大学物理(下)

华中科技大学 张智 zzhang@hust.edu.cn



大学物理演示实验室开放安排

本学期大学物理演示实验室开放2室和3室,欢迎同学自愿参观。

周次	时间	实验室
第14周:	下午5~6节	西五楼111(2室——振动与波动)
周三、周三、周三、周三		西五楼112(3室——光学)

第14周周一、周二、周三下午两个实验室同时开放

大学物理演示实验室开放安排

本学期大学物理演示实验室开放2室和3室,欢迎同学自愿参观。

周次	时间	实验室
第15周:	下午5~6节	西五楼111(2室——振动与波动)
周二		西五楼112(3室——光学)

第15周周一、周二下午两个实验室同时开放

●单缝夫琅和费衍射

光强公式:
$$I_{\theta}=I_{0}(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^{2}$$
 $\alpha=\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$ 衍射极小条件: $a \sin\theta=\pm k\lambda$ $k=1,2,\cdots$

衍射极小条件:
$$asin\theta=\pm k\lambda$$
 $k=1,2,\cdots$

衍射次极大:
$$asin\theta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$
 $k=1,2,\cdots$

●双缝夫琅和费衍射

$$I_{\theta} = I_{0} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^{2} \cos^{2} \beta$$

$$\beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

 $asin\theta = \pm k\lambda$ $k=1,2,\cdots$ 单缝衍射极小:

> $dsin\theta = \pm (2k'+1)\frac{\lambda}{2}$ 干涉极小:

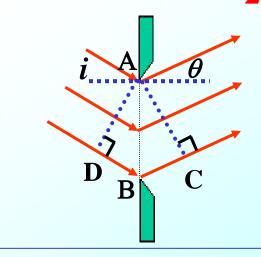
 $dsin\theta = \pm k'\lambda$ $k' = 0,1,2,\cdots$ 干涉极大:

般情形:

$$na(\sin i + \sin \theta) = \pm k\lambda$$

$$na(\sin i + \sin \theta)$$

$$= \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$



巴俾涅原理

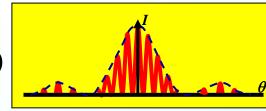
$$I_{\theta}=I_{0}(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^{2}\cos^{2}\beta$$

$$\alpha = \frac{\pi a sin\theta}{\lambda}$$
 $\beta = \frac{\pi d sin\theta}{\lambda}$

3.双缝衍射光强度的分布规律

- 1) $\theta = 0$ 时, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ 则: $I = I_0$ 即:透镜L的主光轴与屏的交点处的光强 ——中央极大
- 2) 光强极小

两因子 $(\frac{sin\alpha}{\alpha})^2$ 与 $cos^2\beta$ 有一个为0,则: I=0



$$(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2 = 0$$
 $\alpha = \pm k\pi \ (k = 1, 2, \cdots)$ $a\sin\theta = \pm k\lambda$

$$\cos^2\beta = 0$$
 $\beta = \pm (2k'+1)\frac{\pi}{2}$ $(k'=0,1,2,\cdots)$ $d\sin\theta' = \pm (2k'+1)\frac{\lambda}{2}$

比较
$$\theta$$
与 θ : $k=1$ $sin\theta=\frac{\lambda}{a}$ $k'=0$ $sin\theta'=\frac{\lambda}{2d}$ $a<2d$ $\therefore \theta'<\theta$ 干涉极小

$$a < 2d : \theta' < \theta$$

即:干涉因子确定极小的间距要小

::屏上呈现的条纹其位置是由干涉因子确定(与缝间距*d*有关)

$$I_{\theta}=I_{0}(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^{2}\cos^{2}\beta$$

$$\alpha = \frac{\pi a sin\theta}{\lambda}$$
 $\beta = \frac{\pi d sin\theta}{\lambda}$

3) 在相邻两个极小之间有极大

其位置满足:
$$\cos^2\beta = 1$$

$$\beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = \pm k \pi$$

即: $dsin\theta=\pm k\lambda$

 $k=0,1,2,\cdots$ ——干涉极大

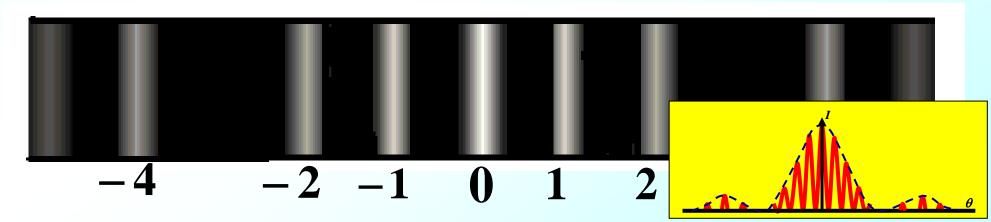
若某 θ 角满足了: $dsin\theta=\pm k'\lambda$ ——干涉极大

