

# 运筹学

## Operations Research (OR)

讲师：王博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email: [wb8517@hust.edu.cn](mailto:wb8517@hust.edu.cn) QQ: [2734802827](https://www.qq.com/)



华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

# 第5章 目标规划



# 第5章 目标规划

第1节 目标规划的数学模型

第2节 解目标规划的图解法

第3节 解目标规划的单纯形法

第4节 灵敏度分析

第5节 应用举例



- 从线性规划问题可看出：线性规划只研究在满足一定条件下，**单一目标函数**取得最优解。
- 而在企业管理中，经常遇到**多目标决策问题**，如拟订生产计划时，不仅考虑总产值，同时要考虑利润，产品质量和设备利用率等。这些指标之间的重要程度（即优先顺序）也不相同，有些目标之间往往相互发生矛盾。
- 线性规划致力于某个目标函数的最优解，这个最优解若是超过了实际的需要，很可能是以过分地消耗了约束条件中的某些资源作为代价。
- 线性规划把各个约束条件的重要性都不分主次地等同看待，这也不符合实际情况。



- 求解线性规划问题，首先要求约束条件必须相容，如果约束条件中，由于人力，设备等资源条件的限制，使约束条件之间出现了矛盾，就得不到问题的可行解，但生产还得继续进行，这将给人们进一步应用线性规划方法带来困难。
- 为了弥补线性规划问题的局限性，解决有限资源和计划指标之间的矛盾，在线性规划基础上，建立目标规划方法，从而使一些线性规划无法解决的问题得到满意的解答。
- 同时考虑多个决策目标时，称为目标规划问题。



## 多目标优先级:

- 先将目标等级化: 将目标按重要性的程度不同依次分成一级目标、二级目标…。最次要的目标放在次要的等级中。

目标优先级做如下规定:

- 对同一个目标而言, 若有几个决策方案都能使其达到, 可认为这些方案就这个目标而言都是最优方案; 若达不到, 则与目标差距越小的越好。
- 不同级别的目标的重要性是不可比的。即较高级别的目标没有达到的损失, 任何较低级别的目标上的收获都不可弥补。所以在判断最优方案时, 首先从较高级别的目标达到的程度来决策, 然后再做次级目标的判断。
- 同一级别的目标可以是多个。各自之间的重要程度可用数量(权数)来描述。因此, 同一级别的目标的其中一个的损失, 可有其余目标的适当收获来弥补。



为了具体说明目标规划与线性规划在处理问题方法上的区别，先通过例子来介绍目标规划的有关概念及数学模型：

- 例1：**某工厂生产 I，II 两种产品，已知有关数据见下表。试求获利最大的生产方案。

	I	II	拥有量
原材料(kg)	2	1	11
设备台时	1	2	10
利润(元/件)	8	10	

- 解：**这是求获利最大的单目标的规划问题，用  $x_1, x_2$  分别表示 I，II 产品的产量，其线性规划模型表述为：

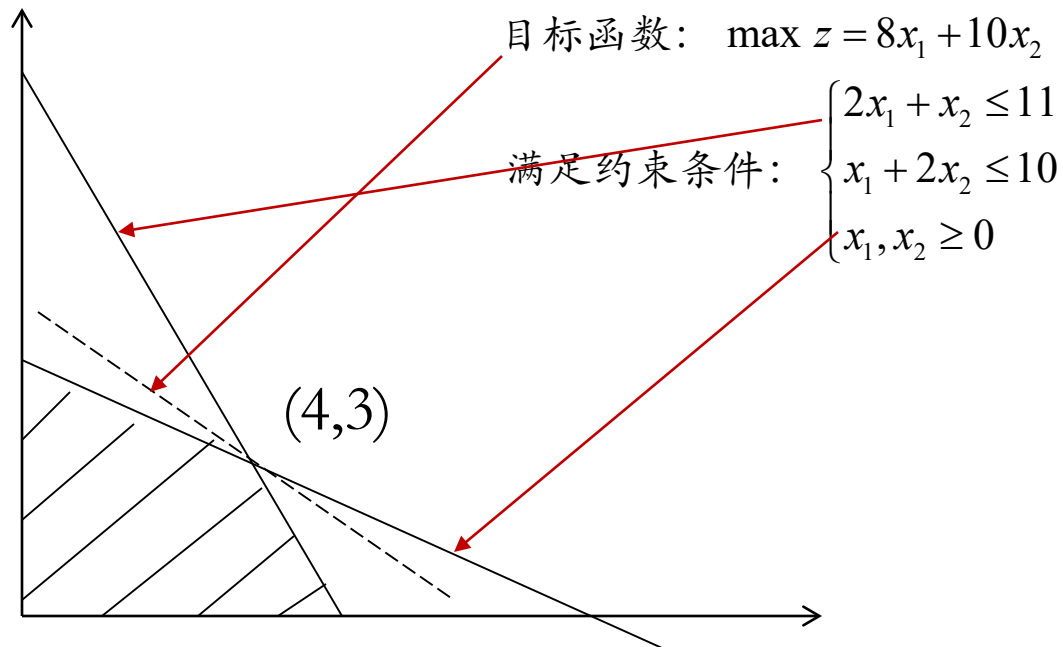
$$\text{目标函数： } \max z = 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{满足约束条件： } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



目标函数:  $\max z = 8x_1 + 10x_2$

满足约束条件: 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



- 用图解法求得最优决策方案为:  $x_1^* = 4, x_2^* = 3, z^* = 62(\text{元})$ 。





假设工厂在作决策时，同时考虑了一系列其他条件：

- 根据市场信息，产品Ⅰ的销售量有下降的趋势，故考虑产品Ⅰ的产量不大于产品Ⅱ。
- 超过计划供应的原材料时，需用高价采购，会使成本大幅度增加。
- 应尽可能充分利用设备台时，但不希望加班。
- 应尽可能达到并超过计划利润指标56元。

这样在考虑产品决策时，便为多目标决策问题。目标规划方法是解这类决策问题的方法之一。

下面引入与建立目标规划数学模型有关的概念。



1. 设 $x_1, x_2$ 为决策变量，此外，引进正、负偏差变量 $d^+, d^-$ :
  - **正偏差变量** $d^+$ 表示决策值超过目标值的部分；
  - **负偏差变量** $d^-$ 表示决策值未达到目标值的部分；
  - 因决策值不可能既超过目标值同时又未达到目标值，即恒有 $d^+ \times d^- = 0$ 。
2. 绝对约束和目标约束
  - 绝对约束是指必须严格满足的等式约束和不等式约束；如线性规划问题的所有约束条件，不能满足这些约束条件的解称为非可行解，所以它们是硬约束。
  - 目标约束是目标规划特有的，可把约束右端项看作要追求的目标值。在达到此目标值时允许发生正或负偏差，因此在这些约束中加入正、负偏差变量，它们是软约束。



- 线性规划问题的目标函数，在给定目标值和加入正、负偏差变量后可变换为目标约束。也可根据问题的需要将绝对约束变换为目标约束。

- 如：例1的目标函数 $z = 8x_1 + 10x_2$ 可变换为目标约束

$$8x_1 + 10x_2 + d_1^- - d_1^+ = 56$$

(计划利润指标56元)

- 约束条件 $2x_1 + x_2 \leq 11$ 可变换为目标约束

$$2x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 11$$

(原材料现拥有共计11kg)



## 3. 优先因子(优先等级)与权系数:

- 一个规划问题常常有若干目标。但决策者在要求达到这些目标时, 是有主次或轻重缓急的不同。
- 要求第一位达到的目标赋予优先因子 $P_1$ , 次位的目标赋予优先因子 $P_2$ ,  $\dots$ , 并规定 $P_k \gg P_{k+1}, k = 1, 2, \dots, K$ , 表示 $P_k$ 比 $P_{k+1}$ 有更大的优先权。
- 即, 首先保证 $P_1$ 级目标的实现, 这时可不考虑次级目标; 而 $P_2$ 级目标是在实现 $P_1$ 级目标的基础上考虑的; 依此类推。
- 若要区别具有相同优先因子的两个目标的差别, 这时可分别赋予它们不同的权系数 $\omega_j$ , 这些都由决策者按具体情况而定。



## 4. 目标规划的目标函数:

- 目标规划的目标函数(准则函数)是按各目标约束的正、负偏差变量和赋予相应的优先因子及权系数而构造的。当每一目标值确定后, 决策者的要求是**尽可能缩小偏离目标值**。
- 因此目标规划的目标函数只能是  $\min z = f(d^+, d^-)$ 。

其基本形式有三种:

- 要求恰好达到目标值, 即正、负偏差变量都要尽可能地小, 这时:  $\min z = f(d^+ + d^-)$
- 要求不超过目标值, 即允许达不到目标值, 就是正偏差变量要尽可能地小。这时:  $\min z = f(d^+)$
- 要求超过目标值, 即超过量不限, 但必须是负偏差变量要尽可能地小, 这时:  $\min z = f(d^-)$
- 对每一个具体目标规划问题, 可根据决策者的要求和赋予各目标的优先因子来构造目标函数。



- **例2**: 例1的决策者在原材料供应受严格限制的基础上考虑: 首先是产品Ⅱ的产量不低于产品Ⅰ的产量; 其次是充分利用设备有效台时, 不加班; 再次是利润额不小于56元。求决策方案。

