第11章
正弦稳态电路的功率

11.2 瞬时功率

11.3 有功功率与无功功率

11.4 视在功率、功率因数及复功率

11.6 功率因数校正

11.7最大功率传输

11.8 有功功率测量

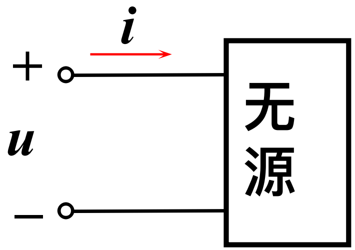
Motivation

房东收的收电费，为什么会比电力局的贵两三倍，真相让人泪奔

https://haokan.baidu.com/v?vid=11009002433801837045&pd=bjh&fr=bjhauthor&type=video

11.2 瞬时功率 (*instantaneous power*)

1. 定义

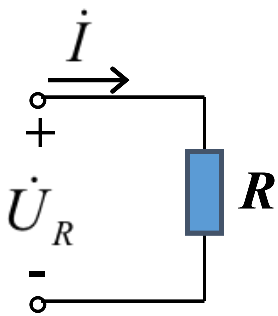


$$p = ui$$

单位：瓦[特]，符号W

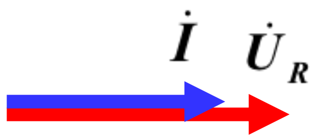
瞬时功率守恒：电路中所有元件在任一瞬间吸收的功率代数和为零。

2. 电阻的瞬时功率



$$u(t) = \sqrt{2}U_R \sin \omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin \omega t$$



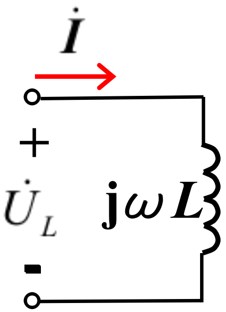
$$p_R = u_R i$$

$$= \sqrt{2}U_R \sin(\omega t)\sqrt{2}I \sin(\omega t)$$

$$= U_R I[1 - \cos 2(\omega t)]$$

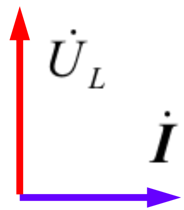
电阻总是吸收功率

3. 电感的瞬时功率



$$i(t)=\sqrt{2}I\sin\omega t$$

$$u_L(t)=\sqrt{2}U_L\sin\left(\omega t+90^\circ\right)$$



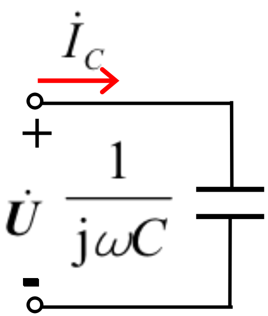
电感吸收功率与发出功率交替进行

$$p_L=u_L i$$

$$=\sqrt{2}U_L\sin(\omega t+90^\circ)\sqrt{2}I\sin(\omega t)$$

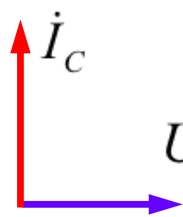
$$=-U_L I\cos\left(2\omega t+90^\circ\right)=U_L I\sin\left(2\omega t\right)$$

4. 电容的瞬时功率



$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\left(\omega t\right)$$

$$i_C(t)=\sqrt{2}I_C\sin\left(\omega t+90^\circ\right)$$



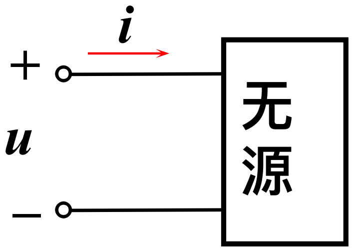
电容吸收功率与发出功率交替进行

$$p_C=u i_C$$

$$=\sqrt{2}U\sin(\omega t)\sqrt{2}I_C\sin(\omega t+90^\circ)$$

$$=-UI_C\cos\left(2\omega t+90^\circ\right)=UI_C\sin\left(2\omega t\right)$$

5. 任意无源一端口网络吸收的瞬时功率



$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

u超前i的阻抗角

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$p(t)=ui=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$=2UI\sin\omega t\sin(\omega t-\varphi)$$

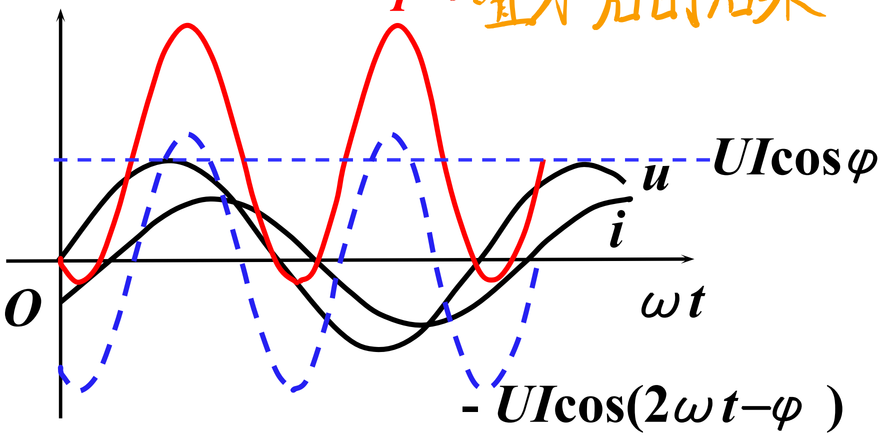
$$=UI[\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)]$$

$$=UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t-\varphi)$$

第1表达式

$$p(t) = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \varphi)$$

$p \rightarrow$ 叠加后的结果



$\boxed{\text{恒定 部分}}$

$\boxed{\text{可逆 部分}}$

- p有时为正，有时为负；
- $p>0$，电路吸收功率；
- $p<0$，电路发出功率。

11.3 有功功率和无功功率

1. 定义

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

瞬时功率的平均值

$$p(t)=UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t-\varphi)$$

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T[UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t-\varphi)]\mathrm{d}t$$

