运 筹 学

Operations Research (OR)

讲师： 王 博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email： wb8517@hust.edu.cn QQ：2734802827

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第3章 对偶问题和灵敏度分析

第3章 对偶问题和灵敏度分析

第1节 单纯形法的矩阵描述

第2节 线性规划的对偶理论

第3节 对偶问题的经济解释

第4节 对偶单纯形法

第5节 灵敏度分析

3.1 单纯形法的矩阵描述

3.1.1 矩阵描述

3.1.2 矩阵单纯形法

给定线性规划问题：

目标函数 $\max z = \boldsymbol{CX}$;

约束条件 $\boldsymbol{AX} \leq \boldsymbol{b}$;

非负条件 $\boldsymbol{X} \geq \boldsymbol{0}$。

在约束条件中加入松弛变量$\boldsymbol{X_s} = \left(\boldsymbol{x_{s_1}}, \boldsymbol{x_{s_2}}, \dots, \boldsymbol{x_{s_n}}\right)^{\boldsymbol{T}}$以后，它对应的目标函数中的系数$\boldsymbol{C_s} = \boldsymbol{0}$，得到标准型：

$$\max \boldsymbol{z} = \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{C_s X_s}; \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{IX_s} = \boldsymbol{b}; \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X_s} \geq \boldsymbol{0}$$

这里I是$m \times m$单位矩阵。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1.1 矩阵描述

$$\max z = \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{C_s X_s}; \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{IX_s} = \boldsymbol{b}; \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X_s} \geq \boldsymbol{0}$$

这时将系数矩阵$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I})$分为$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N})$两块。$\boldsymbol{B}$是基变量的系数矩阵，$\boldsymbol{N}$是非基变量的系数矩阵。决策变量被分为：

$$(X, X_s) = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$

同时将目标函数的系数$(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C_s})$分为$\boldsymbol{C_B}, \boldsymbol{C_N}$两部分，分别对应于基变量$\boldsymbol{X_B}$和非基变量$\boldsymbol{X_N}$，记作$(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C_s}) = (\boldsymbol{C_B}, \boldsymbol{C_N})$。

不论是初始状态，还是迭代后的关系式，都可以用矩阵表述：

目标函数： $$\max\ z = (C_B, C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = C_B X_B + C_N X_N$$

约束条件： $$(B, N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = BX_B + NX_N = b$$

非负条件： $$X_B, X_N \geq 0$$

由$BX_B+NX_N=b$可以得到：$BX_B=b-NX_N$，

上式两边同时左乘B^{-1}，可以得到：$X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N$，

代入目标函数，可得：
$$\begin{aligned} z &= C_B X_B + C_N X_N \\ &= C_B(B^{-1}b - B^{-1}N\,X_N) + C_N X_N \\ &= C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N \end{aligned}$$

令非基变量$X_N=0$，可以得到

基可行解：$X^{(1)}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$，目标函数值：$z=C_BB^{-1}b$。

$$\left.\begin{aligned} &\text{对应于}X_N\text{的检验数为：} C_N - C_B B^{-1}N \\ &\text{对应于}X_B\text{的检验数为：} C_B - C_B B^{-1}B = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow C - C_B B^{-1}A$$

θ规则可以表示为：

$$\theta = \min\left[\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i}\middle|(B^{-1}P_k)_i > 0\right] = \frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_k)_l}$$

这里的$(B^{-1}b)_i$表示$(B^{-1}b)$中的第i个元素，换入变量x_k对应的列向量是$(B^{-1}P_k)$，$(B^{-1}P_k)_l$表示向量$(B^{-1}P_k)$中的第l个元素，对应的换出变量是x_l。

单纯形表迭代的矩阵表示：

	基变量X_B	非基变量X_N		等式右边 RHS
系数矩阵	$B^{-1}B = I$	$B^{-1}N$	$B^{-1}P_{s_j}$	$B^{-1}b$
检验数	$C_B - C_B B^{-1}B = 0$	$C_N - C_B B^{-1}N$	$(-C_B B^{-1})_j$	$-C_B B^{-1}b$

3.1 单纯形法的矩阵描述

3.1.1 矩阵描述

3.1.2 矩阵单纯形法

- 当用单纯形表求解线性规划问题时，每行每列的数字都要计算，而有些行列的数字在下一步计算时并不需要。
- 改进单纯形法通过矩阵运算求解线性规划问题的关键是计算B^{-1}。
- 以下介绍一种比较简便的计算B^{-1}的方法。

设有$m\times m$系数矩阵A，求其逆矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

可以先从第1列开始，以a_{11}为主元素，进行变换：

$$P_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}^{\text{主元素}} \Rightarrow \quad \xi_1=\begin{bmatrix} 1/a_{11} \\ -a_{21}/a_{11} \\ \vdots \\ -a_{m1}/a_{11} \end{bmatrix}$$

1.2 矩阵单纯形法

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}^{主元素} \Rightarrow \xi_1 = \begin{bmatrix} 1/a_{11} \\ -a_{21}/a_{11} \\ \vdots \\ -a_{m1}/a_{11} \end{bmatrix}$$

然后构造含有ξ_1列，而其它列都是单位阵的矩阵：

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{m1}/a_{11} & & & 1 \end{pmatrix}$$

从而得到：

$$E_1P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad E_1A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1m}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2m}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mm}^{(1)} \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{1j}\frac{1}{a_{11}}, \mathrm{i}=1 \\ a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} - a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}, \mathrm{i} \ge 1 \end{aligned}$$

以E_1A第2列的$a_{22}^{(1)}$为主元素，进行变换：

$$P_2^{(1)}=\begin{pmatrix} a_{12}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{m2}^{(1)} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \xi_2=\begin{bmatrix} -a_{12}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \\ 1/a_{22}^{(1)} \\ \vdots \\ -a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \end{bmatrix}$$

构造含有ξ_2列，而其它列都是单位阵的矩阵：

$$E_2=\begin{pmatrix} 1 & -a_{12}^{(1)}/a_{22}^{(1)} & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22}^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

从而得到：

$$E_2P_2^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};\quad E_2E_1A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1m}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2m}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \cdots & a_{mm}^{(2)} \end{pmatrix};$$

$$a_{ij}^{(2)}=a_{2j}^{(1)}\frac{1}{a_{22}^{(1)}},\mathrm{i}=2$$

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-a_{2j}^{(1)}\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},\mathrm{i}\neq 2$$

上述过程反复进行，直到获得：

$$E_m \cdots E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = E_m \cdots E_2 E_1$$

用该方法可以求得单纯形表基矩阵$\boldsymbol{B}$的逆矩阵$\boldsymbol{B}^{-1}$。以下用例子说明具体计算过程。

例 用矩阵单纯形法求解线性规划问题：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

第1步：确定初始基，初始基变量

$$B_0=(P_3,\quad P_4,\quad P_5)=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix};\quad X_{B_0}=\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$$

第2步：计算非基变量(x_1,x_2)的检验数，确定换入变量。

$$\sigma_{N_0}=C_{N_0}-C_{B_0}B_0^{-1}N_0\quad (\text{注意：}N_0=(P_1,P_2))$$

$$=(2,\quad 3)-(0,0,0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\4&0\\0&4\end{pmatrix}$$

$$=(2,\quad 3)\Rightarrow_{\text{对应}}(x_1,x_2),\ \text{选定}x_2$$

第3步：确定换出变量，计算：

$$\theta=\min\left(\frac{\left(B_0^{-1}b\right)_i}{\left(B_0^{-1}P_2\right)_i}\middle|B_0^{-1}P_2>0\right)=\min\left(\frac{8}{2},\frac{16}{0},\frac{12}{4}\right)=3\Rightarrow\quad\text{选定}x_5$$

第4步：基变换计算，确定P_2中的4为主元素，

$$B_0^{-1}P_2=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}_{\text{主元素}} \Rightarrow \xi_1=\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/4\end{pmatrix};\ \text{构造}\ E_1=\begin{pmatrix}1 & & -1/2\\ & 1 & 0\\ & & 1/4\end{pmatrix}$$

$$\underset{(P_3,P_4,P_2)}{B_1=\begin{pmatrix}1 & & 2\\ & 1 & 0\\ & & 4\end{pmatrix}} \Rightarrow\quad B_1^{-1}=E_1B_0^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & -1/2\\ & 1 & 0\\ & & 1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & -1/2\\ & 1 & 0\\ & & 1/4\end{pmatrix}$$

第5步：计算非基变量的系数矩阵和等式右边RHS，

$$N_1=\begin{pmatrix}1&0\\4&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B_1^{-1}N_1=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\4&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1/2\\4&0\\0&1/4\end{pmatrix}\quad B_1^{-1}b=\begin{pmatrix}1 & & -1/2\\ & 1 & 0\\ & & 1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\16\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\16\\3\end{pmatrix}$$

第1次迭代后得到如下结果：

$$基\ B_1=(P_3,P_4,P_2);$$

$$基变量\ X_{B_1}=(x_3,x_4,x_2)^T;$$

$$非基变量\ X_{N_1}=(x_1,x_5)^T;$$

$$价值系数\ C=(C_{B_1},C_{N_1})=((0,0,3),(2,0))$$

第2次迭代，重复上面的计算步骤，从新的基B_1，基变量X_{B_1}开始。

第1步，计算非基变量(x_1,x_5)检验数，确定换入变量：

$$\sigma_{N_1}=C_{N_1}-C_{B_1}B_1^{-1}N_1 \quad (注意：N_1=(P_1,P_5))$$

$$=(2,\quad 0)-(0,0,3)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=(2,\quad -3/4)\Rightarrow_{对应}(x_1,x_5)，\ 选定x_1$$

第2步，确定换出变量：

$$\theta=\min\left(\frac{\left(B_1^{-1}b\right)_i}{\left(B_1^{-1}P_1\right)_i}\middle|B_1^{-1}P_1>0\right)=\min\left(\frac{2}{1},\frac{16}{4},-\right)=2\quad\Rightarrow 选定x_3$$

第3步，基变换计算，选定主元素为P_1中的1：

$$B_1^{-1}P_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}\text{主元素}\quad\Rightarrow\quad\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix};\qquad 构造\ E_2=\begin{pmatrix}1&&\\-4&1&\\0&&1\end{pmatrix}$$

$$B_2=\begin{pmatrix}1&&2\\4&1&0\\0&&4\end{pmatrix}\Rightarrow\quad B_2^{-1}=E_2B_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\\-4&1&\\0&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&-1/2\\&1&0\\&&1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&-1/2\\-4&1&2\\0&&1/4\end{pmatrix}$$

$$(P_1,P_4,P_2)$$

第4步：计算等式右边RHS， $B_2^{-1}b=\begin{pmatrix}1&&-1/2\\-4&1&2\\0&&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\16\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\3\end{pmatrix}$

第三次迭代，

计算非基变量(x_3,x_5)的检验数，

$$\sigma_{N_2}=C_{N_2}-C_{B_2}B_2^{-1}N_2 \quad (\text{注意：} N_2=(P_3,P_5))$$

$$=(0,\quad 0)-(2,0,3)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ -4 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=(-2,\quad 1/4)\Rightarrow_{\text{对应}}(x_3,x_5)\quad \Rightarrow \text{选定x}_5$$

确定换出变量：

$$\theta=\min\left(\frac{(B_2^{-1}b)_i}{(B_2^{-1}P_5)_i}\middle| B_2^{-1}P_5>0\right)$$

$$=\min\left(-,\frac{8}{2},\frac{3}{1/4}\right)=4\quad\Rightarrow \text{对应}x_4$$

基变换，

$$B_2^{-1}P_5=\begin{pmatrix}-1/2\\2\\1/4\end{pmatrix}\text{主元素}\Rightarrow\ \xi_3=\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\-1/8\end{pmatrix};\quad \text{构造}\ E_3=\begin{pmatrix}1&1/4&\\&1/2&\\&-1/8&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{(P_1,P_5,P_2)}{B_3=\begin{pmatrix}1&&2\\4&&0\\0&1&4\end{pmatrix}}\Rightarrow B_3^{-1}=E_3B_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&1/4&0\\0&1/2&0\\0&-1/8&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/4&0\\-2&1/2&1\\1/2&-1/8&0\end{pmatrix}$$

$$\Uparrow$$

$$B_2^{-1}B_3=\begin{pmatrix}1&-1/2&0\\0&2&0\\0&1/4&1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow E_3B_2^{-1}B_3=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=I\ \Rightarrow E_3=\begin{pmatrix}1&1/4&\\&1/2&\\&-1/8&1\end{pmatrix}$$

$$(B_2^{-1}P_1,B_2^{-1}P_5,B_2^{-1}P_2)$$

$$\Uparrow$$

$$E_3B_2^{-1}B_3B_3^{-1}=IB_3^{-1}$$

计算非基变量(x_3, x_4)的检验数，

$$\sigma_{N_3} = C_{N_3} - C_{B_3} B_3^{-1} N_3 \qquad \text{注意：} N_3 = \left(P_3, P_4\right)$$

$$= \left(0, \quad 0\right) - (2,0,3) \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(-3/2, \quad -1/8\right) \to \text{已无正检验数}$$

