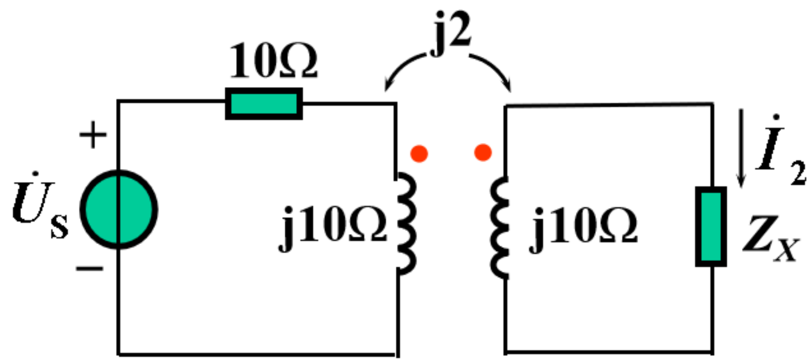
第14章
正弦稳态电路的频率响应

14.1 传递函数与频率响应

14.2 谐振电路

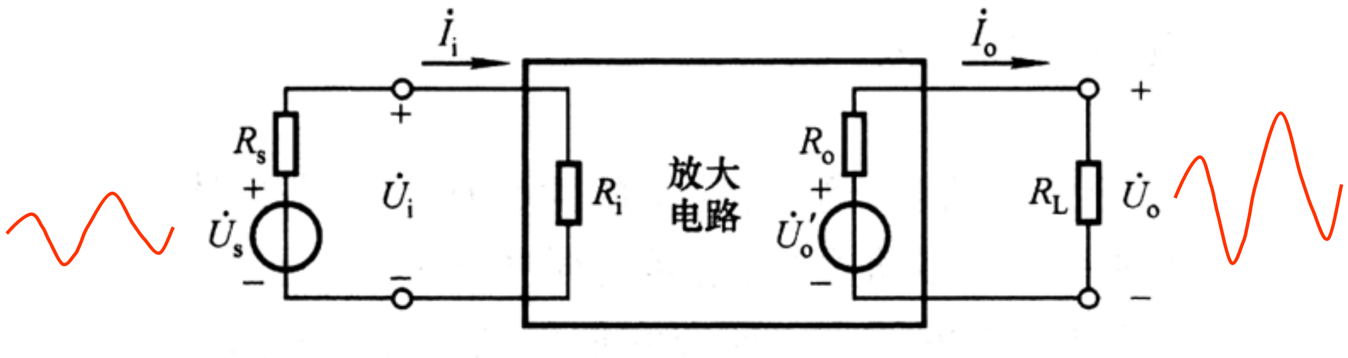
Motivation



负载获取有功最大，与频率密切相关

§14-1 传递函数与频率响应

放大电路可以用有输入口和输出口的四端网络表示。



放大倍数是衡量电路放大能力的一个重要指标，定义为：

$$\dot{A}=\frac{\dot{X}_o}{\dot{X}_i}=\left|\frac{X_o}{X_i}\right|\angle \arg\tan(\theta_o-\theta_i)$$

$\dot{A}$是复数，反映了输出和输入的幅值比与相位差。

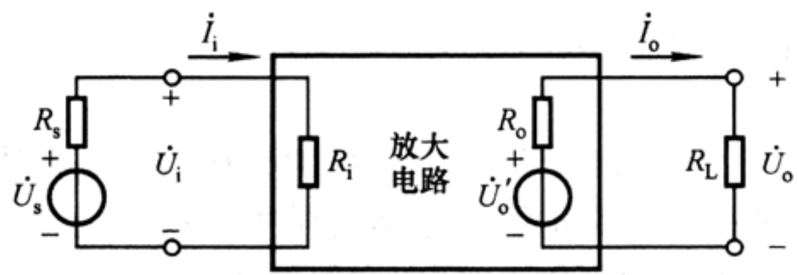
（1）电压放大倍数： $$\dot{A}_{uu}=\dot{A}_u=\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}$$

（2）电流放大倍数： $$\dot{A}_{ii}=\dot{A}_i=\frac{\dot{I}_o}{\dot{I}_i}$$

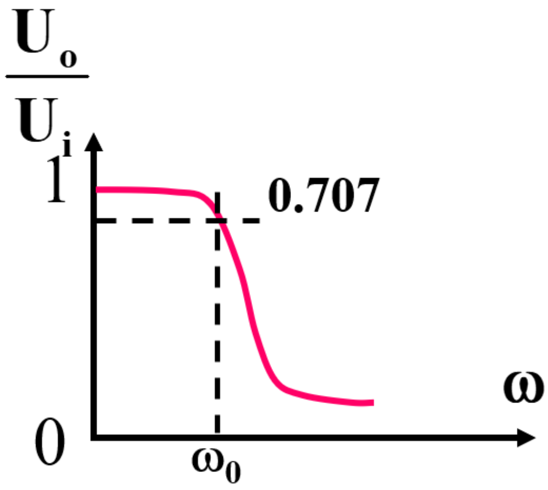
（3）互阻放大倍数： $$\dot{A}_{ui}=\frac{\dot{U}_o}{\dot{I}_i}=\dot{A}_r$$

