Digital Design IE1204

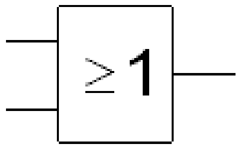
Föreläsningsbilder av William Sandqvist

Karnaugh-diagrammet

Carl-Mikael Zetterling
bellman@kth.se

Mintermer

OR



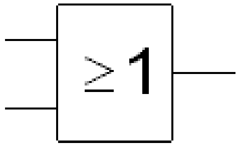
	x_1	x_0	f
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

En minterm är en produktterm som innehåller **alla** variabler och som anger den kombination av 1:or och 0:or som tillsammans gör att termen antar värdet 1.

SP-form med tre mintermer.

$$f = \sum m(1,2,3) = \overline{x}_1 x_0 + x_1 \overline{x}_0 + x_1 x_0$$

Minimering med boolesk algebra

OR 

$$f = \sum m(1,2,3) = \bar{x}_1 x_0 + x_1 \bar{x}_0 + x_1 x_0$$

	x_1	x_0	f
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

Förenkling med boolesk algebra

$$= \bar{x}_1 x_0 + x_1(\bar{x}_0 + x_0) =$$

$$= \bar{x}_1 x_0 + x_1(1 + vsh) =$$

$$= \bar{x}_1 x_0 + x_1(1 + x_0) =$$

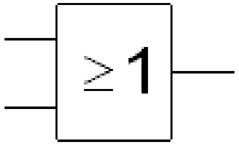
$$= \bar{x}_1 x_0 + x_1 + x_1 x_0 =$$

$$= x_0(\bar{x}_1 + x_1) + x_1 =$$

$$= \boxed{x_0 + x_1}$$

Som väntat!

Maxtermer

OR 

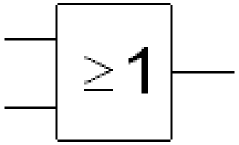
	x_1	x_0	f
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

En maxterm är en summa-faktor som innehåller **alla** variabler och som anger den kombination av 1:or och 0:or som tillsammans gör att faktorn antar värdet 0.

$$f = \prod M(0) = \boxed{x_0 + x_1}$$

Denna gång fick vi det enkla uttrycket med en maxterm direkt!

Grafisk minimeringsmetod

OR 

	x_1	x_0	f
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

$x_1 \backslash x_0$	0	1
0	0	1
1	1	1

$x_1 \backslash x_0$	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

$$\boxed{m_2 + m_3} = x_1 \bar{x}_0 + x_1 x_0 =$$

$$= x_1(\bar{x}_0 + x_0) = x_1$$

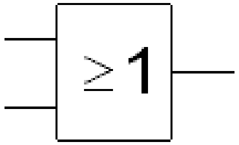
$$\boxed{m_1 + m_3} = \bar{x}_1 x_0 + x_1 x_0 =$$

$$= x_0(\bar{x}_1 + x_1) = x_0$$

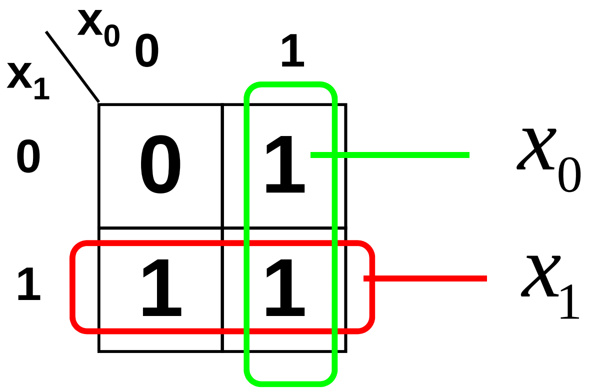
$$f = x_1 + x_0$$

Grafisk minimeringsmetod

OR



	x_1	x_0	f
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1



$$f = x_1 + x_0$$

Gör ”hoptagningar” av par av rutor med 1:or (horisontellt eller vertikalt), behåll de variabler i produktermerna som är gemensamma.

Grindfunktioner på grafisk form

AND

$x_1 \backslash x_0$	0	1
0	0	0
1	0	1

$$x_1 \cdot x_0$$

OR

$x_1 \backslash x_0$	0	1
0	0	1
1	1	1

$$x_1 + x_0$$

XOR

$x_1 \backslash x_0$	0	1
0	0	1
1	1	0

$$\overline{x_1}x_0 + x_1\overline{x_0}$$

NAND

$x_1 \backslash x_0$	0	1
0	1	1
1	1	0

$$\overline{x_1} + \overline{x_0} = \overline{\overline{\overline{x_1} + \overline{x_0}}} = \overline{x_1 \cdot x_0}$$

NOR

$x_1 \backslash x_0$	0	1
0	1	0
1	0	0

$$\overline{x_1} \cdot \overline{x_0} = \overline{\overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_0}}} = \overline{x_1 + x_0}$$

XNOR

$x_1 \backslash x_0$	0	1
0	1	0
1	0	1

$$\overline{x_1}\,\overline{x_0} + x_1 x_0$$

Karnaugh-diagrammet

Grafisk metod för minimering ”med papper och penna” av mindre booleska funktioner (för upp till sex variabler)

Maurice Karnaugh

(The Map for Synthesis of Combinational Logic Circuits, AIEE, Nov. 1953)

En funktion av fyra variabler a b c d

Sanningstabellen med 11 st 1:or och 5 st 0:or. Funktionen kan ut-tryckas på SP-form med 11 st mintermer eller på PS-form med 5 st maxtermer.