得到最优解和最优目标函数值：

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_2 \end{pmatrix} = B_3^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z^* = C_B B_3^{-1} b = \left(2,0,3\right) \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 14$$

运 筹 学

Operations Research (OR)

讲师： 王 博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email： wb8517@hust.edu.cn QQ：2734802827

第3章 对偶问题和灵敏度分析

第3章 对偶问题和灵敏度分析

第1节 单纯形法的矩阵描述

第2节 线性规划的对偶理论

第3节 对偶问题的经济解释

第4节 对偶单纯形法

第5节 灵敏度分析

3.2 线性规划的对偶理论

3.2.1 对偶问题的提出

3.2.2 原问题与对偶问题的关系

3.2.3 对偶问题的基本性质

2.1 对偶问题的提出

对偶是什么： 对同一事物（或问题），从不同的角度（或立场）提出对立的两种不同的表述。

例如，矩形的面积与其周长之间的关系，有两种不同的表述方法。

（1）周长一定，面积最大的矩形是正方形。

（2）面积一定，周长最短的矩形是正方形。

这是互为对偶关系的表述。

线性规划问题也有对偶关系。

例 某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原材料的消耗，如表所示

产品	Ⅰ	Ⅱ	现有
设备	1	2	8台时
原料A	4	0	16kg
原料B	0	4	12kg
利润	2元/件	3元/件	

2.1 对偶问题的提出

产品	Ⅰ	Ⅱ	现有
设备	1	2	8台时
原料A	4	0	16kg
原料B	0	4	12kg
利润	2元/件	3元/件	

- 假设该工厂的决策者决定不生产产品Ⅰ,Ⅱ,而将其所有资源出租或外售。这时工厂的决策者就要考虑给每种资源如何定价的问题
- 设用y_1，y_2，y_3分别表示出租单位设备台时的租金和出让单位原材料A，B的附加额。他在做定价决策时，做如下比较：
- 若用1个单位设备台时和4个单位原材料A可以生产一件产品Ⅰ，可获利2元，那么生产每件产品Ⅰ的设备台时和原材料出租或出让的所有收入应不低于生产一件产品Ⅰ的利润，这就有 $y_1 + 4y_2 \geq 2$
- 同理将生产每件产品Ⅱ的设备台时和原材料出租或出让的所有收入应不低于生产一件产品Ⅱ的利润，这就有$2y_1 + 4y_3 \geq 3$
- 把工厂所有设备台时和资源都出租或出让，其收入为

$$\omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

2.1 对偶问题的提出

- 把工厂所有设备台时和资源都出租或出让，其收入为

$$\omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

- 从工厂的决策者来看当然ω愈大愈好；但受到接受方的制约，从接受者来看他的支付愈少愈好，所以工厂的决策者只能在满足大于等于所有产品的利润条件下，提出一个尽可能低的出租或出让价格，才能实现其原意，为此需解如下的线性规划问题

$$\min \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 4y_3 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + \quad \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

它是第2章中原线性规划问题的对偶问题

2.1 对偶问题的提出

对于线性规划问题

$$\max z = CX, AX \leq b, X \geq 0,$$

将其化为标准型

$$\max z = CX, AX + X_s = b, X, X_s \geq 0,$$

其单纯形表应为

X_B	b	X	X_s
基变量	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$	B^{-1}
	$-C_BB^{-1}b$	$C - C_BB^{-1}A$	$-C_BB^{-1}$

在上面单纯形表中，当检验数$C - C_BB^{-1}A \leq 0, -C_BB^{-1} \leq 0$时，原问题得到最优解。

若令$Y = C_B B^{-1}$，则上式为

$$\begin{cases} YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

由$Y = C_B B^{-1}$，可得$Yb = C_B B^{-1} b = z$。若$C \geq 0$，而Y的上界为无穷大，则目标函数只存在最小值。

由此可得一组线性规划：

$$\min \omega = Yb \qquad\qquad \max z = CX$$

$$\begin{cases} YA \geq C \quad (**) \\ Y \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} AX \leq b \quad (*) \\ X \geq 0 \end{cases}$$

称 (**) 为(*)的**对偶规划**。

$$\min \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3 \qquad\qquad \max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \qquad\quad \geq 2 \\ 2y_1 \qquad + 4y_3 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad \leq 8 \\ 4x_1 + \qquad\quad \leq 16 \\ \qquad 4x_2 \qquad \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.2 线性规划的对偶理论

3.2.1 对偶问题的提出

3.2.2 原问题与对偶问题的关系

3.2.3 对偶问题的基本性质

2.2 原问题与对偶问题的关系

标准型问题与对偶问题的关系（对称形式）

原问题（Primal Problem）：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0$$

对偶问题（Dual Problem）：

$$\min \omega = y_1b_1 + y_2b_2 + \cdots + y_\mathrm{m}b_m$$

$$(y_1, y_2, \cdots, y_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \ge (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_m \ge 0$$

标准型问题与对偶问题的关系（对称形式）

y_i, x_j	x_1	x_2		x_n	原关系	$\min \omega$
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$\le$	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	$\le$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$\le$	b_m
对偶关系	$\ge$	$\ge$	$\cdots$	$\ge$		
$\max z$	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	$\max z =$	$\min \omega$

上表是将原问题与对偶问题的关系汇总于一个表中，从正面看是原问题，将它转90°后看是对偶问题。

2.2 原问题与对偶问题的关系

根据下表写出原问题与对偶问题的表达式

y \ X	x_1	x_2	b
y_1	1	2	8
y_2	4	0	16
y_3	0	4	12
c	2	3	

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 \qquad \min \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 4y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 4y_3 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

2.2 原问题与对偶问题的关系

一对对称形式的对偶规划之间具有下面的对应关系

（1）若一个模型为目标求“极大”，约束为“小于等于”的不等式，则它的对偶模型为目标求“极小”，约束是“大于等于”的不等式。即“max，$\leqslant$”和“min，$\geqslant$”相对应。

（2）从约束系数矩阵看：一个模型中为A，则另一个模型中为A^T。一个模型是m个约束，n个变量，则它的对偶模型为n个约束，m个变量。

（3）从数据b, C的位置看：在两个规划模型中，b和C的位置对换。

（4）两个规划模型中的变量皆非负。

非标准型问题与对偶问题的关系（对称形式）

原问题的约束条件中含有等式约束条件时，按以下步骤处理。

设等式约束条件的线性规划问题：

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i=1,2,\cdots,m \\ x_j \ge 0,\ j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

第一步：先将等式约束条件分解为两个不等式约束条件。

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad i=1,2,\cdots,m \quad (2-13) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad i=1,2,\cdots,m \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le -b_i \quad i=1,2,\cdots,m \quad (2-14)\end{cases}$$

2.2 原问题与对偶问题的关系

第一步：先将等式约束条件分解为两个不等式约束条件。

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad i=1,2,\cdots,m \quad (2-13) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad i=1,2,\cdots,m \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le -b_i \quad i=1,2,\cdots,m \quad (2-14) \end{cases}$$

第二步：按对称形式变换关系可写出它的对偶问题。

设y_i'是对应(2-13)式的对偶变量，y_i''是对应(2-14)式的对偶变量，这里$i=1,2,\ldots,m$，

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i' + \sum_{i=1}^{m} \left(-b_i y_i''\right)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^{m} \left(-a_{ij} y_i''\right) \ge c_j, \; j=1,2,\cdots,n \\ y_i', y_i'' \ge 0, \quad i=1,2,\cdots,m \end{cases}$$

2.2 原问题与对偶问题的关系

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i' + \sum_{i=1}^{m} \left(-b_i y_i''\right)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^{m} \left(-a_{ij} y_i''\right) \geq c_j, j = 1, 2, \cdots, n \\ y_i', y_i'' \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m \end{cases}$$

将上面的线性规划问题整理后得到

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i \left(y_i' - y_i''\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \left(y_i' - y_i''\right) \geq c_j, \qquad y_i', y_i'' \geq 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

令$\boldsymbol{y_i = (y_i' - y_i''), y_i', y_i'' \geq 0}$，得到 $\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ y_i \text{ 为无约束}, \quad i = 1, 2, \cdots, m \end{cases}$$

非对称形式的对偶规划

一般称不具有对称形式的一对线性规划为非对称形式的对偶规划。对于非对称形式的规划，可以按照下面的对应关系直接给出其对偶规划。

（1）将模型统一为“max，≤”或“min，≥”的形式，对于其中的等式约束按下面（2）、（3）中的方法处理；

（2）若原规划的某个约束条件为等式约束，则在对偶规划中与此约束对应的那个变量取值没有非负限制；

（3）若原规划的某个变量的值没有非负限制，则在对偶问题中与此变量对应的那个约束为等式。

2.2 原问题与对偶问题的关系

原问题是“max, ≥”形式的线性规划问题（非对称形式）：

原问题：
$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$
$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i, & i=1,2,\cdots,m\\ x_j\ge 0, j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$
$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}-a_{ij}x_j\le -b_i, & i=1,2,\cdots,m\\ x_j\ge 0, j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\min \omega=\sum_{i=1}^{m}-b_iy'_i$$
$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}-a_{ij}y'_i\ge c_j, & j=1,2,\cdots,n\\ y'_i\ge 0, & i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

$\Leftarrow$

令$y_i=-y'_i$，$y'_i\ge 0$，则$y_i\le 0$

对偶问题：
$$\min \omega=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i$$
$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\ge c_j, & j=1,2,\cdots,n\\ y_i\le 0, & i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

2.2 原问题与对偶问题的关系

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \qquad\qquad \min \omega=\sum_{i=1}^{m}b_i y_i$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i, & i=1,2,\cdots,m\\ x_j\ge 0, j=1,2,\cdots,n\end{cases} \qquad \begin{cases}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\ge c_j, & j=1,2,\cdots,n\\ y_i\ge 0, & i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

原问题（或对偶问题）			对偶问题 （或原问题）		
目标函数 max z			目标函数 min w		
n 个变量	≥ 0	极大的变量	n 个约束	$\ge$	
	≤ 0	与		$\le$	
	无约束	极小的约束		$=$	
		一致			
m 个约束	$\ge$	极大的约束	m 个变量	≤ 0	
	$\le$	与		≥ 0	
	$=$	极小的变量		无约束	
		相反			
约束项右端			目标函数变量的系数		
目标函数变量的系数			约束项右端		

2.2 原问题与对偶问题的关系

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \min \omega=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i=1,2,\cdots,m \\ x_j \ge 0, j=1,2,\cdots,n\end{cases} \qquad \begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j=1,2,\cdots,n \\ y_i \le 0, \quad i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

原问题（或对偶问题）			对偶问题 （或原问题）	
目标函数 max z			目标函数 min w	
n 个变量	≥ 0	极大的变量	n 个约束	$\ge$
	≤ 0	与		$\le$
	无约束	极小的约束 一致		$=$
m 个约束	$\ge$	极大的约束	m 个变量	≤ 0
	$\le$	与		≥ 0
	$=$	极小的变量 相反		无约束
约束项右端			目标函数变量的系数	
目标函数变量的系数			约束项右端	

2.2 原问题与对偶问题的关系

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ y_i \text{ 无约束}, \quad i = 1, 2, \cdots, m \end{cases}$$

<table>
<tr><td colspan="3">原问题（或对偶问题）</td><td colspan="2">对偶问题 （或原问题）</td></tr>
<tr><td colspan="3">目标函数 max z</td><td colspan="2">目标函数 min w</td></tr>
<tr><td rowspan="3">n 个 变 量</td><td>≥0</td><td rowspan="3">极大的变量 与 极小的约束 一致</td><td rowspan="3">n 个 约 束</td><td>≥</td></tr>
<tr><td>≤0</td><td>≤</td></tr>
<tr><td>无约束</td><td>=</td></tr>
<tr><td rowspan="3">m 个 约 束</td><td>≥</td><td rowspan="3">极大的约束 与 极小的变量 相反</td><td rowspan="3">m 个 变 量</td><td>≤0</td></tr>
<tr><td>≤</td><td>≥0</td></tr>
<tr><td>=</td><td>无约束</td></tr>
<tr><td colspan="3">约束项右端</td><td colspan="2">目标函数变量的系数</td></tr>
<tr><td colspan="3">目标函数变量的系数</td><td colspan="2">约束项右端</td></tr>
</table>

例 写出下面线性规划的对偶规划模型

$$\max z = x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 25 \\ 2x_1 + 7x_3 + 2x_4 \geq -60 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 30 \\ -5 \leq x_4 \leq 10, x_1, x_2 \geq 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

2.2 原问题与对偶问题的关系

$$\max z = x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 25 \\ 2x_1 + 7x_3 + 2x_4 \geq -60 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 30 \\ -5 \leq x_4 \leq 10, x_1, x_2 \geq 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

解 先将约束条件变形为"$\leq$"形式：

$$\max z = x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 25 \\ -2x_1 - 7x_3 - 2x_4 \leq 60 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 30 \\ x_4 \leq 10 \\ -x_4 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\min f = 25y_1 + 60y'_2 + 30y_3 + 10y_4 + 5y_5$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y'_2 + 2y_3 \geq 1 \\ 3y_1 + 2y_3 \geq -1 \\ -2y_1 - 7y'_2 - 4y_3 = 5 \\ y_1 - 2y'_2 + y_4 - y_5 = -7 \\ y_1\text{无约束}, y'_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

