AI Community

8. Нейронные сети

План лекции

1. Перцептрон
2. Нейронные сети и функции активации
3. Метод обратного распространения ошибки

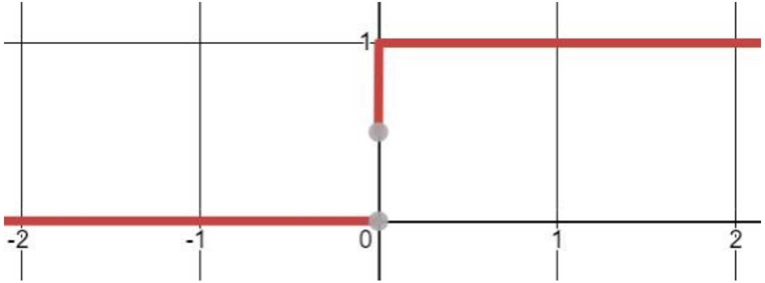
Перцептрон

Перцептрон

Перцептрон Розенблата - предшественник всех современных нейросетей, представляет собой линейную трансформацию со ступенчатой функцией активации.

$$f(x, w, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^{n} w_i * x_i + b > 0 \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^{n} w_i * x_i + b \leq 0 \end{cases}$$

Линейный перцептрон



Ступенчатая функция активации

Перцептрон

Алгоритм обучения перцептрона:

1. Для каждого примера из входных данных считаем активацию перцептрона на данном примере.
2. Если активация отличается от истинного значения, то обновляем веса, вычитая из них разность истинного и предсказанного значения
3. После того, как прошлись по всем примерам, возвращаемся к пункту 1 до тех пор, пока не достигнем критерия остановки (определенное количество циклов или определенный процент ошибок)

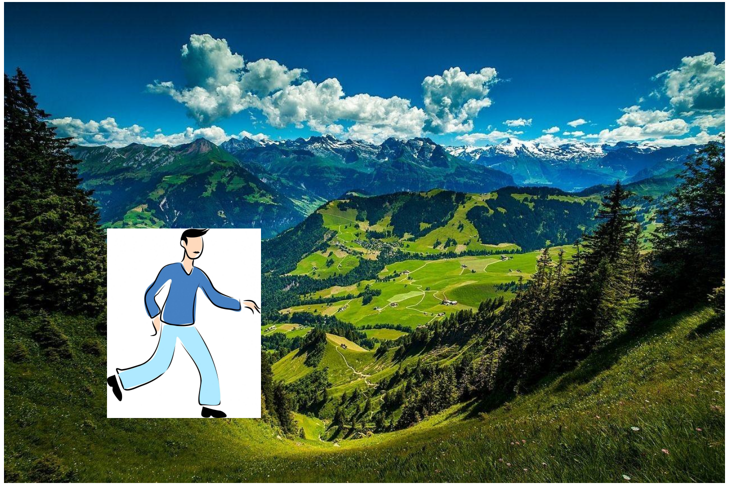
На прошлых лекциях

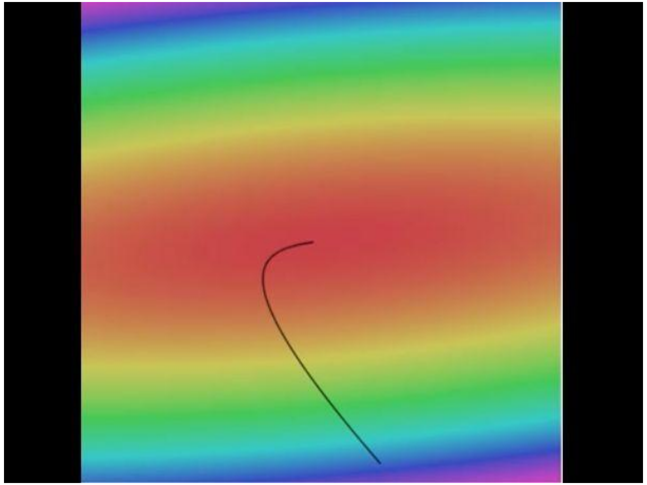
$$s = f(x; W) = Wx$$ Линейная функция

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$ Функция потерь SVM

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} L_i + \lambda \sum_k W_k^2$$ Ошибка данных + регуляризация