（4）互导放大倍数： $$\dot{A}_{iu}=\frac{\dot{I}_o}{\dot{U}_i}=\dot{A}_g$$

感抗、容抗的大小和频率有关，正弦稳态电路中的电压电流会随着电源信号频率的变化而变化。



滤波器的功能：对频率进行选择，过滤掉噪声和干扰信号，保留有用信号。



滤波器的分类：

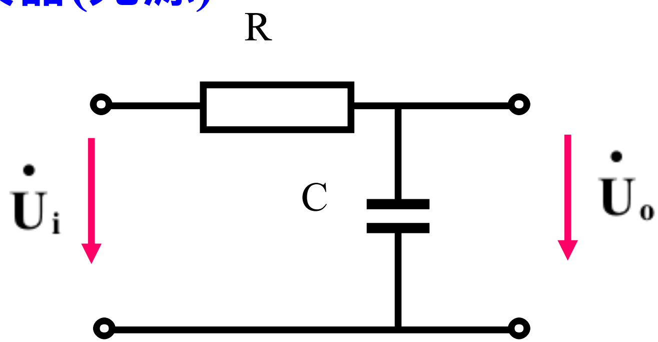
低通滤波器Lower Pass Filter（LPF）

高通滤波器Higher Pass Filter（HPF）

带通滤波器Band Pass Filter（BPF）

带阻滤波器Band Eliminate Filter（BEF）

一阶RC低通滤波器(无源)



$$\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i} = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

传递函数

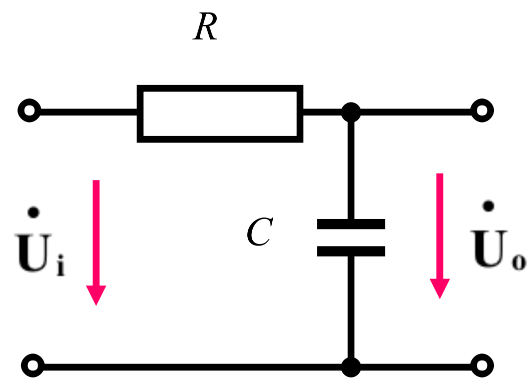
$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

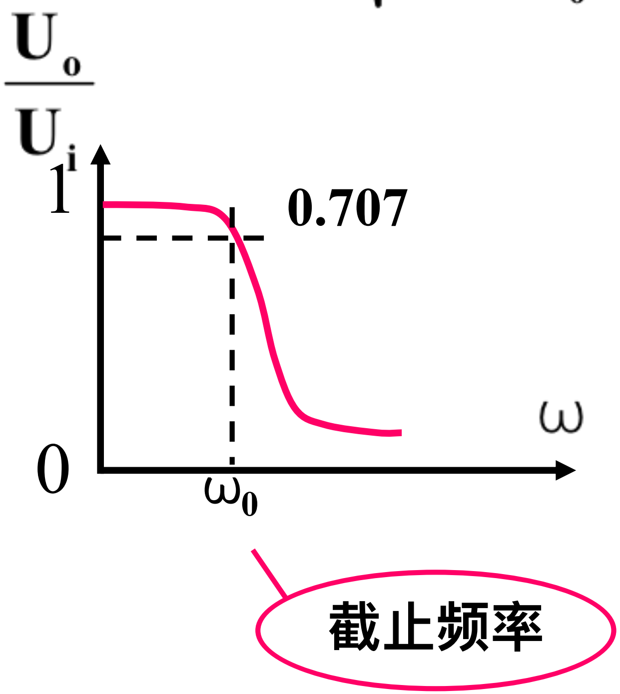
幅频特性

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\dfrac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

幅频特性、幅频特性曲线

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$





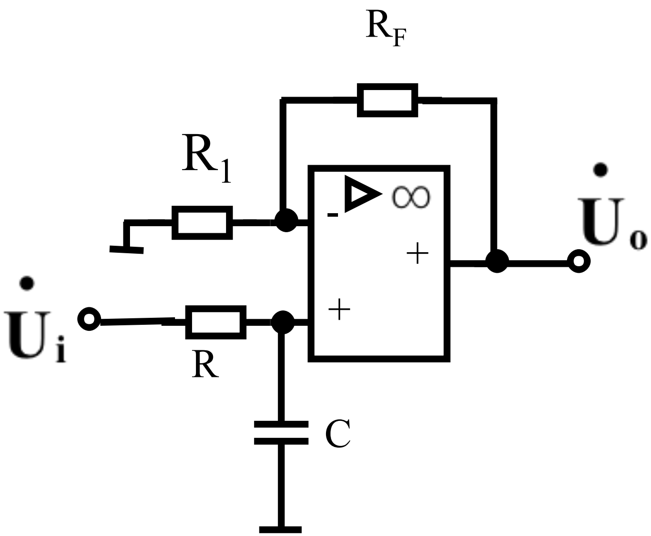
此电路的缺点：

1、带负载能力差。

2、无放大作用。

一、有源低通滤波电路 (X)

1. 一阶有源低通滤波器



$$\dot{U}_- = \frac{R_1}{R_1+R_F}\cdot\dot{U}_o$$

$$\dot{U}_+ = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\bullet\dot{U}_i = \frac{1}{1+j\omega RC}\bullet\dot{U}_i$$

$$\dot{U}_+ = \dot{U}_-$$

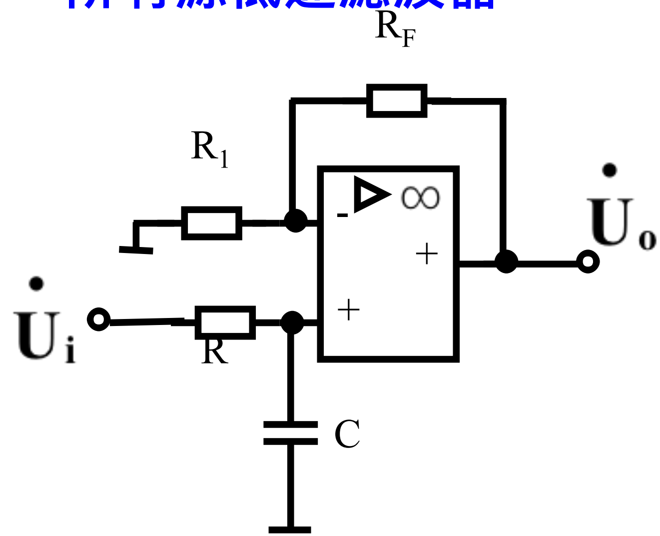
传递函数

$$\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i} = (1+\frac{R_F}{R_1})\frac{1}{1+j\omega RC}$$