2.2 原问题与对偶问题的关系

$$\max z = x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 25 \\ 2x_1 + 7x_3 + 2x_4 \geq -60 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 30 \\ -5 \leq x_4 \leq 10, x_1, x_2 \geq 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

令$y_2 = -y'_2$， $y'_2 \geq 0$， 则$y_2 \leq 0$

$$\min f = 25y_1 + 60y'_2 + 30y_3 + 10y_4 + 5y_5$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y'_2 + 2y_3 \geq 1 \\ 3y_1 + 2y_3 \geq -1 \\ -2y_1 - 7y'_2 - 4y_3 = 5 \\ y_1 - 2y'_2 + y_4 - y_5 = -7 \\ y_1\text{无约束}, y'_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min f = 25y_1 - 60y_2 + 30y_3 + 10y_4 + 5y_5$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ 3y_1 + 2y_3 \geq -1 \\ -2y_1 + 7y_2 - 4y_3 = 5 \\ y_1 + 2y_2 + y_4 - y_5 = -7 \\ y_1\text{无约束}, y_2 \leq 0, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

2.2 原问题与对偶问题的关系

$$\max z = x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 25 \\ 2x_1 + 7x_3 + 2x_4 \geq -60 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 30 \\ -5 \leq x_4 \leq 10, x_1, x_2 \geq 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

$$\min f = 25y_1 - 60y_2 + 30y_3 + 10y_4 + 5y_5$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ 3y_1 + 2y_3 \geq -1 \\ -2y_1 + 7y_2 - 4y_3 = 5 \\ y_1 + 2y_2 + y_4 - y_5 = -7 \\ y_1\text{无约束}, y_2 \leq 0, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

<table>
<tr><th colspan="3">原问题（或对偶问题）</th><th colspan="2">对偶问题 （或原问题）</th></tr>
<tr><td colspan="3">目标函数 $\max z$</td><td colspan="2">目标函数 $\min w$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">n 个变量</td><td>≥ 0</td><td rowspan="3">极大的变量与极小的约束一致</td><td rowspan="3">n 个约束</td><td>$\geq$</td></tr>
<tr><td>≤ 0</td><td>$\leq$</td></tr>
<tr><td>无约束</td><td>$=$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">m 个约束</td><td>$\geq$</td><td rowspan="3">极大的约束与极小的变量相反</td><td rowspan="3">m 个变量</td><td>≤ 0</td></tr>
<tr><td>$\leq$</td><td>≥ 0</td></tr>
<tr><td>$=$</td><td>无约束</td></tr>
<tr><td colspan="3">约束项右端</td><td colspan="2">目标函数变量的系数</td></tr>
<tr><td colspan="3">目标函数变量的系数</td><td colspan="2">约束项右端</td></tr>
</table>

2.2 原问题与对偶问题的关系

例 写出下面线性规划的对偶规划模型

$$\max z = x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 25 \\ 2x_1 + 7x_3 + 2x_4 \geq -60 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 30 \\ -5 \leq x_4 \leq 10, \boxed{x_1 \leq 0,} x_2 \geq 0, x_3 \text{没有非负限制} \end{cases}$$

2.2 原问题与对偶问题的关系

$$\max z = x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4$$

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +x_4 & =25 \\ 2x_1 & & +7x_3 & +2x_4 & \geq -60 \\ 2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & & \leq 30 \\ \multicolumn{5}{l}{-5 \leq x_4 \leq 10, x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{无约束}} \end{cases}$$

解 先令$x_1 = -x_1'$：

$$\max z = -x'_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4$$

$$\begin{cases} -x'_1 & +3x_2 & -2x_3 & +x_4 & =25 \\ -2x'_1 & & +7x_3 & +2x_4 & \geq -60 \\ -2x'_1 & +2x_2 & -4x_3 & & \leq 30 \\ & & & x_4 & \leq 10 \\ & & & -x_4 & \leq 5 \\ \multicolumn{5}{c}{x'_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3, x_4 \text{无约束}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\min f = 25y_1 - 60y_2 + 30y_3 + 10y_4 + 5y_5$$

$$\begin{cases} -y_1 & -2y_2 & -2y_3 & & & \geq -1 \\ 3y_1 & & +2y_3 & & & \geq -1 \\ -2y_1 & +7y_2 & -4y_3 & & & =5 \\ y_1 & +2y_2 & & +y_4 & -y_5 & =-7 \\ \multicolumn{6}{l}{y_1 \text{无约束}, y_2 \leq 0, y_3, y_4, y_5 \geq 0} \end{cases}$$

2.2 原问题与对偶问题的关系

$$\max z = x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 25 \\ 2x_1 + 7x_3 + 2x_4 \geq -60 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 30 \\ -5 \leq x_4 \leq 10, x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

第一个约束条件左右同时乘以−1：

$$\min f = 25y_1 - 60y_2 + 30y_3 + 10y_4 + 5y_5$$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 - 2y_3 \geq -1 \\ 3y_1 + 2y_3 \geq -1 \\ -2y_1 + 7y_2 - 4y_3 = 5 \\ y_1 + 2y_2 + y_4 - y_5 = -7 \\ y_1\text{无约束}, y_2 \leq 0, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\min f = 25y_1 - 60y_2 + 30y_3 + 10y_4 + 5y_5$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1 \\ 3y_1 + 2y_3 \geq -1 \\ -2y_1 + 7y_2 - 4y_3 = 5 \\ y_1 + 2y_2 + y_4 - y_5 = -7 \\ y_1\text{无约束}, y_2 \leq 0, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

2.2 原问题与对偶问题的关系

$$\max z = x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 25 \\ 2x_1 + 7x_3 + 2x_4 \geq -60 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 30 \\ -5 \leq x_4 \leq 10, x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

$$\min f = 25y_1 - 60y_2 + 30y_3 + 10y_4 + 5y_5$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1 \\ 3y_1 + 2y_3 \geq -1 \\ -2y_1 + 7y_2 - 4y_3 = 5 \\ y_1 + 2y_2 + y_4 - y_5 = -7 \\ y_1\text{无约束}, y_2 \leq 0, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

<table>
<tr><td colspan="3">原问题（或对偶问题）</td><td colspan="3">对偶问题（或原问题）</td></tr>
<tr><td colspan="3">目标函数 $\max z$</td><td colspan="3">目标函数 $\min w$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">n 个变量</td><td>≥ 0</td><td rowspan="3">极大的变量与极小的约束一致</td><td rowspan="3">n 个约束</td><td>$\geq$</td></tr>
<tr><td>≤ 0</td><td>$\leq$</td></tr>
<tr><td>无约束</td><td>=</td></tr>
<tr><td rowspan="3">m 个约束</td><td>$\geq$</td><td rowspan="3">极大的约束与极小的变量相反</td><td rowspan="3">m 个变量</td><td>≤ 0</td></tr>
<tr><td>$\leq$</td><td>≥ 0</td></tr>
<tr><td>=</td><td>无约束</td></tr>
<tr><td colspan="3">约束项右端</td><td colspan="3">目标函数变量的系数</td></tr>
<tr><td colspan="3">目标函数变量的系数</td><td colspan="3">约束项右端</td></tr>
</table>

例 写出下面线性规划的对偶规划模型

(请同学们动手写一下)

$$\min z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4$$

$$\begin{cases} \quad\ \ 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 4 \\ 2x_1 \quad\quad + 8x_3 - x_4 \leq 6 \\ x_1 \leq 0,\ x_2, x_3 \geq 0,\quad x_4\text{无约束} \end{cases}$$

2.2 原问题与对偶问题的关系

$$\min z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4$$

$$\begin{cases} \quad 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 4 \\ 2x_1 + 8x_3 - x_4 \leq 6 \\ x_1 \leq 0,\ x_2, x_3 \geq 0,\quad x_4\text{无约束} \end{cases}$$

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\max f = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \quad y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ 7y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ +y_1 - 3y_2 + 8y_3 \leq -4 \\ y_1 + y_2 - y_3 = 2 \\ y_1\text{无约束}, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

3.2 线性规划的对偶理论

3.2.1 对偶问题的提出

3.2.2 原问题与对偶问题的关系

3.2.3 对偶问题的基本性质

2.3 对偶问题的基本性质

1) 对称性：对偶问题的对偶是原问题；
2) 弱对偶性：若$\bar{X}$是原问题的可行解，$\bar{Y}$是对偶问题的可行解，则存在$C\bar{X} \le \bar{Y}b$；
3) 无界性：若原问题(对偶问题)为无界解，则其对偶问题(原问题)无可行解；
4) 可行解是最优解时的性质；
5) 对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等；
6) 互补松弛性；
7) 原问题检验数与对偶问题解的关系。

1）对称性：对偶问题的对偶是原问题

证明：设原问题是

$$\max z = CX, AX \le b, X \ge 0,$$

根据对偶问题的对称变换关系，可以找到它的对偶问题是

$$\min \omega = Yb, YA \ge C, Y \ge 0,$$

若将上式两边取负号，又因$\min \omega = \max\,(-\omega)$，可得到

$$\max(-\omega) = -Yb, -YA \le -C, Y \ge 0,$$

根据对称变换关系，上面的极大化问题有对偶问题：

$$\min(-\omega') = -CX, -AX \ge -b, X \ge 0,$$

又因$\min(-\omega') = \max \omega'$，可得

$$\max \omega' = \max z = CX, AX \le b, X \ge 0,$$

即对偶的对偶得到了原问题。

2）**弱对偶性：** 若$\bar{X}$是原问题的可行解，$\bar{Y}$是对偶问题的可行解，则存在$C\bar{X} \le \bar{Y}b$;

证明： 设原问题是：$\max z = CX, AX \le b, X \ge 0,$

因$\bar{X}$是原问题的可行解，所以满足约束条件，即

$$A\bar{X} \le b$$

若$\bar{Y}$是对偶问题的可行解，将$\bar{Y}$左乘上式，得

$$\bar{Y}A\bar{X} \le \bar{Y}b$$

原问题的对偶问题是：$\min \omega = Yb, YA \ge C, Y \ge 0,$

因$\bar{Y}$是对偶问题的可行解，满足$\bar{Y}A \ge C$

将$\bar{X}$右乘上式，得

$$\bar{Y}A\bar{X} \ge C\bar{X}$$

于是就可以得到

$$C\bar{X} \le \bar{Y}A\bar{X} \le \bar{Y}b$$

3）无界性：若原问题(对偶问题)为无界解，则其对偶问题(原问题)无可行解；

证明：弱对偶性显然可得，最大化的上界是最小化的下界，若最大化不存在上界，则最小化无可行解。

注意：这个问题的性质不存在逆。当原问题(对偶问题) 无可行解时, 其对偶问题(原问题)或具有无界解或无可行解。

考察如下一对问题，两者皆无可行解：

原问题（对偶问题）	对偶问题（原问题）
$\min \omega = -x_1 - x_2$	$\max z = y_1 + y_2$
$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ -x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1 - y_2 \le -1 \\ -y_1 + y_2 \le -1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

4）**可行解是最优解时的性质：** 设$\hat{X}$是原问题的可行解，$\hat{Y}$是对偶问题的可行解，当$C\hat{X}=\hat{Y}b$时，$\hat{X},\hat{Y}$是最优解。

证明： 根据弱对偶性，对偶问题的所有可行解$\bar{Y}$都存在

$$\bar{Y}b \geq C\hat{X}$$

若$C\hat{X}=\hat{Y}b$，则

$$\bar{Y}b \geq C\hat{X} = \hat{Y}b$$

从而$\hat{Y}$是使目标函数取到最小值的可行解，即对偶问题最优解；

类似地，对于原问题的所有可行解$\bar{X}$都存在

$$\hat{Y}b \geq C\bar{X}$$

若$C\hat{X}=\hat{Y}b$，则

$$C\hat{X} = \hat{Y}b \geq C\bar{X}$$

从而$\hat{X}$是使目标函数取到最大值的可行解，即原问题最优解。

2.3 对偶定理

5）对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等。

证明：设$\hat{X}$是原问题最优解，对应基矩阵为B，则

$$C - C_B B^{-1} A \leq 0$$

$$0 - C_B B^{-1} I \leq 0$$

即可以得到

$$\hat{Y} A \geq C, \hat{Y} = C_B B^{-1}, \hat{Y} \geq 0$$

从而$\hat{Y}$是对偶问题的可行解，它使得；

$$\omega = \hat{Y} b = C_B B^{-1} b$$

而原问题的最优解$\hat{X}$使目标函数取值

$$z = C\hat{X} = C_B B^{-1} b$$

由此可以得到$\hat{Y} b = C_B B^{-1} b = C\hat{X}$，从而根据性质4，$\hat{Y}$是对偶问题的最优解。

6） **互补松弛性：** 若$\hat{X},\hat{Y}$分别是原问题和对偶问题的可行解。那么$\hat{Y}X_s=0, Y_s\hat{X}=0$，当且仅当$\hat{X},\hat{Y}$为最优解。