	abcd	f
0	0000	1
1	0001	1
2	0010	1
3	0011	1
4	0100	1
5	0101	1
6	0110	1
7	0111	1
8	1000	1
9	1001	0
10	1010	1
11	1011	0
12	1100	0
13	1101	1
14	1110	0
15	1111	0

$$f(a,b,c,d) = \sum(0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,13)$$

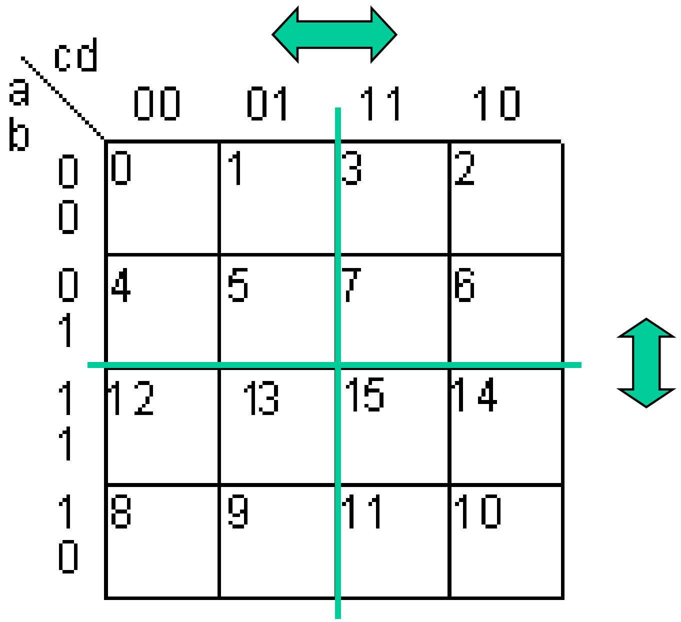
$$f = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} +$$
$$\bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}bcd + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + ab\bar{c}d$$

$$f(a,b,c,d) = \prod(9,11,12,14,15)$$

$$f = (\bar{a}+b+c+\bar{d})\cdot(\bar{a}+b+\bar{c}+\bar{d})\cdot(\bar{a}+\bar{b}+c+d)\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+d)\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})$$

Karnaughdiagrammet är sanningstabellen men med en annan ordning. Lägg märke till numreringen!

	abcd
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111



Rutorna är ordnade så att endast en bit ändras mellan två vertikala eller horisontella rutor.

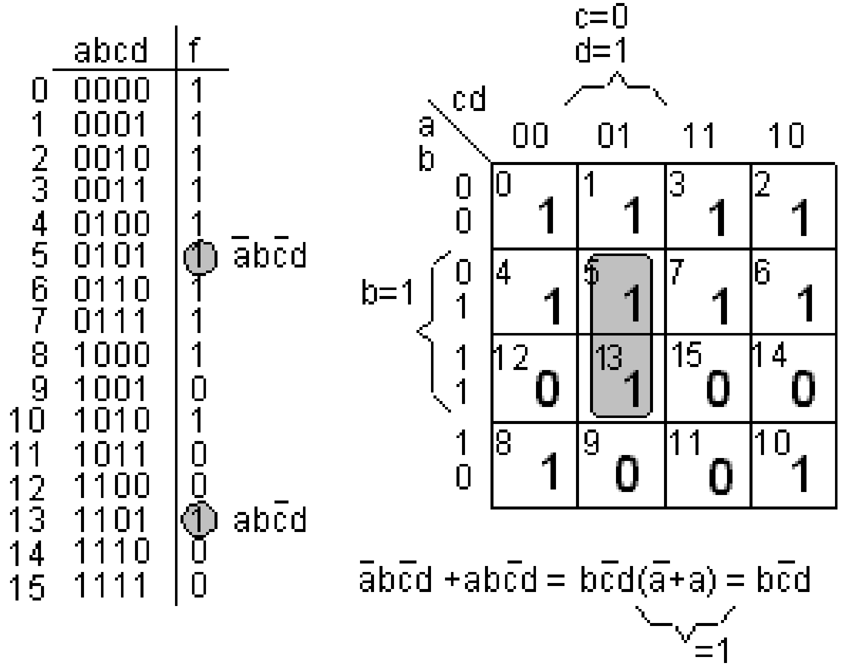
Denna ordning kallas för Gray-kod.

Graykoden är en speglad binärkod

0	0	00	00	000	000	0000
1	1	01	01	001	001	0001
	1	11	11	011	011	0011
	0	10	10	010	010	0010
			10	110	110	0110
			11	111	111	0111
			01	101	101	0101
			00	100	100	0100
					100	1100
					101	1101
					111	1111
					110	1110
					010	1010
					011	1011
					001	1001
					000	1000

Två ”grannar” $b\bar{c}d$

Rutorna "5" och "13" är "grannar" i Karnaughdiagrammet.
De svarar mot *två* mintermer med *fyra* variabler, och i figuren visas hur de med Booles algebra, kan reduceras till *en* term med *tre* variabler.



Det de två rutorna har gemensamt är att b=1, c=0 och d=1, och den reducerade termen uttrycker precis detta.

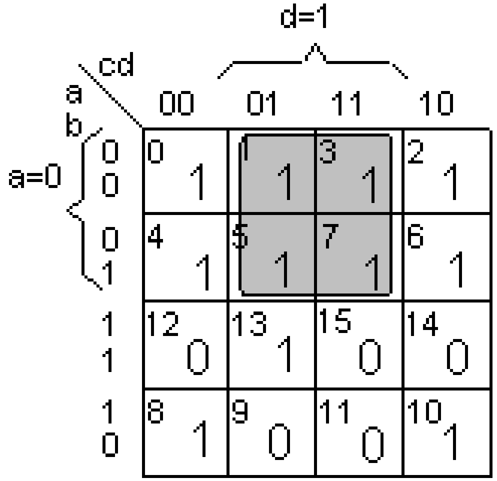
Överallt i Karnaughdiagrammet där man hittar två ettor som är "grannar" (vertikalt eller horisontellt) kan man reducera de min-termerna till *det som är gemensamt* för de två rutorna.

Detta kallas för en *hoptagning*.