传递函数中出现ω 的一次项,故称为一阶滤波器

一、有源低通滤波电路 (×)

1. 一阶有源低通滤波器



幅频特性及幅频特性曲线

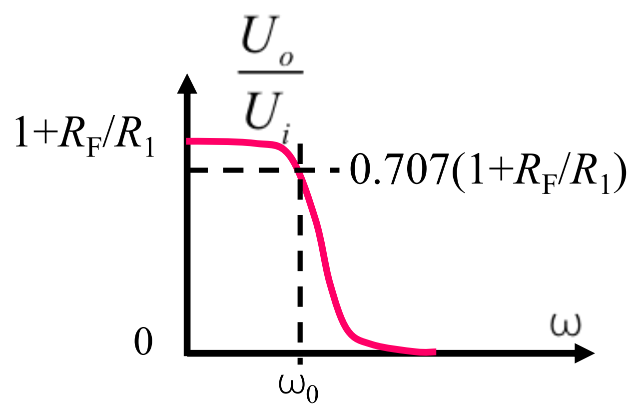
传递函数

$$\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}=(1+\frac{R_F}{R_1})\frac{1}{1+j\omega RC}$$

幅频特性

$$\frac{U_o}{U_i}=(1+\frac{R_F}{R_1})\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

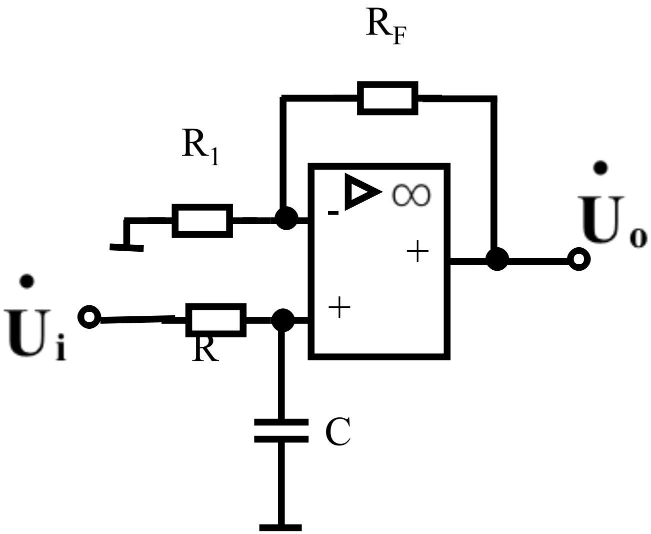
$$(\omega_0=\frac{1}{RC})$$



相频特性： $\varphi=-\arg\frac{\omega}{\omega_0}$

一、有源低通滤波电路 (x)

1. 一阶有源低通滤波器



电路特点:

1、$\omega = 0$ 时: $\dfrac{U_o}{U_i} = (1+\dfrac{R_F}{R_1})$

有放大作用

2、$\omega = \omega_0$时: $\dfrac{U_o}{U_i} = (1+\dfrac{R_F}{R_1})\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

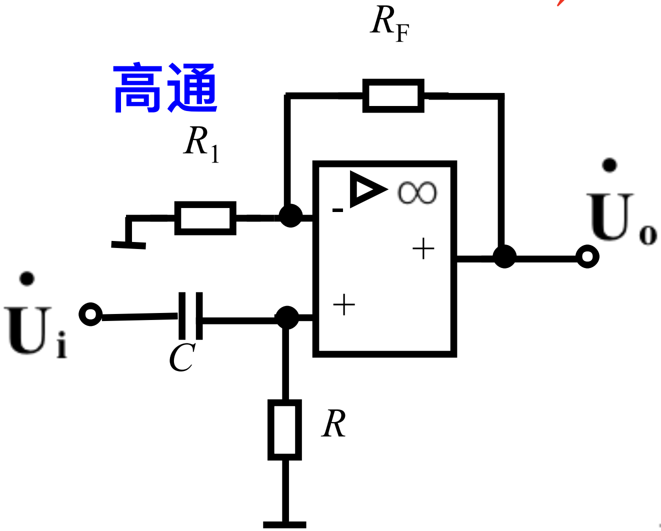
幅频特性与一阶无源低通滤波器类似

3、运放输出，带负载能力强。

二、有源高通滤波电路 (X)

1. 一阶有源高通滤波器

高通



$$\dot{U}_- = \frac{R_1}{R_1 + R_F} \cdot \dot{U}_o$$

$$\dot{U}_+ = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \bullet \dot{U}_i = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}} \bullet \dot{U}_i$$

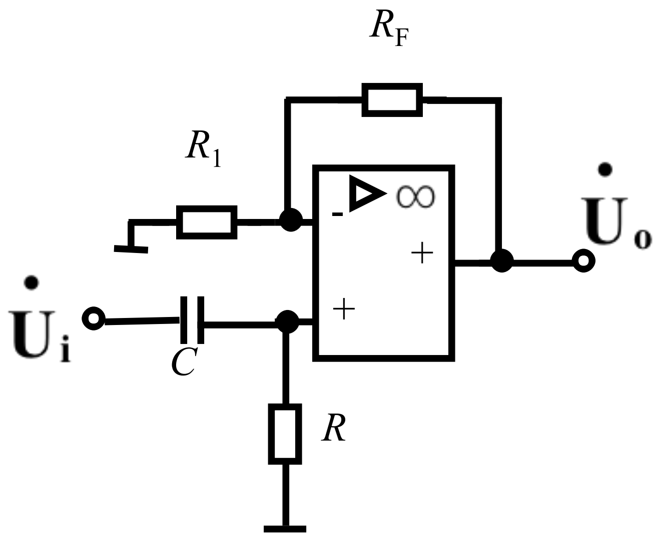
$$\dot{U}_+ = \dot{U}_-$$

传递函数

$$\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i} = \left(1 + \frac{R_F}{R_1}\right)\frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}}$$