又满足了: $asin\theta=\pm k\lambda$ ——衍射极小

此时,此k'级极大被调制掉 ——缺级 (屏上不出现)

显然: $k'=k\frac{d}{a}=$ 整数 ——缺级 $k=1,2,\cdots$

缺级是双缝及多缝衍射中存在的一种普遍现象。

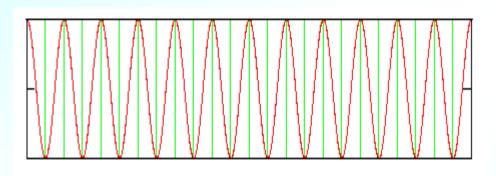


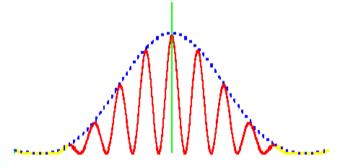
$$I_{\theta} = I_{0} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^{2} \cos^{2} \beta$$

$$dsin\theta = \pm k'\lambda$$
 $asin\theta = \pm k\lambda$

1° 当α>λ双缝衍射的强度曲线是单缝衍射强度对双缝干涉强度进行调制的结果。

这种调制表现在以变化的 $I_{0\pm}$ 代替了不变的 I_{0} 。





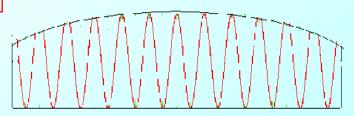
 2° 当 $a < < \lambda$ 时,双缝衍射的强度分布情况变为理想的杨氏干涉的强度分布情况:

$$\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \rightarrow 0$$

$$I_{\theta} = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cos^2\beta$$

杨氏双缝干涉光强—

$$I_{\theta}=I_{0}\cos^{2}\beta$$



双缝衍射与双缝干涉的异同:——都是波的相干叠加

历史的原因: 从相干波源在空间的分布条件来区别

干涉: 由有限数目"分立"相干光源传来的光波相干叠加。

衍射: 由相干光源"**连续**"分布的无限多子波波中心发出的子波相干叠加。

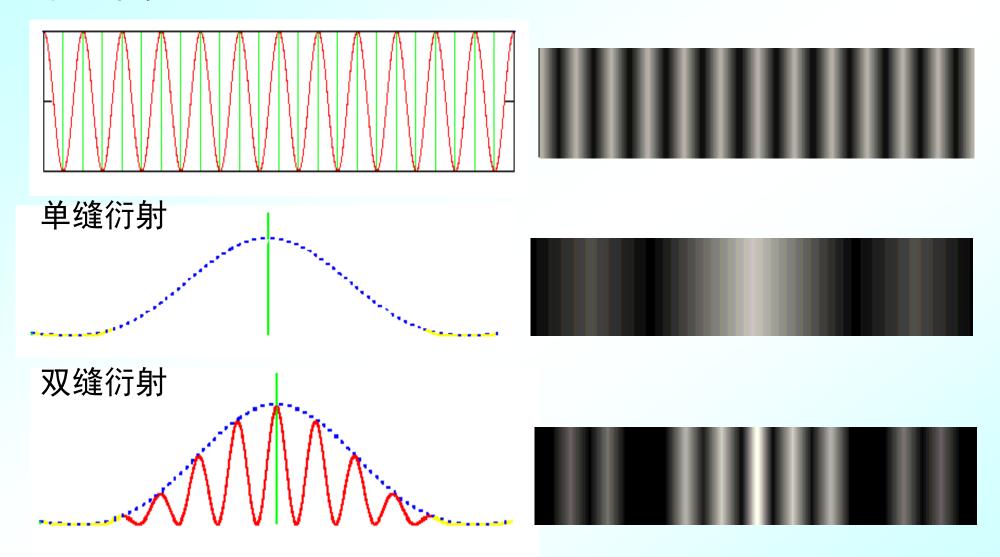
双缝干涉:

观测屏上只出现两个单缝衍射的中央极大之间的干涉。 两个很窄的双缝得到的是干涉图样 由两个"分立"相干光源传来的光波相干叠加

双缝衍射:

观测屏上除了中央极大之间还出现其它次级明纹之间的干涉。 由两个"连续"分布的子波中心发出的光波相干叠加 从两个较宽的双缝得到的是干涉、衍射结合的图样。

双缝干涉



双缝干涉的条纹位置仍不变,只是强度受到单缝衍射的调制。

例: 已知
$$D=50$$
cm, $\lambda=480$ nm, $d=0.1$ mm, $a=0.02$ mm
$$d=a+b$$

$$d=a+b$$

$$T_{\theta} = I_{0} (\frac{\sin \alpha}{\alpha})^{2} \cos^{2} \beta$$

$$x_{0} = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

- (1) 双缝衍射相邻两条明纹的间距
- (2) 中央包络线中x的坐标值(见图)
- (3) 双缝衍射的第1级明纹的相对强度
- 中央明纹的包线中,共包含了几条完整的明纹?
- (5) 中央明纹包线中恰好11 条明纹,如何选择 $a \times d$?