Оптимизация весов градиентным спуском





```
# Vanilla Gradient Descent

while True:
  weights_grad = evaluate_gradient(loss_fun, data, weights)
  weights += - step_size * weights_grad # perform parameter update
```

Градиентный спуск

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

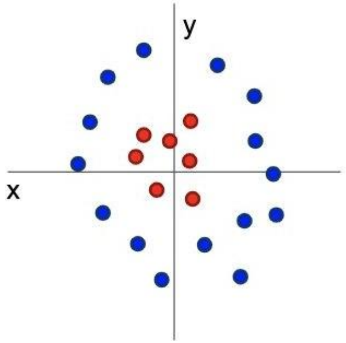
Численно: медленный, неточный, прост для написания

Аналитически: быстро, точно, необходима проверка

На практике для подсчета градиента выводят аналитическую формулу, а затем проверяют численными методами

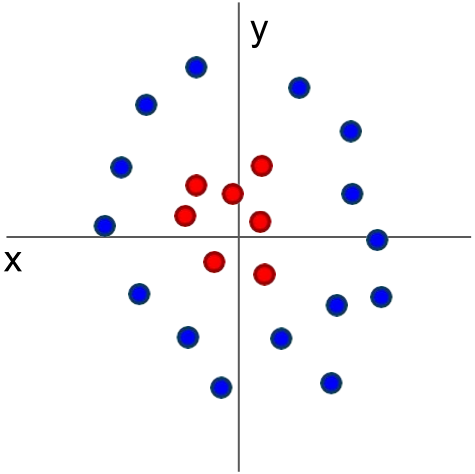
Проблемы линейного классификатора

Линейные классификаторы учат один шаблон для каждого класса



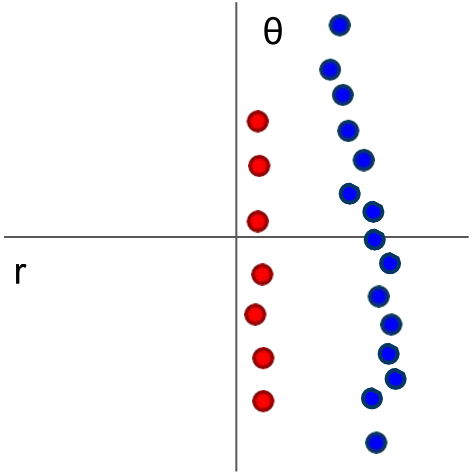
Линия разделения является одной прямой

Преобразование пространства



Нельзя разделить синие и красные точки одной прямой

$$f(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$$



После применения некой трансформации мы получаем линейно разделимые примеры

Нейронные сети

Нейронные сети

Линейная функция

$$f = Wx$$

$$x \in \mathbb{R}^D, W \in \mathbb{R}^{C \times D}$$

Нейронные сети

Линейная функция $f = Wx$

Двухслойная нейронная сеть $f = W_2 \max(0, W_1 x)$

$$x \in \mathbb{R}^D, W_1 \in \mathbb{R}^{H \times D}, W_2 \in \mathbb{R}^{C \times H}$$

(На практике также в каждый слой добавляется обучаемое смещение)

Нейронные сети

Линейная функция $f = Wx$

Двухслойная нейронная сеть $f = W_2 \max(0, W_1 x)$

$$x \in \mathbb{R}^D, W_1 \in \mathbb{R}^{H \times D}, W_2 \in \mathbb{R}^{C \times H}$$

“Нейронная сеть” очень широкий термин; представленное лучше называть “полносвязной сетью” или “многослойным перцептроном” (MLP)

(На практике также в каждый слой добавляется обучаемое смещение)

Нейронные сети

Линейная функция $f = Wx$

Двухслойная нейронная сеть $f = W_2 \max(0, W_1 x)$

или трехслойная $f = W_3 \max(0, W_2 \max(0, W_1 x))$

$$x \in \mathbb{R}^D, W_1 \in \mathbb{R}^{H_1 \times D}, W_2 \in \mathbb{R}^{H_2 \times H_1}, W_3 \in \mathbb{R}^{C \times H_2}$$

(На практике также в каждый слой добавляется обучаемое смещение)