Fyra ”grannar” $\bar{a}\, d$

Rutorna "1" "3" "5" "7" är en grupp av fyra rutor med ettor som ligger som "grannar" till varandra. Även här går de fyra mintermerna att reducera till en term som uttrycker det som är gemensamt för rutorna, nämligen att a=0 och d=1.

	abcd	f	
0	0000	1	
1	0001	1	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$
2	0010	1	
3	0011	1	$\bar{a}\bar{b}cd$
4	0100	1	
5	0101	1	$\bar{a}b\bar{c}d$
6	0110	1	
7	0111	1	$\bar{a}bcd$
8	1000	1	
9	1001	0	
10	1010	1	
11	1011	0	
12	1100	0	
13	1101	1	
14	1110	0	
15	1111	0	

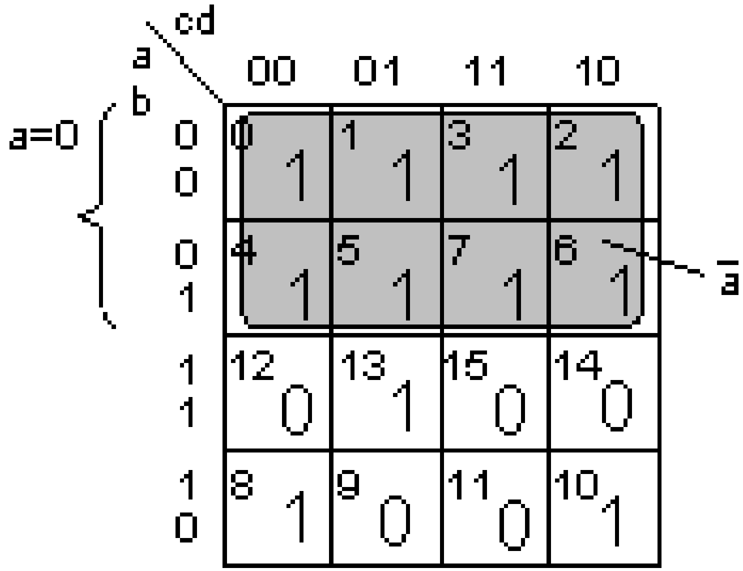


$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bcd =$$

$$\bar{a}d\,\underbrace{(\bar{b}\underbrace{(\bar{c}+c)}_{=1}+b\underbrace{(\bar{c}+c)}_{=1})}_{=1} = \bar{a}d$$

Överallt i Karnaughdiagrammet där man hittar sådana grupper av fyra ettor kan man göra sådana förenklingar, *hoptagningar*.

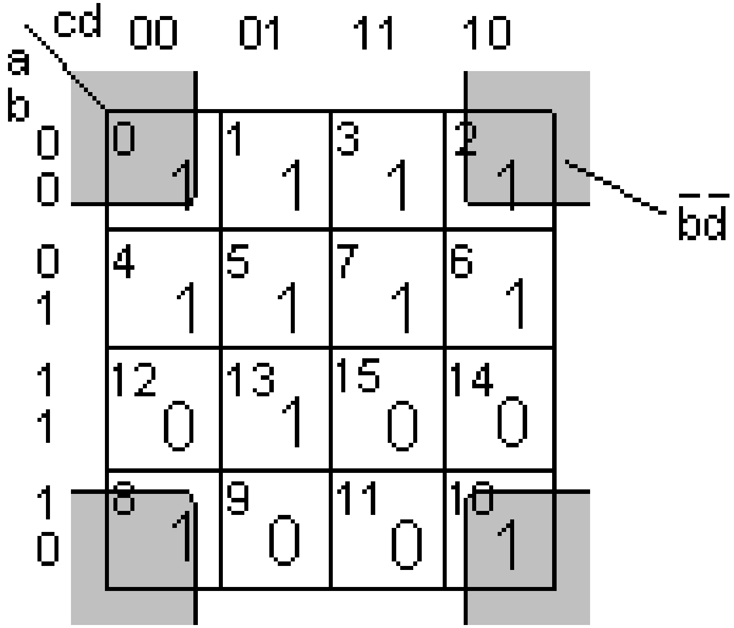
Åtta ”grannar” $\overline{a}$

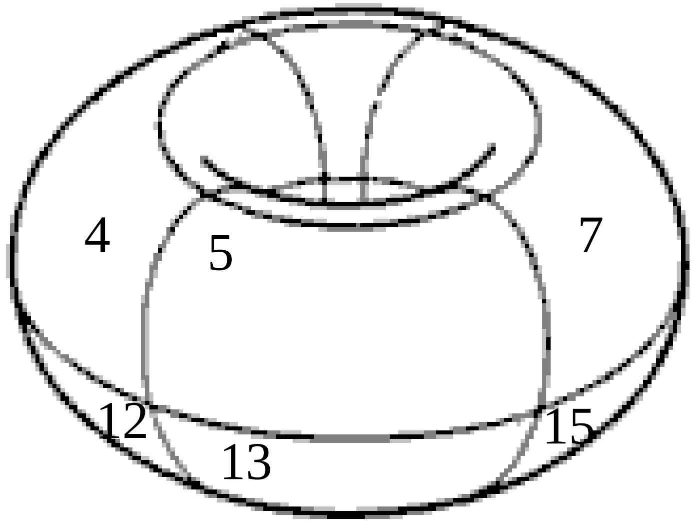


Alla grupper av 2, 4, 8, (... 2^N dvs. med jämna 2-potenser) rutor, som innehåller ettor kan reduceras till en term, med "det som är gemensamt", en *hoptagning*.

