运 筹 学

Operations Research (OR)

讲师： 王 博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email： wb8517@hust.edu.cn QQ：2734802827

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第4章 运输问题

第4章 运输问题

运输问题：物流和供应链的基础

- 供应链是指产品生产和流通过程中所涉及的原材料供应商、生产商、分销商、零售商以及最终消费者等成员通过与上游、下游成员的连接 (linkage) 组成的网络结构。也即是由物料获取、物料加工、并将成品送到用户手中这一过程所涉及的企业和企业部门组成的一个网络。(https://wiki.mbalib.com/wiki/供应链)
- 为满足供应链中顾客需求，需要对商品服务及线管信息，从产地到消费地高效率低成本流动及存储进行规划、执行和控制。

运输问题的研究为供应链优化提供相应的理论基础。

运输问题的核心：满足供需关系；运费最小。

运输问题的数学模型

- 已知有m个生产地点A_i，$i=1,2,\ldots,m$，可供应某种物资，其供应量(产量)分别为a_i，$i=1,2,\ldots,m$；
- 有n个销地B_j，$j=1,2,\ldots,n$，其需要量分别为b_j，$j=1,2,\ldots,n$；
- 从A_i到B_j运输单位物资的运价(单价)为c_{ij}；
- 上述这些数据可汇总于产销平衡表和单位运价表中，见表4-1，表4-2。有时可把这两表合二为一。

产地	销地				产量
	1	2	…	n	
1					a_1
2					a_2
⋮					⋮
m					a_m
销量	b_1	b_2	…	b_n	

表 4-1

产地	销地				
	1	2	…	n	
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	
⋮	⋮	⋮		⋮	
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	

表 4-2

运输问题的数学模型

- 运价表：

销地 / 产地	1	2	…	n	产量
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	…	b_n	

c_{ij}是运价

- 运输表：

销地 / 产地	1	2	…	n	产量
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	a_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	…	b_n	

x_{ij}是运量

运输问题的数学模型

销地 / 产地	1　2　----　n	产量
1 2 ⋮ m		a_1 a_2 ⋮ a_m
销量	b_1 b_2 ---- b_n	

表4-1

销地 / 产地	1　2 ---- n
1 2 ⋮ m	c_{11}　c_{12} ---- c_{1n} c_{21}　c_{22} ---- c_{2n} ⋮ c_{m1}　c_{m2} ---- c_{mn}

表4-2

- 若用x_{ij}表示从A_i到B_j的运量，那么在产销平衡的条件下，要求得总运费最小的调运方案，可求解以下数学模型

$$
\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij},\quad s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\ \ i=1,2,\cdots,m & (4\text{-}1)\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\ \ j=1,2,\cdots,n & (4\text{-}2)\\ x_{ij}\geq 0\end{cases}
$$

运输问题的数学模型

这就是运输问题的数学模型。它包含$m \times n$个变量，$(m+n)$个约束方程。其系数矩阵的结构比较松散，且特殊。

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & & 1 & & & & \cdots & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & \cdots & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & & \cdots & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & 1 & \cdots & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m\text{行} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n\text{行} \end{matrix}$$

$$AX^T=(a^T,b^T)^T$$

该系数矩阵中对应于变量x_{ij}的系数向量P_{ij}，其分量中除第i个和第$m+j$个为1以外，其余的都为零。即

$$P_{ij}=(0,\dots,1,0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T=e_i+e_{m+j}$$

运输问题的数学模型

系数矩阵A的行向量存在如下关系：

$$v_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_m - (v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1})$$

所以模型最多只有$m+n-1$个独立约束方程，

即系数矩阵的A的秩$\leq m+n-1$。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} \cdots & x_{mn}
\end{array}
$$

$$
A = \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & \cdots & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & \cdots & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & \cdots & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & \cdots & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m\text{行} \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{行}
\end{array}
$$

又因下面这个矩阵是满秩矩阵：

因此，系数矩阵A的秩$= m + n - 1$

$$
\begin{array}{c}
\\
u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n-1} & x_{1n} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{m1}
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & \boxed{1} & & & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1 \\
\boxed{1} & & & & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & 1 & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & &
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m\text{行} \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n-1\text{行}
\end{array}
$$

产销平衡的运输问题有可行解：

证明：

若运输问题有可行解x_{ij},则存在

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

$$i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i, \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

因此有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

即产销平衡

反之若运输问题产销平衡,即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

若令

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d,$$

则$x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{d} \geq 0$是运输问题的可行解.

运输问题的数学模型

产销平衡的运输问题有最优解：

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij},\quad s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\ \ i=1,2,\cdots,m\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\ \ j=1,2,\cdots,n\\ x_{ij}\geq 0\end{cases}$$

证明：因为

$$0\leq x_{ij}\leq max(a_i,b_j),i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$$

有界闭区间内的连续函数一定有最大和最小值。

由于有以上特征，所以求解运输问题时，可用比较简便的计算方法，习惯上称为表上作业法。

运 筹 学

Operations Research (OR)

讲师： 王 博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email： wb8517@hust.edu.cn　QQ：2734802827

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第4章 运输问题

第4章 运输问题

第1节 运输问题的数学模型

第2节 表上作业法

第3节 产销不平衡的运输问题

第4节 应用举例

表上作业法

表上作业法是单纯形法在求解运输问题时的一种简化方法，其实质是单纯形法。但具体计算和术语有所不同。可归纳为：

(1) 找出初始基可行解。即在$(m \times n)$产销平衡表上用最小元素法，Vogel法给出$m+n-1$个数字，称为数字格。它们就是初始基变量的取值。

(2) 求各非基变量的检验数，即在表上计算空格的检验数，判别是否达到最优解。如已是最优解，则停止计算，否则转到下一步。

(3) 确定换入变量和换出变量，找出新的基可行解。在表上用闭回路法调整。

(4) 重复(2)，(3)直到得到最优解为止。

表上作业法

例 某公司经销甲产品。它下设三个加工厂。每日的产量分别是：A1为7吨，A2为4吨，A3为9吨。该公司把这些产品分别运往四个销售点。各销售点每日销量为：B1为3吨，B2为6吨，B3为5吨，B4为6吨。

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

表4-3

已知从各工厂到各销售点的单位产品的运价为表4-3所示。问该公司应如何调运产品，在满足各销点的需要量的前提下，使总运费为最少。

4.2 表上作业法

4.2.1 确定初始基可行解

4.2.2 最优解的判别

4.2.3 闭回路调整法

4.2.4 计算中的问题

解：做出运价表和产销平衡表：

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

表 4-3
单位运价表

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

表 4-4
产销平衡表

确定初始基可行解的方法很多，有最小元素法和伏格尔(Vogel)法。一般希望方法既简便，又尽可能接近最优解。下面介绍这两种方法：

1. 最小元素法

这方法的基本思想是就近供应，即从单位运价表中最小的运价开始确定供销关系，然后次小。一直到给出初始基可行解为止。

第一步：从表4-3中找出最小运价为1，这表示先将A_2的产品供应给B_1。因$a_2 > b_1$，A_1除满足B_1的全部需要外，还可多余1吨产品。

在表4-4的(A_2, B_1)的交叉格处填上3，得表4-5。

划去B_1列运价，得表4-6。

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2	$\boxed{3}$				4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

表 4-5

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

表 4-6

为什么是划去列?