Нейронные сети

Линейная функция $f = Wx$

Двухслойная нейронная сеть $f = W_2 \max(0, W_1 x)$

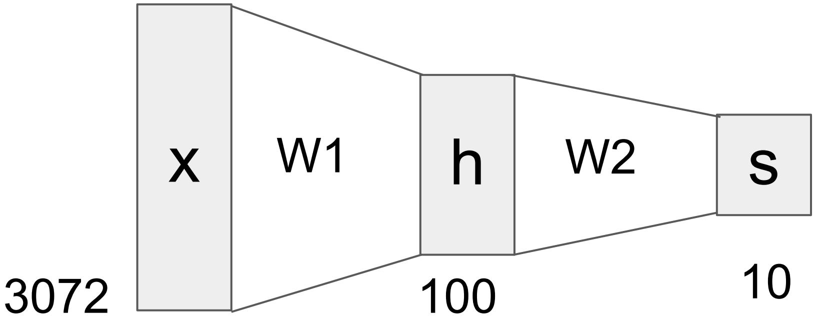
или трехслойная $f = W_3 \max(0, W_2 \max(0, W_1 x))$

$$x \in \mathbb{R}^D, W_1 \in \mathbb{R}^{H_1 \times D}, W_2 \in \mathbb{R}^{H_2 \times H_1}, W_3 \in \mathbb{R}^{C \times H_2}$$

(На практике также в каждый слой добавляется обучаемое смещение)

Двухслойная нейронная сеть

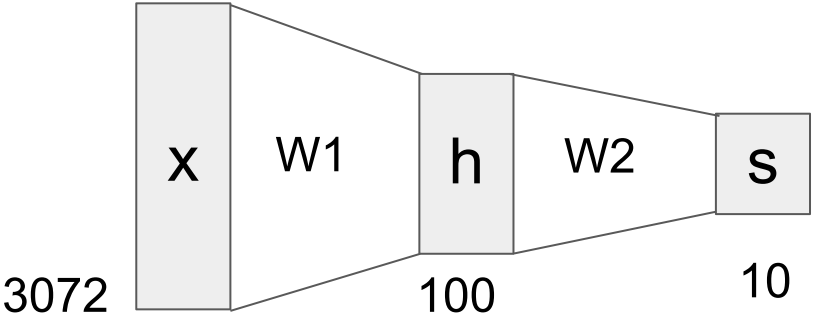
$$f = W_2 \max(0, W_1 x)$$

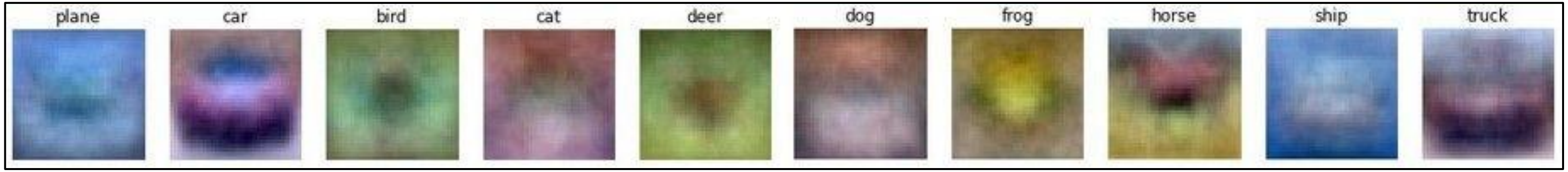


$$x \in \mathbb{R}^D, W_1 \in \mathbb{R}^{H \times D}, W_2 \in \mathbb{R}^{C \times H}$$

Двухслойная нейронная сеть

$$f = W_2 \max(0, W_1 x)$$





Обучаются 100 шаблонов вместо 10

Шаблоны используются всеми классами

Нейронные сети

Линейная функция $f = Wx$

Двухслойная нейронная сеть $f = W_2 \boxed{\max(0,} W_1 x)$

Функция max(0, z) называется **функцией активации**

Q: Что будет, если мы уберём её из нейронной сети?

$$f = W_2 W_1 x$$

Нейронные сети

Линейная функция $f = Wx$

Двухслойная нейронная сеть $f = W_2 \boxed{\max(0,} W_1 x)$

Функция max(0, z) называется **функцией активации**

Q: Что будет, если мы уберём её из нейронной сети?