证明： 设原问题和对偶问题的标准型是

$$\max z = CX \qquad \min \omega = Yb$$

$$\boxed{AX \le b} \quad AX + X_S = b \qquad YA - Y_S = C \quad \boxed{YA \ge C}$$

$$X, X_S \ge 0 \qquad Y, Y_S \ge 0$$

将原问题目标函数中的系数向量C用$C=YA-Y_S$代替后，得到

$$z = (YA - Y_s)X = YAX - Y_sX \quad (3-15)$$

对偶问题目标函数中系数列向量b用$b = AX + X_S$代替后，得到

$$\omega = Y(AX + X_s) = YAX + YX_s \quad (3-16)$$

若$\hat{Y}X_s=0, Y_s\hat{X}=0$，则$\hat{Y}b=\hat{Y}A\hat{X}=C\hat{X}$，由性质4可知，$\hat{X},\hat{Y}$为最优解。

又若$\hat{X},\hat{Y}$分别是原问题和对偶问题最优解，由性质5，可知$C\hat{X}=\hat{Y}A\hat{X}=\hat{Y}b$，根据(3-15)和(3-16)，可知$\hat{Y}X_s=0, Y_s\hat{X}=0$。

7）原问题检验数与对偶问题解的关系：

设原问题是

$$\max z = CX, AX \leq b, X \geq 0,$$

它的对偶问题是

$$\min \omega = Yb, YA \geq C, Y \geq 0,$$

则原问题单纯形表的检验数行对应其对偶问题的一个基解，其对应关系见下表：

X_B	X_N	X_S
0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$
Y_{S1}	$-Y_{S2}$	$-Y$

Y_{S1}是对应原问题中基变量X_B的剩余变量，
Y_{S2}是对应原问题中非基变量X_N的剩余变量。

7）原问题检验数与对偶问题解的关系：

设原问题是

$$\max z = CX, AX + X_s = b, X \geq 0,$$

它的对偶问题是

$$\min \omega = Yb, YA - Y_s = C, Y \geq 0,$$

证：设B是原问题的一个可行基，$A=(B,N)$，原问题可以改写为

$$\max z = C_B X_B + C_N X_N$$

$$\begin{cases} BX_B + NX_N + X_S = b \\ X_B, X_N, X_S \geq 0 \end{cases}$$

相应地，对偶问题可以表示为

$$\min \omega = Yb$$

$$\begin{cases} YB - Y_{S1} = C_B & (3\text{-}17) \\ YN - Y_{S2} = C_N & (3\text{-}18) \\ Y, Y_{S1}, Y_{S2} \geq 0, Y_S = (Y_{S1}, Y_{S2}) \end{cases}$$

2.3 对偶问题的基本性质

X_B	X_N	X_S
0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$
Y_{S1}	$-Y_{S2}$	$-Y$

当求得原问题的一个解$X_B = B^{-1}b$，其相应的检验数为$C_N - C_B B^{-1} N$和$-C_B B^{-1}$；

令$Y = C_B B^{-1}$，将它代入(3-17)和(3-18)，得

$$\begin{cases} YB - Y_{S1} = C_B \quad (3\text{-}17), & Y_{S1} = C_B B^{-1} B - C_B = 0 \\ YN - Y_{S2} = C_N \quad (3\text{-}18), & -Y_{S2} = C_N - C_B B^{-1} N \end{cases}$$

通过这些对应关系，可以看到，求解原问题的时候，隐含着也同时获得了对偶变量的值。

例：已知线性规划问题，试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解。

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：先写出原问题的对偶问题：

$$\min \omega = 2y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 \ge 1 \\ y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 - y_2 \ge 0 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

3）无界性：若原问题(对偶问题)为无可行解，则其对偶问题(原问题)或为无界解，或无可行解；

由第一行的约束条件和非负条件，可知对偶问题无可行解；而原问题显然有可行解(0, 0, 0)，故原问题无最优解

2.3 检验数与对偶问题解

例： 已知线性规划问题，已知其对偶问题最优解为$y_1^*=\frac{4}{5}, y_2^*=\frac{3}{5}, z=5$。试用对偶理论找出原问题最优解。

$$\min \omega = 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4+3x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \ge 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

解： 先写出原问题的对偶问题：

$$\max z = 4y_1+3y_2 \qquad\qquad \max z = 4y_1+3y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 2 & (1) \\ y_1 - y_2 \le 3 & (2) \\ 2y_1 + 3y_2 \le 5 & (3) \\ y_1 + y_2 \le 2 & (4) \\ 3y_1 + y_2 \le 3 & (5) \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_{S1} = 2 & (1) \\ y_1 - y_2 + y_{S2} = 3 & (2) \\ 2y_1 + 3y_2 + y_{S3} = 5 & (3) \\ y_1 + y_2 + y_{S4} = 2 & (4) \\ 3y_1 + y_2 + y_{S5} = 3 & (5) \\ y_1, y_2, y_{S1}, y_{S2}, y_{S3}, y_{S4}, y_{S5} \ge 0 \end{cases}$$

2.3 检验数与对偶问题解

互补松弛性：若$\hat{X},\hat{Y}$分别是原问题和对偶问题的可行解。那么$\hat{Y}X_s=0, Y_s\hat{X}=0$，当且仅当$\hat{X},\hat{Y}$为最优解。

这里的$\hat{Y}=(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$，将其代入约束条件，可得

$$(2)=\frac{1}{5}<3,(3)=\frac{17}{5}<5,(4)=\frac{7}{5}<2$$

约束条件(2),(3),(4)为严格不等式。由互补松弛性可以得到

$$x_2^*=x_3^*=x_4^*=0$$

又因$\hat{Y}=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)>0$，可以得到$x_{s1}=x_{s2}=0$，即原问题的两个约束条件应该取等式，故而有：

$$x_1^*+3x_5^*=4,\ 2x_1^*+x_5^*=3$$

求解后得到$x_1^*=1, x_5^*=1$；故而可得原问题的最优解为

$$X^*=(1,0,0,0,1)^T, \omega^*=5$$

运 筹 学

Operations Research (OR)

讲师： 王 博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email： wb8517@hust.edu.cn QQ：2734802827

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第3章 对偶问题和灵敏度分析

第3章 对偶问题和灵敏度分析

第1节 单纯形法的矩阵描述

第2节 线性规划的对偶理论

第3节 对偶问题的经济解释

第4节 对偶单纯形法

第5节 灵敏度分析

对偶问题的经济解释

在单纯形法的每步迭代中，目标函数取值$z = C_B B^{-1} b$，和检验数$C_N - C_B B^{-1} N$中都有乘子$Y = C_B B^{-1}$，那么Y的经济意义是什么?

	基变量X_B	非基变量X_N		等式右边 RHS
系数矩阵	$B^{-1}B = I$	$B^{-1}N$	$B^{-1}P_{s_j}$	$B^{-1}b$
检验数	$C_B - C_B B^{-1} B = 0$	$C_N - C_B B^{-1} N$	$\left(-C_B B^{-1}\right)_j$	$-C_B B^{-1} b$

设B是$\{\max z = CX \mid AX \leq b, X \geq 0\}$的最优基，由$-Yb = -C_B B^{-1} b$可以得到

$$z^* = C_B B^{-1} b = Y^* b$$

对z^*关于b求偏导数，得

$$\frac{\partial z^*}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y^*$$

由上式可知，Y^*中每个分量y_i^*的经济意义是在其他条件不变的情况下，单位资源变化所引起的目标函数的最优值的变化。

对偶问题的经济解释

由第一章例1的单纯形终表

		$c_j \rightarrow$	2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	–
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1	–
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	–3/2	–1/8	0	

可见，$y_1^* = 1.5, y_2^* = 0.125, y_3^* = 0$

目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{约束条件}:\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

目标函数 $\min \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$

$$\text{约束条件}:\begin{cases} y_1 + 4y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 4y_3 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

这说明是其他条件不变的情况下，若设备增加一台时，该厂按最优计划安排生产可多获利1.5元；原材料A增加1kg，可多获利0.125元；原材料B增加1kg，对获利无影响。

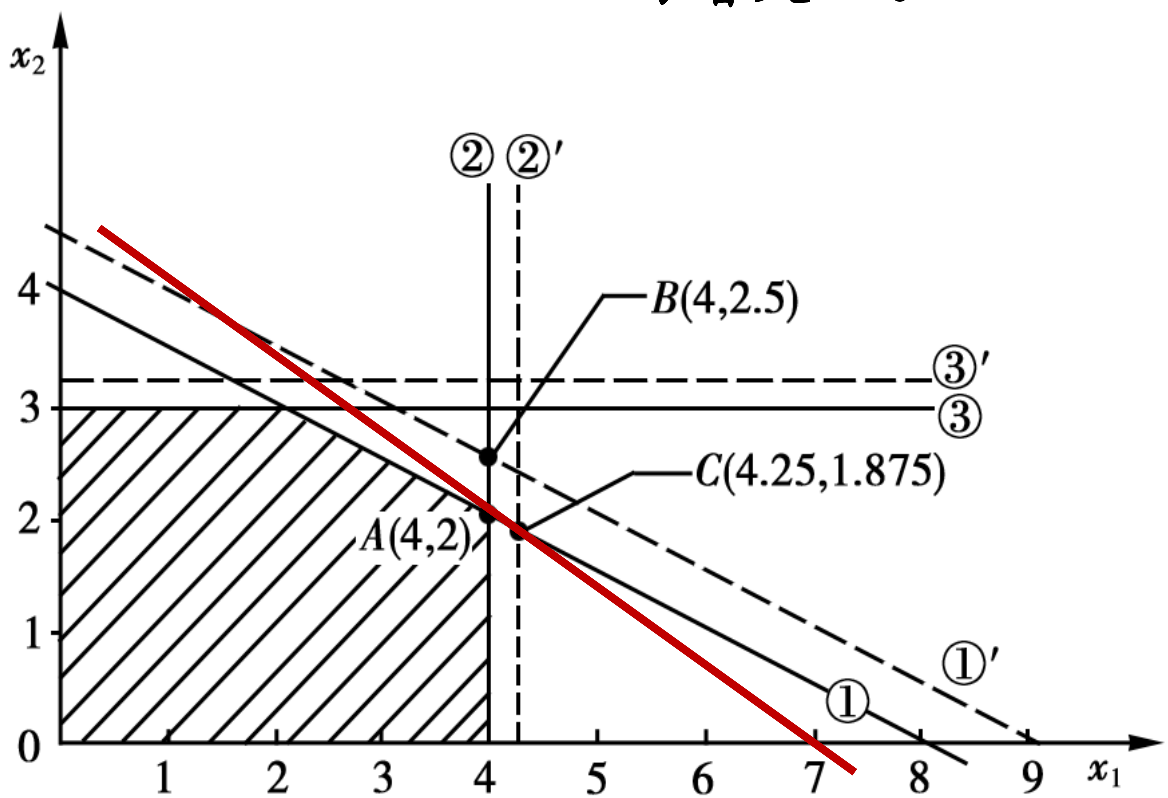
可见, $y_1^* = 1.5$， $y_2^* = 0.125$， $y_3^* = 0$。

目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

从图中可看到，设备增加一台时，代表该约束条件的直线由①移至①′

相应的最优解由(4，2)变为(4，2.5)，目标函数z=2×4+3×2.5=15.5，即比原来的增大1.5。



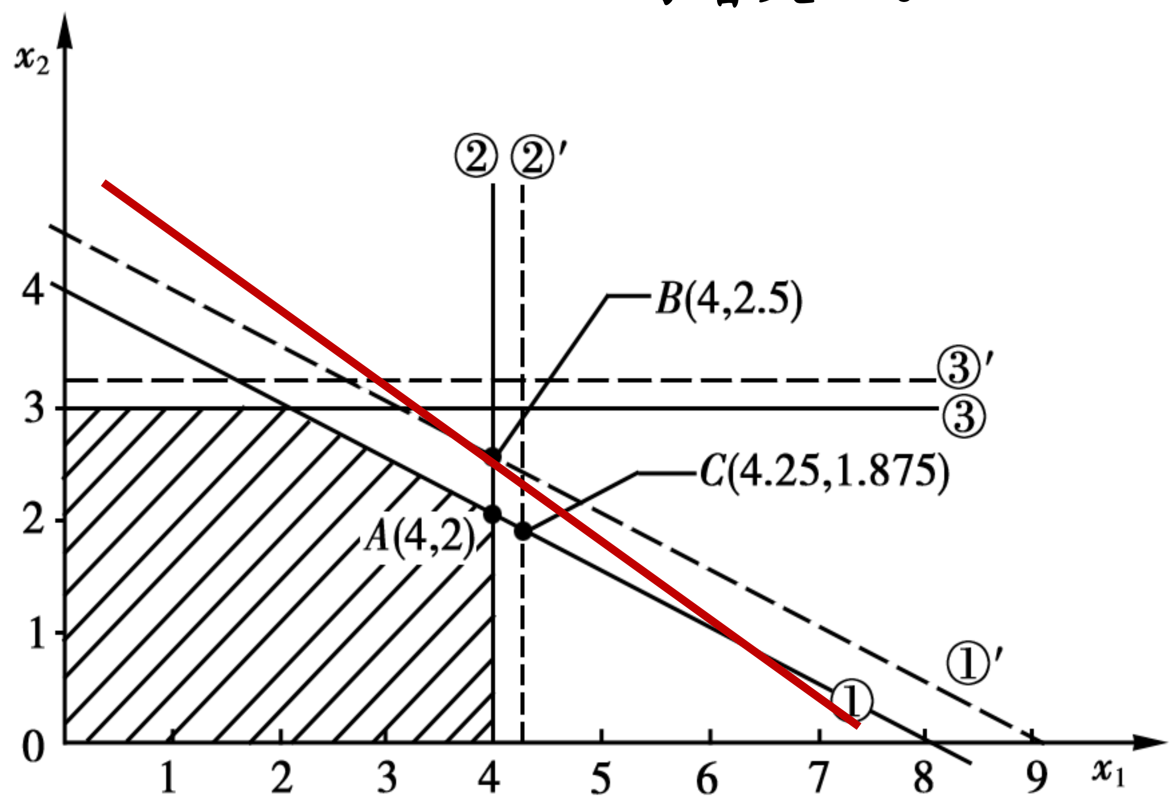
可见, $y_1^* = 1.5$，$y_2^* = 0.125$，$y_3^* = 0$。