$$=UI\cos\varphi$$

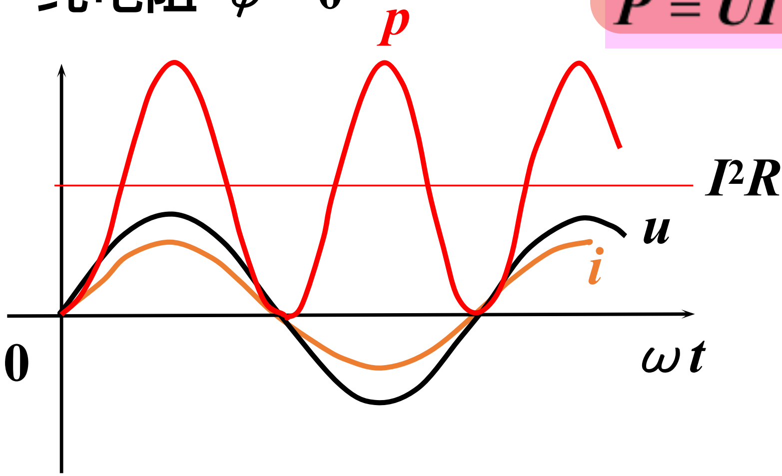
P 的单位：**W**（瓦）有功功率

$\cos\varphi$：功率因数。

$\varphi=\psi_u-\psi_i$：功率因数角。对无源网络，为其等效阻抗的阻抗角。

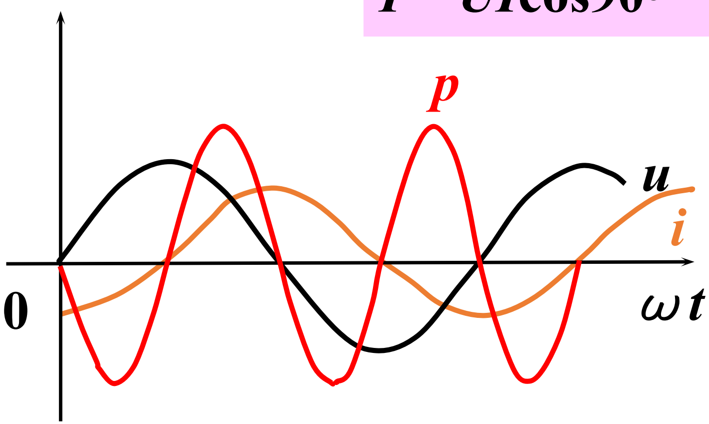
纯电阻 $\varphi = 0°$

$$P = UI\cos\varphi = UI = I^2R = U^2/R$$

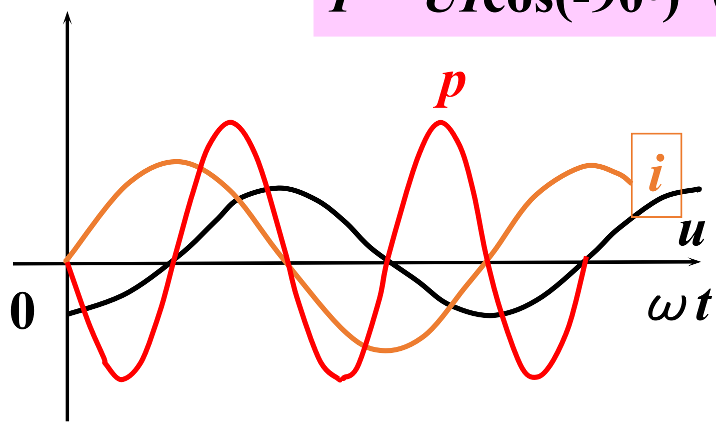


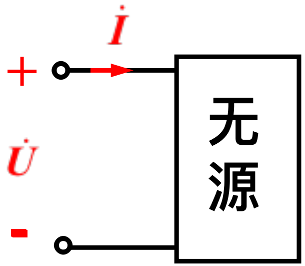
纯电感 $\varphi = 90°$ →不吸收有功功率← 纯电容 $\varphi = -90°$

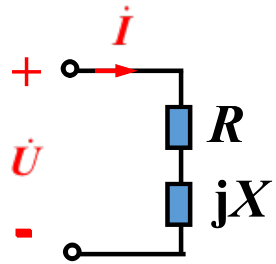
$$P = UI\cos 90° = 0$$

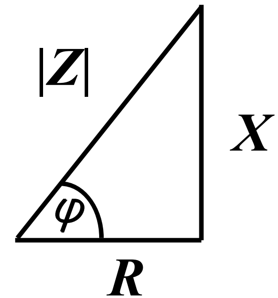


$$P = UI\cos(-90°) = 0$$









$$P = UI\cos\varphi = |Z| \cdot I \cdot I\cos\varphi = I^2|Z|\cos\varphi = I^2R$$

$U = |Z| \cdot I$

平均功率为消耗在电阻上的功率

↓

有功功率(*active power*)

有功功率守恒：电路中所有元件吸收的有功功率代数和为零。

功率因数 $\cos\varphi$ $\begin{cases} 1, & \text{纯电阻} \\ 0, & \text{纯电抗} \end{cases}$

一般地，有 $0 \le \cos\varphi \le 1$

$X > 0$，$\varphi > 0$，感性，滞后功率因数

$X < 0$，$\varphi < 0$，容性，超前功率因数

例： $\cos\varphi = 0.5$ (滞后)，则 $\varphi = 60^\circ$

$$\cos\varphi \begin{cases} 1, & \text{纯电阻} \\ 0, & \text{纯电抗} \end{cases}$$

结论

平均功率实际上是电阻消耗的功率，亦称为有功功率。表示电路实际消耗的功率，它不仅与电压电流有效值有关，而且与 $\cos\varphi$ 有关，这是交流和直流的很大区别, 主要由于电压、电流存在相位差。

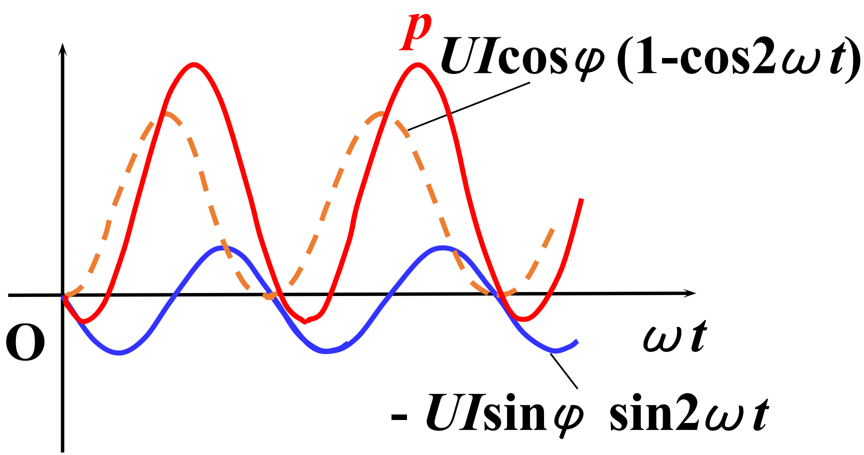
无功功率 *(reactive power) Q*

瞬时功率的另一种分解方法:

$$p(t) = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \varphi)$$

$$= UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t) - UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

