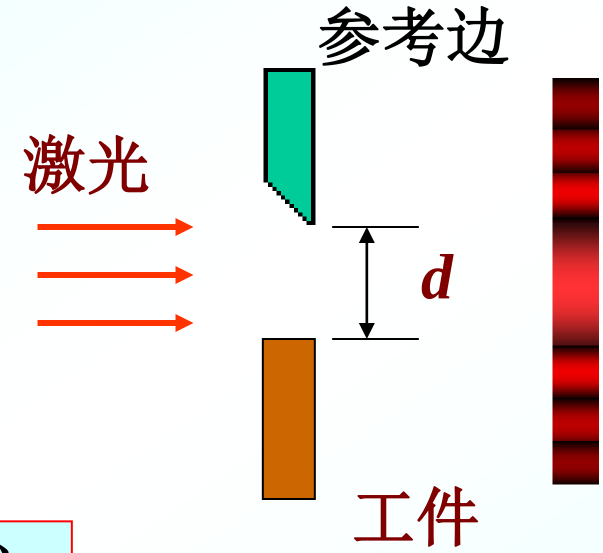
对外径0.1mm以下的细丝，测量精度可达0.05μm.

◆ 单缝衍射的应用——间隙衍射传感器

利用缝宽(间隙) 的变化可制成衍射传感器。(非接触式)

(*a*)进行比较测量：先用标准间隙作零位，通过间隙的变化量换算出工件尺寸的变化量。

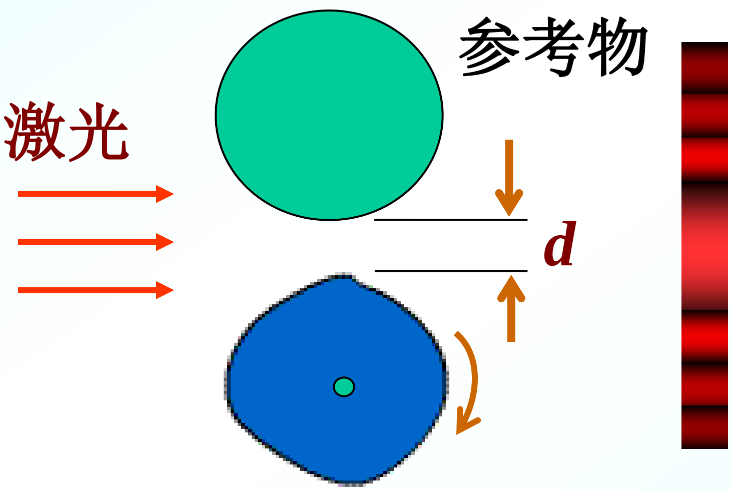
$a\sin\theta=\pm k\lambda$，$k=1,2,3\cdots$ ——暗纹



(*a*)

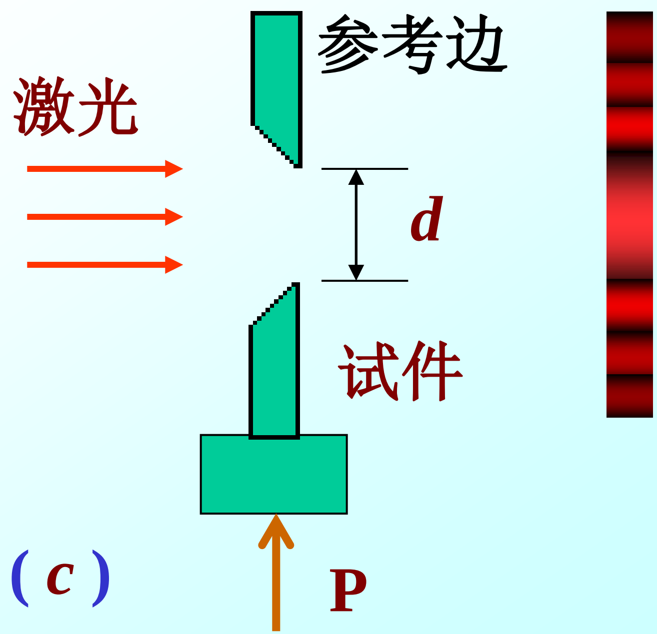
(*b*)作轮廓测量:

测工件的轮廓偏差



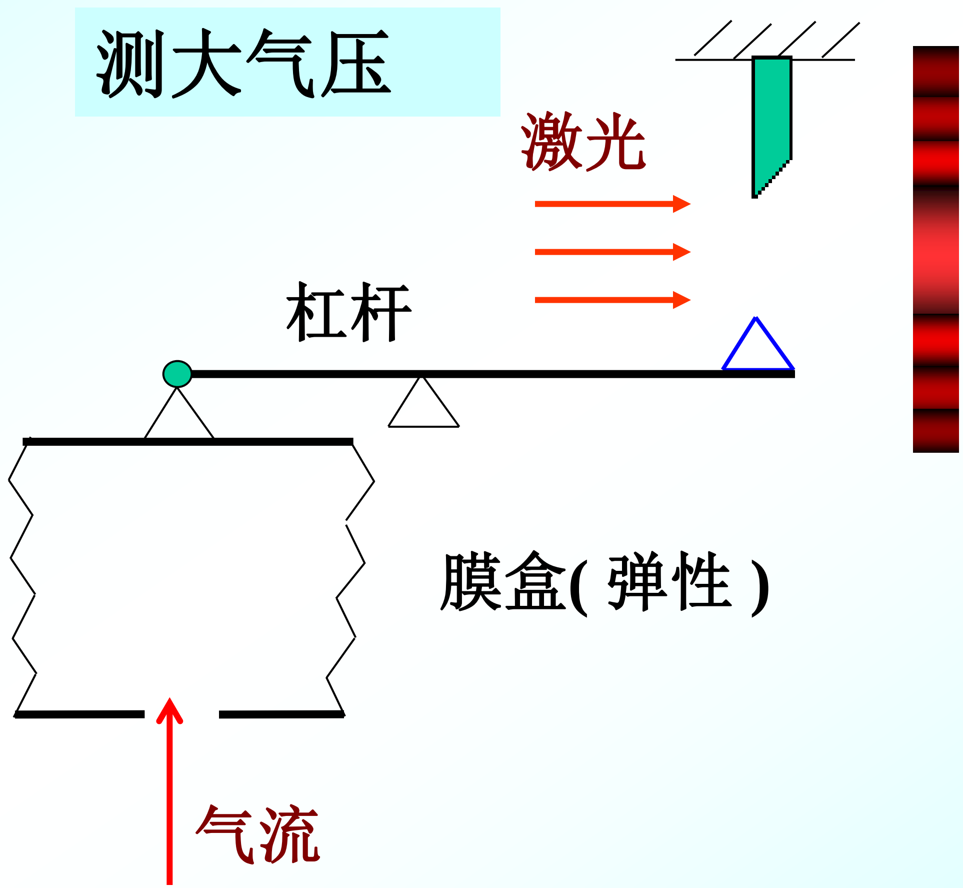
(*b*)