目标函数:  $\max z = 8x_1 + 10x_2$

满足约束条件: 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**解:**

- 原材料供应受严格限制, 即不能违反原材料的约束;
- 首先: 产品Ⅱ不低于产品Ⅰ的产量,  $x_1 - x_2$  **不大于** 0;
- 其次: 充分利用设备台时不加班, 设备台时使用 **靠近** 10小时;
- 再次: 利润 **不小于** 56元;
- 按决策者所要求的, 分别赋予这三个目标  $P_1, P_2, P_3$  优先因子。  
这问题的数学模型是:



## 约束方程的处理:

### 偏差变量:

- 约束左边 $f(x)$ 超过右边目标值 $b$ 的部分记为 $d^+$ , 正偏差;
- 约束左边 $f(x)$ 不足右边目标值 $b$ 的部分记为 $d^-$ , 负偏差;
- 正负偏差均大于等于0,  $d^+ \geq 0, d^- \geq 0$ 。同一个目标约束中, 总是有 $d^+ \times d^- = 0$ ;
- $d^+ \rightarrow f(x) - b$ ;  $d^- \rightarrow b - f(x)$ ; 约束一般形式:  $f(x) + d^- - d^+ = b$ 。

### 目标规划的目标函数:

- 若决策目标中规定 $f(x) \leq b$ , 则 $d^+$ 取最小(允许 $d^+ > 0$ );
- 若决策目标中规定 $f(x) \geq b$ , 则 $d^-$ 取最小(允许 $d^- > 0$ );
- 若决策目标中规定 $f(x) = b$ , 则 $d^+ + d^-$ 取最小。

绝对约束(硬约束): 必须严格满足的等式约束和不等式约束。

目标约束(软约束): 含正负偏差的约束(允许正负偏差存在)。



- **解：**原材料供应受严格限制，即不能违反原材料的约束；  
首先：产品II不低于产品I的产量， $x_1 - x_2$ 不大于0；  
其次：充分利用设备台时不加班，设备台时使用靠近10小时；  
再次：利润不小于56元；  
按决策者所要求的，分别赋予这三个目标 $P_1, P_2, P_3$ 优先因子。  
这问题的数学模型是：

目标函数：  $\min z = P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$

满足约束条件：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$





- 例3：某电器公司经营的唱机和录音机需要通过车间A、B流水作业组装：

项目品种	工时消耗 (时/台)		库存费用 (元/台月)	利润 (元/台)
	A	B		
唱机	2	1	50	250
录音机	1	3	30	150
总工时/月	180	200		
生产费用/时	100	50		

已知目标及其等级：

- (1) 库存费用不超过4600元；
- (2) 每月销售唱机不少于80台；
- (3) 不使A、B车间停工(权数由生产费用确定)；
- (4) A车间加班时间限制在20小时内；
- (5) 每月销售录音机至少为100台；
- (6) 两车间加班时数总和要尽可能小(权数由生产费用确定)；

求生产计划优化的目标规划模型。



项目品种	工时消耗 (时/台)		库存费用 (元/台月)	利润 (元/台)
	A	B		
唱机	2	1	50	250
录音机	1	3	30	150
总工时/月	180	200		
生产费用/时	100	50		

解：

- 设每月生产唱机 $x_1$ 台，录音机 $x_2$ 台；
- A, B车间生产费用比例为 $100:50 = 2:1$ ；
- $P_1$ ：库存费用不超过4600元，目标函数： $P_1 d_1^+$   
$$50x_1 + 30x_2 + d_1^- - d_1^+ = 4600$$
- $P_2$ ：每月销售唱机不少于80台，目标函数： $P_2 d_2^-$   
$$x_1 + d_2^- - d_2^+ = 80$$



- $P_1$ : 库存费用不超过4600元, 目标函数:  $P_1 d_1^+$   
$$50x_1 + 30x_2 + d_1^- - d_1^+ = 4600$$
- $P_2$ : 每月销售唱机不少于80台, 目标函数:  $P_2 d_2^-$   
$$x_1 + d_2^- - d_2^+ = 80$$
- $P_3$ : 不使A、B车间停工(权数2:1), 目标函数:  $P_3(2d_3^- + d_4^-)$   
A车间:  $2x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 180$   
B车间:  $x_1 + 3x_2 + d_4^- - d_4^+ = 200$
- $P_4$ : A车间加班时间限制在20小时内, 目标函数:  $P_4 d_5^+$   
$$2x_1 + x_2 + d_5^- - d_5^+ = 180 + 20 = 200$$
- $P_5$ : 每月销售录音机至少为100台, 目标函数:  $P_5 d_6^-$   
$$x_2 + d_6^- - d_6^+ = 100$$
- $P_6$ : 两车间加班时数总和要尽可能小(权数2:1), 目标函数:  
$$P_6(2d_3^+ + d_4^+)$$



- 得到目标规划模型：

目标函数：  $\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^- + P_3 (2d_3^- + d_4^-)$   
 $+ P_4 d_5^+ + P_5 d_6^- + P_6 (2d_3^+ + d_4^+)$

满足约束条件：

$$\begin{cases} 50x_1 + 20x_2 + d_1^- - d_1^+ = 4600 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 80 \\ 2x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 180 \\ x_1 + 3x_2 + d_4^- - d_4^+ = 200 \\ 2x_1 + x_2 + d_5^- - d_5^+ = 200 \\ x_2 + d_6^- - d_6^+ = 80 \\ x_1, x_2, d_i^+, d_i^- \geq 0, (i = 1, 2, \dots, 6) \end{cases}$$



### • 目标规划的一般数学模型：

$$\text{目标函数: } \min z = \sum_{l=1}^L P_l \sum_{k=1}^K (\omega_{lk}^- d_k^- + \omega_{lk}^+ d_k^+) \quad (5-1)$$

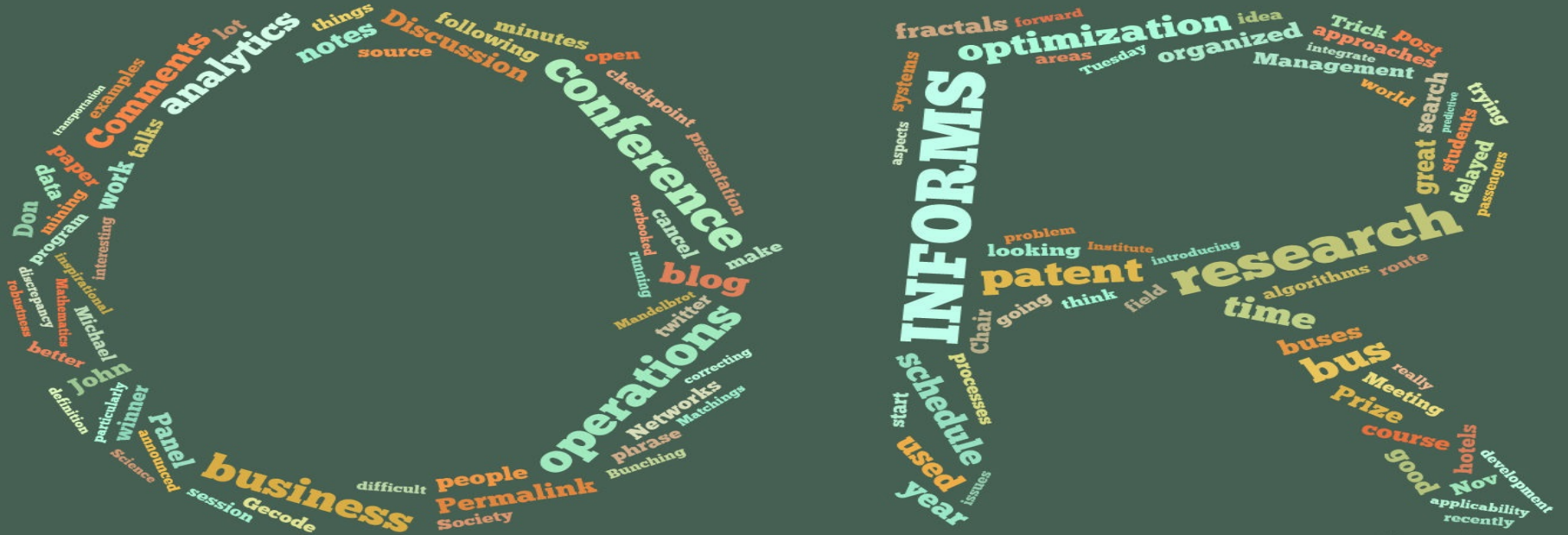
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j + d_k^- - d_k^+ = g_k, \quad k = 1, \dots, K \end{array} \right. \quad (5-2)$$

$$\text{满足约束条件: } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (5-3)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (5-4)$$

$$d_k^-, d_k^+ \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (5-5)$$

建立目标规划的数学模型时,需要确定目标值、优先等级、权系数等,它都具有一定的主观性和模糊性,可以用专家评定法给以量化。



# 运筹学

## Operations Research (OR)

讲师：王博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email: [wb8517@hust.edu.cn](mailto:wb8517@hust.edu.cn) QQ: [2734802827](https://www.qq.com/)