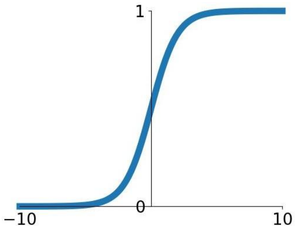
$$f = W_2 W_1 x \qquad W_3 = W_2 W_1 \in \mathbb{R}^{C \times H}, f = W_3 x$$

A: двухслойная сеть схлопнется в однослойную

Функции активации

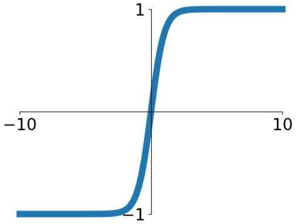
Sigmoid

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$



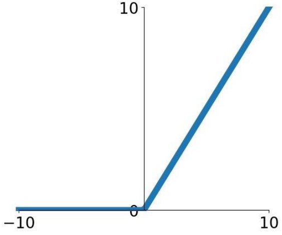
tanh

$$\tanh(x)$$



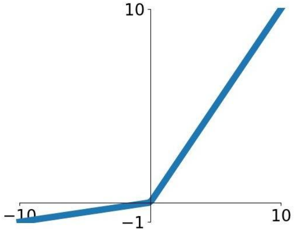
ReLU

$$\max(0, x)$$



Leaky ReLU

$$\max(0.1x, x)$$

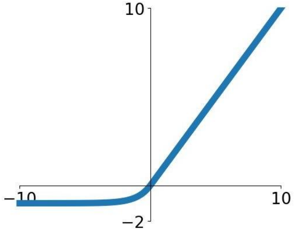


Maxout

$$\max(w_1^T x + b_1, w_2^T x + b_2)$$

ELU

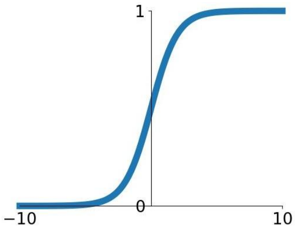
$$\begin{cases} x & x \geq 0 \\ \alpha(e^x - 1) & x < 0 \end{cases}$$