二、有源高通滤波电路(x)

1. 一阶有源高通滤波器



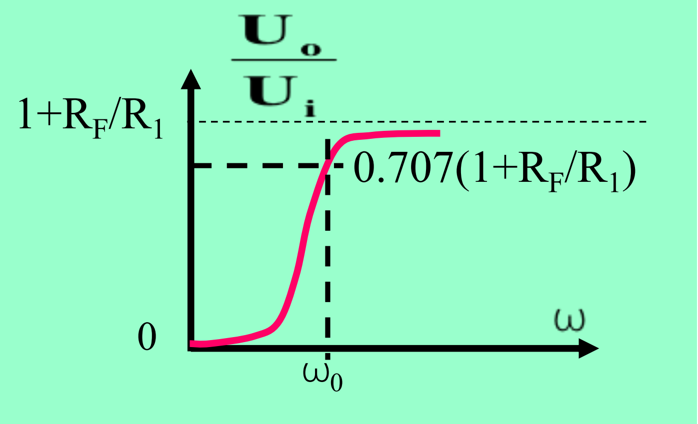
幅频特性及幅频特性曲线

传递函数

$$\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}=(1+\frac{R_F}{R_1})\frac{1}{1-j\dfrac{1}{\omega RC}}$$

幅频特性

$$\frac{U_o}{U_i}=(1+\frac{R_F}{R_1})\frac{1}{\sqrt{1+(\dfrac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

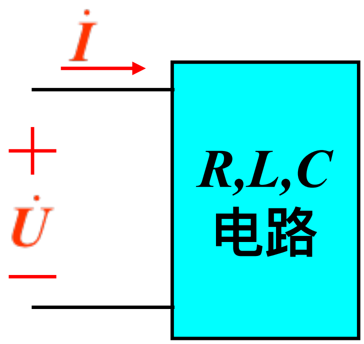


§14-2 谐振电路

一、正弦稳态电路中的串联谐振

谐振(*resonance*)是正弦电路在特定条件下所产生的一种特殊物理现象，作为电路计算没有新内容，主要分析谐振电路的特点。

谐振的定义：含有L、C的电路，当电路中端口电压、电流同相时，称电路发生了谐振。

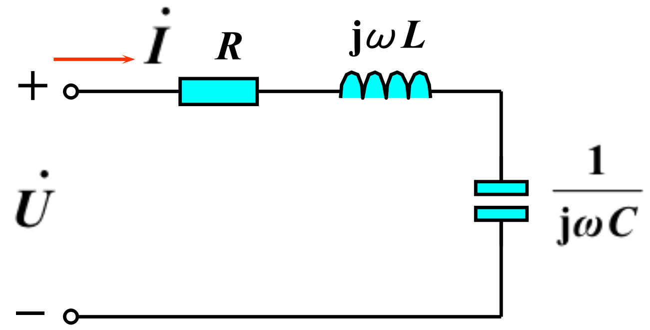


入端阻抗$Z=R+jX$，当$X=0$ 时，$Z=R$为纯电阻。电压、电流同相，电路发生谐振。

一、正弦稳态电路中的串联谐振

1. *RLC*串联电路的谐振

谐振条件：



$$Z = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$
$$= R + \mathrm{j}X$$

当$\omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C}$时，电路发生谐振。

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$　谐振角频率(*resonant angular frequency*)

$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$　谐振频率(*resonant frequency*)

$T_0 = 1/f_0 = 2\pi\sqrt{LC}$　谐振周期(*resonant period*)

一、正弦稳态电路中的串联谐振

使RLC串联电路发生谐振的方法

谐振角频率的表达式为： $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

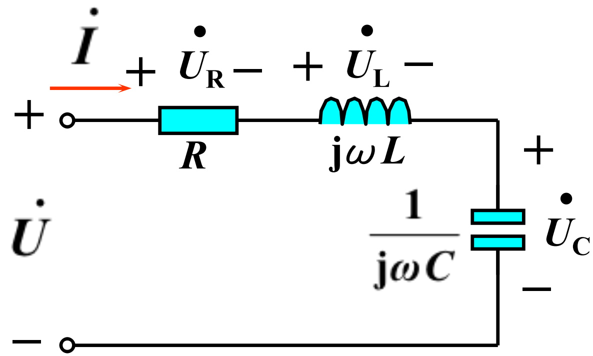
（1）. L C 不变，改变 ω 。

ω_0由电路本身的参数决定，一个RLC串联电路只能有一个对应的ω_0，当外加频率等于谐振频率时，电路发生谐振。

（2）. 电源频率不变，改变 L 或 C (常改变C)。

通常收音机选台，即选择不同频率的信号，就采用改变C使电路达到谐振。

一、正弦稳态电路中的串联谐振



RLC串联电路谐振时的特点

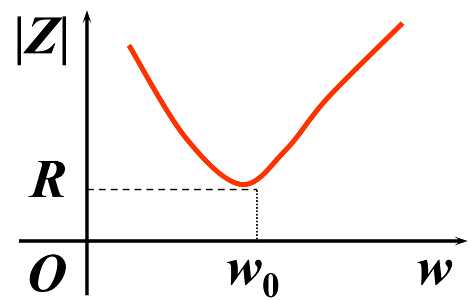
(1). $\dot{U}$与$\dot{I}$同相.