2.1 最小元素法

第二步：在表3-6未划去的元素中再找出最小运价2，确定A2多余的1吨供应B3，相应地划去A_2行运价，给出表4-7，表4-8。

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2	3				4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

表 4-5

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

表 4-6

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2	3		$\boxed{1}$		4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

表 4-7

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

表 4-8

2.1 最小元素法

第三步：在表4-8未划去的元素中再找出最小运价3；这样一步步地进行下去，直到单位运价表上的所有元素划去为止，最后在产销平衡表上得到一个调运方案，见表4-9。这方案的总运费为86元。

表 4-7

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2	3		1		4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

表 4-8

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	$\boxed{3}$	$\boxed{10}$
A_2	1	9	2	8
A_3	7	$\boxed{4}$	10	$\boxed{5}$

表 4-9

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2	3		1		4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

2.1 最小元素法

第三步：在表4-8未划去的元素中再找出最小运价3；这样一步步地进行下去，直到单位运价表上的所有元素划去为止，最后在产销平衡表上得到一个调运方案，见表4-9。这方案的总运费为86元。

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	$\boxed{3}$	$\boxed{10}$
A_2	$\boxed{1}$	9	$\boxed{2}$	8
A_3	7	$\boxed{4}$	10	$\boxed{5}$

表 4-8

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	7
A_2	$\boxed{3}$		$\boxed{1}$		4
A_3		$\boxed{6}$		$\boxed{3}$	9
销量	3	6	5	6	

表 4-9

$$1 \times 3 + 4 \times 6 + 3 \times 4 + 2 \times 1 + 10 \times 3 + 5 \times 3 = 86$$

从而得到一个初始基可行解 ($m+n-1$个数字)。

用最小元素法给出的初始解是运输问题的基可行解，其理由为：

- (1) 用最小元素法给出的初始解，是从单位运价表中逐次地挑选最小元素，并比较产量和销量。
- 当产大于销，划去该元素所在列。当产小于销，划去该元素所在行。然后在未划去的元素中再找最小元素，再确定供应关系。
- 这样在产销平衡表上每填入一个数字，在运价表上就划去一行或一列。表中共有m行n列，总共可划$(m+n)$条直线。但当表中只剩一个元素时，这时当在产销平衡表上填这个数字时，应在运价表上同时划去一行和一列。
- 此时把单价表上所有元素都划去了，相应地在产销平衡表上填了$(m+n-1)$个数字。即给出了$(m+n-1)$个基变量的值。

2.1 最小元素法

用最小元素法给出的初始解是运输问题的基可行解，其理由为：

- (2) 这$(m+n-1)$个基变量对应的系数列向量是线性独立的。

证：若表中确定的第一个基变量为$x_{i_1 j_1}$，它对应的系数列向量为:

$$P_{i_1 j_1} = e_{i_1} + e_{m+j_1}$$

因当给定$x_{i_1 j_1}$的值后，将划去第i_1行或第j_1列，即其后的系数列向量中再不出现e_{i_1}或e_{m+j_1}，因而不可能用解中的其他向量的线性组合表示。

类似地，用这样的方法确定的$m+n-1$个向量都不可能用解中的其他向量的线性组合表示。故这$m+n-1$个向量是线性独立的。

用最小元素法给出初始解时，有可能在产销平衡表上填入一个数字后，在单位运价表上同时划去一行和一列。这时就出现退化。关于退化时的处理将在2.4节中讲述。

2. 伏格尔(Vogel)法

- 最小元素法的缺点是：为了节省一处的费用，有时造成在其他处要多花几倍的运费。
- 伏格尔法考虑到，一产地的产品假如不能按最小运费就近供应，就考虑次小运费，这就有一个差额(最小运费和次小运费之间)。差额越大，说明不能按最小运费调运时，运费增加越多。
- 因而对差额最大处，就应当优先采用最小运费调运。

按照伏格尔法的步骤：

第一步：计算各行和各列的运费差额，填入表中，如表4-10：

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

表 4-3

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额
A_1	3	11	3	10	0
A_2	1	9	2	8	1
A_3	7	4	10	5	1
列差额	2	5	1	3	

表 4-10

2.1 伏格尔法

第二步：从行或列差额中选出最大者，选择它所在行或列中的最小元素。在表4-10中B_2列是最大差额所在列。B_2列中最小元素为4，可确定A_3的产品先供应B_2的需要。得表4-11。划去B_2列，得表4-12。

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额
A_1	3	11	3	10	0
A_2	1	9	2	8	1
A_3	7	4	10	5	1
列差额	2	5	1	3	

表 4-10

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3		6			9
销量	3	6	5	6	

表 4-11

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额
A_1	3	11	3	10	0
A_2	1	9	2	8	1
A_3	7	$\boxed{4}$	10	5	1
列差额	2	5	1	3	

表 4-12

第三步：对表4-12中未划去的元素再分别计算出各行、各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行。重复第一、二步，直到给出初始解为止，如表4-13。

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3		6			9
销量	3	6	5	6	

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额		
A_1	3	11	$\boxed{3}$	10	0	0	7
A_2	$\boxed{1}$	9	2	$\boxed{8}$	1	1	6
A_3	7	4	10	$\boxed{5}$	1		
列差额	2	5	1	3			
	2		1	2			
			1	2			

表 4-12

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3		6			9
销量	3	6	5	6	

表 4-13

第三步：对表4-12中未划去的元素再分别计算出各行、各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行。重复第一、二步，直到给出初始解为止，如表4-13。

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额
A_1	3	11	3	10	
A_2	1	9	2	8	
A_3	7	4	10	5	
列差额					

表 4-12

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			5	2	7
A_2	3			1	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

表 4-13

$$1\times3+4\times6+3\times5+10\times2+8\times1+5\times3=85$$

由以上可见：伏格尔法同最小元素法除在确定供求关系的原则上不同外，其余步骤相同。

伏格尔法给出的初始解比用最小元素法给出的初始解更接近最优解：本例用伏格尔法给出的初始解就是最优解。

4.2 表上作业法

4.2.1 确定初始基可行解

4.2.2 最优解的判别

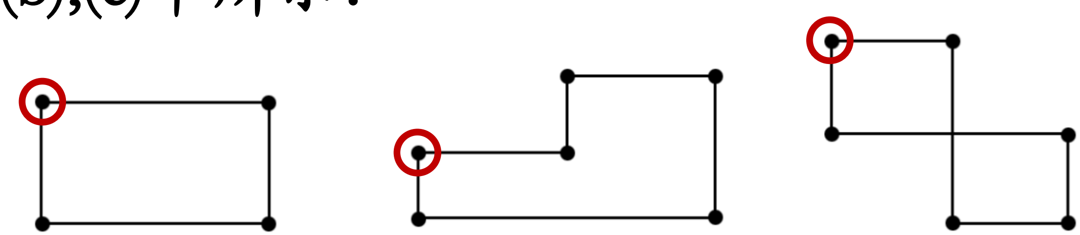
4.2.3 闭回路调整法

4.2.4 计算中的问题

- 判别的方法是计算空格(非基变量)的检验数$c_{ij} - C_B B^{-1} P_{ij}$，
- 因运输问题的目标函数是要求实现最小化，故当所有的$c_{ij} - C_B B^{-1} P_{ij} \geq 0$时，为最优解。
- 下面介绍两种求空格检验数的方法：1. 闭回路法；2. 位势法。

1. 闭回路法：

- 在给出调运方案的计算表上，如表4-13，从每一空格出发找一条闭回路。
- 闭回路是以某空格为起点。用水平或垂直线向前划，当碰到一数字格时可以转90°后，继续前进，直到回到起始空格为止。
- 如下图的(a),(b),(c)中所示：


(a)　(b)　(c)

2.2 闭回路法

从每一空格出发一定存在和可以找到唯一的闭回路。因$(m+n-1)$个数字格(基变量)对应的系数向量是一个基。任一空格(非基变量)对应的系数向量是这个基的线性组合。如$P_{ij}, i,j \in N$可表示为

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= e_i + e_{m+j} \\
&= e_i + e_{m+k} - e_{m+k} + e_l - e_l + e_{m+s} - e_{m+s} + e_u - e_u + e_{m+j} \\
&= (e_i + e_{m+k}) - (e_l + e_{m+k}) + (e_l + e_{m+s}) - (e_u + e_{m+s}) \\
&\quad + (e_u + e_{m+j}) \\
&= P_{ik} - P_{lk} + P_{ls} - P_{us} + P_{uj}
\end{aligned}$$