华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

# 第5章 目标规划



# 第5章 目标规划

第1节 目标规划的数学模型

第2节 解目标规划的图解法

第3节 解目标规划的单纯形法

第4节 灵敏度分析

第5节 应用举例





- 对只具有两个决策变量的目标规划的数学模型，可以用图解法来分析求解。
- 例1：**某工厂生产 I、II 两种产品，数据如下

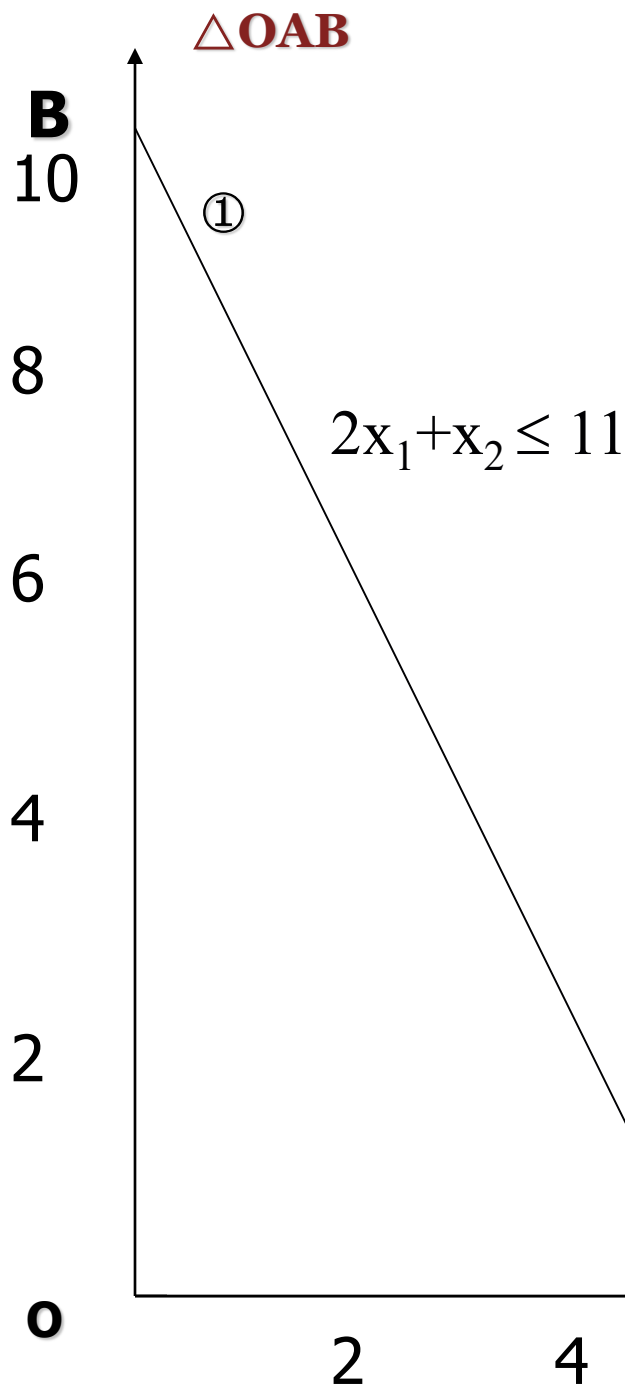
	I	II	拥有量
原材料(kg)	2	1	11
设备台时	1	2	10
利润(元/件)	8	10	

决策者在原材料供应严格受限制的情况考虑：**首先产品 II 的产量不低于产品 I 的产量**；**其次充分利用设备有效台时，不加班**；**再次利润不低于56元**。列出模型，并求解。

目标函数：  $\min z = P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$

满足约束条件：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 & (1) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$



目标函数:  $\min z = P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$

满足约束条件:

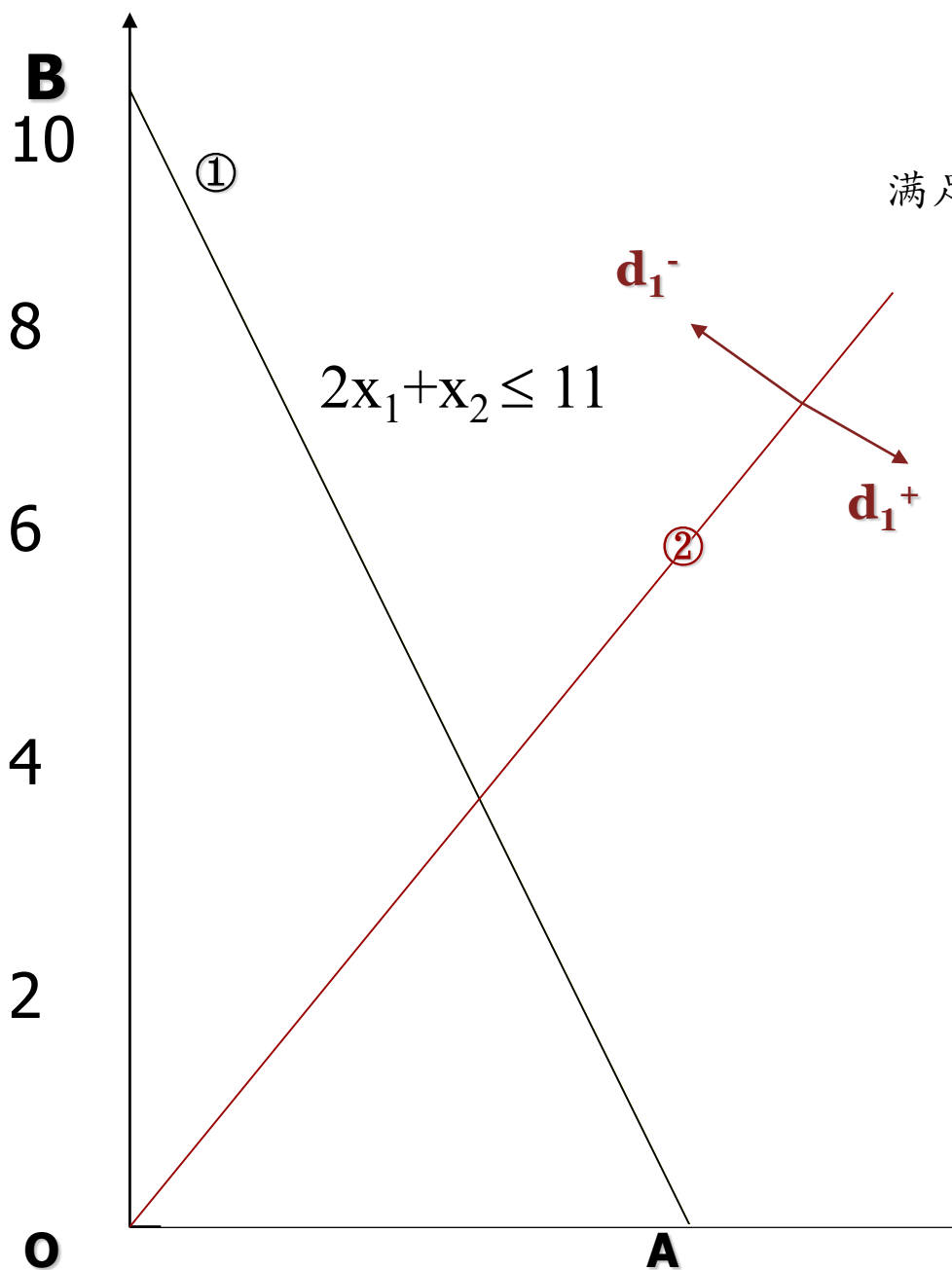
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 & (1) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

- 先在平面直角坐标系的第一象限内, 做各约束条件。绝对约束条件的作图与线性规划相同。
- 本例中满足绝对约束的可行域为三角形OAB。

目标函数:  $\min z = P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$

满足约束条件:

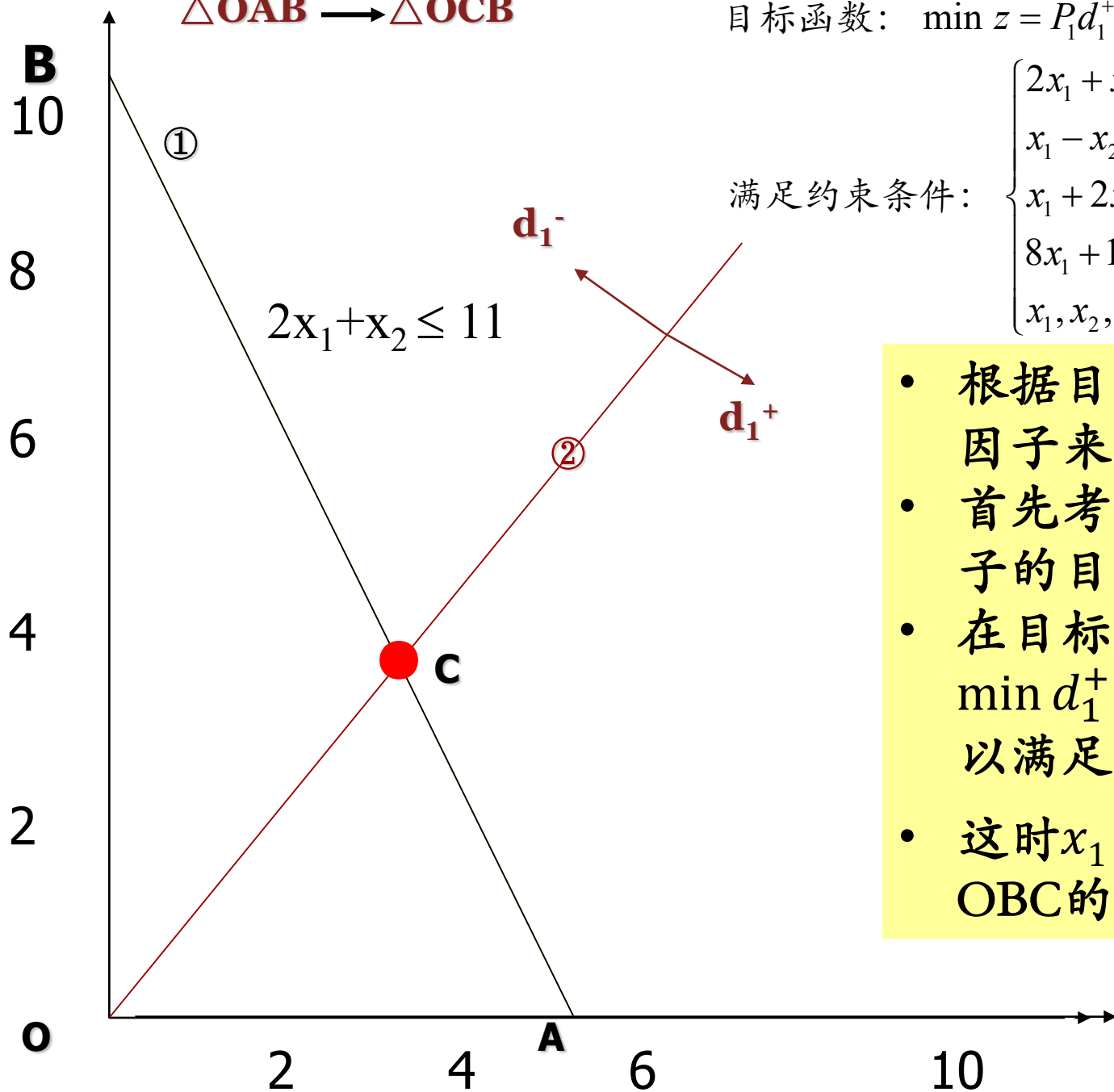
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 & (1) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$



- 先在平面直角坐标系的第一象限内, 做各约束条件。绝对约束条件的作图与线性规划相同。
- 本例中满足绝对约束的可行域为三角形OAB。
- 做目标约束时, 先令  $d_i^-, d_i^+ = 0$ , 做相应的直线, 然后在这直线旁标上  $d_i^-, d_i^+$ , 如图所示。这表明目标约束可以沿  $d_i^-, d_i^+$  所示方向平移。

$\triangle OAB \rightarrow \triangle OCB$

目标函数:  $\min z = P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$



满足约束条件:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 & (1) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

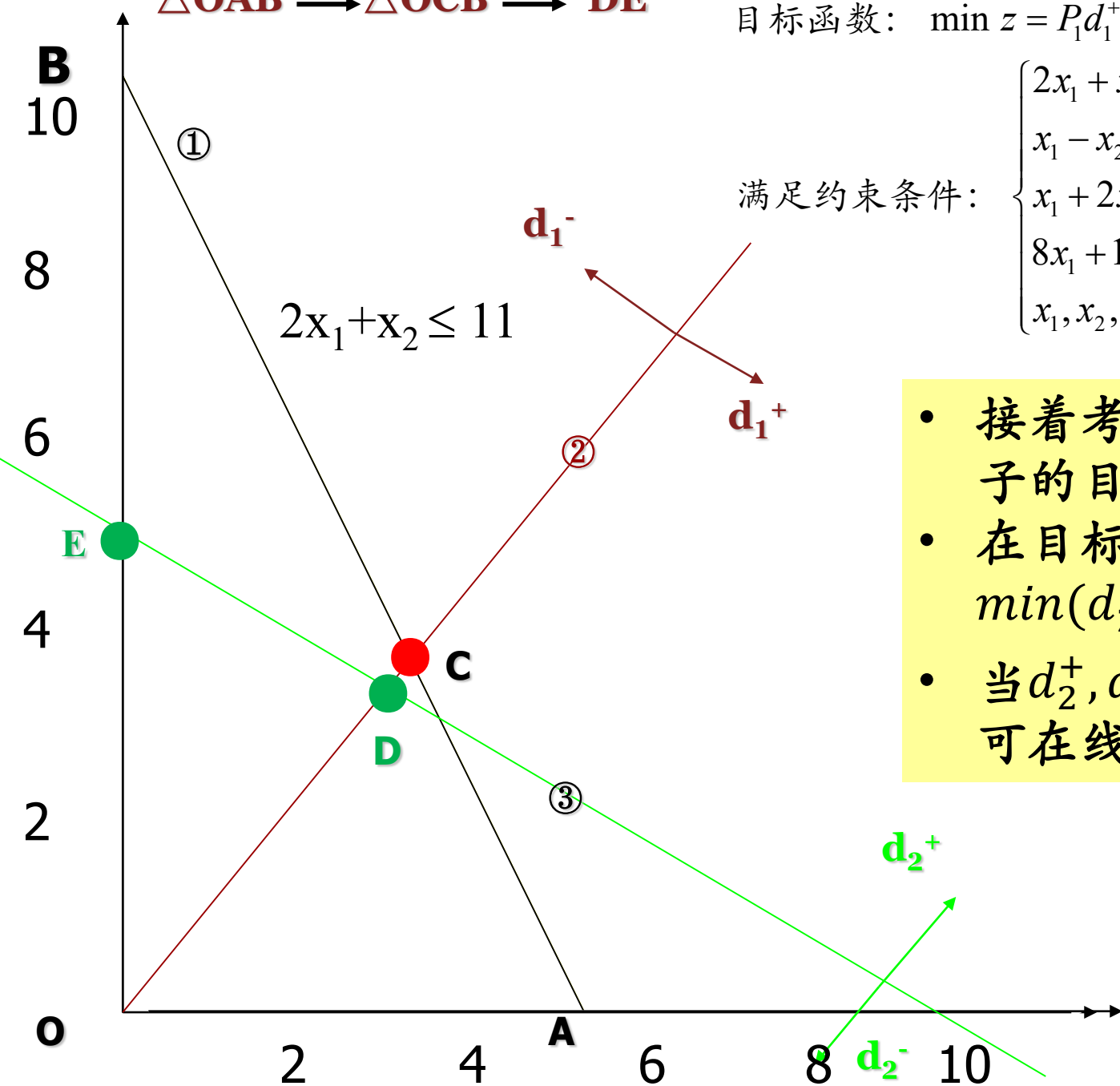
- 根据目标函数中的优先因子来分析求解。
- 首先考虑具有  $P_1$  优先因子的目标的实现,
- 在目标函数中要求实现  $\min d_1^+$ , 从图中可见, 可以满足  $d_1^+ = 0$ 。
- 这时  $x_1, x_2$  只能在三角形 OBC 的边界和其中取值

$\triangle OAB \rightarrow \triangle OCB \rightarrow DE$

目标函数:  $\min z = P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 & (1) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

满足约束条件:



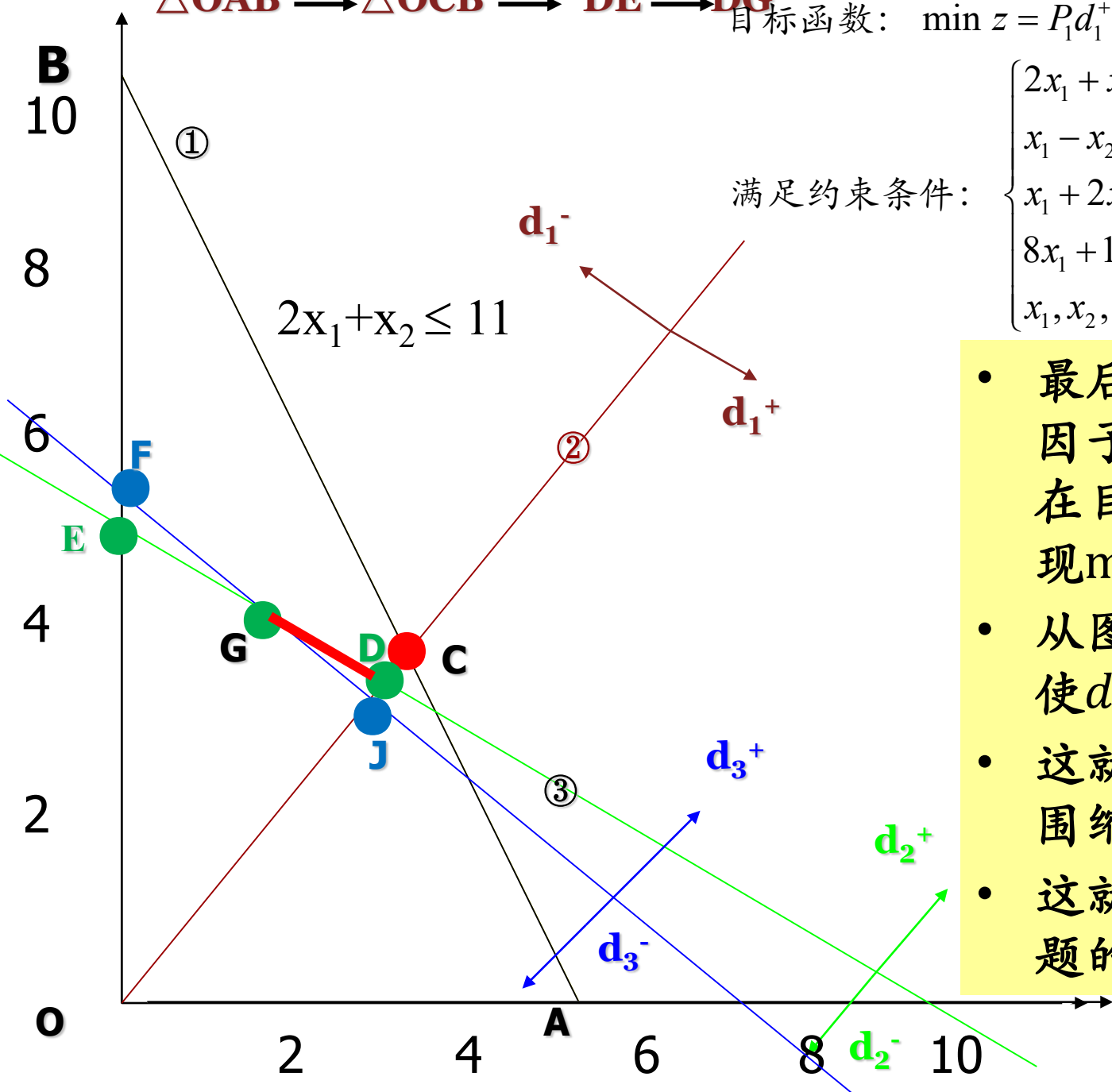
- 接着考虑具有  $P_2$  优先因子的目标的实现。
- 在目标函数中要求实现  $\min(d_2^+ + d_2^-)$
- 当  $d_2^+, d_2^- = 0$  时,  $x_1, x_2$  可在线段 ED 上取值。