解: (1)
$$\Delta x = x_{k+1} - x_k \approx \lambda D/d = 2.4 \text{mm}$$

(2) $x = Dtg\theta_1 \approx D\sin\theta_1 = D\frac{\lambda}{a} = 12 \text{mm}$

$$asin\theta_1 = \lambda$$

$$sin\theta_1 = \frac{\lambda}{\lambda}$$

 $k = 0, \pm 1, \pm 2,$

 $d\frac{x_k}{D} \approx k\lambda$

(3) 双缝衍射的第1级明纹的相对强度

$$dsin \theta = k\lambda$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

根据
$$I_{\theta} = I_0 (\frac{\sin \alpha}{\alpha})^2 \cos^2 \beta$$

$$\frac{I_{\theta}}{I_{0}} = (\frac{\sin \alpha}{\alpha})^{2} \cos^{2} \beta$$
 根据题意: $d\sin\theta = \lambda$ $\sin\theta = \frac{\lambda}{d}$

$$\begin{cases} \beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = \pi \\ \alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = \frac{a}{d} \pi = \frac{0.02}{0.1} \pi = \frac{\pi}{5} \\ \frac{I_{\theta}}{I_{0}} = (\frac{\sin \frac{\pi}{5}}{5})^{2} (\cos \pi)^{2} = 86\% \end{cases}$$

D=50cm, $\lambda=480$ nm,d=0.1mm,a=0.02mm

(4) 中央明纹的包线中, 共包含了几条完整的明条纹?

包线的第一极小的衍射角: $asin\theta_1 = \lambda$

设中央明纹中共有 k 级明纹: $dsin\theta_1 = k\lambda$

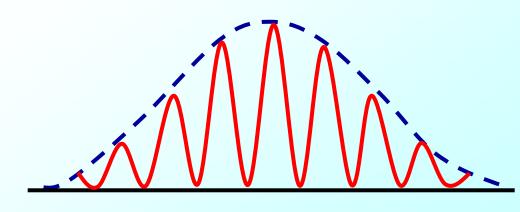
$$\frac{d}{a} = k \qquad \Rightarrow k = \frac{d}{a} = \frac{0.1}{0.02} = 5 \qquad (第 5 级缺级)$$

包含了 $2\times4+1=9$ 条明条纹

(5) 若要中央明纹的包线中恰好有11条明纹,应如何设计 $a \times d$?

$$\frac{d}{a} = k = 6$$

实际上, $5<\frac{d}{a}\le 6$ 就行。

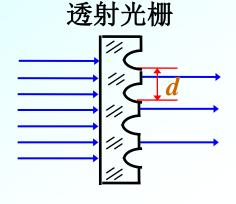


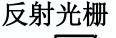
D=50cm, $\lambda=480$ nm,d=0.1mm,a=0.02mm

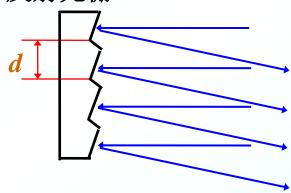
五、多缝衍射(衍射光栅)

1. 光栅一大量等宽等间距的平行狭缝构成的光学元件。

2. 种类:





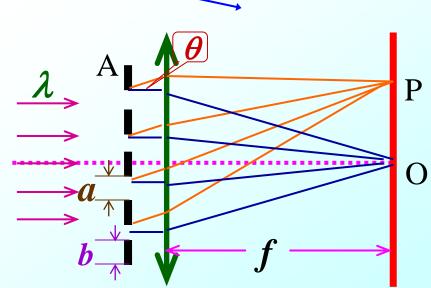


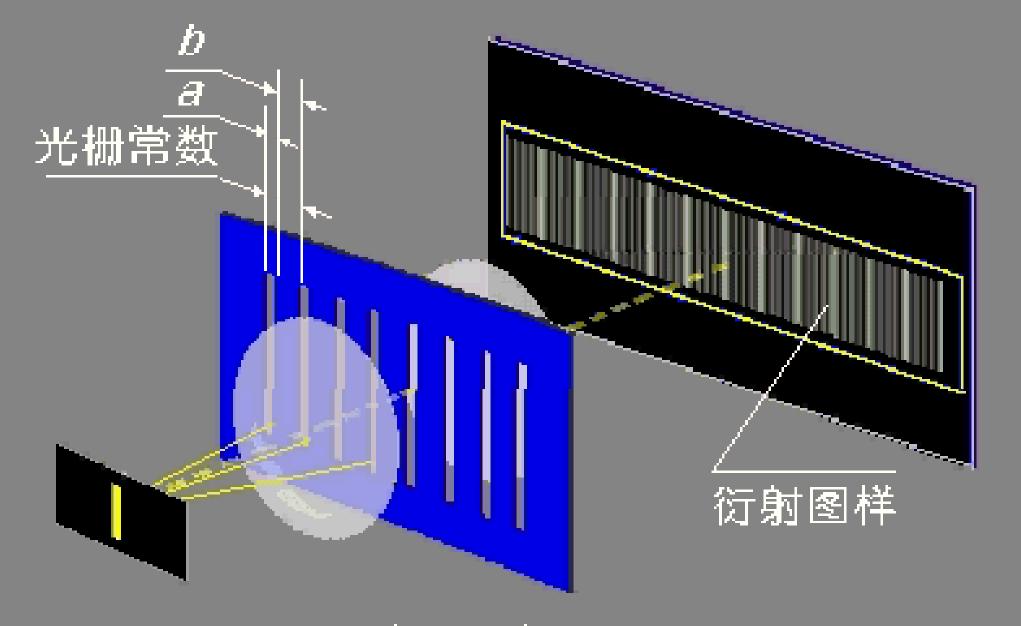
3. 光栅常数

- a 是透光部分的宽度——缝宽
- **b** 是不透光部分的宽度

$$d = a + b$$
 — 光栅常数

光栅常数d的数量级约10-6米.





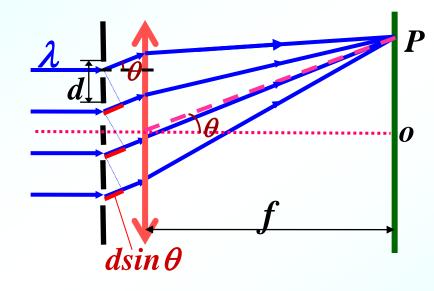
光栅衍射装置图

4. 光栅光强公式

采用矢量法推出:设光栅有N条缝,

由图可知,相邻两缝对应点向P点发出的 衍射线的光程差均一样:

$$\Delta r = dsin\theta \longrightarrow \Delta \varphi = \frac{dsin\theta}{\lambda} 2\pi$$



又由单缝衍射可知,每个缝发的光在P点的光振动

的振幅为:

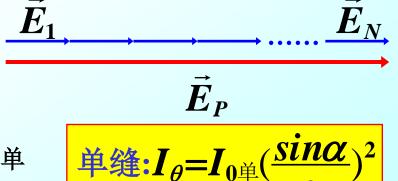
$$E_i = E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

P处是N个同方向、同频率、同振幅、位相差依次差一个恒量 $\Delta \varphi$ 的简谐振动的合成,合成的结果仍为简谐振动。

——N个矢量相加

对于
$$\phi$$
点: $\theta = 0$, $\Delta \varphi = 0$

$$E_p = N E_i \longrightarrow I_p = N^2 I_{0 \stackrel{\triangle}{=}}$$



对于其它点P: $\Delta \varphi \neq 0$ $\Delta \varphi = \frac{d \sin \theta}{\lambda} 2\pi$ $\vec{E}_P = \sum \vec{E}_i$ 合振幅可用复数形式表示: $E_p = E_1 + E_1 e^{i\eta} + E_1 e^{i2\eta} + \cdots + E_1 e^{i(N-1)\eta}$ $=E_1[1+e^{i\eta}+e^{i2\eta}+\cdots+e^{i(N-1)\eta}]$ $\Delta \varphi = \eta = \frac{d \sin \theta}{\lambda} 2\pi = 2\beta$ $=E_1\frac{e^{iN\eta}-1}{\rho^{i\eta}-1}$ $E_1=E_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $\eta=2\beta$ P点的光强: $I = E_p \cdot E_p^* = E_1 \frac{e^{iN\eta} - 1}{e^{i\eta} - 1} \cdot E_1 \frac{e^{-iN\eta} - 1}{e^{-i\eta} - 1} = E_1^2 \frac{\sin^2 \frac{N\eta}{2}}{e^{-i\eta} - 1}$ $\sin^2\frac{\eta}{2}$ $(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2 \cdot (\frac{\sin N\beta}{\sin\beta})^2$ $\overrightarrow{A} \longleftrightarrow a = A\cos\theta + iA\sin\theta$ $oI = I_{0} = (\frac{\sin \alpha}{\alpha})^2 (\frac{\sin N\beta}{\sin \beta})^2$ $\vec{A} + \vec{B} = Ae^{i\theta} + Be^{i\beta}$ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 多缝干涉因子 单缝衍射因子

对于其它点P: $\Delta \varphi \neq 0$

$$\vec{E}_P = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$$

$$E_{p}=2\frac{\frac{E_{i}}{2}}{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}\sin \frac{N\Delta \varphi}{2}$$

$$=E_{i}\frac{\sin N\beta}{\sin \beta}$$

$$E_p = E_o \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}$$

P点的光强:

当N → ∞时,N个相接的折线将

变为一段圆弧。

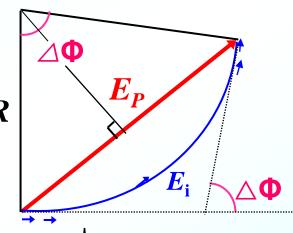
$$\Delta \Phi = N \Delta \varphi$$

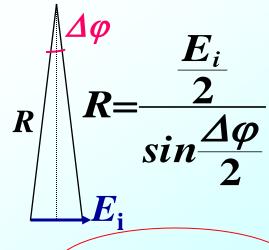
$$\Delta \varphi = \frac{d \sin \theta}{\lambda} 2\pi$$

$$E_p = 2R \sin \frac{\Delta \Phi}{\lambda},$$

$$E_{i} = E_{o} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$\beta = \frac{\Delta \varphi}{2} = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$
单缝衍射因子





多缝干涉因子

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

5. 光强分布

1) 明纹(主极大)条件:



$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

$$\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} = N$$

干涉取极大值



$$\beta = \frac{\Delta \varphi}{2} = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$



$$\rightarrow$$
 $dsin\theta = \pm k\lambda$

$$k = 0,1,2,3...$$

光栅公式

2) 暗纹(干涉极小)条件: $sin\beta≠0$ $sinN\beta=0$

$$N\beta = \pm k'\pi \quad k' = 1,2,\cdots \quad \beta = \pm \frac{k'}{N}\pi \quad k' \neq N,2N,3N,\cdots$$

$$d\sin\theta = \pm \frac{k'}{N}\lambda = \pm (k + \frac{m}{N})\lambda \quad k = 0,1,2,3...$$

$$m = 1,2,3...N-1$$

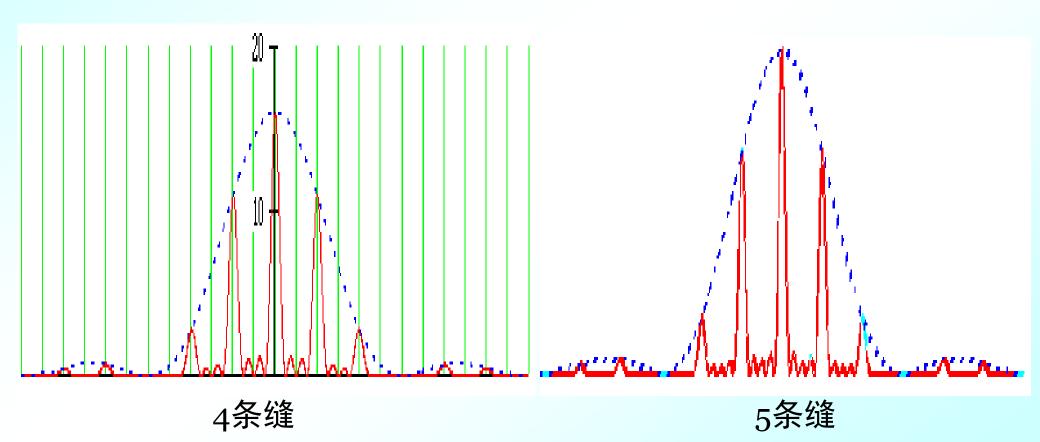
相邻主极大间有N-1个暗纹

- ✓ 可由衍射条纹确定光栅数
- 次极大: 相邻两个极小之间应有一个次极大, 相邻主极大之间有N-2个次极大.

光强太弱 观察不到

$$\begin{cases} dsin\theta = \pm k\lambda & (k=0,1,2\cdots) & ---- 干涉 主极大 \\ dsin\theta = \pm (k+\frac{m}{N})\lambda & m=1,2,3...N-1 & ---- 干涉 极小 \end{cases}$$

相邻两条明纹间有N-1个极小,有N-2个次极大。



4) 光强曲线

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

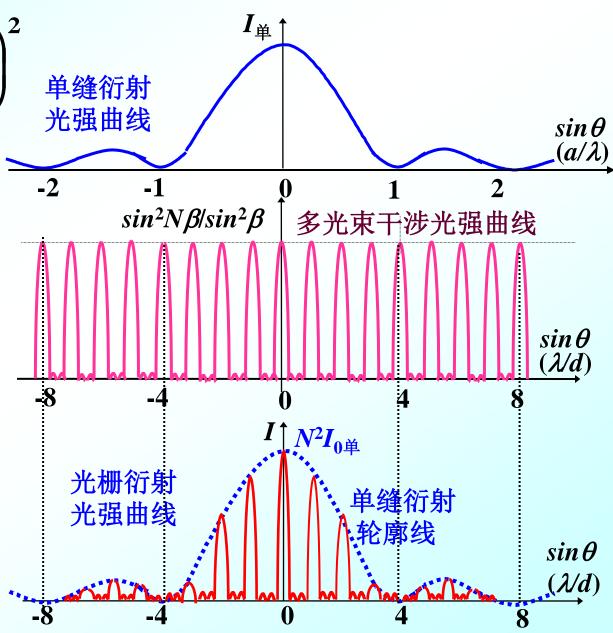
是单缝衍射调制的结果

5) 缺级现象:

$$\begin{cases} d\sin\theta = \pm k'\lambda \\ a\sin\theta = \pm k\lambda \end{cases}$$

$$k' = k\frac{d}{a} = 整数$$

$$k' 为缺级$$



6) 最高级次

$$d\sin\theta = \pm k\lambda$$

$$\overline{\mathbb{m}}: \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{d}{\lambda} < k < \frac{d}{\lambda}$$

即:
$$-1 < \sin \theta < 1$$

$$|k_{\text{max}}| < \frac{d}{\lambda}$$
 取小于此值的整数。

◆ 斜入射比垂直入射可以观察到更高级次的主极大。

例:波长为 *λ* = 590nm的平行光垂直入射到每毫米 500条刻痕的光栅上时,屏幕上最多可以看到多少条明纹?

解: 光栅常数
$$d=\frac{1}{500}=2000$$
nm

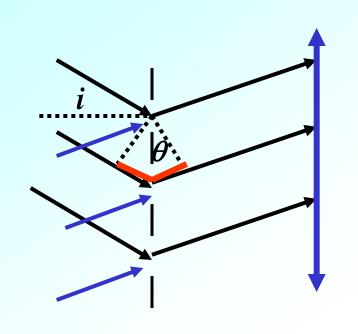
 $dsin\theta=\pm k\lambda$ $k=0,1,\cdots$ 明纹

$$\theta = \pm 90$$
时 $dsin90^0 = \pm k\lambda$

$$k = \pm \frac{d}{\lambda} = \pm \frac{2000}{590} = \pm 3 \cdot 4 \Longrightarrow \pm 3$$

故, 最多可以看到 2×3+1=7 条明纹

例:在上题条件下,平行光斜入射 $i=30^{\circ}$ 时,屏幕上最多可以看到哪些条明纹? $d\sin\theta=\pm k\lambda$



解: 光栅方程为

 $dsin\theta+dsini=\pm k\lambda$ $k=0,1\cdots$ 明纹

当
$$\theta$$
=+90⁰时
 $d(sin90^{0}+sin30^{0})=k\lambda$
 $k=5\cdot 1 \Rightarrow 5$ 级

当
$$\theta$$
=-90⁰时
 $d[sin(-90^0)+sin30^0]=-k\lambda$

$$-k = -1 \cdot 6 \Rightarrow -1$$
级

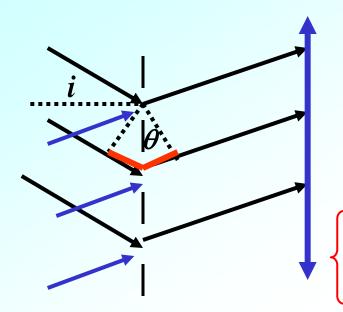
最多见到7条,上方5条,下方1条。

注意: 平行光 / 斜入射时,光栅方程为

 $dsin\theta$ — $dsini=\pm k\lambda$ $k=0,1\cdots$ 明纹

最多见到7条,上方1条,下方5条。

问题: 此时如何考虑缺级?



解: 光栅方程为

 $dsin\theta+dsini=\pm k\lambda$ k=0,1 明纹

此即主极大。

故,所缺级次k'须同时满足:

 $d(sin\theta+sini)=\pm k'\lambda \quad k=0,1\cdots \\ ---干涉极大$ $a(sin\theta+sini)=\pm k\lambda \quad k=1,2,\cdots$