其中$P_{ik}, P_{lk}, P_{ls}, P_{us}, P_{uj} \in B$。而这些向量构成了闭回路(见图4-2)

存在性的证明：因为数字格为基。

唯一性的证明：反证法，若还存在另一个闭回路，则两种表示作差后，数字格对应的系数向量线性相关，矛盾！

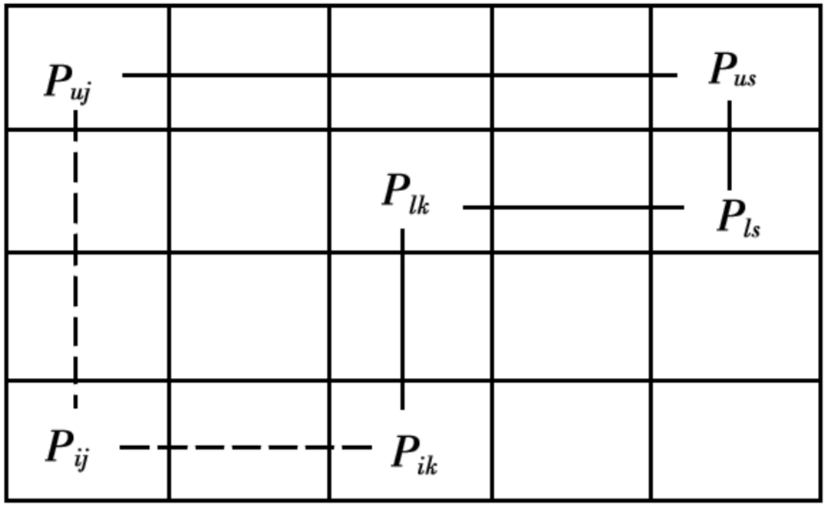


图4-2

2.2 闭回路法

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	+		4 −	3	7
A_2	3 −		1 +		4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

表 4-9

P_{11}是三个基向量 P_{13}, P_{23}, P_{21} 的线性组合

闭回路法计算检验数的经济解释为：在已给出初始解的表4-9中，可从任一空格出发，如(A_1, B_1)，

若让A_1的产品调运1吨给B_1。为了保持产销平衡，就要依次作调整：

在(A_1, B_3)处减少1吨，

(A_2, B_3)处增加1吨，

(A_2, B_1)处减少1吨，

$$P_{11} = e_1 + e_{3+1} = e_1 + e_4 \qquad P_{13} = e_1 + e_{3+3} = e_1 + e_6$$

$$P_{23} = e_2 + e_{3+3} = e_2 + e_6 \qquad P_{21} = e_2 + e_{3+1} = e_2 + e_4$$

$$P_{11} = e_1 + e_4 = e_1 + e_6 - e_6 - e_2 + e_2 + e_4$$

$$= (e_1 + e_6) - (e_6 + e_2) + (e_2 + e_4) = P_{13} - P_{23} + P_{21}$$

即构成了以(A_1, B_1)空格为起点，其他为数字格的闭回路。

2.2 闭回路法

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4	3	7
A_2	3		1		4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

可见这调整的方案使运费增加

$$(+1)\times 3+(-1)\times 3+(+1)\times 2+(-1)\times 1=1$$

这表明，若在(A_1,B_1)格调整运量，将增加运费。1就是x_{11}对应的检验数。按上述方法，可以找出所有空格的检验数：

找出所有空格的检验数:

空格	闭回路	检验数
(11)	(11) – (13) – (23) – (21) – (11)	1
(12)	(12) – (14) – (34) – (32) – (12)	$\boxed{2}$
(22)	(22) – (23) – (13) – (14) – (34) – (32) – (22)	$\boxed{1}$
(24)	(24) – (23) – (13) – (14) – (24)	-1
(31)	(31) – (34) – (14) – (13) – (23) – (21) – (31)	10
(33)	(33) – (34) – (14) – (13) – (33)	12

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		○	4	3	7
A_2	3		1		4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4	3	7
A_2	3	○	1		4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

找出所有空格的检验数：

空格	闭回路	检验数
(11)	(11) – (13) – (23) – (21) – (11)	1
(12)	(12) – (14) – (34) – (32) – (12)	2
(22)	(22) – (23) – (13) – (14) – (34) – (32) – (22)	1
(24)	(24) – (23) – (13) – (14) – (24)	-1
(31)	(31) – (34) – (14) – (13) – (23) – (21) – (31)	10
(33)	(33) – (34) – (14) – (13) – (33)	12

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4	3	7
A_2	3		1		4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4	3	7
A_2	3		1		4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

找出所有空格的检验数：

空格	闭回路	检验数
(11)	(11) – (13) – (23) – (21) – (11)	1
(12)	(12) – (14) – (34) – (32) – (12)	2
(22)	(22) – (23) – (13) – (14) – (34) – (32) – (22)	1
(24)	(24) – (23) – (13) – (14) – (24)	-1
(31)	(31) – (34) – (14) – (13) – (23) – (21) – (31)	10
(33)	(33) – (34) – (14) – (13) – (33)	12

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4	3	7
A_2	3		1		4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

当检验数还存在负数时，说明原方案不是最优解，要继续改进。

2. 位势法：

- 用闭回路法求检验数时，需给每一空格找一条闭回路。当产销点很多时，这种计算很繁琐。下面介绍较为简便的方法——位势法。
- 设$u_1, u_2, \dots, u_m$；$v_1, v_2, \dots, v_n$是对应运输问题的$m+n$个约束条件的对偶变量。B是含有一个人工变量x_a的$(m+n)\times(m+n)$初始基矩阵。人工变量x_a在目标函数中的系数$c_a=0$，从线性规划的对偶理论可知：

$$C_B B^{-1} = (u_1, u_2, \cdots, u_m; v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

- 而每个决策变量x_{ij}的系数向量$P_{ij}=e_i+e_{m+j}$，所以$C_B B^{-1} P_{ij} = u_i + v_j$。于是检验数

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - C_B B^{-1} P_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

- 由单纯形法得知所有基变量的检验数等于0。即

$$c_{ij} - (u_i + v_j) = 0, \quad i, j \in B$$

2.2 位势法

例如，由最小元素法得到的初始解(表4-9)中，$x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{23}, x_{32}, x_{34}$，是基变量。

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	**3**	**10**
A_2	**1**	9	**2**	8
A_3	7	**4**	10	**5**

表 4-8

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4	3	7
A_2	3		1		4
A_3		6		3	9
销量					

表 4-9

由基变量对应的检验数可以得到如下方程组：

基变量	检验数		基变量	检验数	
x_{13}	$c_{13}-(u_1+v_3)$	$3-(u_1+v_3)=0$	x_{23}	$c_{23}-(u_2+v_3)$	$1-(u_2+v_3)=0$
x_{14}	$c_{14}-(u_1+v_4)$	$10-(u_1+v_4)=0$	x_{32}	$c_{32}-(u_3+v_2)$	$4-(u_3+v_2)=0$
x_{21}	$c_{21}-(u_2+v_1)$	$1-(u_2+v_1)=0$	x_{34}	$c_{34}-(u_3+v_4)$	$5-(u_3+v_4)=0$

2.2 位势法

基变量	检验数	基变量	检验数
x_{13}	$c_{13}-(u_1+v_3)\quad 3-(u_1+v_3)=0$	x_{23}	$c_{23}-(u_2+v_3)\quad 1-(u_2+v_3)=0$
x_{14}	$c_{14}-(u_1+v_4)\quad 10-(u_1+v_4)=0$	x_{32}	$c_{32}-(u_3+v_2)\quad 4-(u_3+v_2)=0$
x_{21}	$c_{21}-(u_2+v_1)\quad 1-(u_2+v_1)=0$	x_{34}	$c_{34}-(u_3+v_4)\quad 5-(u_3+v_4)=0$