(2). 入端阻抗Z为纯电阻，即$Z=R$，电路中阻抗值$|Z|$最小。

(3). 电流I达到最大值$I_0=U/R$ (U一定)。

(4). LC上串联总电压为零，即

$$\dot{U}_L+\dot{U}_C=0,$$ LC相当于短路。



电源电压全部加在电阻上，$\dot{U}_R=\dot{U}$。

即L与C交换能量，与电源间无能量交换。

$$Q=Q_L+Q_C=0,\quad Q_L=\omega_0 LI_0^2,\quad Q_C=-\frac{1}{\omega_0 C}I_0^2$$

 实际上为无功功率.

一、正弦稳态电路中的串联谐振

品质因数(*quality factor*)Q

当$\omega_0 L=1/(\omega_0 C)>>R$时，$U_L=U_C>>U$ 。

定义： $Q=\frac{U_L}{U}=\frac{U_C}{U}=\frac{\omega_0 LI}{RI}=\frac{\omega_0 L}{R}$ 即：$U_{L0}=U_{C0}=QU$

$U=U_s$

谐振时电感电压U_{L0}(或电容电压U_{C0})与电源电压之比。表明谐振时的电压放大倍数。

$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{R\omega_0 C}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

无量纲

它是说明谐振电路性能的一个指标，同样仅由电路的参数决定。

$\dot{U}=\dot{U}_R=R\dot{I}$　　$\dot{U}_L=\mathrm{j}Q\dot{U}$　　$\dot{U}_C=-\mathrm{j}Q\dot{U}$

一、正弦稳态电路中的串联谐振

品质因数Q的物理意义

U_L和U_C是外施电压Q倍，如 $\omega_0 L=1/(\omega_0 C)>>R$，则 Q 很高，L 和 C 上出现高电压，这一方面可以利用，另一方面要加以避免。

例：某收音机 C=150pF，L=250mH，R=20Ω

$$Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=65$$

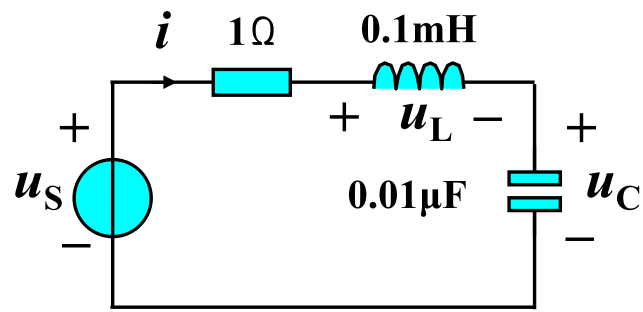
如信号电压10mV，电感上电压650mV 这是所要的。

但是在电力系统中，由于电源电压本身比较高，一旦发生谐振，会因过电压而击穿绝缘损坏设备。应尽量避免。

例：电路如图所示，已知 $u_S(t)=10\sqrt{2}\sin\omega t\ \text{V}$

求：(l) 频率ω为何值时，电路发生谐振。

(2)电路谐振时，U_L和U_C为何值。



解：(l)电压源的角频率应为：

$$\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{10^{-4}\times10^{-8}}}$$

$$=10^6(\text{rad/s})$$

(2)电路的品质因数为： $Q=\dfrac{\omega_0 L}{R}=100$

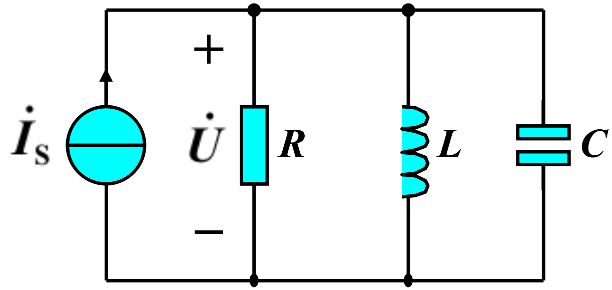
则： $U_L=U_C=QU_S=100\times10\text{V}=1000\text{V}$

二、正弦稳态电路中的并联谐振

2.并联电路的谐振

谐振条件：

电路参数为何值时，端口电压、电流同相。



或： 电路参数为何值时，端口电压最大。（对应阻抗模最大，导纳模最小）

$$Y=\frac{1}{R}+j(\omega C-\frac{1}{\omega L})=0$$ 相关于后面X→∞,也就是开路掉

I_S全流入R

由 $\omega L=\dfrac{1}{\omega C}$ 　可得：$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

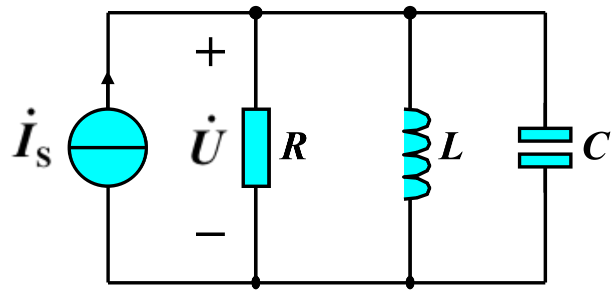
$$Q=\frac{\omega_0 C}{G}=\frac{1}{\omega_0 GL}=\frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