第2表达式



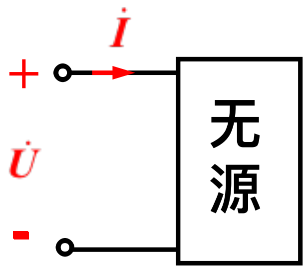
不可逆部分

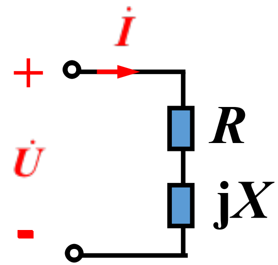
可逆部分

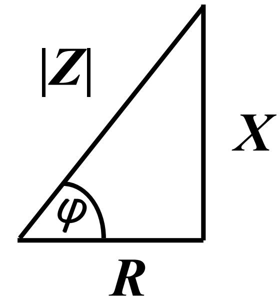
- 部分能量在电源和一端口之间来回交换。交换的速率（幅度）就是无功功率

无功功率 (*reactive power*) *Q*

定义







$\varphi=\psi_u-\psi_i$：功率因数角。

$$Q=UI\sin\varphi$$

单位：var (voltage-ampere reactive，乏)

$$=|Z|\,I\,I\sin\varphi=I^2|Z|\sin\varphi=I^2X$$

- Q >0，表示网络吸收无功功率；
- Q <0，表示网络发出无功功率。
- Q 定义为网络与电源往复交换功率的幅值，是由储能元件*L*、C的性质决定的

4. 视在功率S

电气设备的容量

$$S \overset{\text{def}}{=} UI \qquad 单位：\text{VA}\ (伏安)$$

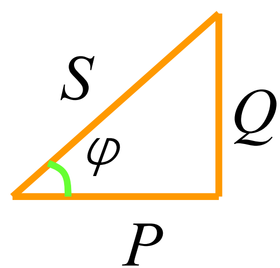
有功，无功，视在功率的关系：

有功功率： $P=UI\cos\varphi$ 单位：W

无功功率： $Q=UI\sin\varphi$ 单位：var

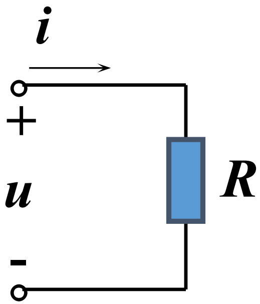
视在功率： $S=UI$ 单位：VA

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}$$



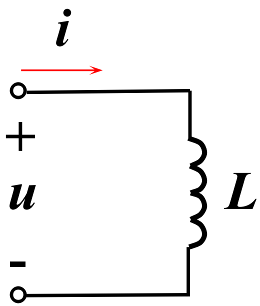
功率三角形

2. *R*、*L*、*C*元件的有功功率和无功功率



$$P_R = UI\cos\varphi = UI\cos 0° = UI = I^2R = U^2/R$$

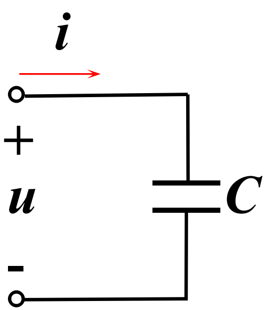
$$Q_R = UI\sin\varphi = UI\sin 0° = 0$$



$$P_L = UI\cos\varphi = UI\cos 90° = 0$$

$$Q_L = UI\sin\varphi = UI\sin 90° = UI = I^2X_L = \omega L > 0$$

电感总是会吸收无功功率



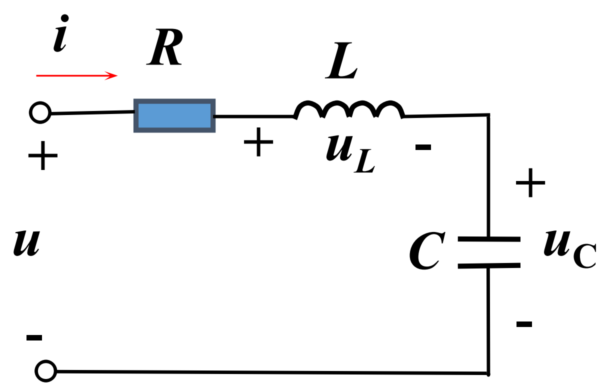
$$P_C = UI\cos\varphi = UI\cos(-90°) = 0$$

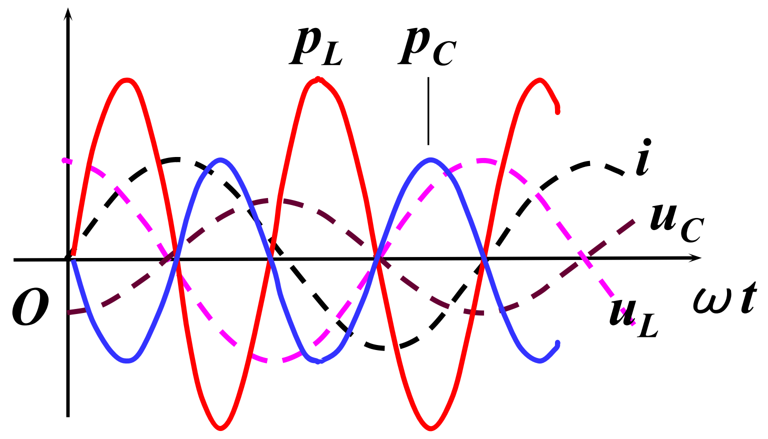
$$Q_C = UI\sin\varphi = UI\sin(-90°) = -UI = -I^2X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$-\frac{1}{\omega C}I^2$$