----衍射极小

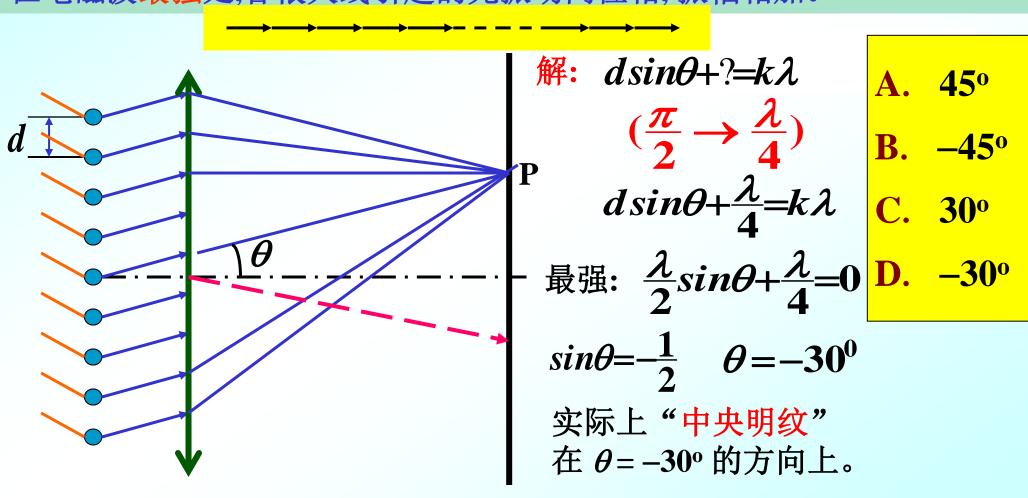
$$|k'=k\frac{d}{a}|=$$

与垂直入射时的缺级公式一样。



例:天线列阵由一沿水平直线等距排列的 N 个天线组成,每个天线均发射波长为 λ 的球面电磁波,但从第一个天线到第 N 个天线,位相依次落后 $\pi/2$,若相邻天线中心间的距离 $d=\lambda/2$,问:离天线很远处什么方向上(与天线列阵的法线夹角 $\theta=?$),天线列阵发射的电磁 波最强?

在电磁波最强处,各根天线引起的光振动同位相,振幅相加。



6) 主极大的半角宽

定义: 主极大的中心到邻近极小的角距离为它的半角宽。

k主极大: $dsin\theta_k = k\lambda$

邻近极小: $dsin(\theta_k + \Delta \theta_k) = (k + \frac{1}{N})\lambda$

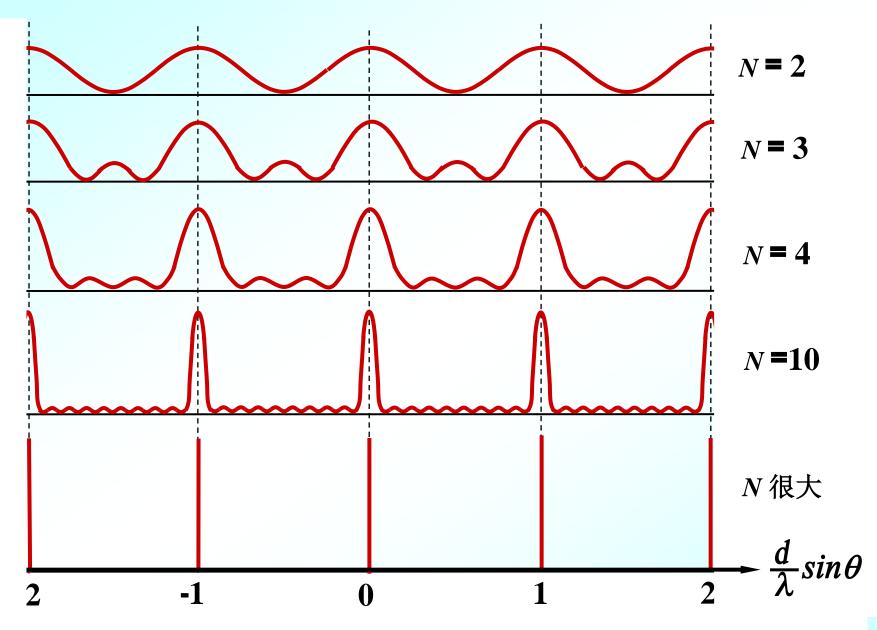
两式相减可得: $\Delta\theta_k = \frac{\lambda}{Ndcos}$

N为缝数,d为缝间距, $\Delta \theta_k$ 为k级主极大的半角宽度

 $\Delta \theta_k$

d一定时,缝数越多:主极大条纹越尖细、越亮

中央主极大: $\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}$



N 增大, 主极大条纹变亮变窄, 次极大数目变多而相对强度变小。

6. 光栅的色散

1) 光栅光谱

$$dsin\theta = \pm k\lambda$$

$$(k=0,1,2\cdots)$$
 ——干涉主极大

白光照射k=0级主极大外,其余各级主极大对不同波长的

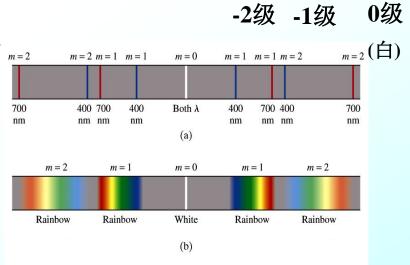
——色散

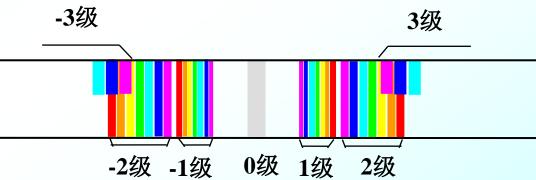
光波,在不同的衍射角出现。

即: d一定、k一定, λ^{\uparrow} 、 θ^{\uparrow}

各级主极大按<mark>波长顺序</mark> 排列形成光谱。

一一光栅光谱 "-2





2) 光栅的色散本领

把不同波长的光在谱线上分开的能力

设: 波长 λ 的谱线, 衍射角 θ , 位置x;