目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

从图中可看到，设备增加一台时，代表该约束条件的直线由①移至①′

相应的最优解由(4，2)变为(4，2.5)，目标函数 z=2×4+3×2.5=15.5，即比原来的增大1.5。



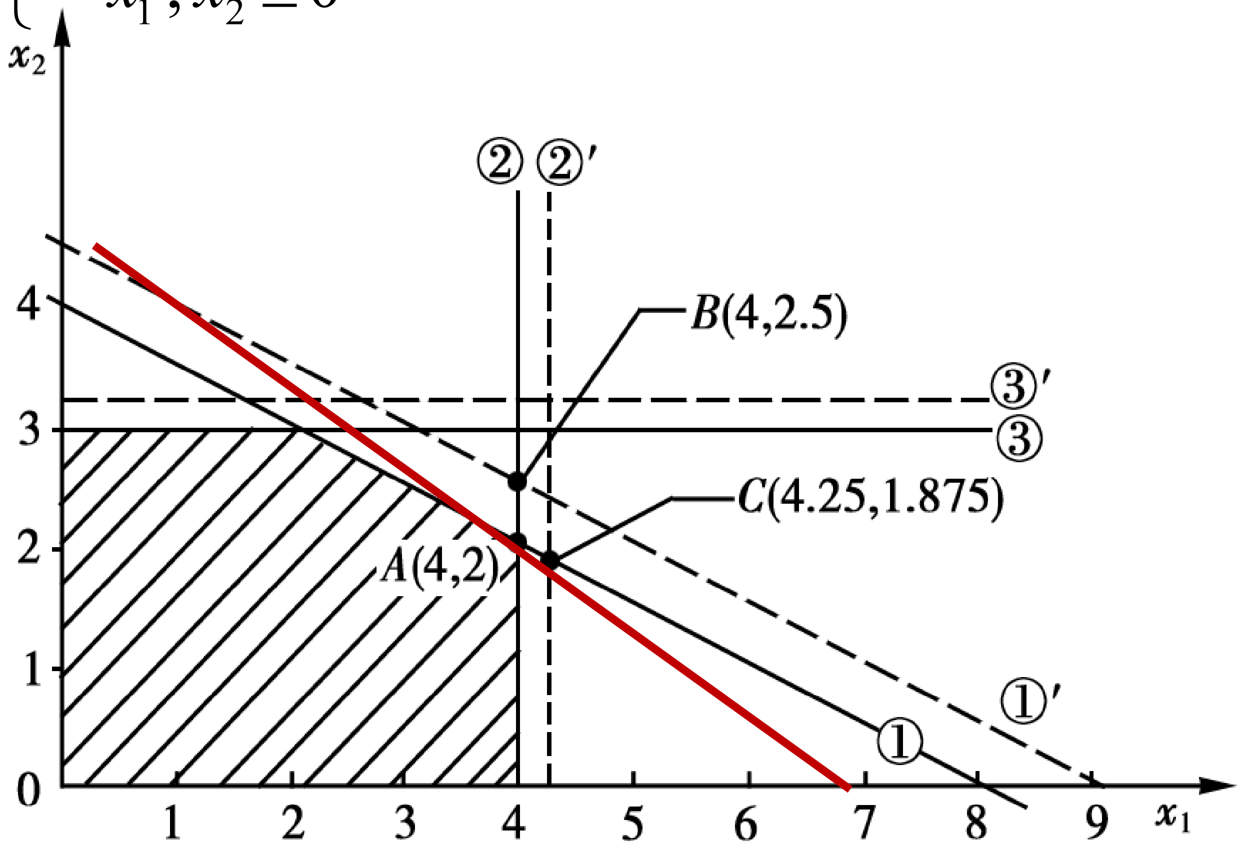
可见, $y_1^* = 1.5$, $y_2^* = 0.125$, $y_3^* = 0$。

目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

又若原材料A增加1kg时，代表该约束方程的直线由②移至②′

相应的最优解从(4，2)变为(4.25，1.875)，目标函数z=2×4.25+3×1.875=14.125。比原来的增加0.125。



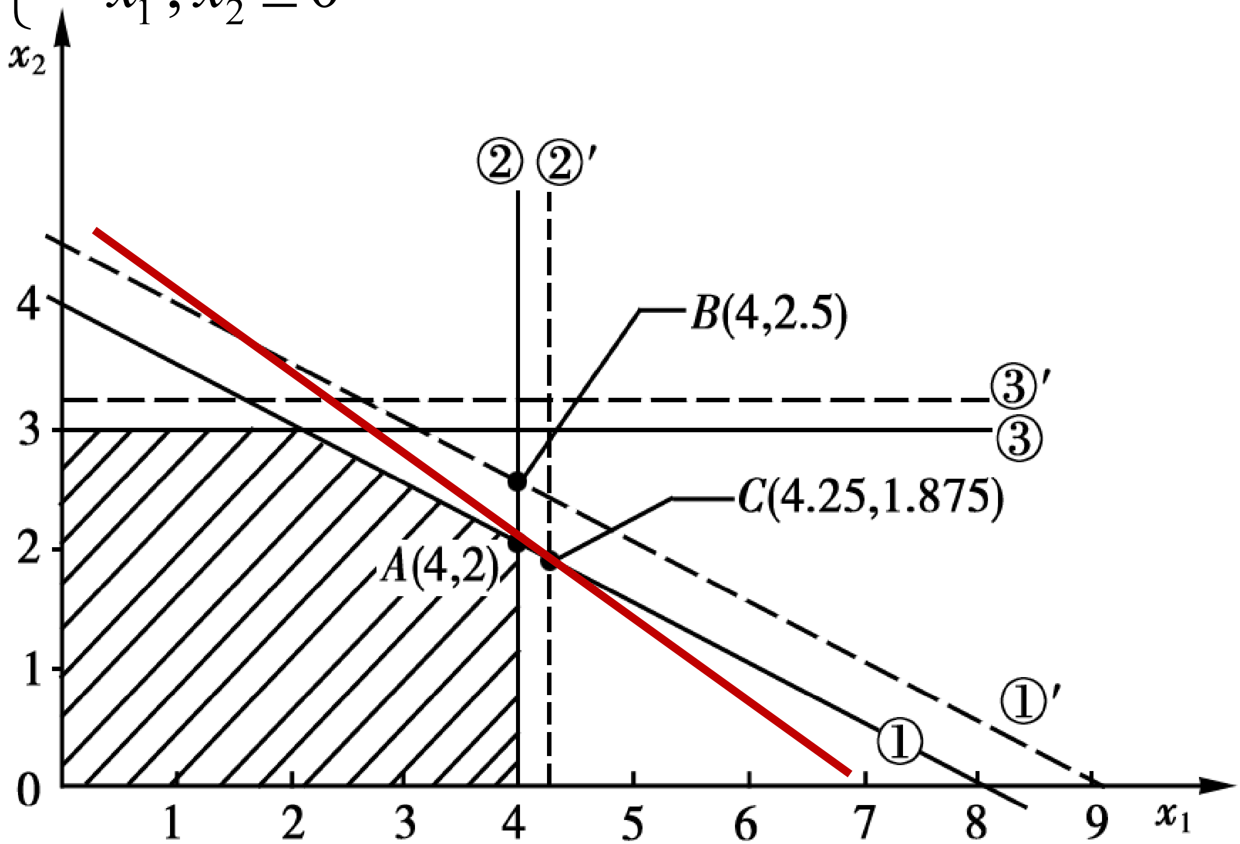
可见, $y_1^* = 1.5$, $y_2^* = 0.125$, $y_3^* = 0$。

目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

又若原材料A增加1kg时，代表该约束方程的直线由②移至②′

相应的最优解从(4，2)变为(4.25，1.875)，目标函数 z= 2×4.25+3×1.875=14.125。比原来的增加0.125。



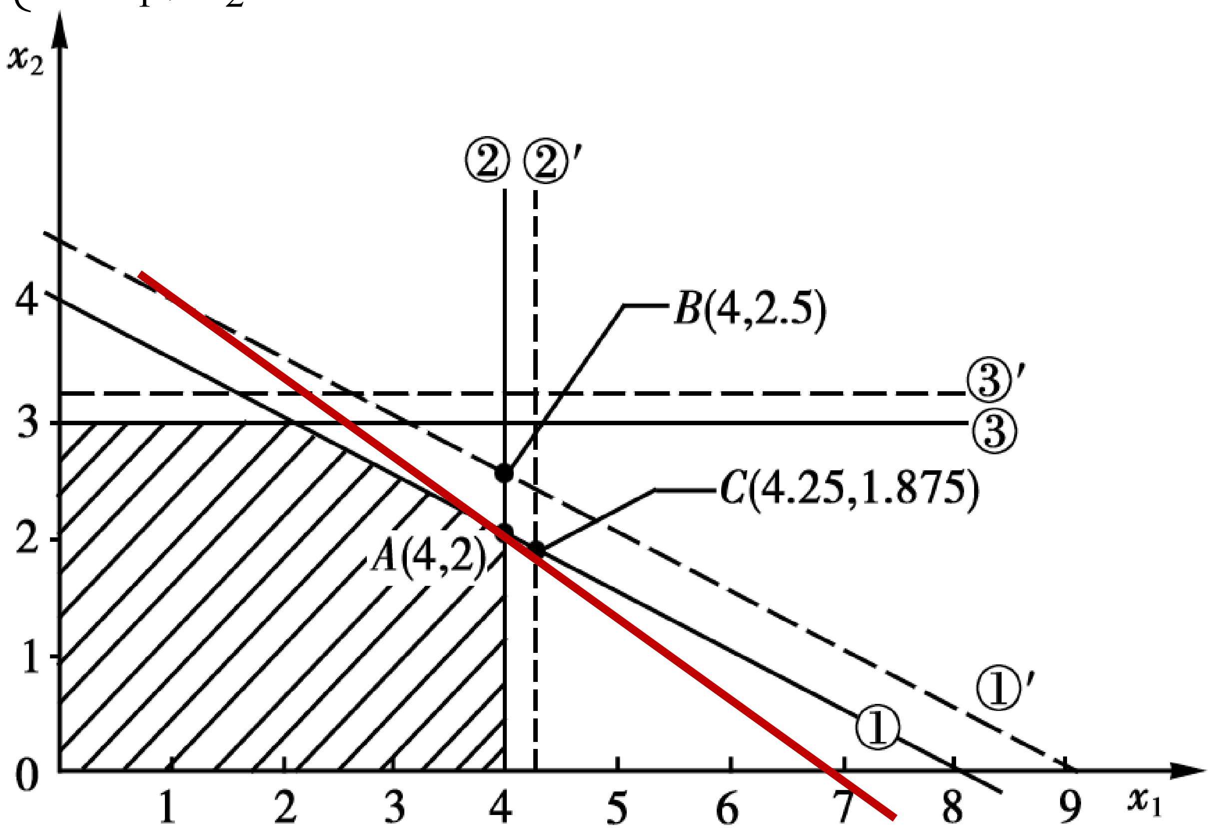
可见, $y_1^* = 1.5$, $y_2^* = 0.125$, $y_3^* = 0$。

目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

原材料B增加1kg时，该约束方程的直线由③移至③′

这时的最优解不变。



对偶问题的经济解释

y_i^*的值代表对第i种资源的估价 - 影子价格

用资源来表达我们的目标函数（利润）：

$$z=\omega=b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_iy_i+\cdots+b_my_m$$

当第i种资源量发生改变时，会导致利润的相应改变

$$z+\Delta z=b_1y_1+b_2y_2+\cdots+(b_i+\Delta b_i)y_i+\cdots+b_my_m \qquad \Delta z=\Delta b_iy_i$$

当利润取到最大时:

$$w_i^*=\frac{\Delta z^*}{\Delta b_i}=\frac{\text{最大利润的增量}}{\text{第}i\text{种资源的增量}}=\text{第}i\text{种资源的边际利润}$$