电容总是会提供无功功率

电感、电容的无功补偿作用：





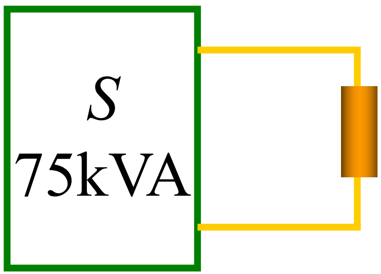
当L发出功率时，C刚好吸收功率，因此L、C的无功具有互相补偿的作用。

7. 功率因数的提高

功率因数低带来的问题：

①设备不能充分利用，输出有功功率希望越多越好；

$$P=UI\cos\varphi=S\cos\varphi$$



负载

$\cos\varphi=1$，　$P=S=75\text{kW}$

$\cos\varphi=0.7$，$P=0.7S=52.5\text{kW}$

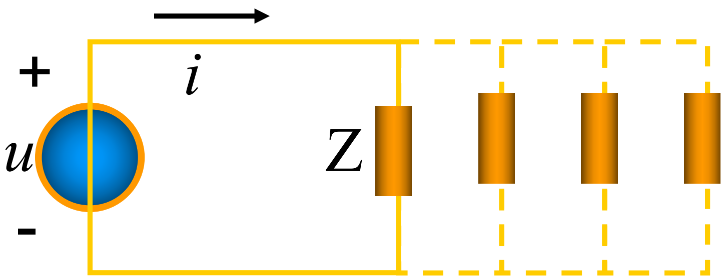
设备容量 S (额定)向负载送多少有功要由负载的阻抗角决定。

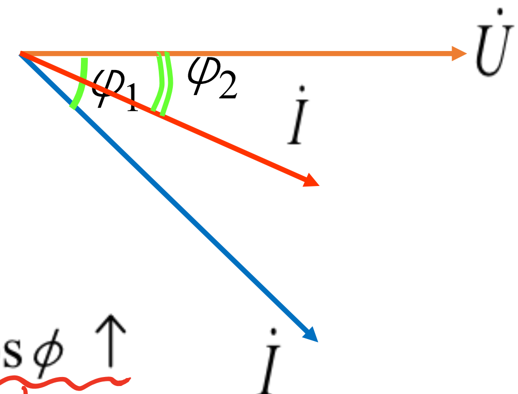
一般用户：　异步电机　空载　$\cos\varphi=0.2\sim0.3$

满载　$\cos\varphi=0.7\sim0.85$

日光灯　$\cos\varphi=0.45\sim0.6$

② 当输出相同的有功功率时，电压一定的时候，功率因数低导致线路上电流大，因为$I=P/(U\cos\varphi)$，所以线路压降损耗大。





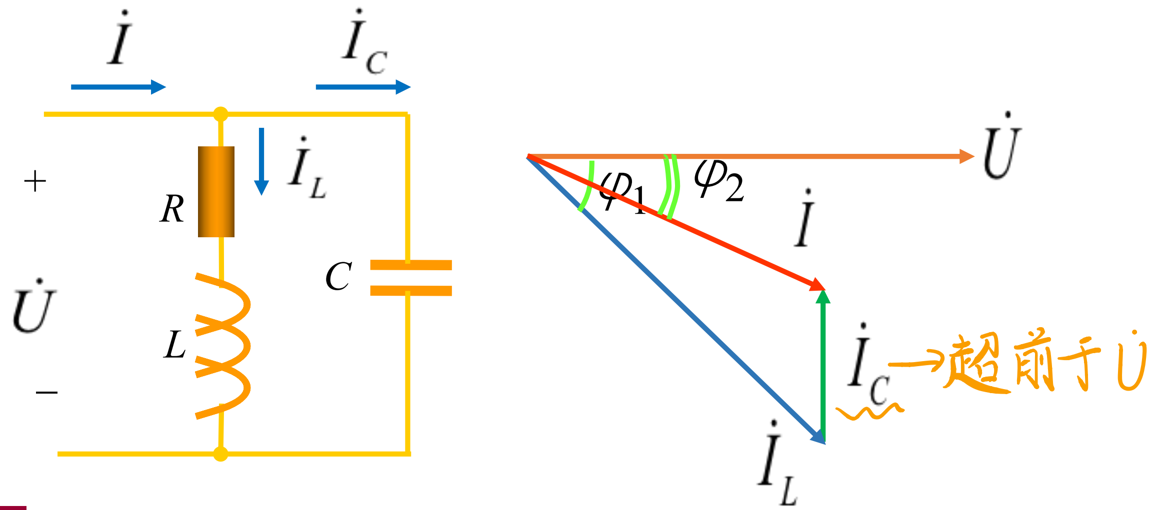
$P = UI\cos\phi$　　要使 $I\downarrow$　$U\uparrow$　$\cos\phi\uparrow$

可设法令ϕ减小

降低电流办法：（1）高压传输

（2）并联电容，提高功率因数 。

分析



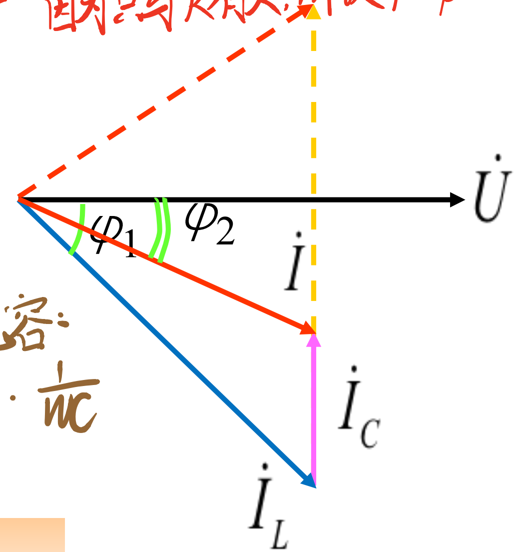
特点：

并联电容后，原负载的电压和电流不变，吸收的有功功率和无功功率不变，即：负载的工作状态不变。但电路的功率因数提高了。

并联电容的确定：

$$\begin{cases} P = UI \cdot \cos\varphi_2 \\ P' = UI_1 \cos\varphi_1 \end{cases}$$

因为只与R有关，所以$P = P'$



$$I_C = I_L \sin\phi_1 - I \sin\phi_2$$

将 $I = \dfrac{P}{U\cos\phi_2}$ ， $I_L = \dfrac{P}{U\cos\phi_1}$ 代入

对于电容：

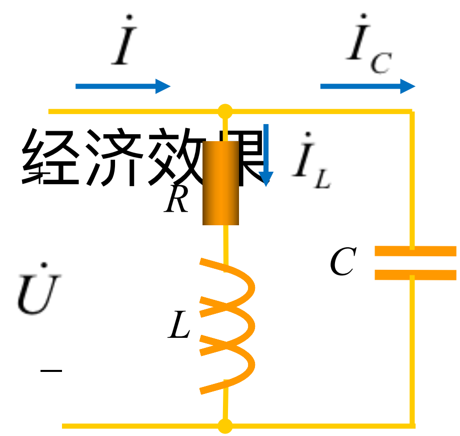
$U = I_C \cdot \dfrac{1}{\omega C}$

$$I_C = \frac{P}{U}(\mathrm{tg}\phi_1 - \mathrm{tg}\phi_2) = \omega C U$$

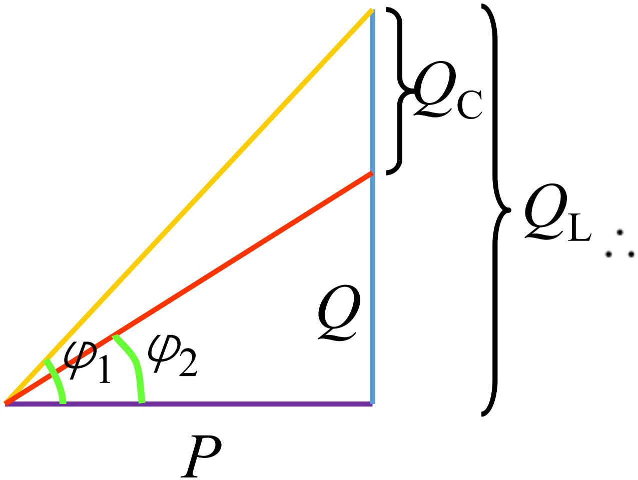
$$\rightarrow \quad C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\,\varphi_1 - \mathrm{tg}\,\varphi_2)$$