以上共有6个方程，7个变量，因此是不定方程组。

若令$u_1=0$，可以解得：

$$u_2=-1, u_3=-5, v_1=2, v_2=9, v_3=3, v_4=10,$$

而非基变量的检验数$\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$，可以从已知的$u_i, v_j$中通过简单的计算求得。

- 这些计算可以在表格中进行，下面用本节的例子说明：

非基变量的检验数：

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j),$$

表 4-8

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	**3**	**10**
A_2	**1**	9	**2**	8
A_3	7	**4**	10	**5**

表 4-9

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4	3	7
A_2	3		1		4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

第一步：按最小元素法给出表4-9的初始解。对照表4-9，在数字格的位置上填入单位运价，得到表4-16：

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1			3	10
A_2	1		2	
A_3		4		5

表 4-16

第二步：在表4-16上增加一行一列，在列中填入u_i，在行中填入v_j，得表4-17:

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1			$\boxed{3}$	$\boxed{10}$	
A_2	$\boxed{1}$		$\boxed{2}$		
A_3		$\boxed{4}$		$\boxed{5}$	
v_j					

表 4-17

- 先令$u_1=0$，然后按$c_{ij}=u_i+v_j$，相继地确定u_i,v_j：
- 由$c_{13}=3,c_{14}=10$，$u_1=0$，可知$v_3=3,v_4=10$；
- 由$c_{23}=2$，$v_3=3$，可知$u_2=-1$；
- 由$c_{34}=5$，$v_4=10$，可知$u_3=-5$；
- 由$c_{21}=1$，$u_2=-1$，可知$v_1=2$；
- 由$c_{32}=4$，$u_3=-5$，可知$v_2=9$；

第三步：利用表4-17中的位势，计算空格检验数，

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	$\boxed{3}$	$\boxed{11}$	3	10
A_2	1	$\boxed{9}$	2	$\boxed{8}$
A_3	$\boxed{7}$	4	$\boxed{10}$	5

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1			3	10	0
A_2	1		2		-1
A_3		4		5	-5
v_j	2	9	3	10	

表 4-17

这些计算可以直接在表上进行，得到检验数表如表4-18:

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	3-(0+2)=1	11-(0+9)=2	0	0	0
A_2	0	9-(-1+9)=1	0	8-(-1+10)=-1	-1
A_3	7-(-5+2)=10	0	10-(-5+3)=12	0	-5
v_j	2	9	3	10	

表 4-18

比较闭回路法和位势法的结果:

空格	闭回路	检验数
(11)	(11) – (13) – (23) – (21) – (11)	1
(12)	(12) – (14) – (34) – (32) – (12)	2
(22)	(22) – (23) – (13) – (14) – (34) – (32) – (22)	1
(24)	(24) – (23) – (13) – (14) – (24)	-1
(31)	(31) – (34) – (14) – (13) – (23) – (21) – (31)	10
(33)	(33) – (34) – (14) – (13) – (33)	12

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	3-(0+2)=1	11-(0+9)=2	0	0	0
A_2	0	9-(-1+9)=1	0	8-(-1+10)=-1	-1
A_3	7-(-5+2)=10	0	10-(-5+3)=12	0	-5
v_j	2	9	3	10	

表 4-18

4.2 表上作业法

4.2.1 确定初始基可行解

4.2.2 最优解的判别

4.2.3 闭回路调整法

4.2.4 计算中的问题

2.3 闭回路调整法

当在表中空格处出现负检验数时，表明未得最优解。若有两个和两个以上的负检验数时，一般选其中最小的负检验数，以它对应的空格为调入格，即**以它对应的非基变量为换入变量**。

表 4-18

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	3-(0+2)=1	11-(0+9)=2	0	0	0
A_2	0	9-(-1+9)=1	0	8-(-1+10)=-1	-1
A_3	7-(-5+2)=10	0	10-(-5+3)=12	0	-5
v_j	2	9	3	10	

由表4-18得(2, 4)为调入格。以此格为出发点，作一闭回路，如表4-19所示。

表 4-19

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4 (+1)	3 (-1)	7
A_2	3		1 (-1)	(+1)	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

2.3 闭回路调整法

(2, 4)格的调入量θ是选择闭回路上具有(-1)的数字格中的最小者。即$\theta = min(1,3) = 1$(其原理与单纯形法按θ规划来确定换出变量相同)。然后按闭回路上的正、负号，加入和减去此值，得到调整方案，如表4-20所示：

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4 (+1)	3 (-1)	7
A_2	3		1 (-1)	(+1)	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

表 4-19

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			5	2	7
A_2	3			1	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

表 4-20

对表4-20给出的解，

再用闭回路法或位势法求各空格的检验数：

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			5	2	7
A_2	3			1	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

表 4-20

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

求得所有检验数都为非负，故表4-20中的解为最优解。这时得到的总运费最小是85元。

華中科技大學 HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

2.1 伏格尔法

第三步：对表4-12中未划去的元素再分别计算出各行、各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行。重复第一、二步，直到给出初始解为止，如表4-13。

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额
A_1	3	11	3	10	
A_2	1	9	2	8	
A_3	7	4	10	5	
列差额					

表 4-12

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			5	2	7
A_2	3			1	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

表 4-13

$$1\times3+4\times6+3\times5+10\times2+8\times1+5\times3=85$$

由以上可见：伏格尔法同最小元素法除在确定供求关系的原则上不同外，其余步骤相同。

伏格尔法给出的初始解比用最小元素法给出的初始解更接近最优解：本例用伏格尔法给出的初始解就是最优解。

17

2.3 闭回路调整法

解：

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1			3	10	
A_2	1			8	
A_3		4		5	
v_j					

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	(3)	(9)	3	10	0
A_2	1	(7)	(1)	8	-2
A_3	(-2)	4	(-2)	5	-5
v_j	3	9	3	10	

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	(3)	(9)	3	10	2
A_2	1	(7)	(1)	8	0
A_3	(-2)	4	(-2)	5	-3
v_j	1	7	1	8	

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	0	2	0	0	
A_2	0	2	1	0	
A_3	9	0	12	0	
v_j					

表 4-21

2.3 闭回路调整法

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4	3	7
A_2	3		1		4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			5	2	7
A_2	3			1	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

闭回路改进法的小结：

- （1）从一个检验数为负数且最小的空格出发，和其它数字格构成闭回路。可证，此闭回路存在且唯一。
- （2）在闭回路上进行运量调整，使选定空格处的运量尽可能地增加。
- （3）运量调整后，必然使某个数字格变成零。把一个变成零的数字格抹去，得新的调运方案。

4.2 表上作业法

4.2.1 确定初始基可行解

4.2.2 最优解的判别

4.2.3 闭回路调整法

4.2.4 计算中的问题

1. **无穷多最优解**：

- 在本章2.1节中提到，产销平衡的运输问题必定存在最优解。那么有唯一最优解还是无穷多最优解?
- 判别依据与第2章3.3节讲述的相同，即某个非基变量(空格)的检验数为0时，该问题有无穷多最优解。
- 表4-21空格(1, 1)的检验数是0，表明该例有无穷多最优解。可在表4-20中以(1, 1)为调入格，作闭回路$(11)_+ - (14)_- - (24)_+ - (21)_- - (11)_+$，确定$\theta = min(2,3) = 2$。经调整后得到另一最优解，见表4-22。

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	0	2	0	0	
A_2	0	2	1	0	
A_3	9	0	12	0	
v_j					

表 4-21

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	2 (+θ)		5	(2-θ)	7
A_2	1 (3-θ)			3 (1+θ)	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