$\triangle OAB \rightarrow \triangle OCB \rightarrow DE \rightarrow DG$

目标函数:  $\min z = P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$

满足约束条件:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 & (1) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i=1,2,3 \end{cases}$$



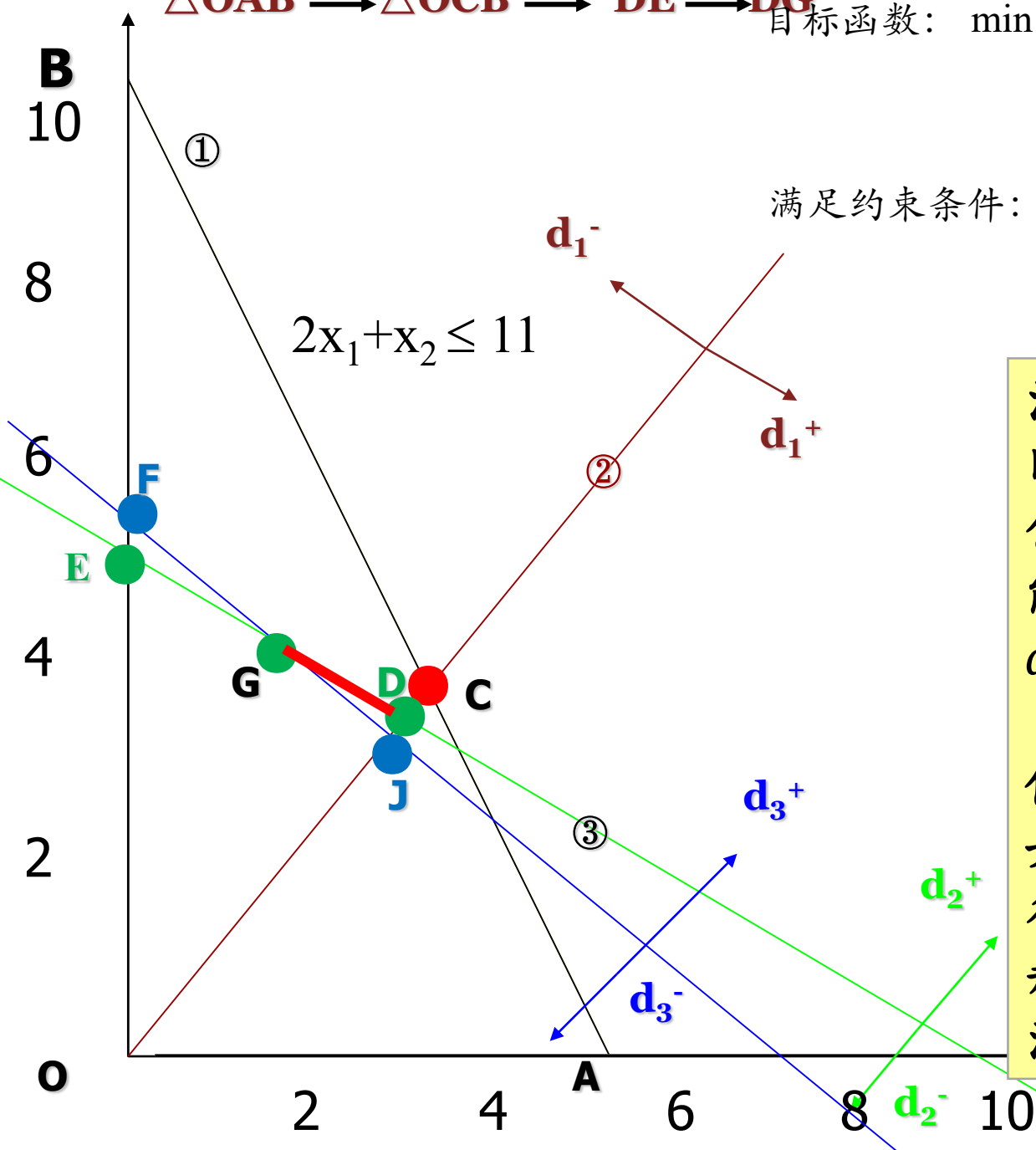
- 最后考虑具有  $P_3$  优先因子的目标的实现, 在目标函数中要求实现  $\min d_3^-$ 。
- 从图中可以判断可以使  $d_3^- = 0$
- 这就使  $x_1, x_2$  取值范围缩小到线段 GD 上
- 这就是该目标规划问题的解。

$\triangle OAB \rightarrow \triangle OCB \rightarrow DE \rightarrow DG$

目标函数:  $\min z = P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 & (1) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i=1,2,3 \end{cases}$$

满足约束条件:



注意目标规划问题求解时, 把绝对约束作最高优先级考虑。在本例中能依先后次序都满足  $d_1^+ = 0$ ,  $d_2^+ + d_2^- = 0$ ,  $d_3^- = 0$ , 因而  $z^* = 0$ 。但在大多数问题中并非如此, 会出现某些约束得不到满足, 故将目标规划问题的最优解称为满意解。



- 例2：某工厂生产彩电、黑白两种电视机，数据如下

	彩电	黑白电视	拥有量
装配线(小时)	1	1	40
销量	24	30	
利润(元/件)	80	40	

该厂确定的目标为：

- (1) 充分利用装配线每周计划开动40小时；
- (2) 允许装配线加班；但加班时间每周尽量不超过10小时；
- (3) 装配电视机的数量尽量满足市场需要。因彩色电视机的利润高，取其权系数为2；

试建立这问题的目标规划模型，并求解黑白和彩色电视机的产量。





	彩电	黑白电视	拥有量
装配线(小时)	1	1	40
销量	24	30	
利润(元/件)	80	40	

**解：** 设 $x_1, x_2$ 分别表示彩色和黑白电视机的产量：

- $P_1$ ：充分利用装配线每周计划开动40小时；

$$x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40, \quad P_1 d_1^-$$

- $P_2$ ：允许装配线加班；但加班时间每周尽量不超过10小时；

$$x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 40 + 10 = 50, \quad P_2 d_2^+$$

- $P_3$ ：装配电视机的数量尽量满足市场需要。因彩色电视机的利润高，取其权系数为2；

$$x_1 + d_3^- - d_3^+ = 24, \quad P_3 2d_3^-$$

$$x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30, \quad P_3 d_4^-$$

**目标函数：**  $\min z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 (2d_3^- + d_4^-)$



**解：**如此，得到目标规划模型：

目标函数：  $\min z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 (2d_3^- + d_4^-)$