补偿容量不同

- 欠补偿——电容设备投资增加，经济效果不明显
- 过——功率因数又由高变低



并联电容也可以用功率三角形确定：



$$|Q_C| = |Q_L - Q| = P(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

$$|Q_C| = \omega C U^2 = I^2 \cdot \frac{1}{wC} = (Uwc)^2 \cdot \frac{1}{wC}$$

$$\therefore \quad C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

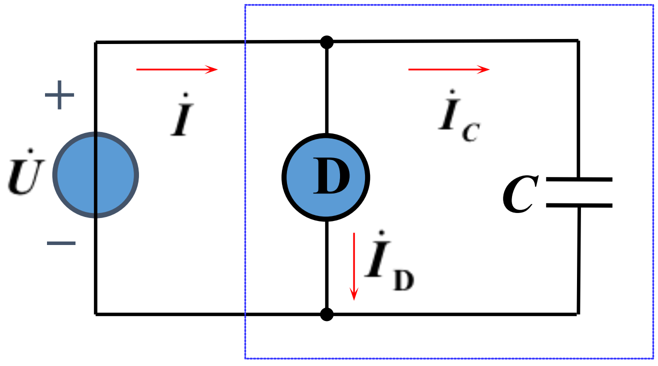
从功率角度看：

并联电容后，电源向负载输送的有功 $UI_L \cos\varphi_1 = UI \cos\varphi_2$ 不变，但是电源向负载输送的无功 $UI\sin\varphi_2 < UI_L\sin\varphi_1$ 减少了，减少的这部分无功由电容“吸收”来补偿，使感性负载吸收的无功不变，而功率因数得到改善。

例 已知：电动机 P_D=1000W，U=220V，f=50Hz，C=30μF，$\cos\varphi_D$=0.8(滞后）。求负载电路的功率因数。

有功功率

解： 设 $\dot{U} = 220\angle 0^{\circ}$ V



$$I_D = \frac{P}{U\cos\varphi_D} = \frac{1000}{220\times 0.8} = 5.68\text{A}$$

$$\cos\varphi_D = 0.8(\text{滞后}) \qquad \varphi_D = 36.9^{\circ}$$

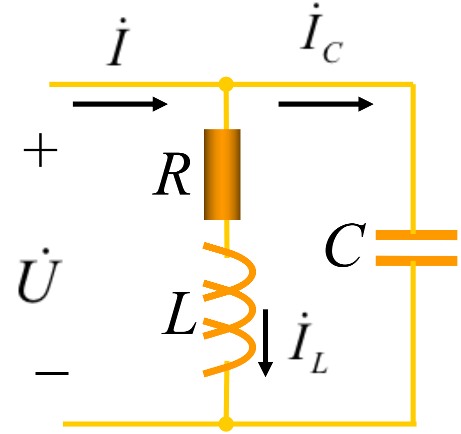
$$\dot{I}_D = 5.68\angle -36.9^{\circ} \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \mathrm{j}\omega C\, 220\angle 0^{\circ} = \mathrm{j}2.08 \text{ A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_D + \dot{I}_C = 4.54 - \mathrm{j}1.33 = 4.73\angle -16.3^{\circ} \text{ A}$$

$$\therefore \cos\varphi = \cos[0^{\circ} - (-16.3^{\circ})] = 0.96 \ (\text{滞后})$$

例 已知：f=50Hz, U=220V, P=10kW, $\cos\varphi_1$=0.6，要使功率因数提高到0.9，求并联电容C，并联前后电路的总电流各为多大?



解

$$\cos\varphi_1 = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 53.13^\circ$$

$$\cos\varphi_2 = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 25.84^\circ$$

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

$$= \frac{10\times10^3}{314\times220^2}(\mathrm{tg}53.13^\circ - \mathrm{tg}25.84^\circ) = 557\mu\mathrm{F}$$

未并电容时：

$$I = I_L = \frac{P}{U\cos\phi_1} = \frac{10\times10^3}{220\times0.6} = 75.8\mathrm{A}$$

并联电容后：

$$I = \frac{P}{U\cos\phi_2} = \frac{10\times10^3}{220\times0.9} = 50.5\mathrm{A}$$

若要使功率因数从0.9再提高到0.95，试问还应增加多少并联电容，此时电路的总电流是多大?

解

$$\cos\varphi_1 = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 25.84^\circ$$

$$\cos\varphi_2 = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 18.19^\circ$$

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2) \qquad I = \frac{10\times10^3}{220\times0.95} = 47.8\mathrm{A}$$

$$= \frac{10\times10^3}{314\times220^2}(\mathrm{tg}25.84^\circ - \mathrm{tg}18.19^\circ) = 103\mu\ \mathrm{F}$$

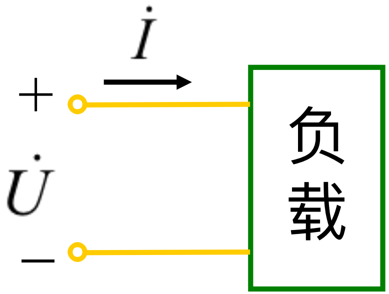
注意

继续提高$\cos\varphi$所需电容很大，增加成本。因此一般将$\cos\varphi$提高到0.9即可。

11.5 复功率

1. 复功率

为了用相量$\dot{U}$和$\dot{I}$来计算功率，引入“复功率”



定义：$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^*$ **单位 VA**

$$\bar{S} = UI\angle(\Psi_u - \Psi_i) = UI\angle\varphi = S\angle\varphi$$

$$= UI\cos\varphi + \mathrm{j}UI\sin\varphi = P + \mathrm{j}Q$$

也可表示为：

$$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^* = Z\dot{I}\cdot\dot{I}^* = ZI^2 = (R + \mathrm{j}X)I^2 = RI^2 + \mathrm{j}XI^2$$

$$\text{or}\quad \bar{S} = \dot{U}\dot{I}^* = \dot{U}(\dot{U}Y)^* = \dot{U}\cdot\dot{U}^*Y^* = U^2Y^*$$