Karnaugh - toroid

$\bar{b}\,\bar{d}$

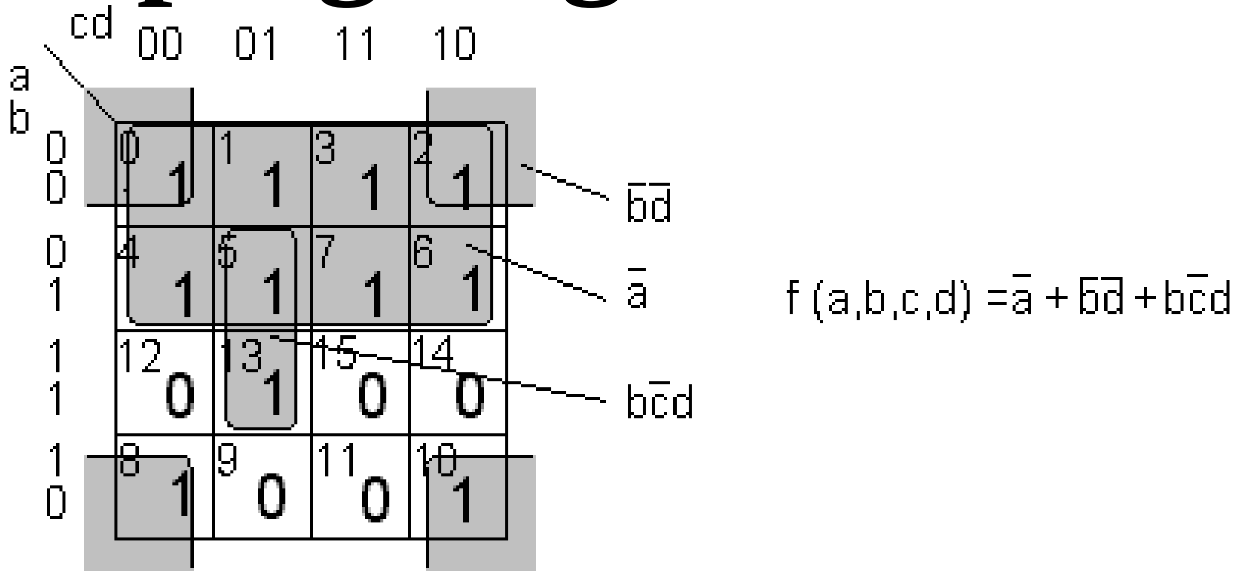




Egentligen bör man avbilda Karnaughdiagrammet på en toroid (en donut). Når man en kant, så börjar diagrammet om från den motsatta sidan! Ruta 0 är således "granne" med ruta 2, men även "granne" med ruta 8 som är granne med ruta 10. De fyra ettorna i hörnen har b=0 och d=0 gemensamt och kan därför bilda en hoptagning.

Bästa hoptagningar?

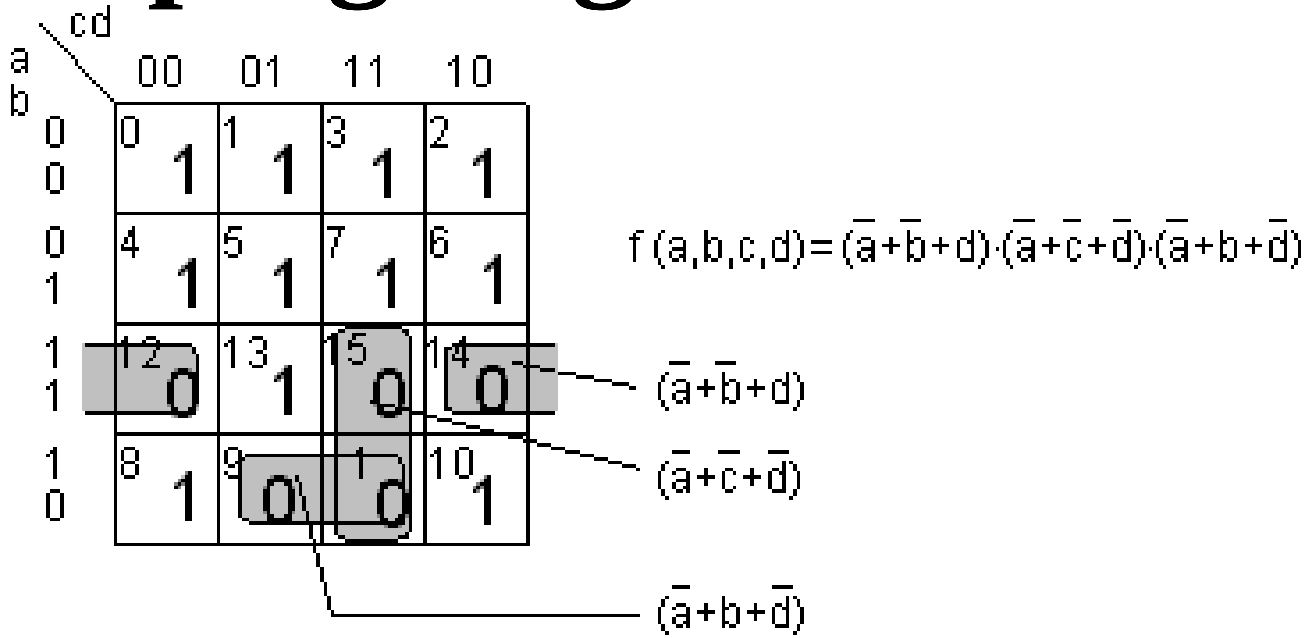
Man söker efter **så stora hoptagningar som möjligt**. I exemplet finns det en hoptagning med åtta ettor (rutorna 0,1,3,2,4,5,7,6). Hörnen (0,2,8,10) är en hoptagning av fyra ettor.