表 4-22

2. 退化：

用表上作业法求解运输问题当出现退化时，在相应的格中一定要填一个0，以表示此格为数字格。有以下两种情况：

- (1) 当确定初始解的各供需关系时，若在(i,j)格填入某数字后，出现A_i处的余量等于B_j处的需量。这时在产销平衡表上填一个数后，在单位运价表上要相应地划去一行和一列。
- 为了保证在产销平衡表上有$m+n-1$个数字格(基变量)，这时需要添一个“0”。它的位置可在对应同时划去的那行或那列的任一空格处。

例：用最小元素法求下面的运输问题(表4-23，表4-24)初始基可行解：

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		$\boxed{}$			7
A_2		$\boxed{}$			4
A_3			$\boxed{}$	$\boxed{}$	9
销量	3	6	5	6	

表 4-23

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	4	5
A_2	7	7	3	8
A_3	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	10	$\boxed{6}$

表 4-24

- 运价表(31)格为最小运价，对应填入3，划去运价表第一列。
- 剩余部分最小运价是(32)格，此时B_2未满足需求量为6，A_3剩余产量也是6。填入数字后，会在运价表中同时划去B_2列和A_3行。
- 可以在表4-23的空格(12)，(22)，(33)，(34)中任选一格添加一个0。
- 为了减少调整次数，选择4个空格中对应最小运价的位置，即(34)格，填入0。接下来就可以按照最小元素法继续处理。

第二种情况：

- (2) 在用闭回路法调整时，在闭回路上出现两个和两个以上具有 (-1)标记的相等的最小值。这时经过调整后，会出现退化解。
- 处理办法是，标记取最小值的数字格，取一个变为空格，其他取最小值的数字格填入0，表明它是基变量。
- 当出现退化解，并且需要进行改进调整时，有可能在闭回路上有标记为(-1)的取值为0的数字格，此时应取调整量$\theta=0$。

例

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	产量
A_1			10	15 (-)	10		(+)	35
A_2	15 (+)						10 (-)	25
A_3	10 (-)			5 (+)				15
A_4		20		5		15		40
销量	25	20	10	25	10	15	10	

2.4 计算中的问题

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	产量
A_1			10	15 (-)	10		(+)	35
A_2	15 (+)						10 (-)	25
A_3	10 (-)			5 (+)				15
A_4		20		5		15		40
销量	25	20	10	25	10	15	10	

令$\theta = \min(15,10,10) = 10$，闭回路调节后得到：

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	产量
A_1			10	5	10		10	35
A_2	25						0	25
A_3				15				15
A_4		20		5		15		40
销量	25	20	10	25	10	15	10	

2.4 计算中的问题

- 当出现退化解，并且需要进行改进调整时，有可能在闭回路上有标记为(−1)的取值为0的数字格，此时应取调整量$\theta = 0$。
- 若再以(24)格为调入格，调节闭回路，会发现闭回路上存在(14)和(27)两格可以标记为(-1)，此时调整量$\theta = 0$。
- 调节后，(24)格变成数字格，写入0，(27)格擦去数字，成为空白格，即进行了基变量换入换出，但解没有发生变化。

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	产量
A_1			10	5 -1	10		10 +1	35
A_2	25			0 +1			~~0~~ -1	25
A_3				15				15
A_4		20		5		15		40
销量	25	20	10	25	10	15	10	

运 筹 学

Operations Research (OR)

讲师： 王 博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email： wb8517@hust.edu.cn　QQ：2734802827

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第4章 运输问题

第4章 运输问题

第1节 运输问题的数学模型

第2节 表上作业法

第3节 产销不平衡的运输问题

第4节 应用举例

产销不平衡的运输问题

前面所讲表上作业法，都是以产销平衡为前提条件的；即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

但是实际问题中产销往往是不平衡的。解决办法的思路是，把产销不平衡的问题化成产销平衡的问题。

(1) 当产大于销 $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$：

运输问题的数学模型可以写成：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, & (i=1,2,\cdots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & (j=1,2,\cdots,n) \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

产销不平衡的运输问题

由于总的产量大于销量，就要考虑多余的物资在哪一个产地就地储存的问题。设$x_{i,n+1}$是产地A_i的储存量，于是有：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n), \quad \sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}$$

令：

$$c'_{ij} = c_{ij}, i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n$$
$$c'_{ij} = 0, i = 1,2,\ldots,m, j = n+1$$

从而得到：

$$\min z' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1} c'_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} c'_{i,n+1} x_{i,j+1} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t. \ \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, x_{ij} \geq 0$$

新问题是一个产销平衡问题，它满足 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j + b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$

产销不平衡的运输问题

- 运价表：

销地 / 产地	1	2	...	n	$n+1$	产量
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	0	a_1
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	0	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	0	a_m
销量	b_1	b_2	...	b_n	b_{n+1}	

c_{ij}是运价

产销不平衡的运输问题

- **运输表：**

销地 / 产地	1	2	…	n	$n+1$	产量
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$x_{1,n+1}$	a_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$x_{2,n+1}$	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	$x_{m,n+1}$	a_m
销量	b_1	b_2	…	b_n	b_{n+1}	

x_{ij}**是运量**

产销不平衡的运输问题

- 当产大于销，只要增加一个假想的销地$j=n+1$(实际上是储存)，该销地总需要量为

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

而在单位运价表中从各产地到假想销地的单位运价为$c'_{i,n+1}=0$，就可以将问题转化成一个产销平衡的运输问题。

- (2) 当销大于产：$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$
- 增加一个假想的产地$m+1$，该地产量为

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

类似地，在单位运价表中令假想产地到各销地的单位运价为$c'_{m+1,j}=0$，就可以将问题转化成一个产销平衡的运输问题。

产销不平衡的运输问题

- 运价表：

销地 / 产地	1	2	…	n	产量
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
$m+1$	0	0	…	0	a_{m+1}
销量	b_1	b_2	…	b_n	

产销不平衡的运输问题

- 运输表：

销地 / 产地	1	2	…	n	产量
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	a_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	a_m
$m+1$	$x_{m+1,1}$	$x_{m+1,2}$	…	$x_{m+1,n}$	a_{m+1}
销量	b_1	b_2	…	b_n	

- **例**：设有三个化肥厂(A，B，C)供应四个地区(Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ)的农用化肥。假定等量的化肥在这些地区使用效果相同。各化肥厂年产量，各地区年需要量及从各化肥厂到各地区运送单位化肥的运价如表3-25所示。试求出总的运费最节省的化肥调拨方案。

需求地区 化工厂	I	II	III	IV	产量
A	16	13	22	17	50
B	14	13	19	15	60
C	19	20	23	/	50
最低需求(万吨)	30	70	0	10	
最高需求(万吨)	50	70	30	不限	

例题

- 解：总产量为160万吨，四个地区的最低需求为110万吨，最高需求为无限。这是一个产销不平衡的运输问题.
- 根据现有产量(160万吨)，第Ⅳ个地区每年最多能分配到60万吨，这样最高需求为210万吨，大于产量。为了求得平衡，在产销平衡表中增加一个假想的化肥厂D，其年产量为50万吨。
- 对凡是需求分两种情况的地区，实际上可按照两个地区看待。

需求地区 / 化工厂	I'	I''	II	III	IV'	IV''	产量
A							50
B							60
C							50
D							50
销量(万吨)	30	20	70	30	10	50	

例题

- 由于各地区的需要量包含两部分，如地区Ⅰ，其中30万吨是最低需求，故不能由假想化肥厂D供给，令相应运价为M(任意大正数)
- 而另一部分20万吨满足或不满足均可以，因此可以由假想化肥厂D供给，按前面讲的，令相应运价为0。

需求地区 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	
A	16	16	13	22	17	17	
B	14	14	13	19	15	15	
C	19	19	20	23	M	M	
D	M	0	M	0	M	0	