对偶问题的经济解释

- 这种估价是针对具体工厂的具体产品而存在的一种特殊价格，称它为“影子价格”。影子价格越大，说明这种资源越是相对紧缺。影子价格越小，说明这种资源相对不紧缺；
- 如果最优生产计划下某种资源有剩余，这种资源的影子价格一定等于0 (因为$y * x_S = 0$)；
- 在该厂现有资源和现有生产方案的条件下，设备每小时租费为1.5元，1kg原材料A的出让费为除成本外再附加0.125元，1kg原材料B可按原成本出让，这时该厂的收入与自己组织生产时获利相等；
- 影子价格随具体情况而异，在完全市场经济的条件下，当某种资源的市场价低于影子价格时，企业应买进该资源用于扩大生产；
- 而当某种资源的市场价高于企业影子价格时，则企业的决策者应把已有资源卖掉。可见影子价格对市场有调节作用。

运 筹 学

Operations Research (OR)

讲师： 王 博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email： wb8517@hust.edu.cn QQ：2734802827

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第3章 对偶问题和灵敏度分析

第3章 对偶问题和灵敏度分析

第1节 单纯形法的矩阵描述

第2节 线性规划的对偶理论

第3节 对偶问题的经济解释

第4节 对偶单纯形法

第5节 灵敏度分析

前节讲到原问题与对偶问题的解之间的对应关系时指出：在单纯形表中进行迭代时，在b列中得到的是原问题的基可行解，而在检验数行得到的是对偶问题的基解。

通过逐步迭代，当在检验数行得到对偶问题的解也是基可行解时，则得到原问题和对偶问题的最优解。

x_B	b	x	x_S
基变量	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$	B^{-1}
	$-C_B B^{-1}b$		

X_B	X_N	X_S
0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$
Y_{S1}	$-Y_{S2}$	$-Y$

5）对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等；

根据对偶问题的对称性

- 若保持对偶问题的解是基可行解，即$c_j - C_B B^{-1} P_j \leq 0$，而原问题在非可行解的基础上，通过逐步迭代达到基可行解，这样也得到了最优解。
- 其优点是原问题的初始解不一定是基可行解，可从非基可行解开始迭代。
- 缺点：要求所有检验数小于或等于零。

设原问题为$\max z = CX, AX = b, X \geq 0$, 又设$B$是一个基。不失一般性，令$B = (P_1, P_2, \ldots, P_m)$，它对应的变量为$X_B = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$

当非基变量都为零时，可以得到$X_B = B^{-1}b$。若在$B^{-1}b$中至少有一个负分量，设$(B^{-1}b)_i < 0$，并且在单纯形表的检验数行中的检验数都为非正，即对偶问题保持可行解.

- 每次迭代是将基变量中的负分量x_l $(l = 1,2,\ldots,m)$取出，去替换非基变量中的x_k $(k = m+1, m+2, \ldots, n)$。经基变换，所有检验数仍保持非正。从原问题来看，经过每次迭代，原问题由非可行解往可行解靠近。当原问题得到可行解时，便得到了最优解。

X_B	X_N	X_S
0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$
Y_{S1}	$-Y_{S2}$	$-Y$

对偶单纯形法计算步骤如下：

- 根据线性规划问题，列出初始单纯形表。检查b列的数字，若都为非负，检验数都为非正，则已得到最优解。停止计算。若检查b列的数字时，至少还有一个负分量，检验数保持非正，那么进行以下计算。
- 确定换出变量：按$\min\{(B^{-1}b)_i | (B^{-1}b)_i < 0\} = (B^{-1}b)_l$ 对应的基变量x_l为换出变量。

$$b_l = x_l + a_{l,m+1}x_{m+1} + a_{l,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{l,n}x_n$$

$$b_l < 0, \text{而} a_{l,m+1}, a_{l,m+2}, \cdots, a_{l,n} \geq 0, \text{则不可能} x_i \geq 0$$

- 确定换入变量：
  - 在单纯形表中检查x_l所在行的各系数α_{lj} $(j = m+1, m+2, \dots, n)$。若所有$\alpha_{lj} \geq 0$，则无可行解，停止计算。
  - 若存在$\alpha_{lj} < 0$ $(j = m+1, \dots, n)$，按θ规则所对应的列的非基变量x_k为换入变量，这样才能保持得到的对偶问题解仍为可行解。

$$\theta = \min_j \left(\frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0 \right) = \frac{c_k - z_k}{a_{lk}}$$

- 确定换入变量：
  - 若存在$\alpha_{lj} < 0\ (j = m+1, \dots, n)$，按θ规则所对应的列的非基变量$x_k$为换入变量，这样才能保持得到的对偶问题解仍为可行解。

$$\theta = \min_j \left(\frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0 \right) = \frac{c_k - z_k}{a_{lk}}$$

$$\begin{array}{lcccccccccc}
l\text{行} & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & a_{l,m+1} & \cdots & a_{l,k} & \cdots & a_{l,n} \\
\text{检验数} & & & & & & \boxed{c_{m+1} - z_{m+1} - \frac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}}(c_k - z_k) \le 0} & \cdots & c_k - z_k & \cdots & c_n - z_n
\end{array}$$

- 新的检验数如何计算？
  - 基变换与单纯形法保持一致(假定换入变量为x_k)：
  - $P_{m+1}^{t+1} = B_{t+1}^{-1} P_{m+1} = E_{t+1} B_t^{-1} P_{m+1} = E_{t+1} P_{m+1}^t$

- 基变换与单纯形法保持一致(假定换入变量为x_k):

$$P_{m+1}^{t+1} = B_{t+1}^{-1}P_{m+1} = E_{t+1}B_t^{-1}P_{m+1} = E_{t+1}P_{m+1}^{t}$$

$$\begin{array}{lcccccccccc} & & & & & & & & P_k & & \\ & & & & & & & & \Downarrow & & \\ l\text{行} & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & a_{l,m+1} & \cdots & a_{l,k} & \cdots & a_{l,n} \\ \text{检验数} & & & & & & \boxed{c_{m+1} - z_{m+1} - \dfrac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}}(c_k - z_k) \le 0} & \cdots & c_k - z_k & \cdots & c_n - z_n \end{array}$$

$$E_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & -a_{1,k}/a_{l,k} & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ \vdots & & 1/a_{l,k} & & \vdots \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & a_{m,k}/a_{l,k} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a'_{1,m+1} \\ \vdots \\ a'_{l,m+1} \\ \vdots \\ a'_{m,m+1} \end{bmatrix} = E_{t+1} \begin{bmatrix} a_{1,m+1} \\ \vdots \\ a_{l,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,m+1} - a_{1,k}\dfrac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}} \\ \vdots \\ \dfrac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} - a_{m,k}\dfrac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}} \end{bmatrix}$$

- 新的检验数为：

$$\sigma'_{m+1} = c_{m+1} - C'_B P'_{m+1} \Rightarrow \quad \sigma'_{m+1} = c_{m+1} - [c_1, \cdots, c_{l-1}, c_k, c_{l+1}, \cdots, c_m] \begin{bmatrix} a_{1,m+1} - a_{1,k}\dfrac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}} \\ \vdots \\ \dfrac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} - a_{m,k}\dfrac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}} \end{bmatrix}$$

$$= c_{m+1} - c_1\left(a_{1,m+1} - a_{1,k}\frac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}}\right) - \cdots - \boxed{c_k\frac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}}} - \cdots - c_m\left(a_{m,m+1} - a_{m,k}\frac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}}\right)$$

$$= c_{m+1} - \left(c_1 a_{1,m+1} + \cdots + \boxed{c_l a_{l,m+1}} + \cdots + c_m a_{m,m+1}\right) + \boxed{c_l a_{l,m+1}} + \frac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}}\left(c_1 a_{1,k} + \cdots \boxed{-c_k} + \cdots + c_m a_{m,k}\right)$$

$$= c_{m+1} - z_{m+1} \boxed{-\frac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}}c_k} + \frac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}}\left(c_1 a_{1,k} + \cdots \boxed{+c_l a_{l,k}} + \cdots + c_m a_{m,k}\right)$$

$$\boxed{\Leftarrow c_l a_{l,m+1} = \frac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}} c_l a_{l,k}}$$

$$= c_{m+1} - z_{m+1} - \frac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}}\left(c_k - z_k\right) = c_{m+1} - z_{m+1} - a_{l,m+1}\theta \le 0$$

- 确定换入变量：
  - 若存在$\alpha_{lj} < 0\ (j = m+1, \ldots, n)$，按θ规则所对应的列的非基变量$x_k$为换入变量，这样才能保持得到的对偶问题解仍为可行解。

$$\theta = \min_j \left(\frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0 \right) = \frac{c_k - z_k}{a_{lk}}$$

l行	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$a_{l,m+1}$	$\cdots$	$a_{l,k}$	$\cdots$	$a_{l,n}$
检验数						$\boxed{c_{m+1} - z_{m+1} - \frac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}}(c_k - z_k) \le 0}$	$\cdots$	$c_k - z_k$	$\cdots$	$c_n - z_n$

- 以a_{lk}为主元素，按原单纯形法在表中进行迭代运算，得到新的计算表。
- 重复上面的步骤，直到得到最优解。

单纯形法：始终保持原问题的可行性，

$$b \geq 0,$$

$$\sigma = C - C_B B^{-1} A,\ (C - YA)\text{由正变负},$$

得到原问题和对偶问题的最优解。

对偶单纯形法：始终保持对偶问题的可行性，

$$YA \geq C \quad (C - YA = C - C_B B^{-1} A \leq 0)$$

即

$$\sigma = C - C_B B^{-1} A \leq 0,$$

原问题从非可行解开始，逐步迭代到基可行解。

例： 用对偶单纯形法求解

$$\min \ \omega = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解： 先将此问题化成下列形式，以便得到对偶问题的初始可行基

$$\max \ z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

		$c_j \rightarrow$	-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	-2	1	-3	0	1
		$c_j - z_j$	-2	-3	-4	0	0

检验数行对应的对偶问题的解是可行解。因b列数字为负，故需进行迭代运算

		$c_j \rightarrow$	-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	$[-2]$	1	-3	0	1
		$c_j - z_j$	-2	-3	-4	0	0

换出变量的确定：$\min\{(B^{-1}b)_i | (B^{-1}b)_i < 0\} = (B^{-1}b)_l$ 对应的基变量x_l为换出变量。计算得$min(-3,-4) = -4$，因此x_5为换出变量。

换入变量的确定：在单纯形表中检查x_l所在行的各系数$a_{lj}(j = 1,2, \ldots, n)$。若所有$a_{lj} \geq 0$，则无可行解，停止计算。

$$\boxed{\theta = \min\left(\frac{-2}{-2}, -, \frac{-4}{-3}\right) = \frac{-2}{-2} = 1}$$

x_1为换入变量。换入、换出变量的所在列、行的交叉处“-2”为主元素。按单纯形法计算步骤进行迭代。

对偶单纯形法

从上表看出， 量，故重复
上述迭代过

上表中b列数 的最优解为
$X^* = (11/5,2$

若对应两个 问题的最
优解应该是?

		$c_j \rightarrow$	-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-1	0	$[-5/2]$	$1/2$	1	$-1/2$
-2	x_1	2	1	$-1/2$	$3/2$	0	$-1/2$
		$c_j - z_j$	0	-4	-1	0	-1

从上表看出，对偶问题仍是可行解，而b列中仍有负分量，故重复上述迭代过程，得下表：

		$c_j \rightarrow$	-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_2	$2/5$	0	1	$-1/5$	$-2/5$	$1/5$
-2	x_1	$11/5$	1	0	$7/5$	$-1/5$	$-2/5$
		$c_j - z_j$	0	0	$-9/5$	$-8/5$	$-1/5$