Två av rutorna (0,10) har redan tagits med i den första hoptagningen, men inget hindrar att en ruta bir medtagen flera gånger.
Alla ettor måste med i funktionen, antingen i en hoptagning, eller som en minterm. Ettan i ruta 13 kan bilda en hoptagning med ettan i ruta 5, någon större hoptagning finns tyvärr inte för denna etta.

$$\boxed{f(a,b,c,d) = \bar{a} + \bar{b}\,\bar{d} + b\,\bar{c}\,d}$$

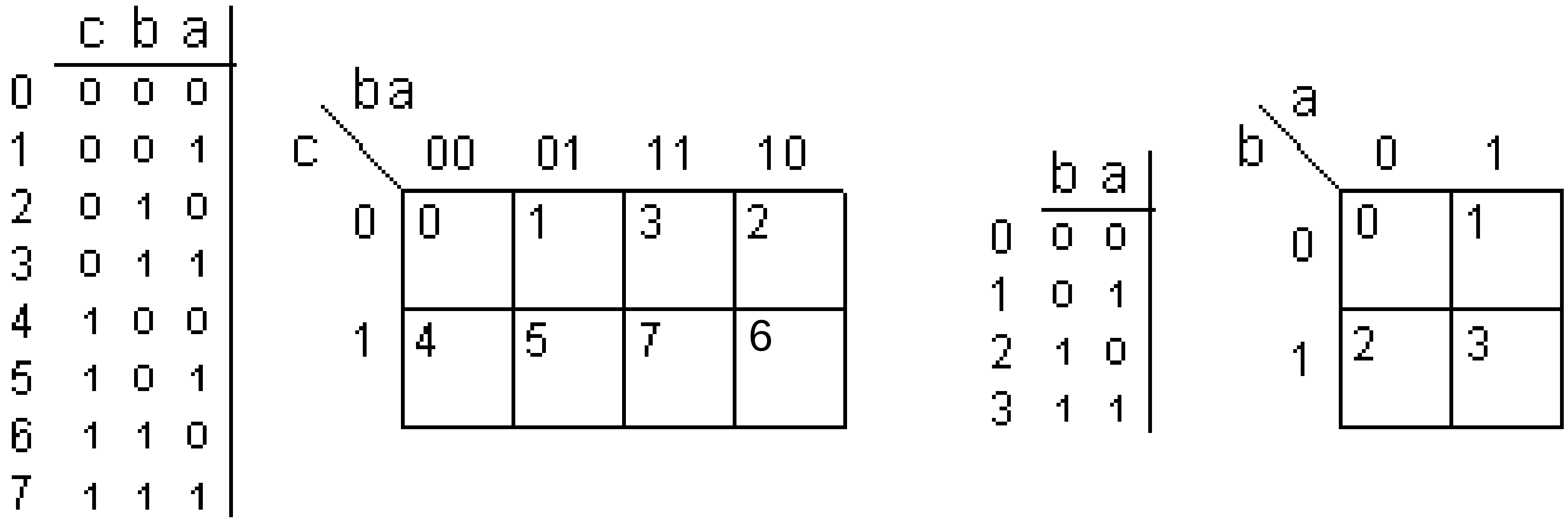
Hoptagningar av 0:or



Karnaughdiagrammet är också användbart för hoptagning av 0:or. Hoptagningarna kan omfatta samma antal rutor som i fallet med hoptagning av 1:or. I detta exempel kan 0:orna tas ihop i par med sina "grannar". Maxtermerna förenklas till *det som är gemensamt* för rutorna.

$$f(a,b,c,d) = (\bar{a}+\bar{b}+d)(\bar{a}+\bar{c}+\bar{d})(\bar{a}+b+\bar{d})$$

Andra variabelantal



Karnaughdiagram med tre och två variabler är också användbara.

Lite implikant-terminologi

- **Implikant** - en inringning av min-termer
- **Prim-implikant** - en inringning av min-termer som inte kan göras större.
- **Essentiell** prim-implikant - en maximal inringning av min-termer som måste vara med för att funktionen skall täckas.
- **Redundant** prim-implikant – en maximal inringning av min-termer som inte nödvändigtvis måste vara med för att funktionen skall täckas.

Implikanter

Redundanta implikanter - bägge är inte nödvändiga (en måste vara med) för att täcka funktionen.

$$f = \bar{a}\,\bar{c} + bc + ac$$

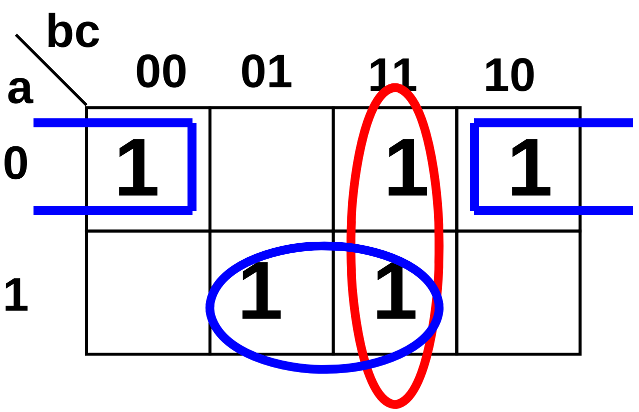
$$f = \bar{a}\,\bar{c} + \bar{a}b + ac$$