结论

① $\bar{S}$ 是复数，而不是相量，它不对应任意正弦量；

② $\bar{S}$ 把 P、Q、S 联系在一起，它的实部是有功功率，虚部是无功功率，模是视在功率；

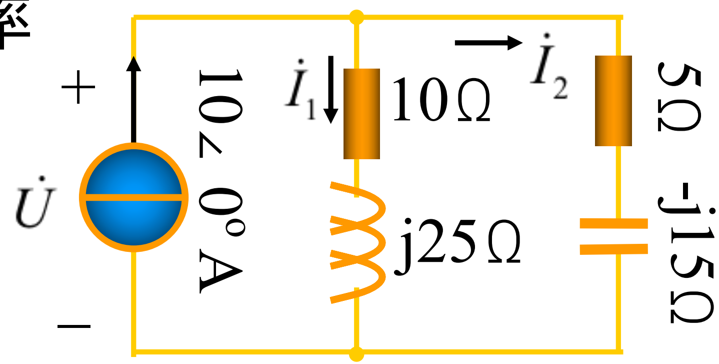
③ 复功率满足守恒定理：在正弦稳态下，任一电路的所有支路吸收的复功率之和为零。即

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{b} P_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{b} Q_k = 0 \end{cases} \rightarrow \sum_{k=1}^{b}(P_k + \mathrm{j}Q_k) = \sum_{k=1}^{b} \bar{S}_k = 0$$

$$\because U \neq U_1 + U_2 \quad \therefore S \neq S_1 + S_2$$

注意 **复功率守恒，视在功率不守恒.**

例　求电路各支路的复功率



解1

$$Z=(10+\mathrm{j}25)//(5-\mathrm{j}15)$$

$$\dot{U}=10\angle 0^\circ\times Z=236\angle(-37.1^\circ)\mathrm{V}$$

$$\bar{S}_{发}=236\angle(-37.1^\circ)\times 10\angle 0^\circ=1882-\mathrm{j}1424\ \mathrm{VA}$$

$$\bar{S}_{1吸}=U^2Y_1^*=236^2\left(\frac{1}{10+\mathrm{j}25}\right)^*=768+\mathrm{j}1920\quad \mathrm{VA}$$

$$\bar{S}_{2吸}=U^2Y_2^*=1113-\mathrm{j}3345\ \mathrm{VA}$$

$$\bar{S}_{1吸}+\bar{S}_{2吸}=\bar{S}_{发}$$

解2

$$\dot{I}_1 = 10\angle 0^\circ \times \frac{5 - \mathrm{j}15}{10 + \mathrm{j}25 + 5 - \mathrm{j}15} = 8.77\angle(-105.3^\circ) \quad \mathrm{A}$$

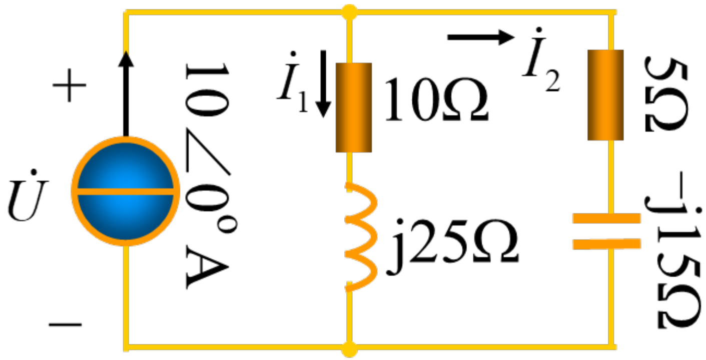
$$\dot{I}_2 = \dot{I}_S - \dot{I}_1 = 14.94\angle 34.5^\circ \quad \mathrm{A}$$

$$\bar{S}_{1吸} = I_1^{\,2} Z_1 = 8.77^2 \times (10 + \mathrm{j}25) = 769 + \mathrm{j}1923 \ \mathrm{VA}$$

$$\bar{S}_{2吸} = I_2^{\,2} Z_2 = 14.94^2 \times (5 - \mathrm{j}15) = 1116 - \mathrm{j}3348 \ \mathrm{VA}$$

$$\bar{S}_{发} = \dot{I}_1 Z_1 \cdot \dot{I}_S^{\,*} = 10 \times 8.77\angle(-105.3^\circ)(10 + \mathrm{j}25)$$

$$= 1885 - \mathrm{j}1423 \ \mathrm{VA}$$



11.6 最大功率传输

$$Z_i = R_i + jX_i, \quad Z_L = R_L + jX_L$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z_i + Z_L}, \quad I = \frac{U_S}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}}$$

有功功率 $P = R_L I^2 = \dfrac{R_L U_S^2}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}$

讨论 正弦电路中负载获得最大功率P_{max}的条件

$$P=\frac{R_L U_S^2}{(R_i+R_L)^2+(X_i+X_L)^2}$$

$$P_{max}=\frac{U_S^2}{4R_i}$$

①若$Z_L= R_L + jX_L$可任意改变

a) 先设 R_L 不变，X_L 改变

显然，当$X_i+X_L=0$，即$X_L=-X_i$时，P 获得最大值。

b) 再讨论 R_L 改变时，P 的最大值

当$R_L=R_i$时，P 获得最大值

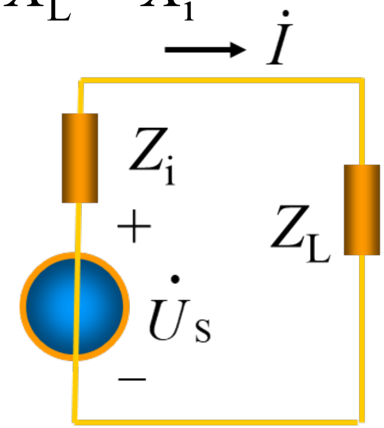
$R_L=R_i$ $X_L=-X_i$ → $Z_L=Z_i^*$

最佳匹配条件

②**若Z_L= R_L + jX_L只允许X_L改变** $P=\dfrac{R_L U_S^2}{(R_i+R_L)^2+(X_i+X_L)^2}$

获得最大功率的条件是：$X_i+X_L=0$，即 $X_L=-X_i$

最大功率为 $P_{max}=\dfrac{R_L U_S^2}{(R_i+R_L)^2}$



③**若Z_L= R_L为纯电阻**

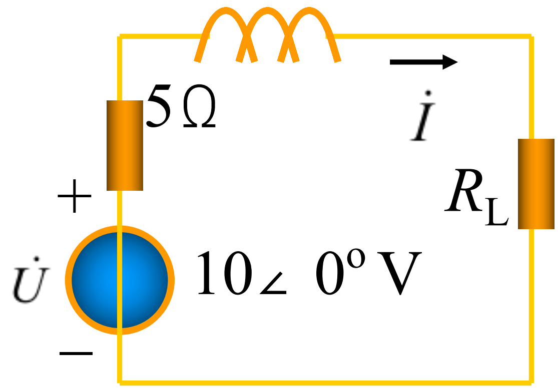
电路中的电流为： $\dot{I}=\dfrac{\dot{U}_S}{Z_i+R_L}$， $I=\dfrac{U_S}{\sqrt{(R_i+R_L)^2+X_i^2}}$