(*c*)作应变传感器:



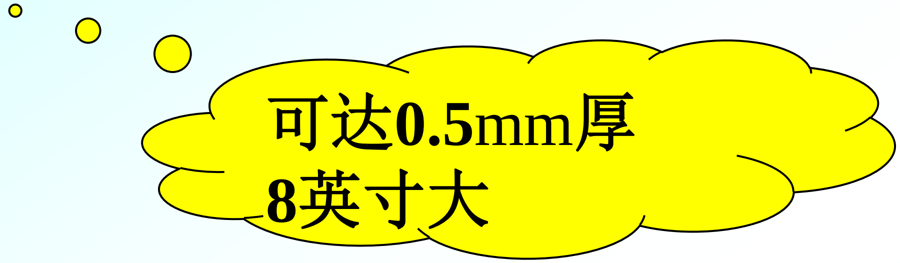
(*c*)

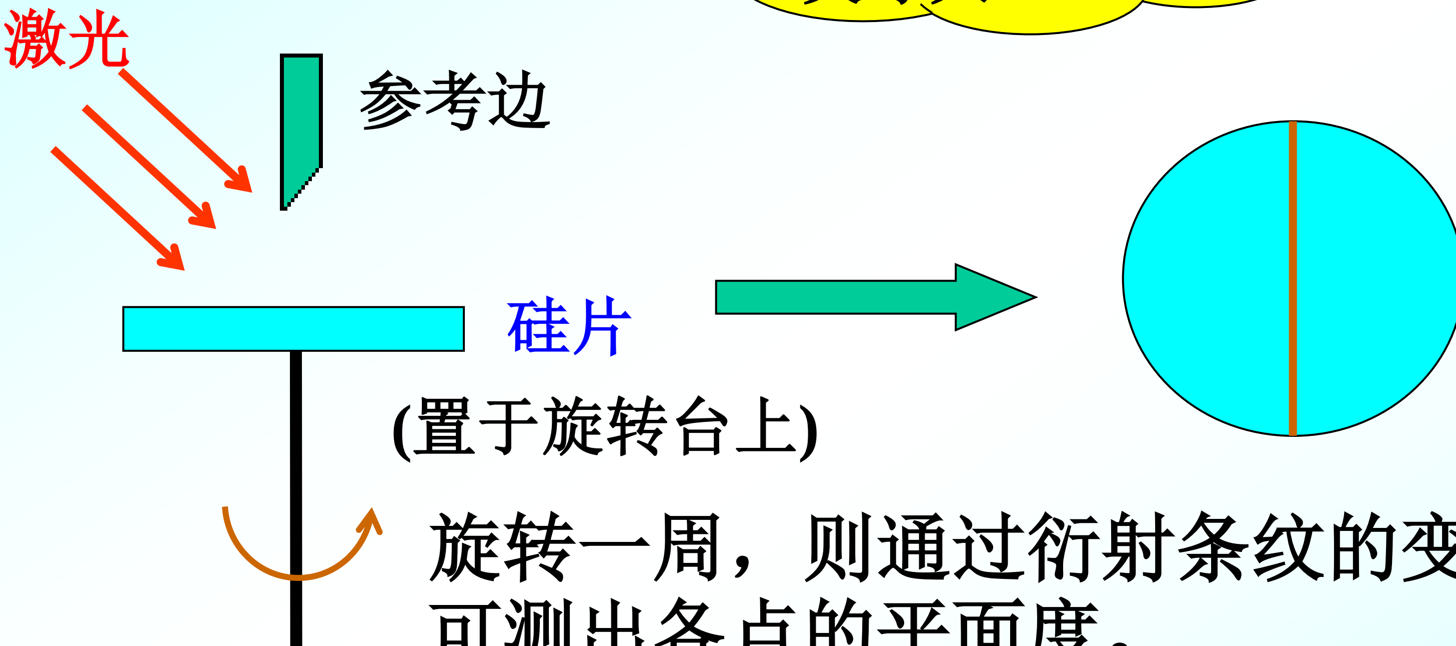
(*d*) 压力传感器



(*e*)面形测量:　比如硅片平面度的检测

(平面度测量)