上表中b列数字全为非负，检验数全为非正，故原问题的最优解为
$X^* = (11/5,2/5,0,0,0)^T$

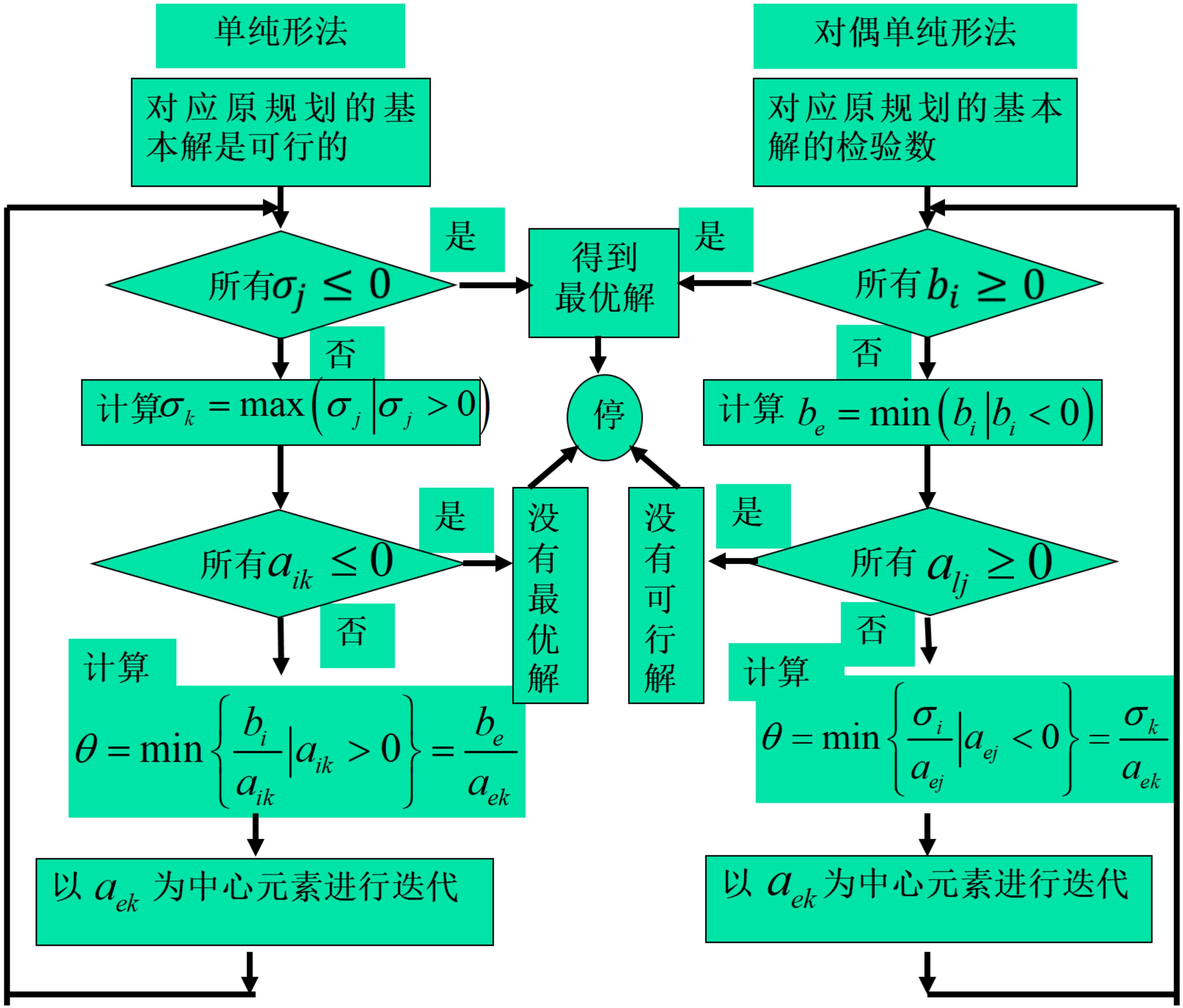
若对应两个约束条件的对偶变量分别为y_1和y_2，则对偶问题的最优解为$Y^* = (y_1^*, y_2^*) = (8/5,1/5)$

从以上求解过程可以看到对偶单纯形法有以下优点

(1) 初始解可以是非可行解，当检验数都为负数时就可以进行基的变换，这时不需要加入人工变量，因此可以简化计算。

(2) 当变量多于约束条件，对这样的线性规划问题用对偶单纯形法计算可以减少计算工作量，因此对变量较少，而约束条件很多的线性规划问题，可先将它变换成对偶问题，然后用对偶单纯形法求解。

(3) 在灵敏度分析及求解整数规划的割平面法中，有时需要用对偶单纯形法，这样可使问题的处理简化。对偶单纯形法的局限性主要是，对大多数线性规划问题，很难找到一个初始可行基，因而这种方法在求解线性规划问题时很少单独应用。


单纯形法
对应原规划的基本解是可行的
所有$\sigma_j \le 0$
是
否
得到最优解
停
计算$\sigma_k = \max\left(\sigma_j \middle| \sigma_j > 0\right)$
所有$a_{ik} \le 0$
是
否
没有最优解
计算
$\theta = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right\} = \frac{b_e}{a_{ek}}$
以 a_{ek} 为中心元素进行迭代
对偶单纯形法
对应原规划的基本解的检验数
所有$b_i \ge 0$
是
否
计算 $b_e = \min\left(b_i \middle| b_i < 0\right)$
所有 $a_{lj} \ge 0$
是
否
没有可行解
计算
$\theta = \min\left\{\frac{\sigma_i}{a_{ej}} \middle| a_{ej} < 0\right\} = \frac{\sigma_k}{a_{ek}}$
以 a_{ek} 为中心元素进行迭代

运 筹 学

Operations Research (OR)

讲师： 王 博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email： wb8517@hust.edu.cn QQ：2734802827

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第3章 对偶问题和灵敏度分析

第3章 对偶问题和灵敏度分析

第1节 单纯形法的矩阵描述

第2节 线性规划的对偶理论

第3节 对偶问题的经济解释

第4节 对偶单纯形法

第5节 灵敏度分析

考虑问题的标准型： $\max z = CX, AX = b, X \geq 0,$

设B是基，则单纯形表为：

x_B	b	x
基变量	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$
	$-C_B B^{-1}b$	$C - C_B B^{-1}A$

基本解$X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$是最优解的充要条件是：

$B^{-1}b \geq 0, C - C_B B^{-1}A \leq 0$

前面讨论的A, b, C都是常数，但实际上往往是估计值或预测值。例如：

$$\text{市场条件变化} \rightarrow C\text{变化};$$

$$\text{工艺条件变化} \rightarrow A\text{变化};$$

提出问题： 当这些系数有一个或几个发生变化时，为了保持最优基（或最优解），这些数据变化的范围；

当这些数据的变化超出了范围，如何作微小的调整，在原有的最优基（或最优解）的基础上求出新的最优基（或最优解）。

灵敏度分析

- 显然，当线性规划问题中某一个或几个系数发生变化后，原来已得结果一般会发生变化。
- 当然可以用单纯形法从头计算，以便得到新的最优解。这样做很麻烦，而且也没有必要。
- 因在单纯形法迭代时，每次运算都和基变量的系数矩阵B有关，因此可以把发生变化的个别系数，经过一定计算后直接填入最终计算表中，并进行检查和分析

系数发生变化后原问题与对偶问题的变化情况：

原问题	对偶问题	结论或计算步骤
可行解	可行解	最优解不变
可行解	非可行解	单纯形法求解
非可行解	可行解	对偶单纯形法
非可行解	非可行解	引入人工变量

3.5 灵敏度分析

3.5.1 资源数量变化的分析

3.5.2 价值系数变化的分析

3.5.3 技术系数变化的分析

5.1 资源数量变化的分析

资源数量变化是指资源中某系数b_r发生变化，即$b_r' = b_r + \Delta b_r$，并假设规划问题的其他系数都不变。这样使最终表中原问题的解相应地变化为

$$X_B' = B^{-1}(b + \Delta b)$$

这里$\Delta b = (0, \dots, \Delta b_r, 0, \dots, 0)$。只要$X_B' \geq 0$，因最终表中检验数不变，故最优基不变，但最优解的值发生了变化，所以X_B'为新的最优解。

新的最优解的值可允许变化范围用以下方法确定。

B^{-1}是最终计算表中的最优基的逆

$$B^{-1}(b+\Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b = B^{-1}b + B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta b_r \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta b_r \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1r}\Delta b_r \\ \vdots \\ \bar{a}_{ir}\Delta b_r \\ \vdots \\ \bar{a}_{mr}\Delta b_r \end{pmatrix} = \Delta b_r \begin{pmatrix} \bar{a}_{1r} \\ \vdots \\ \bar{a}_{ir} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mr} \end{pmatrix}$$

5.1 资源数量变化的分析

要求在最终表中求得的经过变化后的b列的所有元素

$$\bar{b}_i + \bar{a}_{ir}\Delta b_r \geq 0,\ i = 1,2,\cdots,m$$

由此可得 $\bar{a}_{ir}\Delta b_r \geq -\bar{b}_i, i = 1,2,\cdots,m$:

$$当\bar{a}_{ir} > 0,\ \ \Delta b_r \geq \frac{-\bar{b}_i}{\bar{a}_{ir}},\ \ i = 1,2,\cdots,m$$

$$当\bar{a}_{ir} < 0,\ \ \Delta b_r \leq \frac{-\bar{b}_i}{\bar{a}_{ir}},\ \ i = 1,2,\cdots,m$$

从而:

$$\max_i \left\{ -\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ir}} \middle| \bar{a}_{ir} > 0 \right\} \leq \Delta b_r \leq \min_i \left\{ -\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ir}} \middle| \bar{a}_{ir} < 0 \right\}$$

例： 求第1章例1中第二个约束条件b_2的变化范围。

		$c_j \rightarrow$	2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	–
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1	–
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	–3/2	–1/8	0	

$$\text{约束条件:}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad \boxed{\le 16} \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5.1 资源数量变化的分析

例： 求第2章例1中第二个约束条件b_2的变化范围。

$$\text{约束条件}:\begin{cases} x_1+2x_2\le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

		$c_j \rightarrow$	2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	–
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1	–
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0	–
		c_j-z_j	0	0	–3/2	–1/8	0	

解： 可计算Δb_2：
$$B^{-1}b+B^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \Delta b_2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}+\boxed{\begin{pmatrix}0 & 1/4 & 0\\ -2 & 1/2 & 1\\ 1/2 & -1/8 & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\ \Delta b_2\\ 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/4\\ 1/2\\ -1/8\end{pmatrix}\Delta b_2\ge\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

由上式，可得

$$\Delta b_2 \ge -4/0.25=-16, \Delta b_2 \ge -4/0.5=-8, \Delta b_2 \le 2/0.125=16$$

所以Δb_2的变化范围是[-8，16]；显然原$b_2=16$，加它的变化范围后，b_2的变化范围是[8，32]。

例：从下表得知第2章例1中，每设备台时的影子价格为1.5元，若该厂又从其他处抽调4台时用于生产产品Ⅰ，Ⅱ。求这时该厂生产产品Ⅰ，Ⅱ的最优方案。

		$c_j \to$	2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	–
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1	–
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	–3/2	–1/8	0	

解：先计算$B^{-1}\Delta b$，将结果反映到最终表中，得下表：

$$B^{-1}\Delta b = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

		$c_j \to$	2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4+0	1	0	0	1/4	0	–
0	x_5	4–8	0	0	–2	1/2	1	–
3	x_2	2+2	0	1	1/2	–1/8	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	–3/2	–1/8	0	

5.1 资源数量变化的分析

加入$B^{-1}\Delta b$后得到的新单纯形表：

		$c_j \rightarrow$	2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	–
0	x_5	–4	0	0	–2	1/2	1	–
3	x_2	4	0	1	1/2	–1/8	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	–3/2	–1/8	0	

上表的b列中有负数，因为用对偶单纯形法求新的最优解：

$$B_k^{-1}B_{k+1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P_1 & P_3 & P_2 \end{matrix} \end{array}, E_k B_k^{-1} B_{k+1} = I$$

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix},$$

第一行不处理

第二行除以-2

第三行加上除以4的第二行

		$c_j \rightarrow$	2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	–
0	x_3	2	0	0	1	–1/4	–1/2	–
3	x_2	3	0	1	0	0	1/4	–
		$c_j - z_j$	0	0	0	–1/2	–3/4	

3.5 灵敏度分析

3.5.1 资源数量变化的分析

3.5.2 价值系数变化的分析

3.5.3 技术系数变化的分析

5.2 价值系数变化的分析

可以分别就c_j是对应的非基变量和基变量两种情况来讨论。

(1)若c_j是**非基变量x_j的系数**，这时它在计算表中所对应的检验数是

$$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j \quad \text{或} \quad \sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

当c_j变化Δc_j后，要保证最终表中这个检验数仍小于或等于零，即

$$\sigma_j' = c_j + \Delta c_j - C_B B^{-1} P_j \le 0$$

那么$c_j + \Delta c_j \le YP_j$，即$\Delta c_j$的值必须小于或等于$YP_j - c_j$，才可以满足原最优解条件。这就可以确定$\Delta c_j$的范围了。

(2) 若c_r是**基变量x_r的系数**。因$c_r \in C_B$，当c_r变化Δc_r时，就引起C_B的变化，这时$(C_B + \Delta C_B)B^{-1}A = C_B B^{-1}A + (0, \quad \cdots, \quad \Delta C_r, \quad \cdots, \quad 0)\boxed{B^{-1}A}$

$$= C_B B^{-1}A + \Delta C_r \boxed{(\bar{a}_{r1}, \quad \bar{a}_{r2}, \quad \cdots, \quad \bar{a}_{rn})}$$

可见，当c_r变化Δc_r后，最终表中的检验数是

$$\sigma_j' = c_j - C_B B^{-1}A - \Delta c_r \bar{a}_{rj}, \ \ j = 1, 2, \cdots, n$$

5.2 价值系数变化的分析

(2) 若c_r是基变量x_r的系数。当c_r变化Δc_r后，最终表中的检验数是

$$\sigma_j' = c_j - C_B B^{-1} A - \Delta c_r \bar{a}_{rj}$$

$$= \sigma_j - \Delta c_r \bar{a}_{rj}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