- 由上面的两张表，可以得到一个产销平衡的运输问题：

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	产量
A							50
B							60
C							50
D							50
销量(万吨)	30	20	70	30	10	50	

产销平衡表 (4-26)

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	
A	16	16	13	22	17	17	
B	14	14	13	19	15	15	
C	19	19	20	23	M	M	
D	M	0	M	0	M	0	

单位运价表 (4-27)

例题

- 可以由表上作业法求解。首先利用伏格尔法求初始解：
- 求出运费的行列差，填入表中：

需求地区 化工厂	I'	I''	II	III	IV'	IV''	产量
A							50
B							60
C							50
D							50
销量(万吨)	30	20	70	30	10	50	

需求地区 化工厂	I'	I''	II	III	IV'	IV''	行差额
A	16	16	13	22	17	17	3
B	14	14	13	19	15	15	1
C	19	19	20	23	M	M	0
D	M	0	M	0	M	0	0
列差额	2	14	0	19	2	15	

例题

- 此时最大的行列差额是第III列，差额为19，最小运费是D-III：

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	行差额
A	16	16	13	22	17	17	3
B	14	14	13	19	15	15	1
C	19	19	20	23	M	M	0
D	M	0	M	0	M	0	0
列差额	2	14	0	19	2	15	

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	产量
A							50
B							60
C							50
D				30			50
销量(万吨)	30	20	70	30	10	50	

例题

- 更新行列差额，找出差额最大的行列和对应最小运费的格子：

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	行差额
A	16	16	13	22	17	17	3
B	14	14	13	19	15	15	1
C	19	19	20	23	M	M	0
D	M	0	M	0	M	0	0
列差额	2	14	0	-	2	15	

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	产量
A							50
B							60
C							50
D				30		20	50
销量(万吨)	30	20	70	30	10	50	

例题

- 更新行列差额，找出差额最大的行列和对应最小运费的格子：

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	行差额
A	16	16	13	22	17	17	3
B	14	14	13	19	15	15	1
C	19	19	20	23	M	M	0
D	M	0	M	0	M	0	-
列差额	2	2	0	-	2	2	

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	产量
A			50				50
B							60
C							50
D				30		20	50
销量(万吨)	30	20	70	30	10	50	

例题

- 更新行列差额，找出差额最大的行列和对应最小运费的格子：

需求地区 / 化工厂	I'	I''	II	III	IV'	IV''	行差额
A	16	16	13	22	17	17	-
B	14	14	13	19	15	15	1
C	19	19	20	23	M	M	0
D	M	0	M	0	M	0	-
列差额	5	5	7	-	M-15	M-15	

需求地区 / 化工厂	I'	I''	II	III	IV'	IV''	产量
A			50				50
B					10		60
C							50
D				30		20	50
销量(万吨)	30	20	70	30	10	50	

例题

- 更新行列差额，找出差额最大的行列和对应最小运费的格子：

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	行差额
A	16	16	13	22	17	17	-
B	14	14	13	19	15	15	1
C	19	19	20	23	M	M	0
D	M	0	M	0	M	0	-
列差额	5	5	7	-	-	M-15	

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	产量
A			50				50
B					10	30	60
C							50
D				30		20	50
销量(万吨)	30	20	70	30	10	50	

例题

- 更新行列差额，找出差额最大的行列和对应最小运费的格子：
- 因同时划去B行II列，根据最小运费原则，选择B-I”填入0。

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	行差额
A	~~16~~	~~16~~	~~13~~	~~22~~	~~17~~	~~17~~	~~-~~
B	~~14~~	~~14~~	~~13~~	~~19~~	~~15~~	~~15~~	~~1~~
C	19	19	20	23	M	M	0
D	~~M~~	~~0~~	~~M~~	~~0~~	~~M~~	~~0~~	~~-~~
列差额	5	5	7	-	-	-	

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	产量
A			50				50
B		0	20		10	30	60
C							50
D				30		20	50
销量(万吨)	30	20	70	30	10	50	

- 只剩两格，不需再计算行列差额，按最小元素法，填入剩下的数字：

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	行差额
A	16	16	13	22	17	17	-
B	14	14	13	19	15	15	-
C	19	19	20	23	M	M	
D	M	0	M	0	M	0	-
列差额	-	-	-	-	-	-	

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	产量
A			50				50
B		0	20		10	30	60
C	30	20					50
D				30		20	50
销量(万吨)	30	20	70	30	10	50	

例题

- 用位势法计算检验数。根据初始解选择位势表中的运费：
- 选择$u_1 = 0$。

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	u_i
A			13				0
B		14	13		15	15	-
C	19	19					-
D				0		0	-
v_j	-	-	-	-	-	-	

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	产量
A			50				50
B		0	20		10	30	60
C	30	20					50
D				30		20	50
销量(万吨)	30	20	70	30	10	50	

例题

- 根据$u_1 = 0$，得到$v_3 = 13$。

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	u_i
A			13				0
B		14	13		15	15	-
C	19	19					-
D				0		0	-
v_j	-	-	13	-	-	-	

- 根据$v_3 = 13$，得到$u_2 = 0$

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	u_i
A			13				0
B		14	13		15	15	0
C	19	19					-
D				0		0	-
v_j	-	-	13	-	-	-	

例题

- 根据$u_2 = 0$，得到$v_2 = 14, v_5 = v_6 = 15$。

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	u_i
A			13				0
B		14	13		15	15	0
C	19	19					-
D				0		0	-
v_j	-	14	13	-	15	15	

- 如此反复，得到如下位势表：

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	u_i
A			13				0
B		14	13		15	15	0
C	19	19					5
D				0		0	-15
v_j	14	14	13	15	15	15	

例题

- 根据位势表和运价表，得到空白格检验数：
- 此时可以看出，检验数全部为正，伏格尔法所得为最优方案。

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	u_i
A	16	16	13	22	17	17	0
B	14	14	13	19	15	15	0
C	19	19	20	23	M	M	5
D	M	0	M	0	M	0	-15
v_j	14	14	13	15	15	15	

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	u_i
A	**2**	**2**	0	**7**	**2**	**2**	0
B	**0**	0	0	**4**	0	0	0
C	0	0	**2**	**3**	**M-20**	**M-20**	5
D	**M+1**	**1**	**M+2**	0	**M**	0	-15
v_j	14	14	13	15	15	15	

- 根据位势表和运价表，得到空白格检验数：
- 此时可以看出，检验数全部为正，伏格尔法所得为最优方案。

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	u_i
A	16	16	13	22	17	17	0
B	14	14	13	19	15	15	0
C	19	19	20	23	M	M	5
D	M	0	M	0	M	0	-15
v_j	14	14	13	15	15	15	

需求地区 / 化工厂	I’	I”	II	III	IV’	IV”	产量
A			50				50
B		0	20		10	30	60
C	30	20					50
D				30		20	50
销量(万吨)	30	20	70	30	10	50	

运 筹 学

Operations Research (OR)

讲师： 王 博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email： wb8517@hust.edu.cn　QQ：2734802827

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第4章 运输问题

第4章 运输问题

第1节 运输问题的数学模型

第2节 表上作业法

第3节 产销不平衡的运输问题

第4节 应用举例

- **例：某石油公司设有四个炼油厂，它们生产普通汽油，并为七个销售区服务，生产和需求情况如下：**

炼油厂	1	2	3	4
日产量(万公升)	35	25	15	40

销售区	1	2	3	4	5	6	7
日最大销售量(万公升)	25	20	10	25	10	15	10

- **从炼油厂运往第j个销售区每公升汽油平均运费（单位：角/公升）如下表，应如何调运，使运费最省。**

销地 产地	1	2	3	4	5	6	7	产量
1	6	5	2	6	3	6	3	35
2	3	7	5	8	6	9	2	25
3	4	8	6	5	5	8	5	15
4	7	4	4	7	4	7	4	40
销量	25	20	10	25	10	15	10	