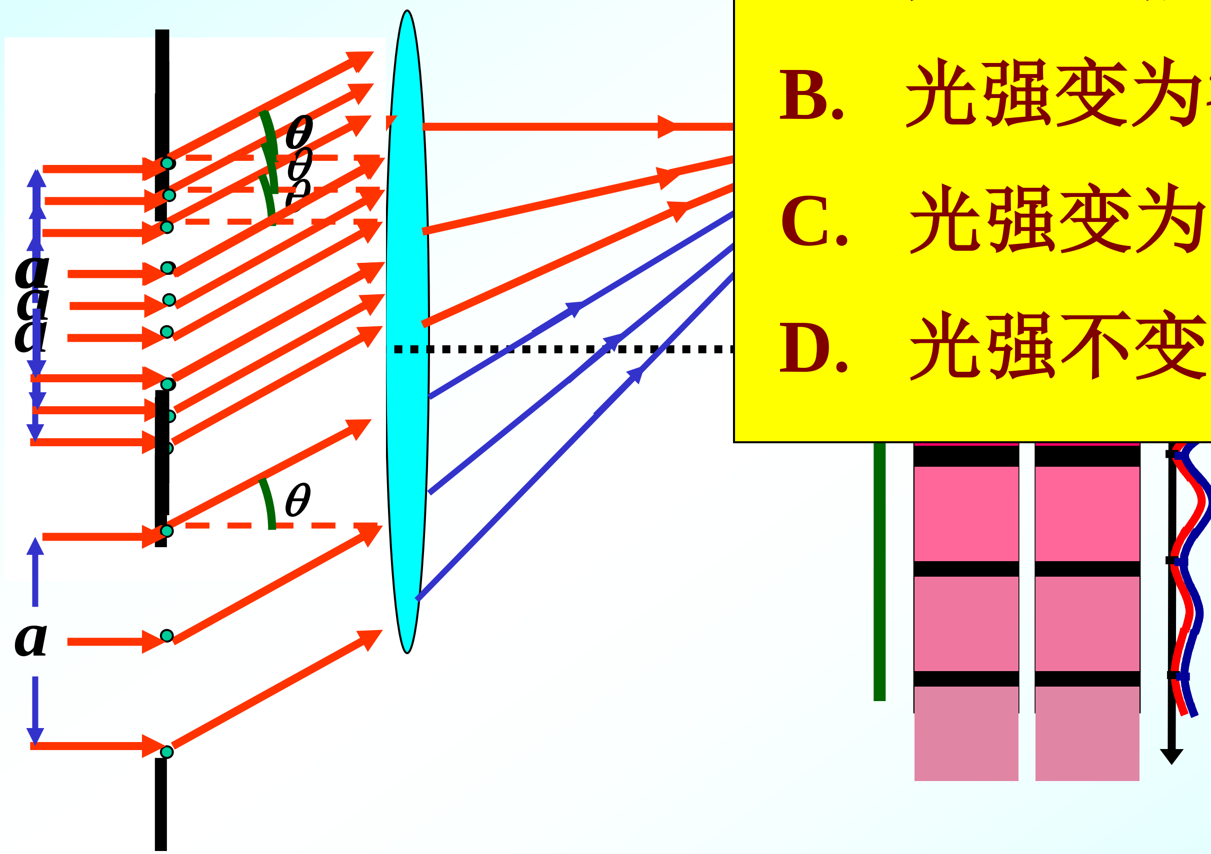
旋转一周，则通过衍射条纹的变化可测出各点的平面度。

任何待测几何量、物理量、化学量，只要能将其转化为间隙变化量，即可用衍射法进行高精度测量。

四、双缝衍射与干涉

问： 1）将单缝衍射的狭缝平移，衍射条纹是否有变化？

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \qquad \alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$$