若要求原最优解不变，即必须满足$\sigma_j' \le 0$。于是得到

$$当\ \bar{a}_{rj} < 0, \Delta c_r \le \frac{\sigma_j}{\bar{a}_{rj}};$$

$$\bar{a}_{rj} > 0, \Delta c_r \ge \frac{\sigma_j}{\bar{a}_{rj}}; j = 1, 2, \cdots, n$$

Δc_r可变的范围是：

$$\max_j \left\{ \frac{\sigma_j}{\bar{a}_{rj}} \middle| \bar{a}_{rj} > 0 \right\} \le \Delta c_r \le \min_j \left\{ \frac{\sigma_j}{\bar{a}_{rj}} \middle| \bar{a}_{rj} < 0 \right\}$$

例： 试以第2章例1的最终表为例。设基变量x_2的系数c_2变化Δc_2，在原最优解不变条件下，确定Δc_2的变化范围。

		$c_j \to$	2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	–
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1	–
$\boxed{3}$	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	–3/2	–1/8	0	

目标函数：$\max z = 2x_1 + \boxed{3x_2}$

解： 将Δc_2表示在单纯型终表中：

		$c_j \to$	2	$3+\Delta c_2$	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	$1/4$	0	–
0	x_5	4	0	0	-2	$1/2$	1	–
$3+\boxed{\Delta c_2}$	x_2	2	0	1	$\boxed{1/2}$	$\boxed{-1/8}$	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	$-3/2$	$-1/8$	0	

$$\sigma_j' = c_j - C_B B^{-1} A - \Delta \boxed{c_r \bar{a}_{rj}}$$
$$= \sigma_j - \boxed{\Delta c_r} \bar{a}_{rj}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$\sigma_3' = 0 - 1/2(3 + \Delta c_2) = -3/2 - 1/2\Delta c_2$$
$$\sigma_4' = 0 - 2/4 + 1/8(3 + \Delta c_2) = -1/8 + 1/8\Delta c_2$$

		$c_j \to$	2	$3+\Delta c_2$	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	$1/4$	0	–
0	x_5	4	0	0	-2	$1/2$	1	–
$3+\Delta c_2$	x_2	2	0	1	$1/2$	$-1/8$	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	$-3/2-1/2\Delta c_2$	$-1/8+1/8\Delta c_2$	0	

5.2 价值系数变化的分析

		$c_j \rightarrow$	2	$3+\Delta c_2$	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	$1/4$	0	–
0	x_5	4	0	0	-2	$1/2$	1	–
$3+\Delta c_2$	x_2	2	0	1	$1/2$	$-1/8$	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	$-3/2-1/2\Delta c_2$	$-1/8+1/8\Delta c_2$	0	

若保持原最优解，从上表的检验数行可见应有

$$-1.5-\frac{\Delta c_2}{2}\le 0 \quad 和 \quad \frac{\Delta c_2}{8}-\frac{1}{8}\le 0$$

- 由此可得$\Delta c_2 \geq -3$ 和$\Delta c_2 \leq 1$。
- Δc_2的变化范围为 $-3 \leq \Delta c_2 \leq 1$。
- 即x_2的价值系数c_2(原$c_2 = 3$)可以在[0，4]之间变化，而不影响原最优解。

3.5 灵敏度分析

3.5.1 资源数量变化的分析

3.5.2 价值系数变化的分析

3.5.3 技术系数变化的分析

5.3 技术系数变化的分析

例： 在原计划中是否应该安排一种新产品。以第2章例1为例。设该厂除了生产产品Ⅰ，Ⅱ外，现有一种新产品III。已知生产产品III，每件需消耗原材料A，B各为6kg，3kg，使用设备2台时；每件可获利5元。问该厂是否应生产该产品和生产多少：

		$c_j \to$	2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	–
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1	–
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	–3/2	–1/8	0	

解：(1) 设生产产品III为x_3'台，其技术系数向量$P_3' = (2,6,3)^T$，然后计算最终表中对应x_3'的检验数

$$\sigma_3' = c_3' - C_B B^{-1} P_3' = 5 - \boxed{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{8}, 0\right)}(2,6,3)^T = \frac{5}{4} > 0$$

说明安排生产产品III是有利的。（检验数的经济解释）

		$c_j \to$	2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	–
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1	–
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	–3/2	–1/8	0	

$$B^{-1}P_3' = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

(2) 计算产品Ⅲ在最终表中对应x_3'的列向量$B^{-1}P_3'$

将(1)，(2)中的计算结果填入上表，得下表：

		$c_j \to$	2	3	0	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_3'	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	3/2	–
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1	2	–
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0	1/4	–
		$c_j - z_j$	0	0	–3/2	–1/8	0	5/4	

5.3 技术系数变化的分析

		$c_j \rightarrow$	2	3	0	0	0	5	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_3'	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	3/2	8/3
0	x_5	4	0	0	−2	1/2	1	2	2
3	x_2	2	0	1	1/2	−1/8	0	1/4	8
		$c_j - z_j$	0	0	−3/2	−1/8	0	5/4	

由于b列的数字没有变化，原问题的解是可行解。但检验数行中还有正检验数，说明目标函数值还可以改善。

(3) 将x_3'作为换入变量，x_5作为换出变量，进行迭代，求出最优解

		$c_j \rightarrow$	2	3	0	0	0	5	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_3'	θ
2	x_1	1	1	0	3/2	−1/8	−3/4	0	–
5	x_3'	2	0	0	−1	1/4	1/2	1	–
3	x_2	3/2	0	1	3/4	−3/16	−1/8	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	−1/4	−7/16	−5/8	0	

这时得最优解：$x_1 = 1, x_2 = 1.5$，$x_3' = 2$。总的利润为16.5元。比原计划增加了2.5元。

例： 计划生产产品的工艺结构发生变化。仍以第2章例1为例。若原计划生产产品Ⅰ的工艺结构有了改进，这时有关它的技术系数向量变为$P_1' = (2,5,2)^T$，每件利润为4元，试分析对原最优计划有什么影响?

解：把改进工艺结构的产品Ⅰ看作产品Ⅰ′，x_1'为其产量。于是在原计算的最终表中以x_1'代替x_1，计算对应x_1'的列向量。

$$B^{-1}P_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1/2 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$

同时计算出x_1'的检验数为

$$\sigma_1' = c_1' - C_B B^{-1} P_1' = 4 - \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{8}, 0\right)(2,5,2)^T = \frac{3}{8} > 0$$

解：把改进工艺结构的产品I看作产品Ⅰ′，x_1'为其产量。于是在原计算的最终表中以x_1'代替x_1'，计算对应x_1'的列向量。

$$B^{-1}P_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1/2 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$

同时计算出x_1'的检验数为

$$\sigma_1' = c_1' - C_B B^{-1} P_1' = 4 - \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{8}, 0\right)(2,5,2)^T = \frac{3}{8} > 0$$

得到下表：

		$c_j \rightarrow$	4	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	5/4	0	0	1/4	0	–
0	x_5	4	1/2	0	–2	1/2	1	–
3	x_2	2	3/8	1	1/2	–1/8	0	–
		$c_j - z_j$	3/8	0	–3/2	–1/8	0	

5.3 技术系数变化的分析

		$c_j \rightarrow$	4	3	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	[5/4]	0	0	1/4	0	–
0	x_5	4	1/2	0	–2	1/2	1	–
3	x_2	2	3/8	1	1/2	–1/8	0	–
		$c_j - z_j$	3/8	0	–3/2	–1/8	0	

x_1是换出变量，x_1'是换入变量：

		$c_j \rightarrow$	4	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
4	x_1'	16/5	1	0	0	1/5	0	–
0	x_5	12/5	0	0	–2	2/5	1	–
3	x_2	4/5	0	1	1/2	–1/5	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	–3/2	–1/5	0	

达到最优解，即应当生产产品I′ 3.2单位，生产产品II 0.8单位。利润为15.2元。

注意：若碰到原问题和对偶问题均为非可行解时，就需要引进人工变量后重新求解。

5.3 技术系数变化的分析

例： 假设产品I′的技术系数向量变为$P_1' = (4,5,2)^T$，而每件获利仍为4元。试问该厂应如何安排最优生产方案?

解：以x_1'代替x_1'，计算对应x_1'的列向量。

$$B^{-1}P_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -7/2 \\ 11/8 \end{pmatrix}$$

同时计算出x_1'的检验数为

$$\sigma_1' = c_1' - C_B B^{-1} P_1' = 4 - \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{8}, 0\right)(4,5,2)^T = -\frac{21}{8} < 0$$

是否满足最优，可以停止运算?

解：把改进工艺结构的产品I看作产品Ⅰ′，x_1'为其产量。于是在原计算的最终表中以x_1'代替x_1'，计算对应x_1'的列向量。

$$B^{-1}P_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -7/2 \\ 11/8 \end{pmatrix}$$

同时计算出x_1'的检验数为

$$\sigma_1' = c_1' - C_B B^{-1} P_1' = 4 - \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{8}, 0\right)(4,5,2)^T = -\frac{21}{8}$$

把上面数字填入下表：

$$B^{-1}(P'_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_m) \neq I$$

		$c_j \to$	4	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	5/4	0	0	1/4	0	–
0	x_5	4	–7/2	0	–2	1/2	1	–
3	x_2	2	11/8	1	1/2	–1/8	0	–
		$c_j - z_j$	–21/8	0	–3/2	–1/8	0	

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	$[5/4]$	0	0	$1/4$	0	–
0	x_5	4	$-7/2$	0	-2	$1/2$	1	–
3	x_2	2	$11/8$	1	$1/2$	$-1/8$	0	–
		$c_j - z_j$	$-21/8$	0	$-3/2$	$-1/8$	0	

x_1是换出变量，x_1'是换入变量，进行基变换：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
4	x_1'	$16/5$	1	0	0	$1/5$	0	–
0	x_5	$76/5$	0	0	-2	$6/5$	1	–
3	x_2	$\boxed{-12/5}$	0	1	$1/2$	$-2/5$	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	$-3/2$	$\boxed{2/5}$	0	

原问题和对偶问题均为非可行解！

C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
		$c_j \to$	4	3	0	0	0	0
4	x_1'	16/5	1	0	0	1/5	0	–
0	x_5	76/5	0	0	–2	6/5	1	–
3	x_2	–12/5	0	1	1/2	–2/5	0	–
		$c_j - z_j$	0	0	–3/2	2/5	0	

于是引入人工变量x_6：

上表中，b列负分量对应x_2所在行，该行可以用方程表示为：

$$0x_1' + x_2 + 0.5x_3 - 0.4x_4 + 0x_5 = -2.4$$

引入人工变量x_6后，便可以写作：

$$-x_2 - 0.5x_3 + 0.4x_4 + x_6 = 2.4$$

将x_6作为基变量代替x_2，填入上表，得到下表：

C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
		$c_j \to$	4	3	0	0	0	$-M$	
4	x_1'	16/5	1	0	0	1/5	0	0	–
0	x_5	76/5	0	0	–2	6/5	1	0	–
$-M$	x_6	12/5	0	–1	–1/2	2/5	0	1	–
		$c_j - z_j$	0	$3-M$	$-1/2M$	$\boxed{-4/5+2/5M}$	0	0	

5.3 技术系数变化的分析

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0	$-M$		
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ	
4	x_1'	$16/5$	1	0	0	$1/5$	0	0	$-$	16
0	x_5	$76/5$	0	0	-2	$6/5$	1	0	$-$	12.67
$-M$	x_6	$12/5$	0	-1	$-1/2$	$2/5$	0	1	$-$	6
$c_j - z_j$			0	$3-M$	$-1/2M$	$-4/5+2/5M$	0	0		

x_4对应的检验数为正，b列全部为正分量，可以按单纯形法求解：

x_4为换入变量，x_6为换出变量，经过基变换以后：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0	$-M$		
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ	
4	x_1'	2	1	$1/2$	$1/4$	0	0	$-1/2$	$-$	4
0	x_5	8	0	$\boxed{3}$	$-1/2$	0	1	-3	$-$	$8/3$
0	x_4	6	0	$-5/2$	$-5/4$	1	0	$5/2$	$-$	$-$
$c_j - z_j$			0	1	-1	0	0	$-M+2$		

5.3 技术系数变化的分析

		$c_j \rightarrow$	4	3	0	0	0	$-M$	
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
4	x_1'	2	1	1/2	1/4	0	0	−1/2	4
0	x_5	8	0	[3]	−1/2	0	1	−3	8/3
0	x_4	6	0	−5/2	−5/4	1	0	5/2	−
		$c_j - z_j$	0	1	−1	0	0	$-M+2$	

x_2为换入变量，x_5为换出变量，经过基变换以后：

		$c_j \rightarrow$	4	3	0	0	0	$-M$	
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
4	x_1'	2/3	1	0	1/3	0	−1/6	0	−
3	x_2	8/3	0	1	−1/6	0	1/3	−1	−
0	x_4	38/3	0	0	5/3	1	5/6	0	−
		$c_j - z_j$	0	0	−5/6	0	−1/3	$3-M$	

此时得到最优解。最优生产方案为生产产品Ⅰ′，0.667单位；产品Ⅱ，2.667单位，可得最大利润10.67元。 $\leftarrow x_1'$的检验数小于0