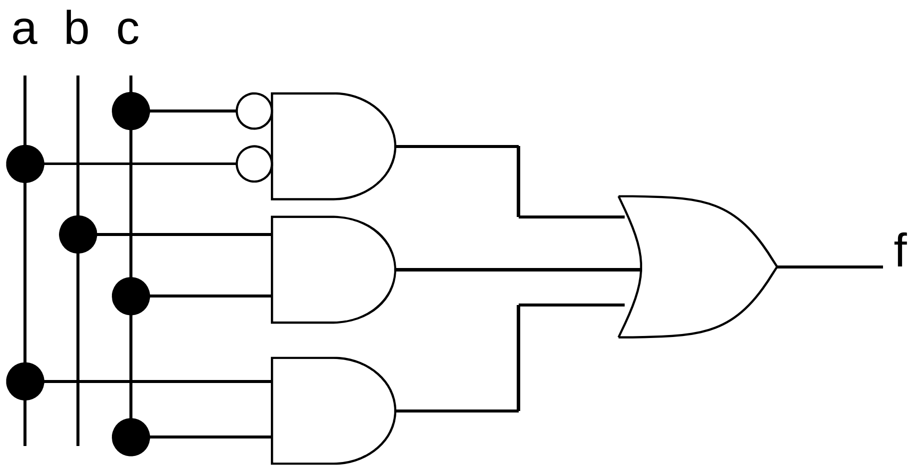
a \ bc	00	01	11	10
0	1		1	1
1		1	1	

$$f(a,b,c) = \sum m(0,2,3,5,7)$$

Minimal Summa-Produkt Implementation

$$f(a,b,c) = \sum m(0,2,3,5,7)$$

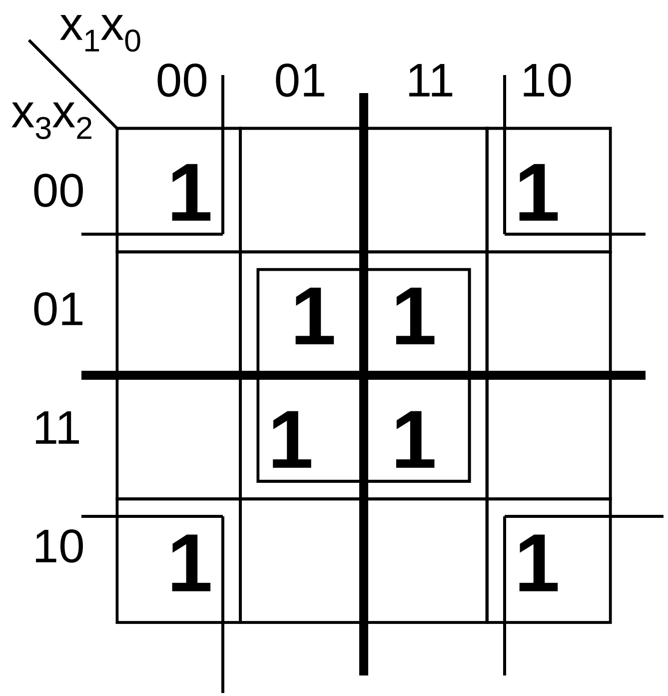




$$f = \bar{a}\,\bar{c} + bc + ac$$

XOR kan vara till hjälp

Om två fyra-inringningar *inte* kan bilda en åtta-inringning kan kanske XOR/XNOR-funktionen vara till hjälp.



Detta under förutsättningen att det finns en särskilt effektiv implementering av XOR-funktionen.

$$f = \bar{x}_2 \bar{x}_0 + x_2 x_0 = \overline{x_2 \oplus x_0}$$

Mintermernas ordning ...

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \sum m(0,3,7,14)$$

MSB LSB

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

5 variabler

x_4

$x_4 = 0$

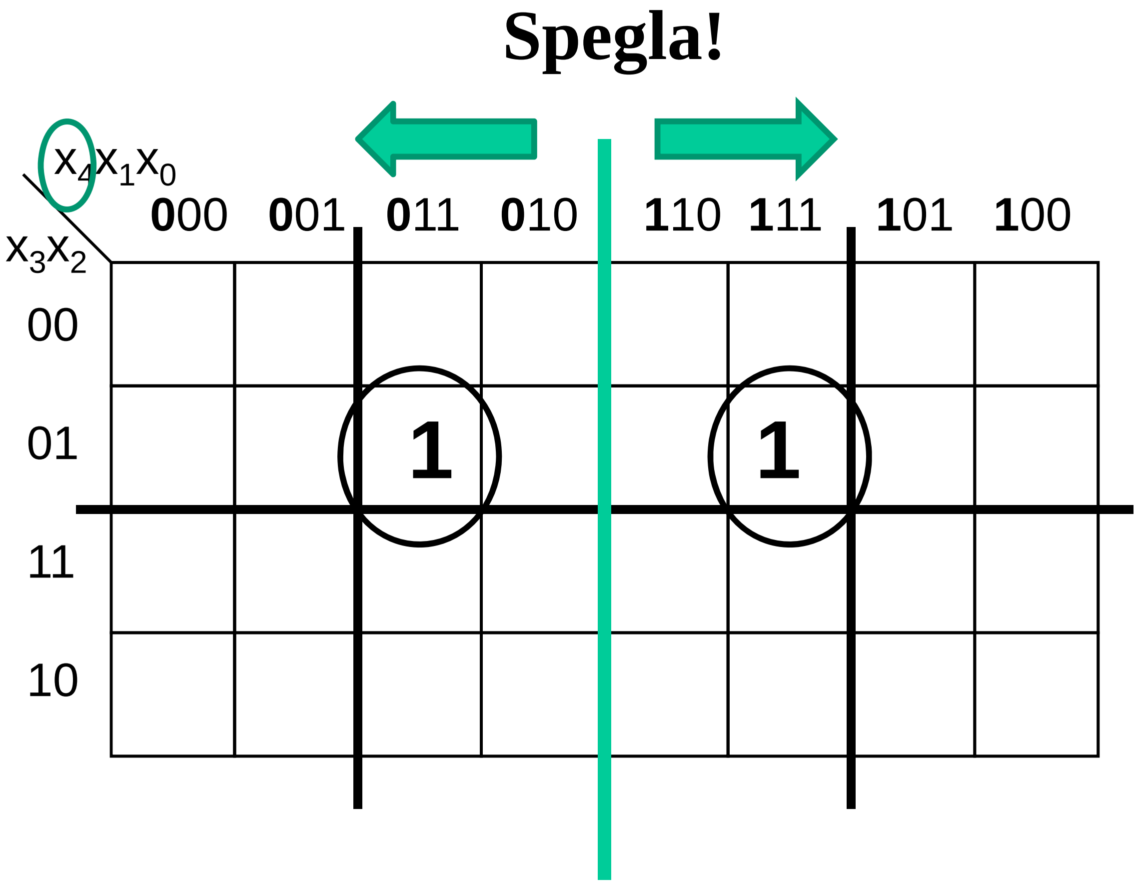
x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00				
01			1	
11				
10				