满足约束条件：

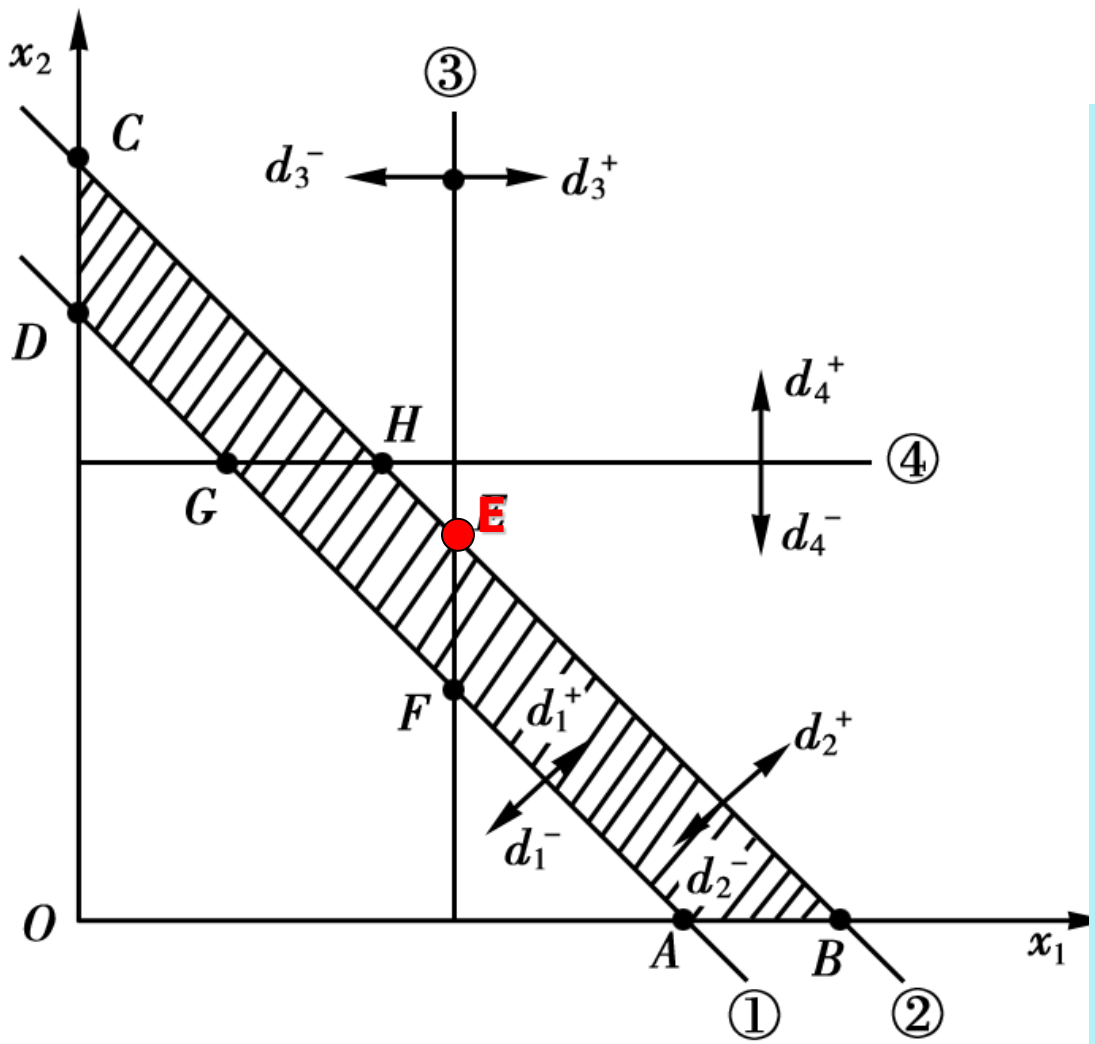
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40 & (1) \\ x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 & (2) \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 24 & (3) \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

故E点为满意解。其坐标为(24, 26)，即该厂每周应装配彩色电视机24台，黑白电视机26台。

目标函数:  $\min z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^- + P_3(2d_3^- + d_4^-)$

满足约束条件:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40 & (1) \\ x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 & (2) \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 24 & (3) \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$



- 在考虑具有  $P_1$ 、 $P_2$  的目标实现后， $x_1$ 、 $x_2$  的取值范围为ABCD。
- 考虑  $P_3$  的目标要求时，因  $d_3^-$  的权系数大于  $d_4^-$ ，故先考虑  $\min d_3^-$ ；这时  $x_1$ 、 $x_2$  的取值范围缩小为ABEF区域。
- 然后考虑  $d_4^-$ 。在ABEF中无法满足  $d_4^- = 0$ ，因此只能在ABEF中取一点，使  $d_4^-$  尽可能小，这就是E点。





华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

# 第5章 目标规划



# 第5章 目标规划

第1节 目标规划的数学模型

第2节 解目标规划的图解法

第3节 解目标规划的单纯形法

第4节 灵敏度分析

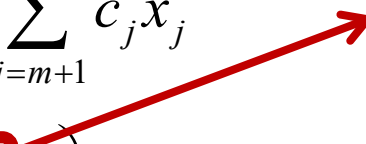
第5节 应用举例



- 目标规划的数学模型结构与线性规划的数学模型结构形式上没有本质的区别，所以可用单纯形法求解。但要考虑目标规划的数学模型一些特点，作以下规定：
- (1) 因目标规划问题的目标函数都是求最小化，所以以  $c_j - z_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 为最优准则。
- (2) 因非基变量的检验数中含有不同等级的优先因子，即

$$c_j - z_j = \sum a_{kj} P_k, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m c_i x_i + \sum_{j=m+1}^n c_j x_j$$

$$= \sum_{i=1}^m c_i \left( b_i - \sum_{j=m+1}^n a_{ij} x_j \right) + \sum_{j=m+1}^n c_j x_j$$


$$= \sum_{i=1}^m c_i b_i + \sum_{j=m+1}^n \left( c_j - \sum_{i=1}^m \boxed{c_i a_{ij}} \right) x_j$$



- 目标规划的数学模型结构与线性规划的数学模型结构形式上没有本质的区别，所以可用单纯形法求解。但要考虑目标规划的数学模型一些特点，作以下规定：
- (1) 因目标规划问题的目标函数都是求最小化，所以以  $c_j - z_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 为最优准则。
- (2) 因非基变量的检验数中含有不同等级的优先因子，即

$$c_j - z_j = \sum a_{kj} P_k, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

- 因  $P_1 \gg P_2 \gg \dots \gg P_K$ ；从每个检验数的整体来看：检验数的正、负首先决定于  $P_1$  的系数  $a_{1j}$  的正、负。若  $a_{1j} = 0$ ，这时此检验数的正、负就决定于  $P_2$  的系数  $a_{2j}$  的正、负，下面可依此类推。





- **例1**: 用单纯形法求解目标规划问题 (图解法的例1):

目标函数:  $\min z = P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$

满足约束条件: 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 & (1) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$



- 将问题化为标准型：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_s = 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

- 问题中包含的变量： $x_1, x_2, x_s, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, d_3^+, d_3^-$ ：



- (1) 取:  $x_s, d_1^-, d_2^-, d_3^-$  为初始基变量, 列初始单纯形表:

$$\begin{aligned} \min z &= P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^- \\ 2x_1 + x_2 + x_s &= 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ &= 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ &= 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ &\geq 0, i=1,2,3 \end{aligned}$$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	$P_1$	$P_2$	$P_2$	$P_3$	0	
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_s$	$d_1^-$	$d_1^+$	$d_2^-$	$d_2^+$	$d_3^-$	$d_3^+$	$\theta$
0	$x_s$	11	2	1	1							
0	$d_1^-$	0	1	-1		1	-1					
$P_2$	$d_2^-$	10	1	2				1	-1			
$P_3$	$d_3^-$	56	8	10						1	-1	
$P_1$							1					
$c_j - z_j$									2			
$P_3$			-1	-2							1	
			-8	-10								



<div><div>-P<sub>2</sub>-8P<sub>3</sub></div><div>-2P<sub>2</sub>-10P<sub>3</sub></div><div>0-0</div><div>0-0</div><div>P<sub>1</sub>-0</div><div>P<sub>2</sub>-P<sub>2</sub></div><div>P<sub>2</sub>-(-P<sub>2</sub>)</div><div>P<sub>3</sub>-P<sub>3</sub></div><div>0-(-P<sub>3</sub>)</div></div>												
	$\theta_j \rightarrow$	0	0	0	0	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	0		
C <sub>B</sub>	X <sub>B</sub>	b	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>s</sub>	d <sub>1</sub> <sup>-</sup>	d <sub>1</sub> <sup>+</sup>	d <sub>2</sub> <sup>-</sup>	d <sub>2</sub> <sup>+</sup>	d <sub>3</sub> <sup>-</sup>	d <sub>3</sub> <sup>+</sup>	θ
0	x <sub>s</sub>	11	2	1	1							
0	d <sub>1</sub> <sup>-</sup>	0	1	-1		1	-1					
P <sub>2</sub>	d <sub>2</sub> <sup>-</sup>	10	1	2				1	-1			
P <sub>3</sub>	d <sub>3</sub> <sup>-</sup>	56	8	10						1	-1	
	P <sub>1</sub>						1					
c <sub>j</sub> - z <sub>j</sub>	P <sub>2</sub>		-1	-2					2			
	P <sub>3</sub>		-8	-10							1	



- 取 $k = 1$ ，检查检验数的 $P_1$ 行，该行无负检验数，但有0；
- $(k = 1) < (K = 3)$ ，令 $k = k + 1$ ，检查检验数 $P_2$ 行；
- 查出检验数 $P_2$ 行中有 $-1, -2$ ；取 $\min(-1, -2) = -2$ 。它对应的变量 $x_2$ 为换入变量，转入下一步：
- 在表中计算最小检验比

$$\theta = \min(11, 5, 5.6) = 5$$

它对应的变量 $d_2^-$ 为换出变量，进行基变换，建立新的计算表：

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	$P_1$	$P_2$	$P_2$	$P_3$	0	
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_s$	$d_1^-$	$d_1^+$	$d_2^-$	$d_2^+$	$d_3^-$	$d_3^+$	$\theta$
0	$x_s$	11	2	1	1							11 / 1
0	$d_1^-$	0	1	-1		1	-1					—
$P_2$	$d_2^-$	10	1	[2]				1	-1			10 / 2
$P_3$	$d_3^-$	56	8	10						1	-1	56 / 10
$P_1$							1					
$c_j - z_j$									2			
$P_2$			-1	-2								
$P_3$			-8	-10						1		