A. 光强翻倍

B. 光强变为零

C. 光强变为原来的4倍

D. 光强不变

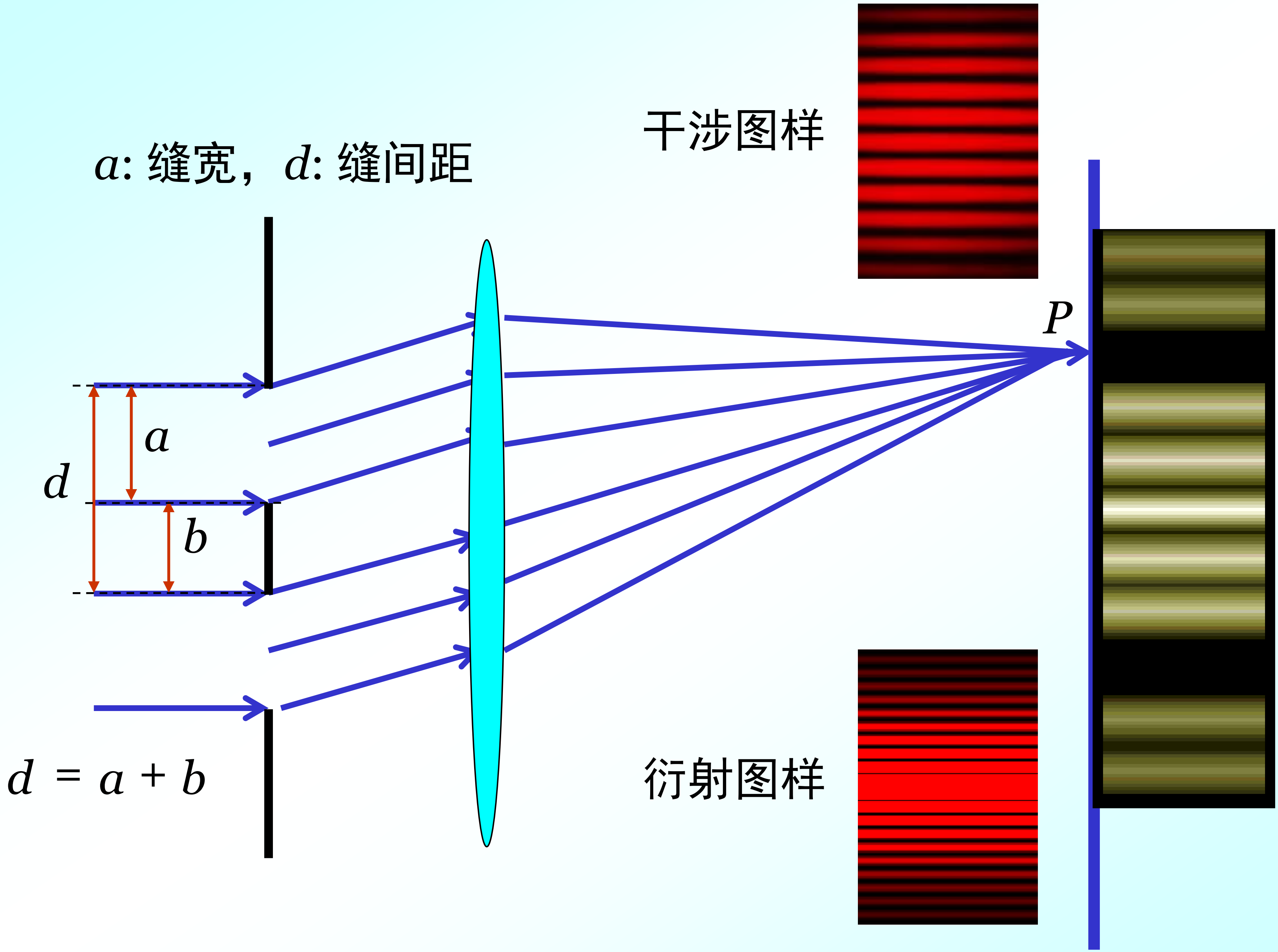
光强重新分布

相干叠加

光强翻倍？

2）若同时存在两个相同的单缝，屏上的衍射图样又是怎样的？

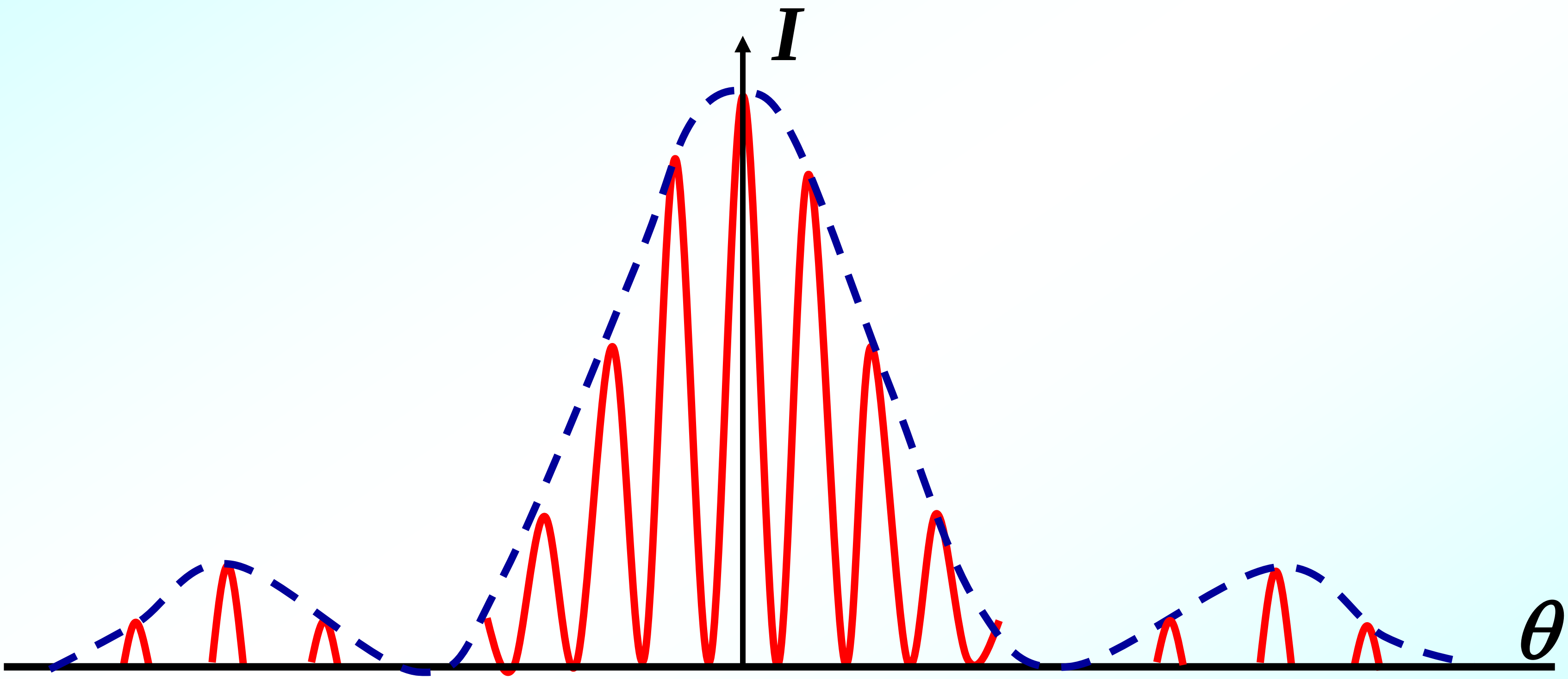
在观测屏上，两套完全相同的单缝衍射图样完全重叠。



a: 缝宽，d: 缝间距
干涉图样
衍射图样
P
a
b
d
$d = a + b$

双缝衍射的光强度分布：双缝衍射强度的包络线

----是单缝衍射强度分布



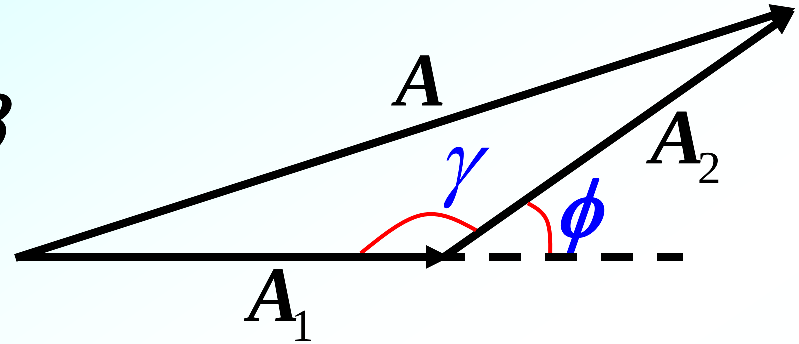
1. 双缝衍射的光强分布公式

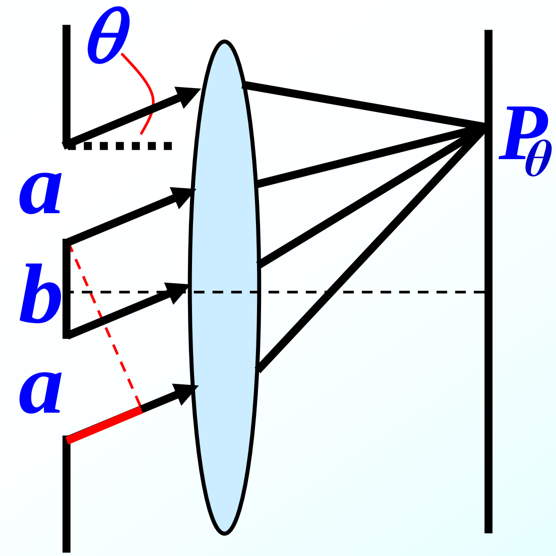
单缝: $I_\theta = I_{0单}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$

$$A_2 = A_1 = A_{10}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\phi = 2\pi\frac{d\sin\theta}{\lambda} = 2\beta$$

$$\gamma = \pi - \phi$$





$$d = a + b$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\gamma$$