负载获得的功率为： $P=\dfrac{R_L U_S^2}{(R_i+R_L)^2+X_i^2}$

模匹配

令 $\dfrac{dP}{dR_L}=0$ $\Rightarrow$ 获得最大功率条件：$R_L=\sqrt{R_i^2+X_i^2}=|Z_i|$

例 电路如图，求：1.R_L=5Ω时其消耗的功率；
2. R_L=?能获得最大功率，并求最大功率；
3.在R_L两端并联一电容，问R_L和C为多大时能与内阻抗最佳匹配，并求最大功率。



解

$$Z_i = R + jX_L = 5 + j10^5 \times 50 \times 10^{-6}$$
$$= 5 + j5 \ \ \Omega$$

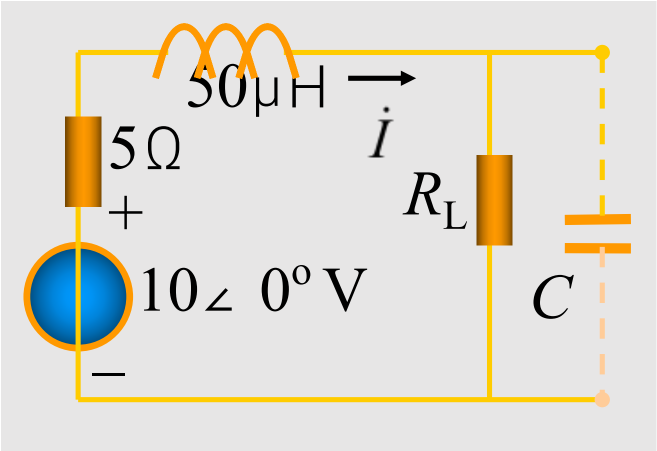
1. $$\dot{I} = \frac{10\angle 0^{\circ}}{5 + j5 + 5} = 0.89\angle(-26.6^{\circ})\text{A}$$

$$P_L = I^2 R_L = 0.89^2 \times 5 = 4\text{W}$$

2. 当 $R_L = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7.07\Omega$ 获得最大功率

$$\dot{I} = \frac{10\angle 0^{\circ}}{5 + j5 + 7.07} = 0.766\angle(-22.5^{\circ})\text{A}$$

$$P_L = I^2 R_L = 0.766^2 \times 7.07 = 4.15\text{W}$$



3. $Y = \dfrac{1}{R_L} + j\omega C$

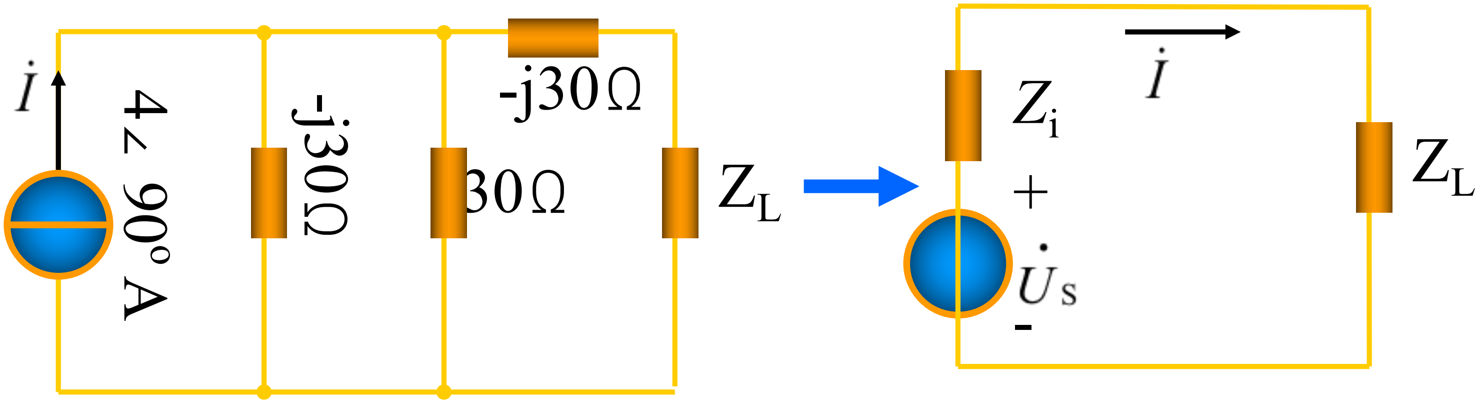
$$Z_L = \frac{1}{Y} = \frac{R_L}{1 + j\omega C R_L} = \frac{R_L}{1 + (\omega C R_L)^2} - j\frac{\omega C R_L^2}{1 + (\omega C R_L)^2}$$

当 $\begin{cases} \dfrac{R_L}{1 + (\omega C R_L)^2} = 5 \\ \dfrac{\omega C R_L^2}{1 + (\omega C R_L)^2} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_L = 10\Omega \\ C = 1\mu F \end{cases}$ 获最大功率

$$\dot{I} = \frac{10\angle 0^{\circ}}{10} = 1\text{A}$$

$$P_{\max} = I^2 R_i = 1 \times 5 = 5\text{W}$$

例 求Z_L=?时能获得最大功率，并求最大功率。



解

$$Z_i = -j30 + (-j30 // 30) = 15 - j45\Omega$$

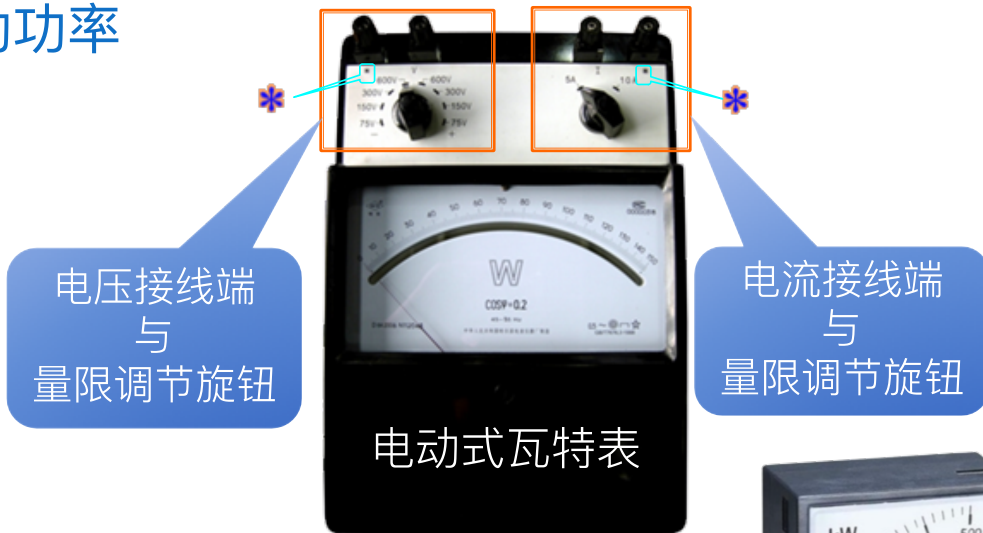
$$\dot{U}_S = 4j \times (-j30 // 30) = 60\sqrt{2}\angle 45^0$$