- 进行基变换，建立新的计算表：

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	$P_1$	$P_2$	$P_2$	$P_3$	0	
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_s$	$d_1^-$	$d_1^+$	$d_2^-$	$d_2^+$	$d_3^-$	$d_3^+$	$\theta$
0	$x_s$	6	3/2		1			-1/2	1/2			4
0	$d_1^-$	5	3/2			1	-1	1/2	-1/2			10/3
0	$x_2$	5	1/2	1				1/2	-1/2			10
$P_3$	$d_3^-$	6	3					-5	5	1	-1	6/3
$P_1$							1					
$c_j - z_j$								1	1			
$P_2$												
$P_3$			-3					5	-5		1	

$x_1$  换入， $d_3^-$  换出



- 继续基变换，得到新的单纯形表：

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	$P_1$	$P_2$	$P_2$	$P_3$	0	
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_s$	$d_1^-$	$d_1^+$	$d_2^-$	$d_2^+$	$d_3^-$	$d_3^+$	$\theta$
0	$x_s$	3			1			2	-2	-1/2	1/2	
0	$d_1^-$	2				1	-1	3	-3	-1/2	1/2	
0	$x_2$	4		1				4/3	-4/3	-1/6	1/6	
0	$x_1$	2	1					-5/3	5/3	1/3	-1/3	
$P_1$							1					
$c_j - z_j$								1	1			
$P_2$												
$P_3$										1		

此时检验数全部大于0，得到满意解：

$$x_1^* = 2, x_2^* = 4$$

非基变量 $d_3^+$ 的检验数等于0，存在无穷多最优解：



- $d_3^+$  换入,  $d_1^-$  换出, 得到新的单纯形表:

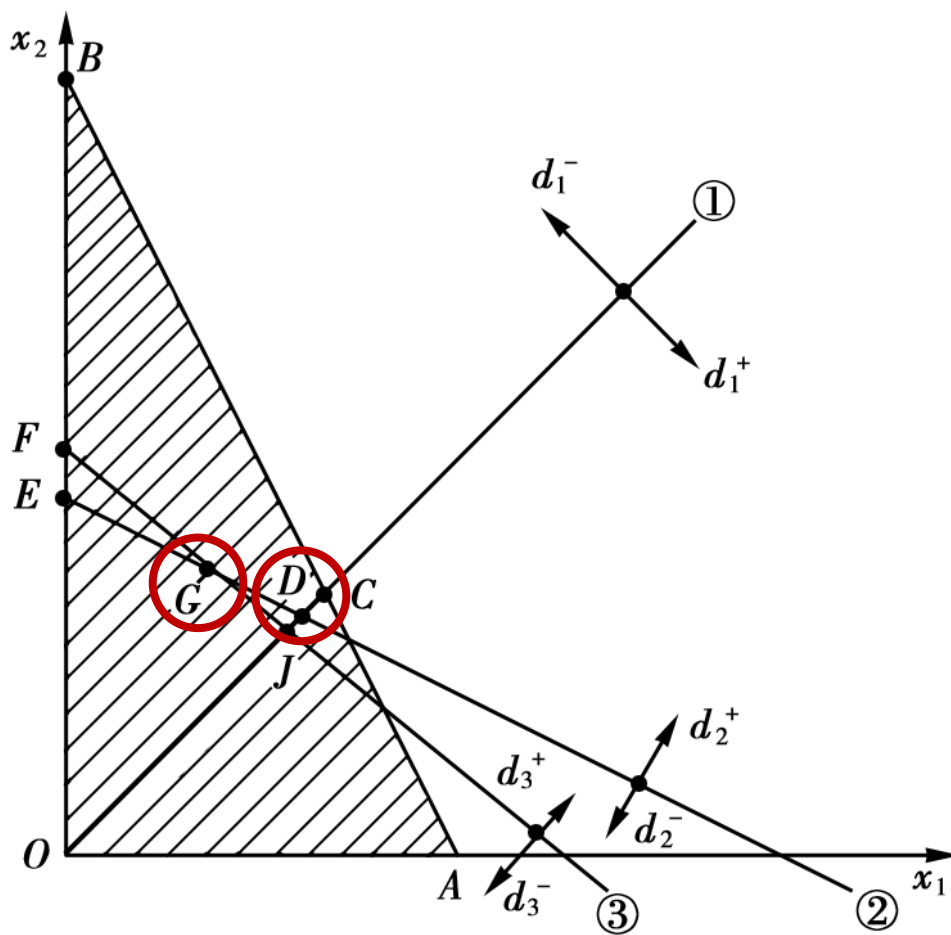
$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	$P_1$	$P_2$	$P_2$	$P_3$	0	
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_s$	$d_1^-$	$d_1^+$	$d_2^-$	$d_2^+$	$d_3^-$	$d_3^+$	$\theta$
0	$x_s$	1			1	-1	1	-1	1			
0	$d_3^+$	4				2	-2	6	-6	-1	1	
0	$x_2$	10/3				-1/3	1/3	1/3	-1/3			
0	$x_1$	10/3	1	1		2/3	-2/3	1/3	-1/3			
$P_1$							1					
$c_j - z_j$								1	1			
$P_2$												
$P_3$										1		

得到解:  $x_1^* = 10/3, x_2^* = 10/3$





- 解  $x_1^* = 2$ ,  $x_2^* = 4$  为例1的满意解。此解相当于图解法的G点：
- 解  $x_1^* = 10/3$ ,  $x_2^* = 10/3$  也是满意解。此解相当于图解法的D点：
- 图解法结果：线段GD上的点(G和D的凸组合)是满意解。





解目标规划问题的单纯形法的计算步骤：

- (1) 建立初始单纯形表，在表中将检验数行按优先因子个数分别列成 $K$ 行，置 $k=1$ ；
- (2) 检查该行中是否存在负数，且对应的前 $k-1$ 行的系数是零。若有负数取其中最小者对应的变量为换入变量，转(3)。若无负数，则转(5)。
- (3) 按最小比值规则确定换出变量，当存在两个和两个以上相同的最小比值时，选取具有较高优先级别的变量为换出变量。
- (4) 按单纯形法进行基变换运算，建立新的计算表，返回(2)。
- (5) 当 $k=K$ 时，计算结束。表中的解即为满意解。否则置 $k=k+1$ ，返回到(2)。



# 运筹学

## Operations Research (OR)

讲师：王博

人工智能与自动化学院，系统科学与工程系

Email: [wb8517@hust.edu.cn](mailto:wb8517@hust.edu.cn) QQ: [2734802827](https://www.qq.com/)



华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

# 第5章 目标规划



# 第5章 目标规划

第1节 目标规划的数学模型

第2节 解目标规划的图解法

第3节 解目标规划的单纯形法

第4节 灵敏度分析

第5节 应用举例



- 目标规划的灵敏度分析方法与线性规划相似，这里除分析各项系数的变化外，还有优先因子的变化问题，下面举例说明改变目标优先等级的分析。

目标函数：  $\min z = P_1(2d_1^+ + 3d_2^+) + P_2d_3^- + P_3d_4^+$

满足约束条件：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1 + x_2 + d_4^- - d_4^+ = 12 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$



• 单纯形计算终表如下：

$$\begin{aligned} \min z &= P_1(2d_1^+ + 3d_2^+) + P_2d_3^- + P_3d_4^+ \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ &= 10 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ &= 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ &= 56 \\ x_1 + x_2 + d_4^- - d_4^+ &= 12 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$c_j \rightarrow$						$2P_1$		$3P_1$	$P_2$			$P_3$	
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$d_1^-$	$d_1^+$	$d_2^-$	$d_2^+$	$d_3^-$	$d_3^+$	$d_4^-$	$d_4^+$	$\theta$
0	$x_2$	6		1	1	-1	-1	1					
0	$x_1$	4	1			-2	1	-2					
$P_2$	$d_3^-$	18			-3	3	-2	2	1	-1			
0	$d_4^-$	2			-1	1					1	-1	
$P_1$						2		3					
$c_j - z_j$					3	-3	2	-2		1			
$P_3$												1	



目标函数的优先等级变化为：

$$(1) \min z = P_1(2d_1^+ + 3d_2^+) + P_2d_4^- + P_3d_3^-$$

$$(2) \min z = P_1d_3^- + P_2(2d_1^+ + 3d_3^+) + P_3d_4^+$$

试分析原解有什么变化。

$$\min z = P_1(2d_1^+ + 3d_2^+) + P_2d_3^- + P_3d_4^+$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1 + x_2 + d_4^- - d_4^+ = 12 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$						$2P_1$		$3P_1$	$P_2$			$P_3$	
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$d_1^-$	$d_1^+$	$d_2^-$	$d_2^+$	$d_3^-$	$d_3^+$	$d_4^-$	$d_4^+$	$\theta$
0	$x_2$	6		1	1	-1	-1	1					
0	$x_1$	4	1			-2	1	-2					
$P_2$	$d_3^-$	18			-3	3	-2	2	1	-1			
0	$d_4^-$	2			-1	1					1	-1	
$P_1$						2		3					
$P_2$					3	-3	2	-2		1			
$P_3$												1	