波长 $\lambda+\Delta\lambda$ 的谱线,衍射角 $\theta+\Delta\theta$,位置 $x+\Delta x$

线色散本领:

$$D_{\theta} \equiv \frac{\Delta \theta}{\Delta \lambda}$$

$$D_l \equiv \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$D_l = f \cdot D_{\theta}$$

 $D_{\theta} \equiv \frac{\Delta \theta}{\Delta \lambda}$ $D_{l} = f \cdot D_{\theta}$ $D_{l} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta \lambda}$ f—光栅后的透镜焦距

曲:
$$dsin\theta = k\lambda$$

两边求微

$$\cos\theta \cdot \Delta\theta = k \frac{\Delta\lambda}{d}$$

由:
$$dsin\theta = k\lambda$$
 两边求微 $cos\theta \cdot \Delta\theta = k\frac{\Delta\lambda}{d}$ 得: $D_{\theta} = \frac{k}{dcos\theta}$ $D_{l} = \frac{kf}{dcos\theta}$

$$D_l = \frac{k f}{d \cos \theta_k}$$

- (1) $k\uparrow$ 、 $\theta_k\uparrow$, $\cos\theta_k\downarrow$, 则 $D\uparrow$ 级次较高的色散本领大
 - (2) $d\downarrow$,则 $D\uparrow$, 光栅常数越小,谱线展得越开

3) 光栅的分辨率

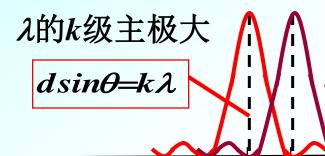
设入射波长为 λ 和 λ + $\Delta\lambda$ 时,二者的谱线刚能分开

光栅分辨率:
$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda}$$

对一给定光栅 R = ?

不能分辨

□ 瑞利判据: 一谱线的中央极大恰与另一谱线的 第一极小重合时两谱线恰能被分辨



λ+Δλ的 k级主极大

 $\Delta \theta = \Delta \theta_k$

两波长差为△λ时,则角色散:

$$\Delta \theta = D_{\theta} \cdot \Delta \lambda = \frac{k}{d \cos \theta_{k}} \Delta \lambda$$

主极大半角宽为:

$$\Delta\theta_k = \frac{\lambda}{Ndcos\theta_k}$$



 $d\theta < \Delta\theta$

$$D_{\theta} = \frac{\Delta \theta}{\Delta \lambda} = \frac{k}{d \cos \theta_{k}}$$

联立求得:

R = kN

能分辨

光栅分辨率

光栅的分辨本领:
$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = kN$$

例如,对Na双线:

$$\lambda_1 = 5890 \text{Å},$$

$$\lambda_2 = \lambda + \Delta \lambda = 5896 \text{Å}$$

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{5890}{6} \approx 982 = Nk$$

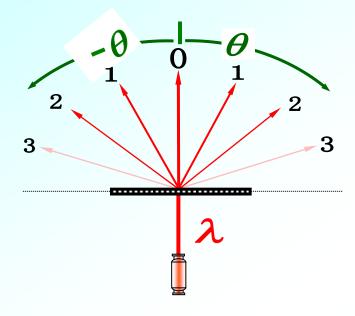
$$k=1, N \geq 982$$
,可分辨开 Na 双线

$$k=2, N \geq 491$$
,可分辨开 Na 双线

$$k=3, N \ge 327$$
,可分辨开 Na 双线

讨论

由光栅方程 $d\cdot\sin\theta = \pm k\lambda$ $(k=0,1,2,\cdots)$



有 $sin\theta = \pm k\frac{\lambda}{d}$

 λ/d 并非取任何比值都能观察到衍射现象。

1.若 $\frac{\lambda}{d}$ >1 即 λ >d 则 $|sin\theta|$ >k

除k=0外,看不到任何衍射级次。 可见光最短波长为 4×10^{-4} mm, 若光栅常数 $d<4\times10^{-4}$ mm, 即若刻线密度 高于2500条/mm, 则观察不到衍射现象。

2.若 $\frac{\lambda}{d}$ <**1** 即 λ <**d**

以至各级次的衍射角太小,各级谱 线<mark>距零级太近</mark>,仪器无法分辨,也 观察不到衍射现象。

测验

1. 在单缝夫朗和费衍射中, 衍射角越大(级数越高)的那些明纹的亮度是越大还是越小? 用半波带法加以解释。