- 现给出最小元素法得到的初始基可行解：

产销	1	2	3	4	5	6	7	产量
1			10	15	10			35
2	15						10	25
3	10			5				15
4		20		5		15		40
销量	25	20	10	25	10	15	10	

- 请大家用位势法计算一下检验数，默认$u_1 = 0$：

产销	1	2	3	4	5	6	7	u_i
1	6	5	2	6	3	6	3	0
2	3	7	5	8	6	9	2	
3	4	8	6	5	5	8	5	
4	7	4	4	7	4	7	4	
v_j								

- 作位势表，默认$u_1 = 0$：

产销	1	2	3	4	5	6	7	u_i
1			2	6	3			0
2	3						2	
3	4			5				
4		4		7		7		
v_j								

- 依次计算位势：

产销	1	2	3	4	5	6	7	u_i
1			2	6	3			0
2	3						2	
3	4			5				
4		4		7		7		
v_j								

- 得到所有的位势：

产销	1	2	3	4	5	6	7	u_i
1	6	5	2	6	3	6	3	0
2	3	7	5	8	6	9	2	-2
3	4	8	6	5	5	8	5	-1
4	7	4	4	7	4	7	4	1
v_j	5	3	2	6	3	6	4	

- 位势表计算检验数：

产销	1	2	3	4	5	6	7	u_i
1			0	0	0			0
2	0						0	-2
3	0			0				-1
4		0		0		0		1
v_j	5	3	2	6	3	6	4	

例题

- (17), (47)的检验数小于0，不是最优解，选择了(17)换入：

产销	1	2	3	4	5	6	7	u_i
1	**1**	**2**	0	0	0	**0**	$\boxed{\mathbf{-1}}$	0
2	0	**6**	**5**	**4**	**5**	**5**	0	-2
3	0	**6**	**5**	0	**3**	**3**	**2**	-1
4	**1**	0	**1**	0	**0**	0	$\boxed{\mathbf{-1}}$	1
v_j	5	3	2	6	3	6	4	

- 从(17)出发做闭回路：

产销	1	2	3	4	5	6	7	u_i
1			2	6	3			0
2	3						2	-2
3	4			5				-1
4		4		7		7		1
v_j	5	3	2	6	3	6	4	

- 按照闭回路调整初始基可行解：

产销	1	2	3	4	5	6	7	产量
1			10	15(-)	10		(+)	35
2	15(+)						10(-)	25
3	10(-)			5(+)				15
4		20		5		15		40
销量	25	20	10	25	10	15	10	

- 令$\theta = \min(15,10,10) = 10$，闭回路调节后得到：

产销	1	2	3	4	5	6	7	产量
1			10	5	10		10	35
2	5						0	25
3				15				15
4		20		5		15		40
销量	25	20	10	25	10	15	10	

- 按照闭回路调整后的解：

产销	1	2	3	4	5	6	7	产量
1			10	5	10		10	35
2	5						0	25
3				15				15
4		20		5		15		40
销量	25	20	10	25	10	15	10	

- 再次用位势法计算检验数：

产销	1	2	3	4	5	6	7	u_i
1	2	2	0	0	0	0	0	0
2	0	4	4	3	4	4	0	-1
3	1	6	5	0	3	3	3	-1
4	2	0	1	0	0	0	0	1
v_j	4	3	2	6	3	6	3	

- 此时可以看到所有检验数均非负，故得到最优解：

产销	1	2	3	4	5	6	7	产量
1			10	5	10		10	35
2	5						0	25
3				15				15
4		20		5		15		40
销量	25	20	10	25	10	15	10	

产销	1	2	3	4	5	6	7	u_i
1	2	2	0	0	0	0	0	0
2	0	4	4	3	4	4	0	-1
3	1	6	5	0	3	3	3	-1
4	2	0	1	0	0	0	0	1
v_j	4	3	2	6	3	6	3	

- 又因为有非基变量检验数等于0，存在无穷多最优解。

例题

- 给出另一组解：
  大家可以自行验算一下检验数或是最优目标函数值。

产销	1	2	3	4	5	6	7	产量
1			10		10	5	10	35
2	25							25
3				15			0	15
4		20		10		10		40
销量	25	20	10	25	10	15	10	

应用举例

- 由于在变量个数相等的情况下，表上作业法的计算远比单纯形法简单得多。所以在解决实际问题时，人们常常尽可能把某些线性规划的问题化为运输问题的数学模型。
- 下面介绍几个典型例子。

例：某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供10，15，25，20台同一规格的柴油机。已知该厂各季度的生产能力及生产每台柴油机的成本如下表所示。又如果生产出来的柴油机当季不交货的，**每台每积压一个季度需储存、维护等费用0.15万元**。要求在完成合同的情况下，作出使该厂全年生产(包括储存、维护)费用最小的决策。

季度	生产能力(台)	单位成本(万元)
Ⅰ	25	10.8
Ⅱ	35	11.1
Ⅲ	30	11.0
Ⅳ	10	11.3

应用举例

某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供10，15，25，20台同一规格的柴油机。已知该厂各季度的生产能力及生产每台柴油机的成本如下表所示。

季度	生产能力(台)	单位成本(万元)
I	25	10.8
II	35	11.1
III	30	11.0
IV	10	11.3

解：由于每个季度生产出来的柴油机不一定当季交货，所以设 x_{ij} 为第 i 季度生产的用于第 j 季度交货的柴油机数。根据合同要求，必须满足：

$$\begin{cases} x_{11} = 10 \\ x_{12} + x_{22} = 15 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 20 \end{cases}$$

又因每季度生产的用于当季和以后各季交货的柴油机数不可能超过该季度的生产能力，故又有：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 25 \\ x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 35 \\ x_{33}+x_{34}\le 30 \\ x_{44}\le 10 \end{cases}$$

季度	生产能力(台)	单位成本(万元)
I	25	10.8
II	35	11.1
III	30	11.0
IV	10	11.3

每台每积压一个季度需储存、维护等费用 0.15万元

第i季度生产的用于j季度交货的每台柴油机的实际成本c_{ij}应该是该季度单位生产成本加上储存、维护等费用。c_{ij}的具体数值见下表

季度i,j	I	II	III	IV
I	10.8	10.95	11.10	11.25
II	\	11.1	11.25	11.40
III	\	\	11.0	11.15
IV	\	\	\	11.3

设用a_i表示该厂第i季度的生产能力，b_j表示第j季度的合同供应量，则问题可写成：

$$\text{目标函数}: \min z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{约束条件}: \begin{cases} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \le a_i \\ \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

其中约束来自于：

生产能力：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \le 25 \\ x_{22}+x_{23}+x_{24} \le 35 \\ x_{33}+x_{34} \le 30 \\ x_{44} \le 10 \end{cases}$$

合同要求：

$$\begin{cases} x_{11} = 10 \\ x_{12}+x_{22} = 15 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} = 25 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} = 20 \end{cases}$$

- 显然，这是一个产大于销的运输问题模型。
- 注意到这个问题中当$i > j$时，$x_{ij} = 0$，所以应令对应的$c_{ij} = M$，
- 再加上一个假想的需求D，就可以把这个问题变成产销平衡的运输模型，并写出产销平衡表和单位运价表(合为下表)：
- 可以用表上作业法求解。

季度 i,j	I	II	III	IV	D	产量
I	10.8	10.95	11.10	11.25	0	25
II	M	11.1	11.25	11.40	0	30
III	M	M	11.0	11.15	0	30
IV	M	M	M	11.3	0	10
销量	10	15	25	20	30	

- 经用表上作业法求解，可得多个最优方案，下表为最优方案之一。
- 即第Ⅰ季度生产25台，10台当季交货，15台Ⅱ季度交货；Ⅱ季度生产5台，用于Ⅲ季度交货；Ⅲ季度生产30台，其中20台于当季交货，10台于Ⅳ季度交货。Ⅳ季度生产10台，于当季交货。
- 按此方案生产，该厂总的生产(包括储存、维护)的费用为773万元。

季度 i,j	I	II	III	IV	D	产量
I	10	15	0			25
II			5		30	30
III			20	10		30
IV				10		10
销量	10	15	25	20	30	

例：某航运公司承担六个港口城市A、B、C、D、E、F的四条固定航线的物资运输任务。已知各条航线的起点、终点城市及每天航班数见下表。

航线	起点城市	终点城市	每日航班数
1	E	D	3
2	B	C	2
3	A	F	1
4	D	B	1

- 假定各航线使用相同型号船只，各城市间的航程天数如下表：

到 从	A	B	C	D	E	F
A	0	1	2	14	7	7
B	1	0	3	13	8	8
C	2	3	0	15	5	5
D	14	13	15	0	17	20
E	7	8	5	17	0	3
F	7	8	5	20	3	0

又知每条船只每次装卸货的时间各需1天。则该航运公司至少应配备多少条船，才能满足所有航线的运货需求?