$x_4 = 1$

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00				
01			1	
11				
10				

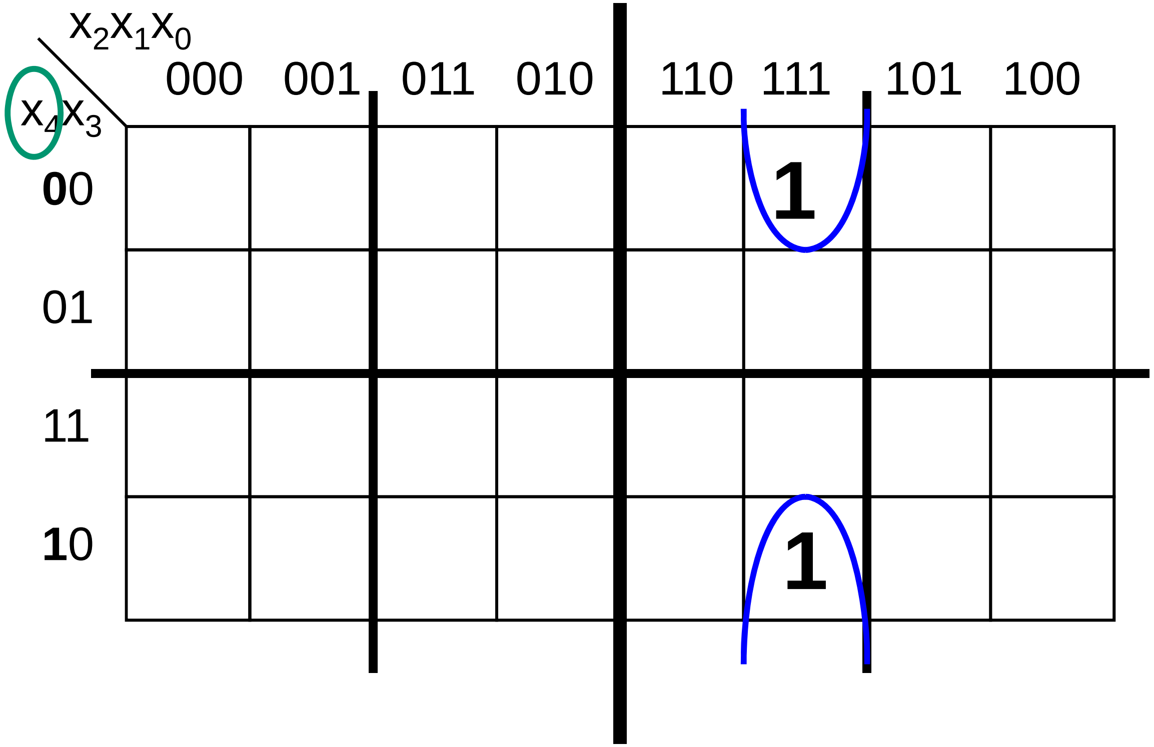
Samma i båda diagrammen, oberoende av x_4. $\bar{x}_3 x_2 x_1 x_0$

Spegling med 5 variabler



$$\bar{x}_3 x_2 x_1 x_0$$

och med en annan ordning …



$$\bar{x}_3 x_2 x_1 x_0$$

Karnaugh-diagram med 6 variabler

x4

x5

$x_5 = 0$, $x_4 = 0$

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00				
01			1	
11				
10				

$x_5 = 0$, $x_4 = 1$

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00				
01			1	
11				
10				

$x_5 = 1$, $x_4 = 0$

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00				
01			1	
11				
10				

$x_5 = 1$, $x_4 = 1$

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00				
01			1	
11				
10				

$$\bar{x}_3 x_2 x_1 x_0$$

Oberoende av x_5 och x_4.

Spegling med 6 variabler

OBS!

$x_5x_3x_2$ \ $x_4x_1x_0$	000	001	011	010	110	111	101	100
000								
001			1			1		
011								
010								
110								
111								
101			1			1		
100								

$$\bar{x}_3 x_2 x_1 x_0$$

och med en annan ordning …

$x_5x_4x_3$ \ $x_2x_1x_0$	000	001	011	010	110	111	101	100
000						1		
001								
011								
010						1		
110						1		
111								
101								
100						1		

$$\bar{x}_3 x_2 x_1 x_0$$

Hoptagningar med 0:or

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

0:an som minterm – helt fel!

$$\overline{f} = \overline{x}_3 x_2 \overline{x}_1 x_0$$

invertera, så blir det rätt!

$$f = \overline{\overline{f}} = \overline{\overline{x}_3 x_2 \overline{x}_1 x_0} =$$