$$= 2A_1^2(1+\cos\phi) = 4A_1^2\cos^2\frac{\phi}{2}$$

$$= 4A_{10}^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\beta = 4I_{0单}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\beta$$

$$\delta = r_{02} - r_{01} = d\sin\theta$$

$$\boxed{I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\beta}$$

衍射因子 干涉因子

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

$$\beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$$

$$E_\theta = E_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda}\right)$$

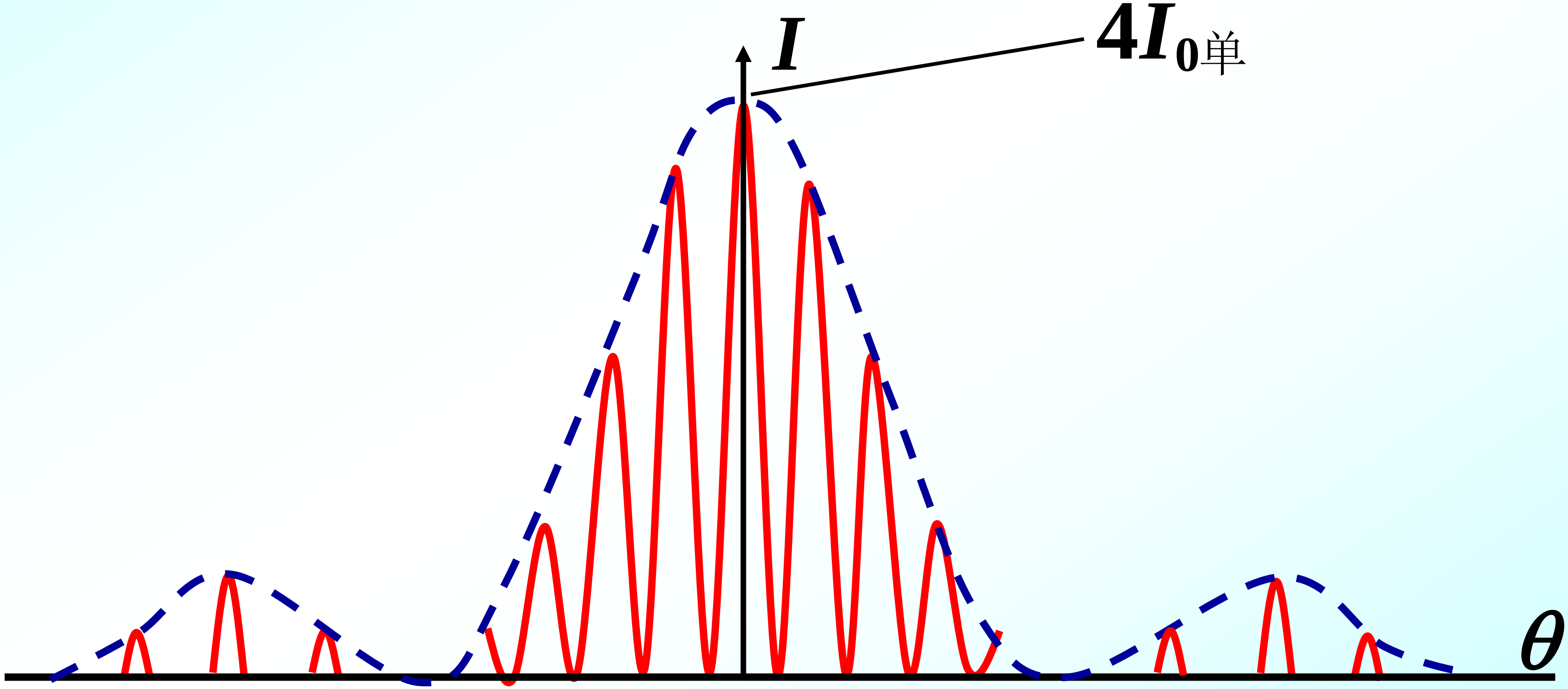
(单缝)

$$I_\theta = I_0\underbrace{\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}_{\text{衍射因子}}\underbrace{\cos^2\beta}_{\text{干涉因子}}$$