Функции активации

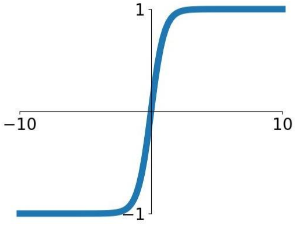
Sigmoid

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$



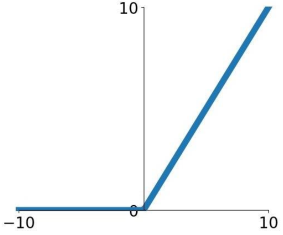
tanh

$$\tanh(x)$$



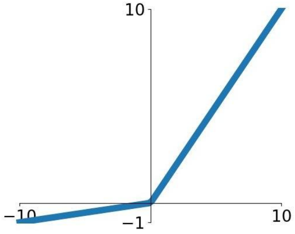
ReLU

$$\max(0, x)$$



Leaky ReLU

$$\max(0.1x, x)$$

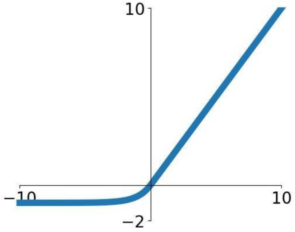


Maxout

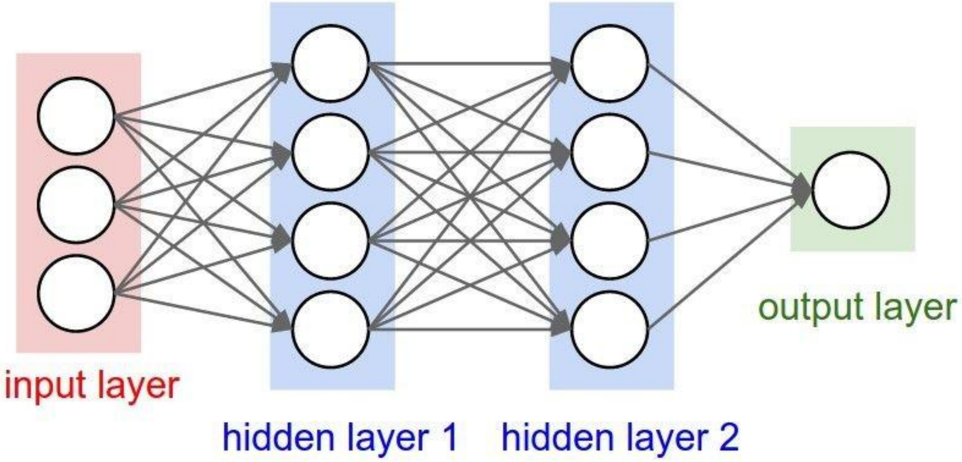
$$\max(w_1^T x + b_1, w_2^T x + b_2)$$

ELU

$$\begin{cases} x & x \geq 0 \\ \alpha(e^x - 1) & x < 0 \end{cases}$$



Пример нейронной сети




```python
# forward-pass of a 3-layer neural network:
f = lambda x: 1.0/(1.0 + np.exp(-x)) # activation function (use sigmoid)
x = np.random.randn(3, 1) # random input vector of three numbers (3x1)
h1 = f(np.dot(W1, x) + b1) # calculate first hidden layer activations (4x1)
h2 = f(np.dot(W2, h1) + b2) # calculate second hidden layer activations (4x1)
out = np.dot(W3, h2) + b3 # output neuron (1x1)
```

Пример нейронной сети

```
import numpy as np
from numpy.random import randn

N, D_in, H, D_out = 64, 1000, 100, 10
x, y = randn(N, D_in), randn(N, D_out)
w1, w2 = randn(D_in, H), randn(H, D_out)

for t in range(2000):
  h = 1 / (1 + np.exp(-x.dot(w1)))
  y_pred = h.dot(w2)
  loss = np.square(y_pred - y).sum()
  print(t, loss)

  grad_y_pred = 2.0 * (y_pred - y)
  grad_w2 = h.T.dot(grad_y_pred)
  grad_h = grad_y_pred.dot(w2.T)
  grad_w1 = x.T.dot(grad_h * h * (1 - h))

  w1 -= 1e-4 * grad_w1
  w2 -= 1e-4 * grad_w2
```

Пример нейронной сети

```python
import numpy as np
from numpy.random import randn

N, D_in, H, D_out = 64, 1000, 100, 10
x, y = randn(N, D_in), randn(N, D_out)
w1, w2 = randn(D_in, H), randn(H, D_out)

for t in range(2000):
  h = 1 / (1 + np.exp(-x.dot(w1)))
  y_pred = h.dot(w2)
  loss = np.square(y_pred - y).sum()
  print(t, loss)

  grad_y_pred = 2.0 * (y_pred - y)
  grad_w2 = h.T.dot(grad_y_pred)
  grad_h = grad_y_pred.dot(w2.T)
  grad_w1 = x.T.dot(grad_h * h * (1 - h))

  w1 -= 1e-4 * grad_w1
  w2 -= 1e-4 * grad_w2
```

Определяем параметры сети

Пример нейронной сети

```
import numpy as np
from numpy.random import randn

N, D_in, H, D_out = 64, 1000, 100, 10
x, y = randn(N, D_in), randn(N, D_out)
w1, w2 = randn(D_in, H), randn(H, D_out)

for t in range(2000):
  h = 1 / (1 + np.exp(-x.dot(w1)))
  y_pred = h.dot(w2)
  loss = np.square(y_pred - y).sum()
  print(t, loss)

  grad_y_pred = 2.0 * (y_pred - y)
  grad_w2 = h.T.dot(grad_y_pred)
  grad_h = grad_y_pred.dot(w2.T)
  grad_w1 = x.T.dot(grad_h * h * (1 - h))

  w1 -= 1e-4 * grad_w1
  w2 -= 1e-4 * grad_w2
```

Определяем параметры сети

Определяем взаимосвязь параметров

Пример нейронной сети

```python
import numpy as np
from numpy.random import randn

N, D_in, H, D_out = 64, 1000, 100, 10
x, y = randn(N, D_in), randn(N, D_out)
w1, w2 = randn(D_in, H), randn(H, D_out)

for t in range(2000):
  h = 1 / (1 + np.exp(-x.dot(w1)))
  y_pred = h.dot(w2)
  loss = np.square(y_pred - y).sum()
  print(t, loss)

  grad_y_pred = 2.0 * (y_pred - y)
  grad_w2 = h.T.dot(grad_y_pred)
  grad_h = grad_y_pred.dot(w2.T)
  grad_w1 = x.T.dot(grad_h * h * (1 - h))

  w1 -= 1e-4 * grad_w1
  w2 -= 1e-4 * grad_w2
```