I_L U_L

$\frac{}{I_s} = \frac{}{UY_{总}}$

二、正弦稳态电路中的并联谐振

并联谐振电路的特点：



（1）电流一定时，谐振时电压最大；

$\dot U = \frac{\dot I}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$

（2）电路呈电阻性，总阻抗最大；

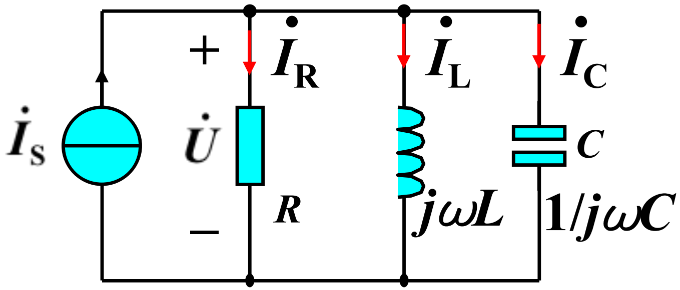
$$Y = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = \frac{1}{R}$$

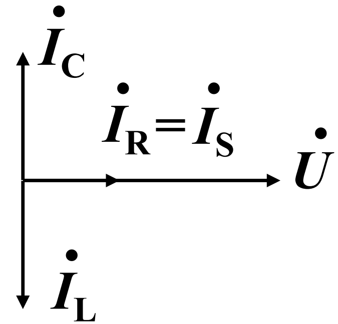
（3）*LC*并联阻抗为无穷大，即*LC*并联相当于开路；

（4）支路电流可能会大于总电流。

二、正弦稳态电路中的并联谐振

并联谐振电路的特点





$$\dot{I}_R = G\dot{U} = \dot{I}_S$$

$$\dot{I}_L = \frac{1}{j\omega_0 L}\dot{U} = -j\frac{R}{\omega_0 L}\dot{I}_S = -jQ\dot{I}_S$$

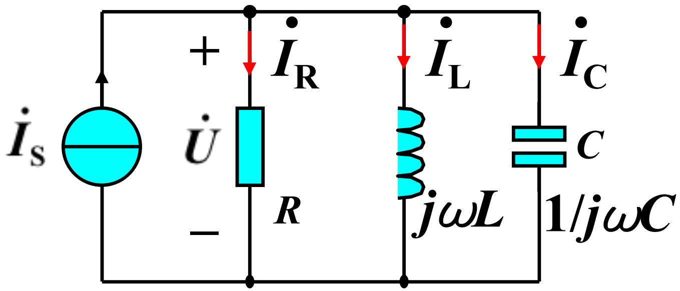
$$\dot{I}_C = j\omega_0 C\dot{U} = j\omega_0 RC\dot{I}_S = jQ\dot{I}_S$$

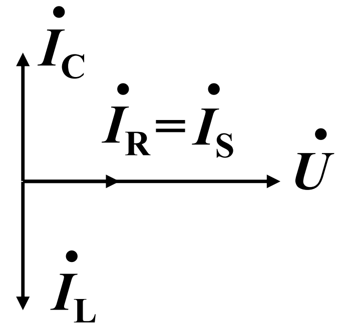
其中: $Q = \dfrac{R}{\omega_0 L} = R\omega_0 C = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ **称为*RLC*并联谐振电路的品质因数**

其值等于谐振时感纳或容纳与电导之比。

二、正弦稳态电路中的并联谐振

并联谐振电路的特点





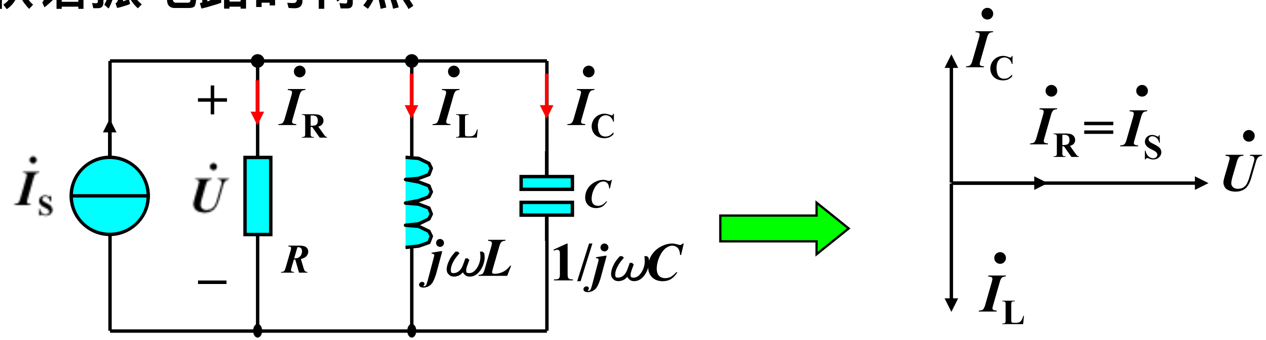
由以上各式和相量图可见，谐振时电阻电流与电流源电流相等 $\dot{I}_R=\dot{I}_S$。电感电流与电容电流之和为零，即 $\dot{I}_L+\dot{I}_C=0$。电感电流或电容电流的幅度为电流源电流或电阻电流的Q倍，即：