- 解：该公司需要配备的船只 分两部分
- (1) 载货航程需要的周转船只数。例如航线1，在港口E装货1天，E→D航程17天，在D卸货1天，总计19天。每天3航班，故该航线周转船只需57条。由下表，载货一共需要91条船。

航线	起点城市	终点城市	每日航班数
1	E	D	3
2	B	C	2
3	A	F	1
4	D	B	1

航线	装货天数	航程天数	卸货天数	小计	航班数	周转需求
1	1	17	1	**19**	3	57
2	1	3	1	**5**	2	10
3	1	7	1	**9**	1	9
4	1	13	1	**15**	1	15

- 解：该公司需要配备的船只分两部分
- (2) 各港口间调度所需船只数。有些港口每天到达船数多于需要船数，例如港口D，每天到达3条，需求1条；而有些港口到达数少于需求数，例如港口B。
- 各港口每天余缺船只数的计算见下表：

航线	起点城市	终点城市	每日航班数
1	E	D	3
2	B	C	2
3	A	F	1
4	D	B	1

航线	每天到达	每天需求	余缺数
A	0	1	-1
B	1	2	-1
C	2	0	2
D	3	1	2
E	0	3	-3
F	1	0	1

应用举例

航线	每天到达	每天需求	余缺数
A	0	1	-1
B	1	2	-1
C	2	0	2
D	3	1	2
E	0	3	-3
F	1	0	1

- 为使配备船只数最少，应做到周转的空船数为最少。因此建立以下运输问题，其产销平衡表见下表：

港口	A	B	E	空余
C				2
D				2
F				1
缺少	1	1	3	

到 从	A	B	C	D	E	F
A	0	1	2	14	7	7
B	1	0	3	13	8	8
C	2	3	0	15	5	5
D	14	13	15	0	17	20
E	7	8	5	17	0	3
F	7	8	5	20	3	0

- 单位运价表应为相应各港口之间的船只航程天数，见下表：

港口	A	B	E
C	2	3	5
D	14	13	17
F	7	8	3

- 如此，通过表上作业法求解如下运输问题：

港口	A	B	E	空余
C	2	3	5	2
D	14	13	17	2
F	7	8	3	1
缺少	1	1	3	

- 得到最优调运方案：

港口	A	B	E	空余
C	1		1	2
D		1	1	2
F			1	1
缺少	1	1	3	

- 故而最少需周转的空船数量为：

$$2\times 1+13\times 1+5\times 1+17\times 1+3\times 1=40\text{条。}$$

- 这样在不考虑维修、储备等情况下，该公司至少应配备91+40=131条船。

- 例：某造船厂根据合同要从当年起连续三年末各提供三条规格型号相同的大型客货轮。已知该厂这三年内生产大型客货轮的能力及每艘客货轮成本如下表所示。

年度	正常生产时间内可完成的客货轮数	加班生产时间内可完成的客货轮数	正常生产时每艘成本(万元)
1	2	3	500
2	4	2	600
3	1	3	550

- 已知加班生产时,每艘客货轮成本比正常生产时高出 70 万元。又知造出来的客货轮如当年不交货,每艘每积压一年造成积压损失为 40 万元。在签订合同时，该厂已储存了两艘客货轮,而该厂希望在第三年末完成合同后还能储存一艘备用。问该厂应如何安排每年客货轮的生产量，使在满足上述各项要求的情况下，总的生产费用加积压损失为最少？

- **解**：以x_{ij}表示第i年度生产用于第j年度交货的船数，I_i表示第i年度正常生产时间生产的船，II_i表示第i年度加班生产时间生产的船，I_0表示船厂目前储备的船。
- 由于产量大于需求，故设置虚拟销地D，以构建产销平衡问题；
- 根据题意列出产销平衡及单位造价表(见本节例2)，如下所示：

	1	2	3	D	产量
I_0	40	80	120	0	2
I_1	500	540	580	0	2
II_1	570	610	650	0	3
I_2	M	600	640	0	4
II_2	M	670	710	0	2
I_3	M	M	550	0	1
II_3	M	M	620	0	3
需求	3	3	4	7	

例题

- 解：用伏格尔法求得初始可行解：

	1	2	3	D	产量
I_0	2		0		2
I_1		2			2
II_1	1	1		1	3
I_2				4	4
II_2				2	2
I_3			1		1
II_3			3		3
需求	3	3	4	7	

- **解**：用位势法求得检验数：

	1		2		3		D		u_i
I_0	0	40	0	80	0	120	530	0	0
I_1	0	500	0	540	0	580	70	0	460
II_1	0	570	0	610	0	650	0	0	530
I_2	M-570	M	**-10**	600	**-10**	640	0	0	530
II_2	M-570	M	60	670	60	710	0	0	530
I_3	M-470	M	M-510	M	0	550	100	0	430
II_3	M-540	M	M-580	M	0	620	30	0	500
v_j	40		80		120		-530		

- **解**：用闭回路法做调整，调入量选择$(I_2, 2)$：

	1	2	3	D	产量
I_0	2		0		2
I_1		2			2
II_1	1	1(-1)		1(+1)	3
I_2		(+1)		4(-1)	4
II_2				2	2
I_3			1		1
II_3			3		3
需求	3	3	4	7	

- **解：再验证检验数：**

	1		2		3		D		u_i
I_0	0	40	10	80	0	120	530	0	0
I_1	**-10**	500	0	540	**-10**	580	60	0	470
II_1	0	570	10	610	0	650	0	0	530
I_2	M-570	M	0	600	**-10**	640	0	0	530
II_2	M-570	M	70	670	60	710	0	0	530
I_3	M-470	M	M-500	M	0	550	100	0	430
II_3	M-540	M	M-570	M	0	620	30	0	500
v_j	40		70		120		-530		

- 解：用闭回路法做调整，调入量选择$(I_1, 1)$：

	1	2	3	D	产量
I_0	2		0		2
I_1	(+1)	2(-1)			2
II_1	1(-1)			2(+1)	3
I_2		1(+1)		3(-1)	4
II_2				2	2
I_3			1		1
II_3			3		3
需求	3	3	4	7	

- **解：调整后的生产方案：**

	1	2	3	D	产量
I_0	2		0		2
I_1	1	1			2
II_1				3	3
I_2		2		2	4
II_2				2	2
I_3			1		1
II_3			3		3
需求	3	3	4	7	

- **请同学们自行验证一下，此时达到最优解：**

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第4章 运输问题 – 作业

(1) 表上作业法求解如下运输问题的最优解:

销地 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	7	6	4	5
A_2	2	4	3	2	2
A_3	4	3	8	5	3
销量	3	3	2	2	

作业

P113,

4.3 (1)，伏格尔法

P114,

4.4