当 $Z_L = Z_i^* = 15 + j45\Omega$

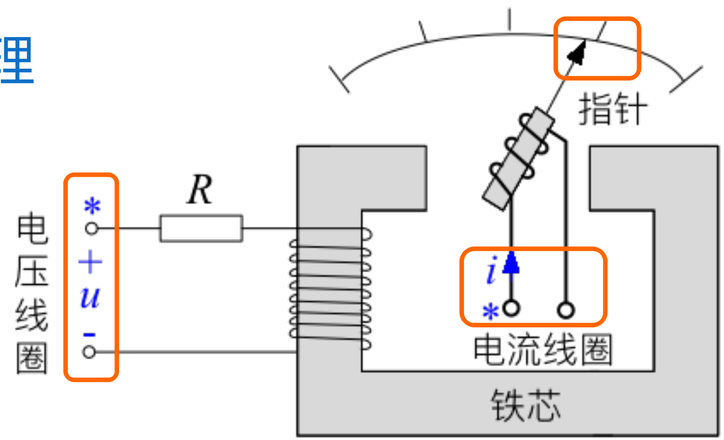
有 $P_{max} = \dfrac{(60\sqrt{2})^2}{4 \times 15} = 120\text{W}$

11.8 有功功率测量

瓦特表测量有功功率

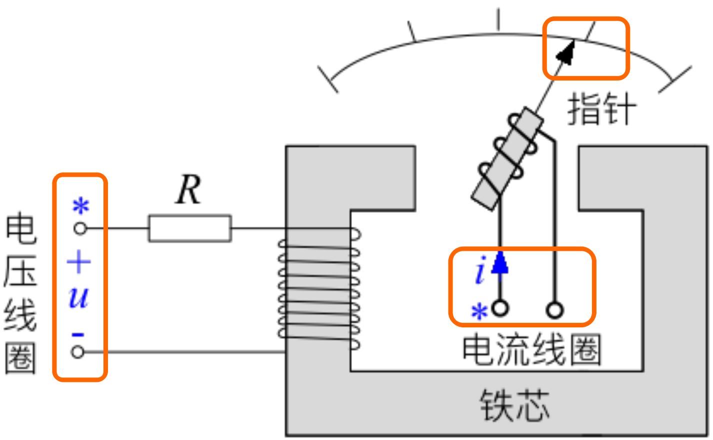


电动式瓦特表原理

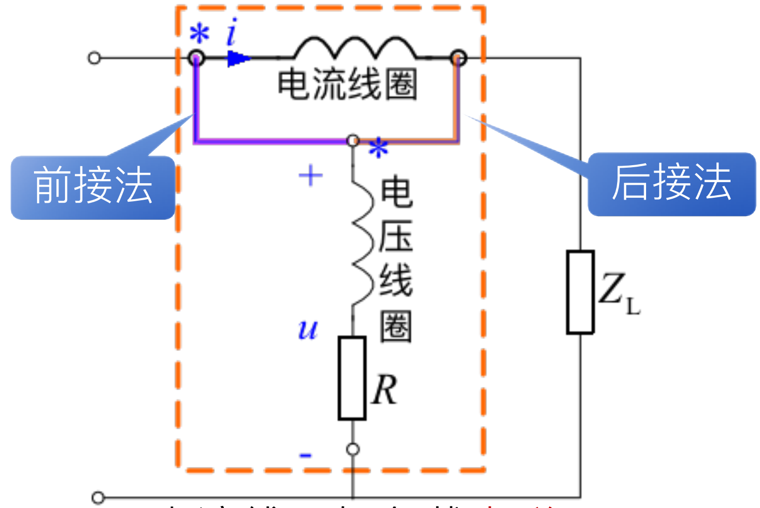


原理：既能测电压，也能测电流

11.8 有功功率测量



瓦特表的接线方式



电流线圈与负载串联

电压线圈与负载并联

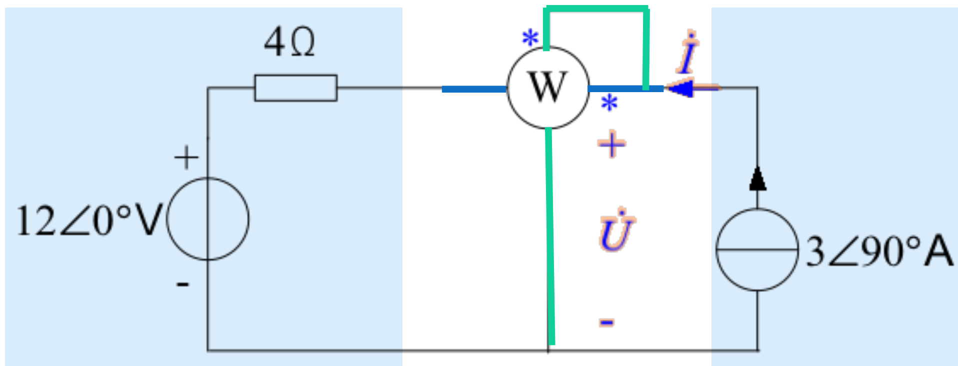
瓦特表的读数

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\mathrm{d}t = \mathrm{Re}[\dot{U} \times \dot{I}^*]$$

11.8 有功功率测量

Practice 确定瓦特表的读数，及读数的物理含义。

一个电路中只含有一个电源的话，并且电路中有电阻，那这个电源必定发出有功。是否发出无功不一定，电容可以发。若含有多个电源情况有功无功不一定，有的电源可以吸收有功（比如题中的电压源）



瓦特表的读数 $P = \mathrm{Re}[\dot{U} \times \dot{I}^*]$

$$\dot{U} = 4 \times 3\angle 90° + 12\angle 0° = 12\sqrt{2}\angle 45°\ \mathrm{V} \quad (\mathrm{KVL})$$

$$P = \mathrm{Re}[12\sqrt{2}\angle 45° \times 3\angle -90°] = 36\mathrm{W}$$

哪个电源发出的有功功率供给电阻?

具体算一下各个组件的复功率

作业

- 11.3节：11-2
- 11.5节：11-7
- 11.6节：11-9
- 11.7节：11-13,11-14