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

$$\beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$$

2. 双缝衍射的衍射图样



双缝衍射的强度分布图

$$I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cos^2\beta \qquad \alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} \qquad \beta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

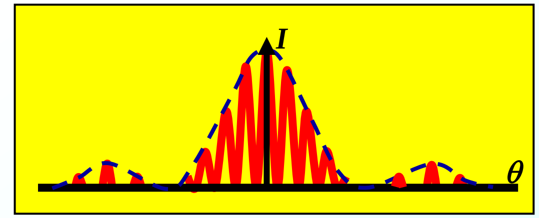
3.双缝衍射光强度的分布规律

1）$\theta = 0$ 时，$\alpha = 0$，$\beta = 0$　　则：$I = I_0$

即：透镜L的主光轴与屏的交点处的光强 ——中央极大

2）光强极小

两因子 $\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$ 与 $\cos^2\beta$ 有一个为0，则：$I=0$



$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = 0 \longrightarrow \alpha = \pm k\pi \quad (k = 1, 2, \cdots) \qquad a\sin\theta = \pm k\lambda$$

$$\cos^2\beta = 0 \longrightarrow \beta = \pm(2k'+1)\frac{\pi}{2} \quad (k' = 0, 1, 2, \cdots) \qquad d\sin\theta' = \pm(2k'+1)\frac{\lambda}{2}$$

干涉极小

比较 θ 与 θ':

$$\left.\begin{aligned} k = 1 \quad & \sin\theta = \frac{\lambda}{a} \\ k' = 0 \quad & \sin\theta' = \frac{\lambda}{2d} \end{aligned}\right\} \quad a < 2d \quad \therefore \theta' < \theta$$

即：干涉因子确定极小的间距要小

∴屏上呈现的条纹其位置是由干涉因子确定（与缝间距d有关）

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\beta \qquad \alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} \qquad \beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$$

3）在相邻两个极小之间有极大

其位置满足： $\cos^2\beta = 1$ $\beta=\dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}=\pm k\pi$

即： $d\sin\theta=\pm k\lambda$ $k=0,1,2,\cdots$ ——干涉极大

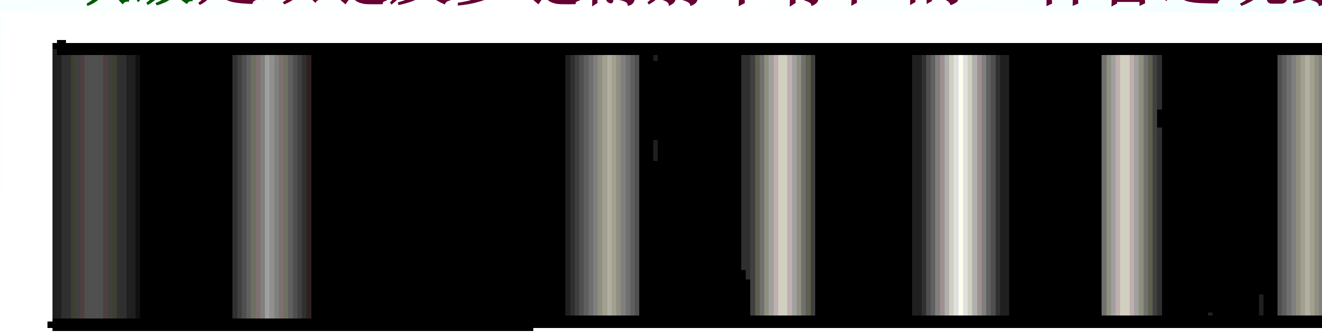
若某θ角满足了： $d\sin\theta=\pm k'\lambda$ ——干涉极大