目标函数的优先等级变化为：

$$(1) \min z = P_1(2d_1^+ + 3d_2^+) + P_2d_4^+ + P_3d_3^-$$

$$(2) \min z = P_1d_3^- + P_2(2d_1^+ + 3d_3^+) + P_3d_4^+$$

试分析原解有什么变化。

$$\min z = P_1(2d_1^+ + 3d_2^+) + P_2d_3^- + P_3d_4^+$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1 + x_2 + d_4^- - d_4^+ = 12 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i=1,2,3,4 \end{cases}$$

- 解：**分析(1)，实际是将原目标函数中 $d_4^+$ ， $d_3^-$ 的优先因子对换了
- 这时将原最终表的检验数中的 $P_2$ 、 $P_3$ 行和 $c_j$ 行的 $P_2$ 、 $P_3$ 系数对换即可，得下表：这时可见原解仍满足最优解条件。

$c_j \rightarrow$						$2P_1$		$3P_1$	<div><math>P_3</math></div>	<div><math>\longleftrightarrow</math></div>	<div><math>P_2</math></div>		
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$d_1^-$	$d_1^+$	$d_2^-$	$d_2^+$	$d_3^-$	$d_3^+$	$d_4^-$	$d_4^+$	$\theta$
0	$x_2$	6	1	1	1	-1	-1	1					
0	$x_1$	4				-2	1	-2					
$P_3$	$d_3^-$	18				-3	3	-2	2	1	-1		
0	$d_4^-$	2				-1	1					1	-1
$c_j - z_j$			$P_1$				2		3				
			$P_2$										1
			$P_3$			3	-3	2	-2		1		



目标函数的优先等级变化为：

$$(1) \min z = P_1(2d_1^+ + 3d_2^+) + P_2d_4^+ + P_3d_3^-$$

$$(2) \min z = P_1d_3^- + P_2(2d_1^+ + 3d_2^+) + P_3d_4^+$$

试分析原解有什么变化。

$$\min z = P_1(2d_1^+ + 3d_2^+) + P_2d_3^- + P_3d_4^+$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1 + x_2 + d_4^- - d_4^+ = 12 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i=1,2,3,4 \end{cases}$$

- 分析(2)，将变化了的优先等级直接反映到下表上。再计算检验数：

$c_j \rightarrow$						$2P_2$		$3P_2$	$P_1$			$P_3$	
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$d_1^-$	$d_1^+$	$d_2^-$	$d_2^+$	$d_3^-$	$d_3^+$	$d_4^-$	$d_4^+$	$\theta$
0	$x_2$	6		1	1	-1	-1	1					
0	$x_1$	4	1			-2	1	-2					
$P_1$	$d_3^-$	18			-3	3	-2	2	1	-1			
0	$d_4^-$	2			-1	1					1	-1	
$P_1$					3	-3	2	-2		1			
$P_2$						2		3					
$P_3$												1	



- 进行迭代，直到求得新的满意解为止。从表中得到新的满意解

$$x_1^* = 4, x_2^* = 12$$

Cj						2P <sub>2</sub>		3P <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>			P <sub>3</sub>
C <sub>B</sub>	X <sub>B</sub>	b	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	d <sub>1</sub> <sup>-</sup>	d <sub>1</sub> <sup>+</sup>	d <sub>2</sub> <sup>-</sup>	d <sub>2</sub> <sup>+</sup>	d <sub>3</sub> <sup>-</sup>	d <sub>3</sub> <sup>+</sup>	d <sub>4</sub> <sup>-</sup>	d <sub>4</sub> <sup>+</sup>
P <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	8	1	1			-1	1	1	-1	1	-1
	x <sub>1</sub>	4					1	-1				
	d <sub>3</sub> <sup>-</sup>	12					-2	2			-3	[3]
	2P <sub>2</sub>	2					-1	1			1	-1
C <sub>j</sub> -Z <sub>j</sub>		P <sub>1</sub>			2		2	-2		1	3	-3
		P <sub>2</sub>						3			-2	2
		P <sub>3</sub>										1
P <sub>3</sub>	x <sub>2</sub>	12	1	1			-5/3	5/3	1/3	-1/3		1
	x <sub>1</sub>	4					1	-1				
	d <sub>4</sub> <sup>+</sup>	4					-2/3	2/3	1/3	-1/3		
	2P <sub>2</sub>	6					-1	1	1/3	-1/3		
C <sub>j</sub> -Z <sub>j</sub>		P <sub>1</sub>			2				1			
		P <sub>2</sub>					4/3	5/3	-2/3	2/3		
		P <sub>3</sub>					2/3	-2/3	-1/3	1/3		



# 第5章 目标规划

第1节 目标规划的数学模型

第2节 解目标规划的图解法

第3节 解目标规划的单纯形法

第4节 灵敏度分析

第5节 应用举例



**例1：**某单位领导在考虑本单位职工的升级调资方案时，依次遵守以下规定：

- 不超过月工资总额600,000元；
- 每级的人数不超过定编规定的人数；
- II，III级的升级面尽可能达到现有人数的20%，且无越级提升；
- III级不足编制的人数可录用新职工，又I级职工中有10%要退休
- 有关资料汇总于表中，问该领导应如何拟订一个满意的方案。

等级	工资(USD/月)	现有人数	编制人数
I	2000	100	120
II	1500	120	150
III	1000	150	150
合计		370	420



等级	工资(USD/月)	现有人数	编制人数
I	2000	100	120
II	1500	120	150
III	1000	150	150
合计		370	420

**解：** 设 $x_1, x_2, x_3$ 分别表示提升到 I、II 级和录用新职工的人数。

- $P_1$ : 不超过月工资总额600,000元;
- $P_2$ : 每级的人数不超过定编规定的人数;
- $P_3$ : II、III 级的升级面尽可能达到现有人数的20%;

调整以后各级人数为:

- I级:  $100 - 100 \times 10\% + x_1$
- II级:  $120 - x_1 + x_2$
- III级:  $150 - x_2 + x_3$



调整以后各级人数为：

- I级：  $100 - 100 \times 10\% + x_1$
- II级：  $120 - x_1 + x_2$
- III级：  $150 - x_2 + x_3$

等级	工资(USD/月)	现有人数	编制人数
I	2000	100	120
II	1500	120	150
III	1000	150	150
合计		370	420

分析：

- $P_1$ ：不超过月工资总额600,000元， $P_1 d_1^+$ ；  
$$2000(90 + x_1) + 1500(120 - x_1 + x_2) + 1000(150 - x_2 + x_3) + d_1^- - d_1^+ = 600,000$$
- $P_2$ ：每级的人数不超过定编规定的人数， $P_2(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+)$ ；
- I级：  $100 - 100 \times 10\% + x_1 + d_2^- - d_2^+ = 120$
- II级：  $120 - x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 150$
- III级：  $100 - x_2 + x_3 + d_4^- - d_4^+ = 150$



调整以后各级人数为：

- I级：  $100 - 100 \times 10\% + x_1$
- II级：  $120 - x_1 + x_2$
- III级：  $100 - x_2 + x_3$

等级	工资(USD/月)	现有人数	编制人数
I	2000	100	120
II	1500	120	150
III	1000	150	150
合计		370	420

分析：

- $P_3$ ： II、III 级的升级面尽可能达到现有人数的20%，

$$P_3(d_5^- + d_6^-)$$

- II级：  $x_1 + d_5^- - d_5^+ = 120 \times 20\%$
- III级：  $x_2 + d_6^- - d_6^+ = 150 \times 20\%$





数学模型为：

$$\begin{aligned} \min z &= P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^+ + d_3^+ + d_4^+) + P_3 (d_5^- + d_6^-) \\ \left\{ \begin{array}{l} 2000(90 + x_1) + 1500(120 - x_1 + x_2) + 1000(150 - x_2 + x_3) \\ \quad + d_1^- - d_1^+ = 600,000 \\ 100 - 100 \times 10\% + x_1 + d_2^- - d_2^+ = 120 \\ 120 - x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 150 \\ 150 - x_2 + x_3 + d_4^- - d_4^+ = 150 \\ x_1 + d_5^- - d_5^+ = 120 \times 20\% \\ x_2 + d_6^- - d_6^+ = 150 \times 20\% \\ x_1, x_2, x_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i = 1, 2, \dots, 6 \end{array} \right. \end{aligned}$$



该目标规划模型可用单纯形法求解，得到多重解。

变量	含义	解1	解2	解3	解4
$x_1$	晋升到I级的人数	24	24	30	30
$x_2$	晋升到II级的人数	30	30	30	50
$x_3$	晋升到III级的人数	0	30	30	50
$d_1^-$	工资总额的结余额	63000	33000	30000	0
$d_2^-$	I级的缺编人数	6	6	0	0
$d_3^-$	II级的缺编人数	24	24	30	10
$d_4^-$	III级的缺编人数	30	0	6	0
$d_5^+$	II级的超编人数	0	0	0	6
$d_6^+$	III级的超编人数	0	0	0	20