$$I_L=I_C=QI_S=QI_R$$

并联谐振又称为电流谐振。

二、正弦稳态电路中的并联谐振

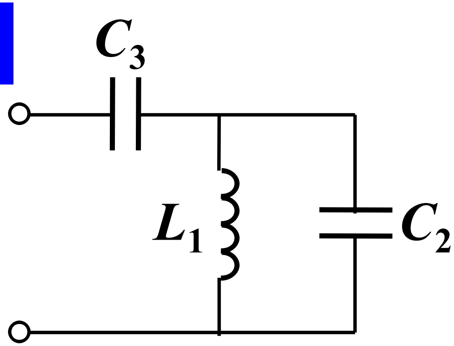
并联谐振电路的特点

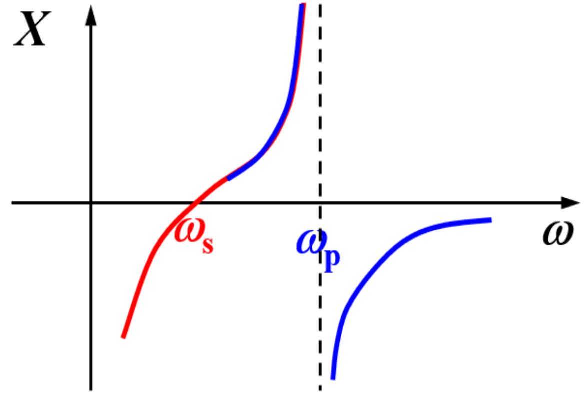


由于$i(t)=i_L(t)+i_C(t)=0$(相当于虚开路)，任何时刻电感和电容的总瞬时功率为零，即$p_L(t)+p_C(t)=0$。电感、电容与电流源和电阻之间没有能量交换。电源发出功率全部被电阻吸收。

能量在电感和电容间往复交换，形成正弦振荡。其情况和 LC并联电路由初始储能引起的等幅振荡相同，因此振荡角频率也是 $\omega_0=1/\sqrt{LC}$，与串联谐振电路相同。

混联谐振





$$Z(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}+\frac{\mathrm{j}\omega L_1\cdot\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}{\mathrm{j}\omega L_1+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}+\frac{\mathrm{j}\omega L_1}{1-\omega^2 L_1 C_2}$$

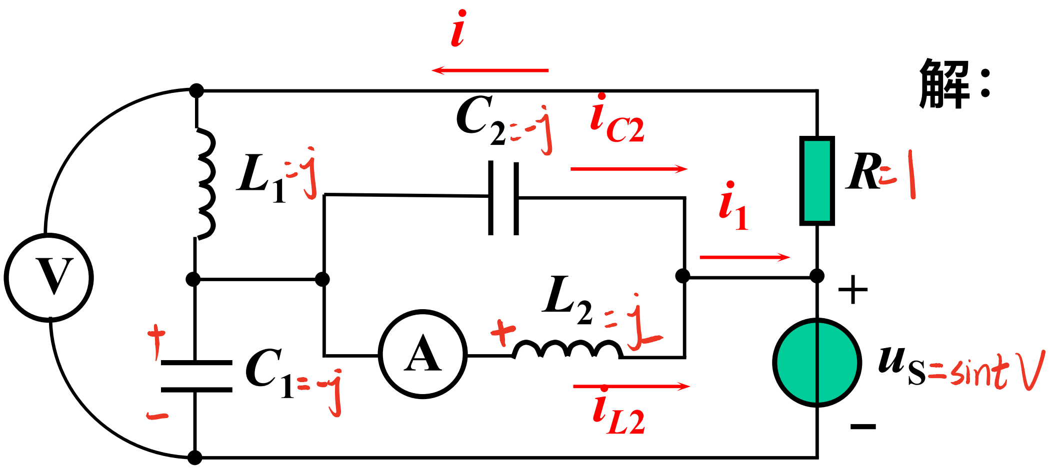
$$=-\mathrm{j}\frac{1-\omega^2 L_1(C_2+C_3)}{\omega C_3(1-\omega^2 L_1 C_2)}$$

分别令分子、分母为零，可得：

$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{L_1(C_2+C_3)}}$$ 串联谐振 $Z_0=0$

$$\omega_2=\frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}$$ 并联谐振 $Z_0=\infty$

例：电路如图所示。已知：$u_S(t)=\sin t$ V，$L_1=L_2=1$H，$C_1=C_2=1$F，$R=1\Omega$。求：电压表和电流表的读数(有效值).



解： 设 $\dot{U}_S=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ \text{V}$

$=0.707\angle 0^\circ \text{V}$

$$\omega L_2=\frac{1}{\omega C_2}=1\Omega$$

(并联谐振)

$$\dot{I}_1=0$$

$$\omega L_1=\frac{1}{\omega C_1}=1\Omega \text{ (串联谐振)},$$

V =0

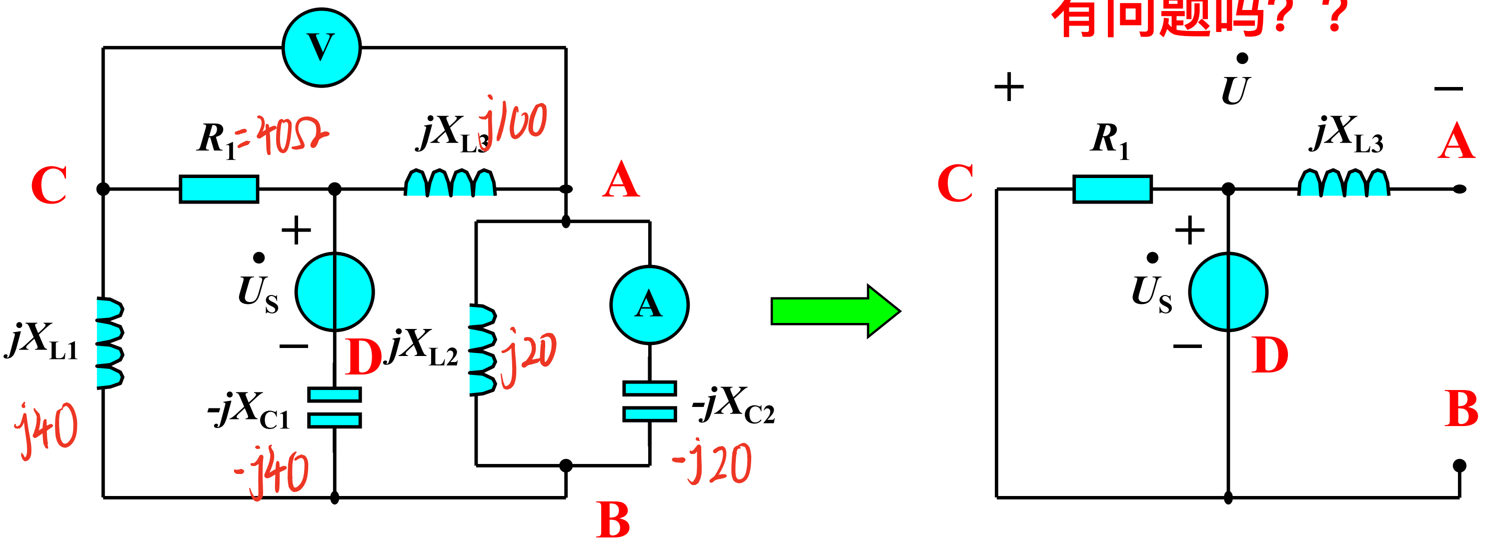
$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_S}{R}=\frac{0.707\angle 0^\circ}{1}=0.707\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{L2}=\frac{\dfrac{1}{\text{j}\omega C_1}\dot{I}-\dot{U}_S}{\text{j}\omega L_2}=\frac{-\text{j}0.707-0.707}{\text{j}1}=-0.707+\text{j}0.707=1.00\angle 135^\circ \text{ A}$$