又满足了： $a\sin\theta=\pm k\lambda$ ——衍射极小

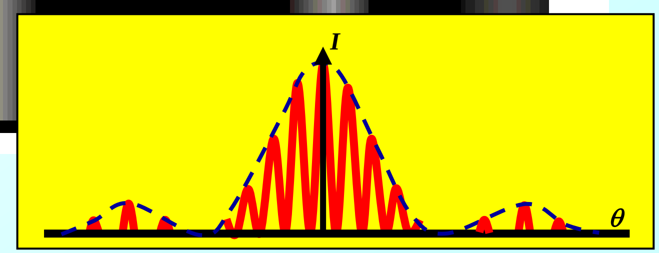
此时，此k'级极大被调制掉 ——缺级 （屏上不出现）

显然： $k'=k\dfrac{d}{a}=$ 整数 ——缺级 $k=1,2,\cdots$

缺级是双缝及多缝衍射中存在的一种普遍现象。



−4 −2 −1 0 1 2

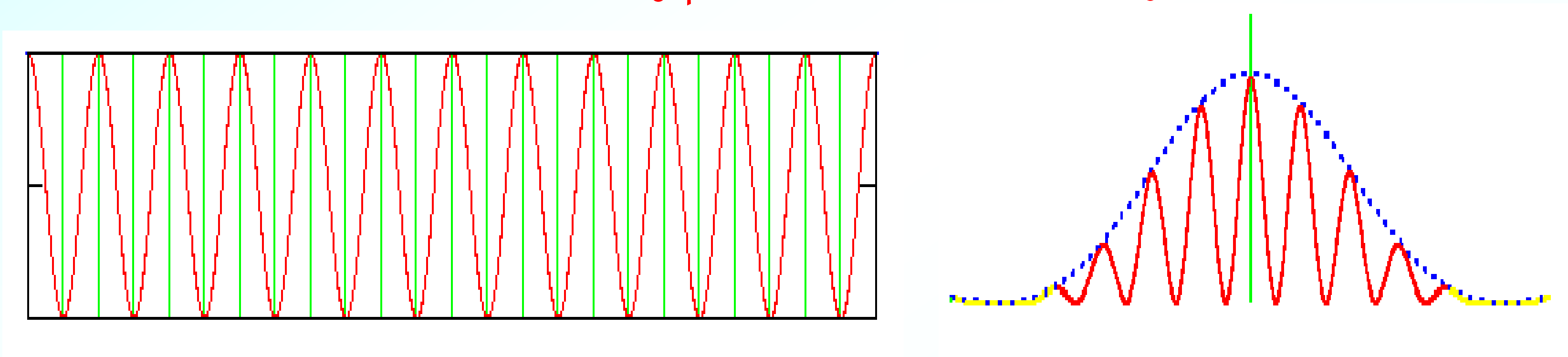


结论:

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\beta \qquad d\sin\theta = \pm k'\lambda \qquad a\sin\theta = \pm k\lambda$$

1° 双缝衍射的强度曲线是**单缝衍射强度**对**双缝干涉强度**进行调制的结果。

这种调制表现在以变化的$I_{\theta单}$代替了不变的$4I_0$。

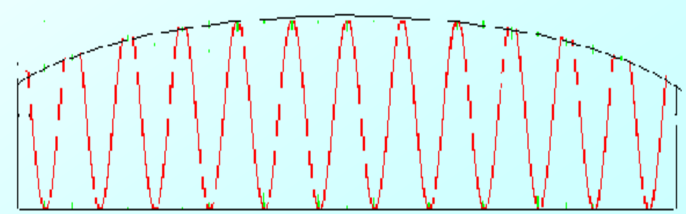


2° 当$a<<\lambda$时，双缝衍射的强度分布情况变为**理想的杨氏干涉**的强度分布情况：

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} \to 0 \qquad I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\beta$$