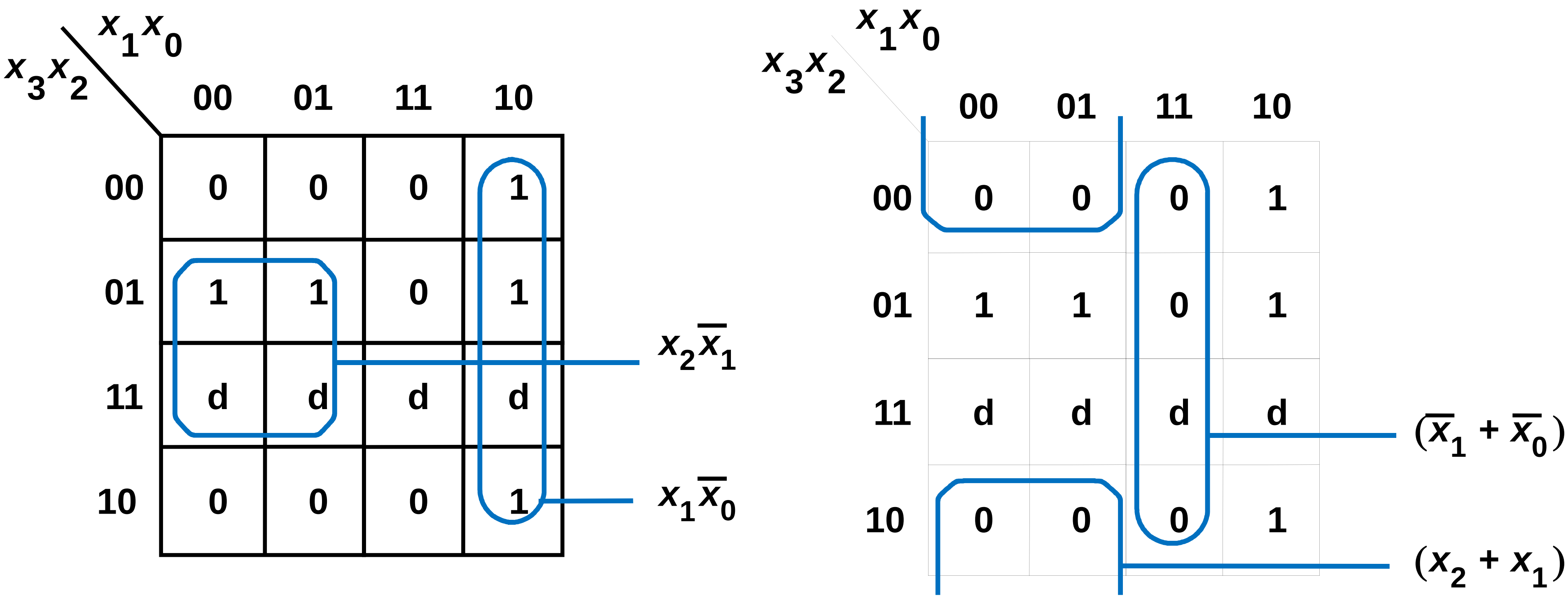
$$= \{dM\} = (x_3 + \overline{x}_2 + x_1 + \overline{x}_0)$$

Ringa in nollorna om dom är färre än ettorna!!!

Don’t care

- Ofta kan man förenkla specifikationen för den logiska funktionen eftersom man vet att vissa kombinationer kan aldrig förekomma
- För dessa kombinationer använder vi värdet ”don’t care”
- Det finns olika symboler för ”don’t care” i bruk
  - ’d’, ’D’, ’-’, ’Φ’, ’x’

Ofullständig funktionsspecifikation

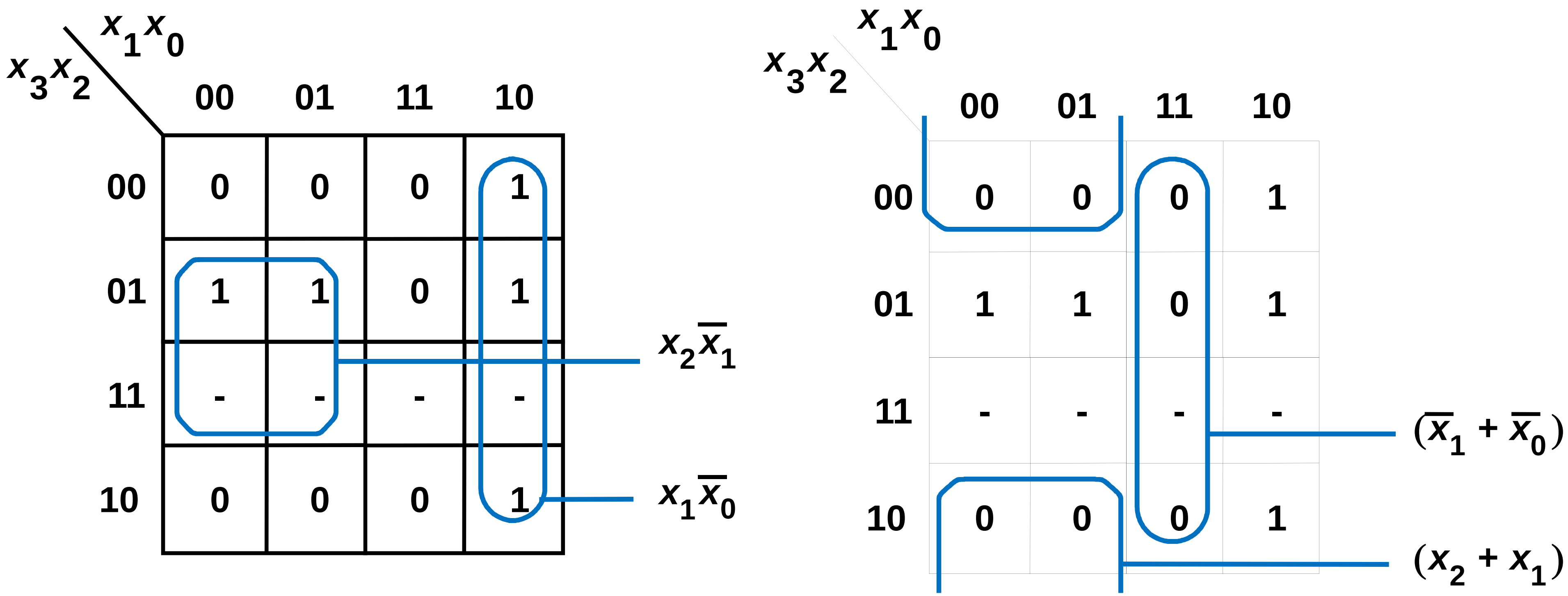


(a) SOP implementation **(b) POS implementation**

Två implementeringar av funktionen

$f\,(x_3,\ldots,x_0) = \sum m(2, 4, 5, 6, 10) + D(12, 13, 14, 15).$

Annan notation (-) …



(a) SOP implementation **(b) POS implementation**

Två implementeringar av funktionen

$f(x_3,\ldots,x_0) = \Sigma\, m(2, 4, 5, 6, 10) + D(12, 13, 14, 15).$

Funktioner med flera utgångar

f_0

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	0	1
11	0	0	0	1
10	1	0	1	1

f_1

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	1	1

$$f_1 = f_0 + \boxed{x_3 \bar{x}_0}$$

Olika utgångar kan dela prim-implikanter!!!