A =1A

例：如图， $\dot{U}_S = 200\angle 0°V$ **，** $R_1 = X_{L1} = X_{C1} = 40\Omega$**，** $X_{L2} = X_{C2} = 20\Omega$**，** $X_{L3} = 100\Omega$**，求电压表和电流表的读数。**

有问题吗？？



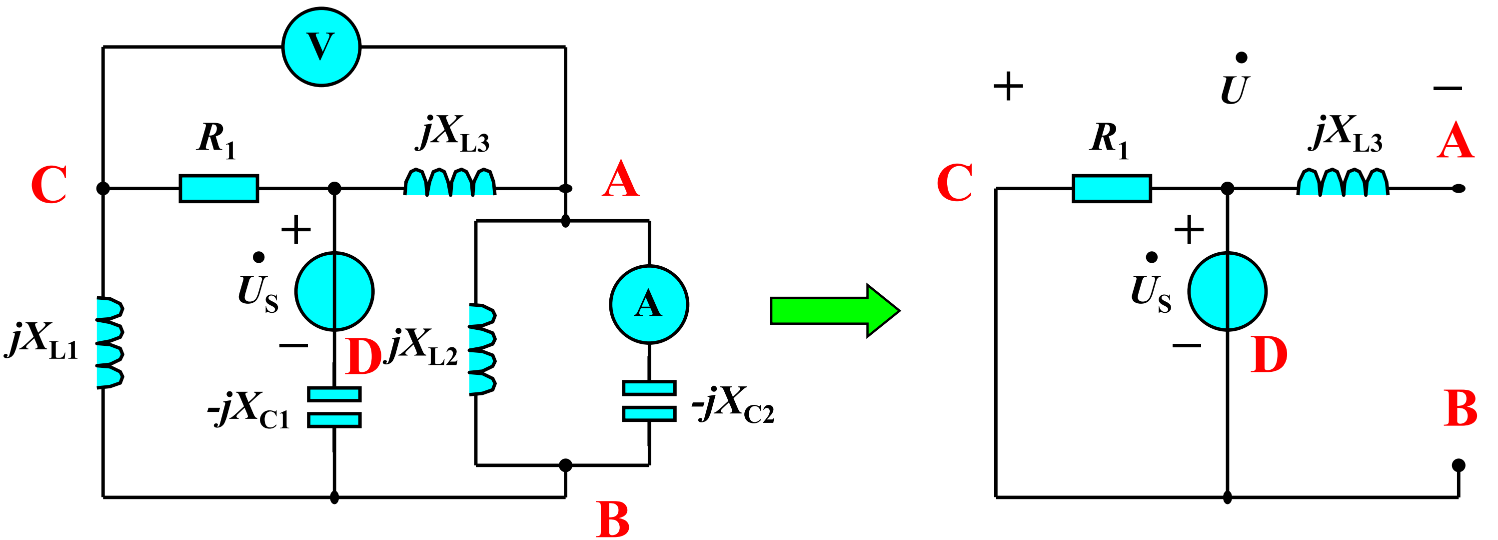
解： $X_{L2} = X_{C2}$ **，发生并联谐振，AB之间相当于开路。**

$X_{L1} = X_{C1}$ **，发生串联谐振，CD之间相当于短路。**

找等电位： $\dot{U} = -\dot{U}_S = -200\angle 0°(V)$

V表读数为200V。

例：如图，$\dot{U}_S=200\angle 0°V$**，**$R_1=X_{L1}=X_{C1}=40\Omega$**，** $X_{L2}=X_{C2}=20\Omega$**，**$X_{L3}=100\Omega$**，求电压表和电流表的读数。**



解：

$$\dot{U}_{AB}=\dot{U}_S-\dot{I}_0(-jX_{C1})=\dot{U}_S-\frac{\dot{U}_S}{R_1}(-jX_{C1})$$

$$=(200+j\frac{200}{40}\times 40)=200\sqrt{2}\angle 45°$$

$$I_{C2}=\frac{U_{AB}}{X_{C2}}=\frac{200\sqrt{2}}{20}=14.1(A)$$

A表读数为14.1A。

作业

- 14.3节：14-9，14-10，14-12
- 综合：14-26