$$\Downarrow$$

杨氏双缝干涉光强—— $I_\theta = I_0\cos^2\beta$



双缝衍射与双缝干涉的异同：——都是波的相干叠加

历史的原因：从相干波源在空间的分布条件来区别

干涉： 由有限数目“分立”相干光源传来的光波相干叠加。

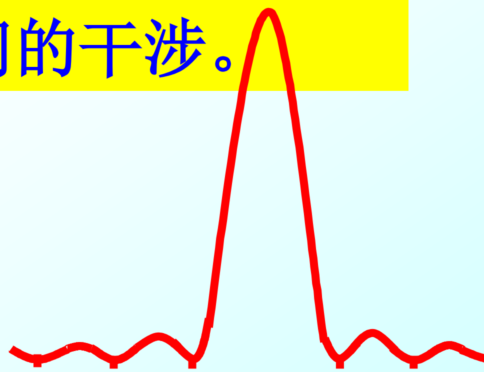
衍射： 由相干光源“连续” 分布的无限多子波波中心发出的子波相干叠加。

双缝干涉：

观测屏上只出现两个单缝衍射的中央极大之间的干涉。

两个很窄的双缝得到的是干涉图样

由两个“分立”相干光源传来的光波相干叠加



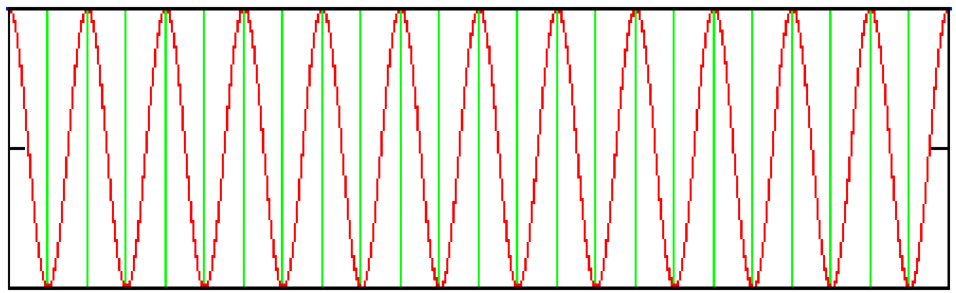
双缝衍射：

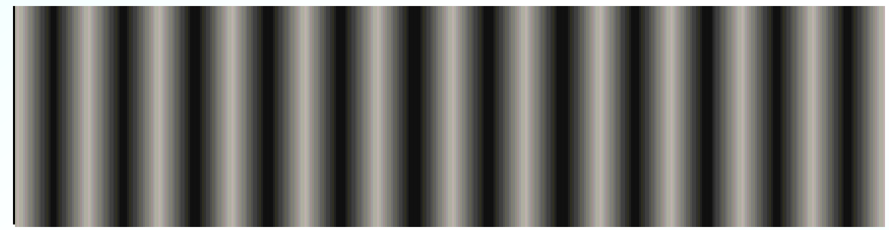
观测屏上除了中央极大之间还出现其它次级明纹之间的干涉。

由两个“连续” 分布的子波中心发出的光波相干叠加

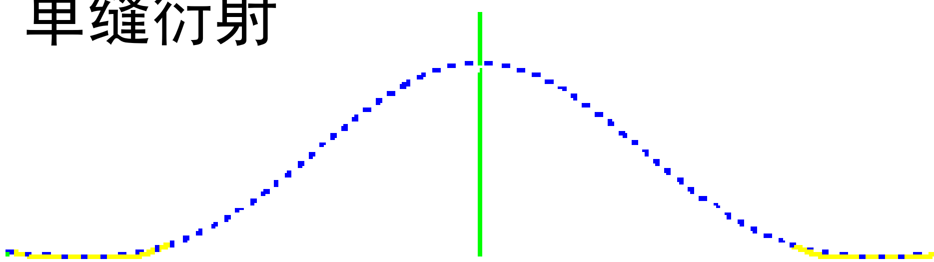
从两个较宽的双缝得到的是干涉、衍射结合的图样。

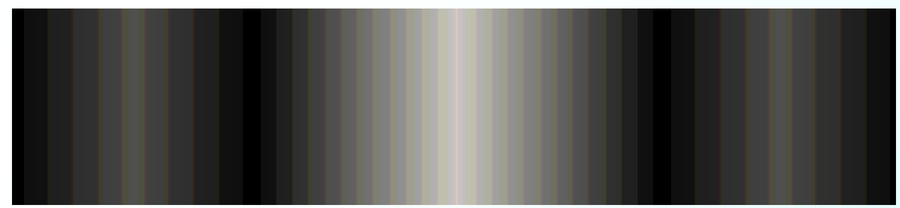
双缝干涉



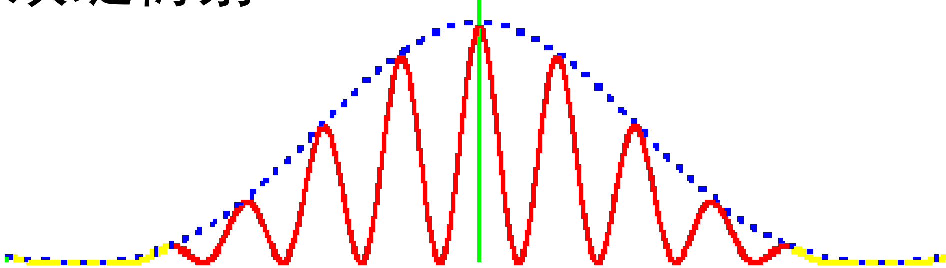


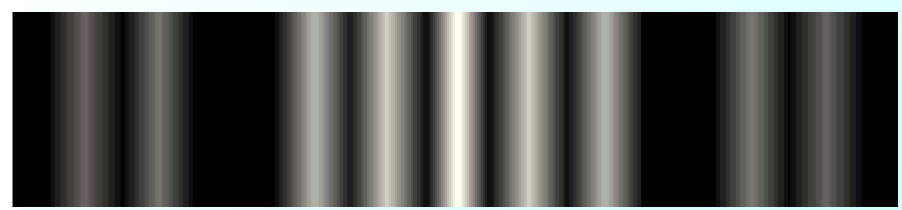
单缝衍射





双缝衍射



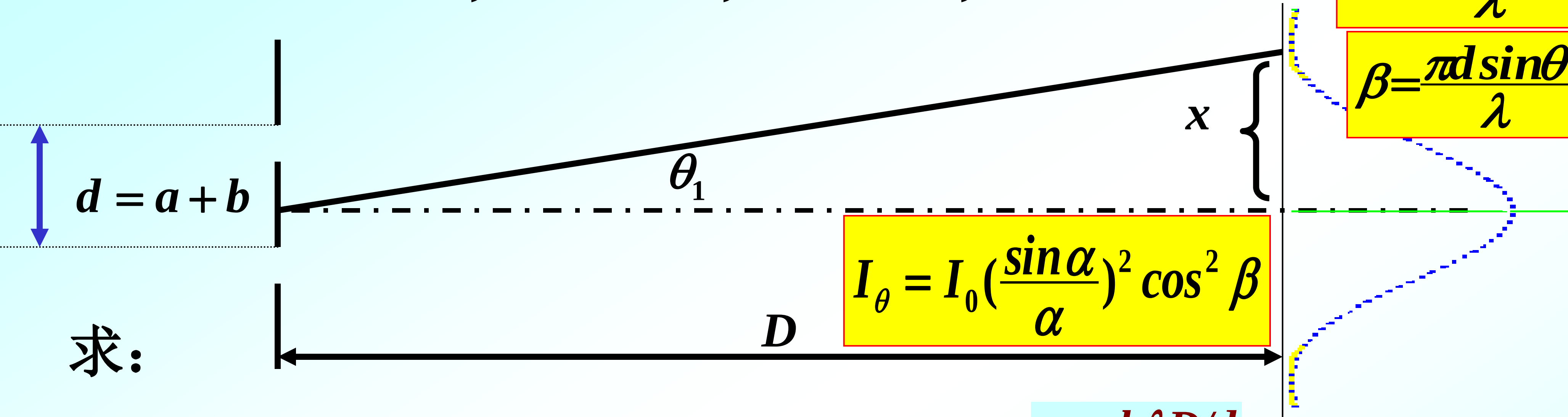


双缝干涉的条纹位置仍不变，只是强度受到单缝衍射的调制。

例：已知 $D=50\text{cm}, \lambda=480\text{nm}, d=0.1\text{mm}, a=0.02\text{mm}$

$$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

$$\beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$$



$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\beta$$

求：

$x_k \approx k\lambda D/d$

$d\dfrac{x_k}{D}\approx k\lambda$

$d\sin\theta = k\lambda$ 明

$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

（1）双缝衍射相邻两条明纹的间距

（2）中央包络线中x的坐标值(见图)

（3）双缝衍射的第 1 级明纹的相对强度

（4）中央明纹的包线中，共包含了几条完整的明纹?

（5）中央明纹包线中恰好11 条明纹，如何选择 a 、 d ？

解：（1） $\Delta x = x_{k+1}-x_k \approx \lambda D/d = 2.4\text{mm}$

（2） $x = D\,tg\theta_1 \approx D\sin\theta_1 = D\dfrac{\lambda}{a} = 12\text{mm}$

$a\sin\theta_1 = \lambda$

$\sin\theta_1 = \dfrac{\lambda}{a}$