Определяем параметры сети

Определяем взаимосвязь параметров

Подсчёт градиентов аналитически

Пример нейронной сети

```python
import numpy as np
from numpy.random import randn

N, D_in, H, D_out = 64, 1000, 100, 10
x, y = randn(N, D_in), randn(N, D_out)
w1, w2 = randn(D_in, H), randn(H, D_out)

for t in range(2000):
  h = 1 / (1 + np.exp(-x.dot(w1)))
  y_pred = h.dot(w2)
  loss = np.square(y_pred - y).sum()
  print(t, loss)

  grad_y_pred = 2.0 * (y_pred - y)
  grad_w2 = h.T.dot(grad_y_pred)
  grad_h = grad_y_pred.dot(w2.T)
  grad_w1 = x.T.dot(grad_h * h * (1 - h))

  w1 -= 1e-4 * grad_w1
  w2 -= 1e-4 * grad_w2
```

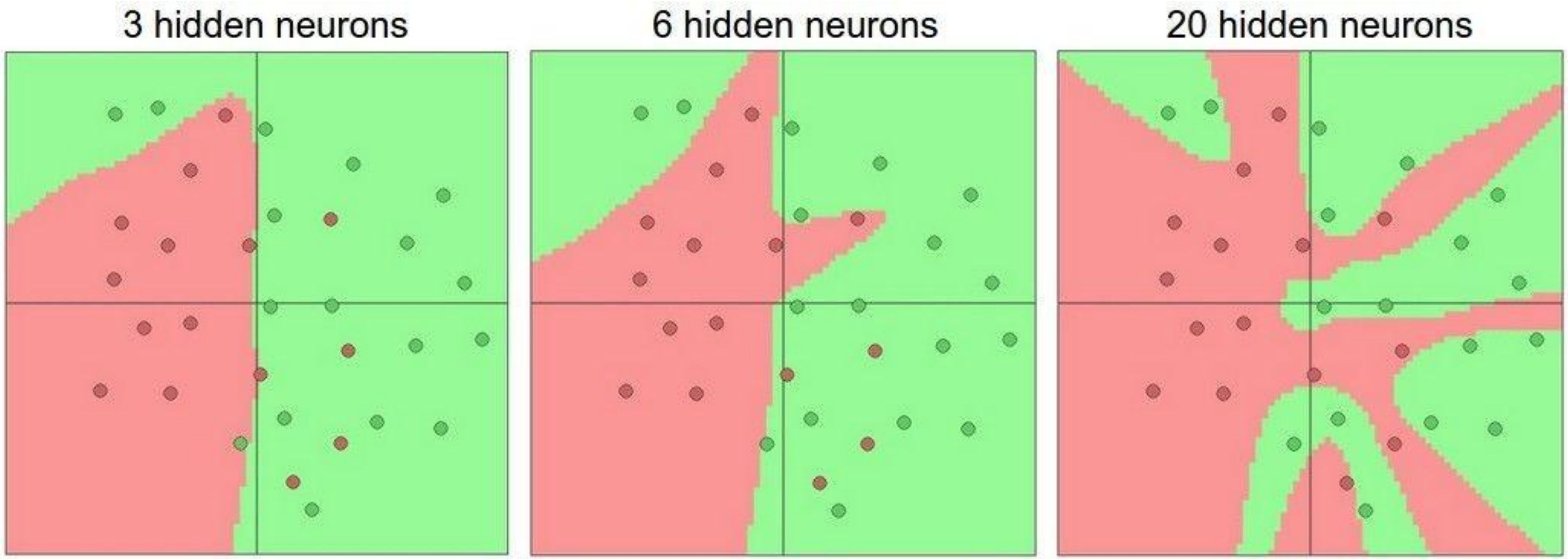
Определяем параметры сети

Определяем взаимосвязь параметров

Подсчёт градиентов аналитически

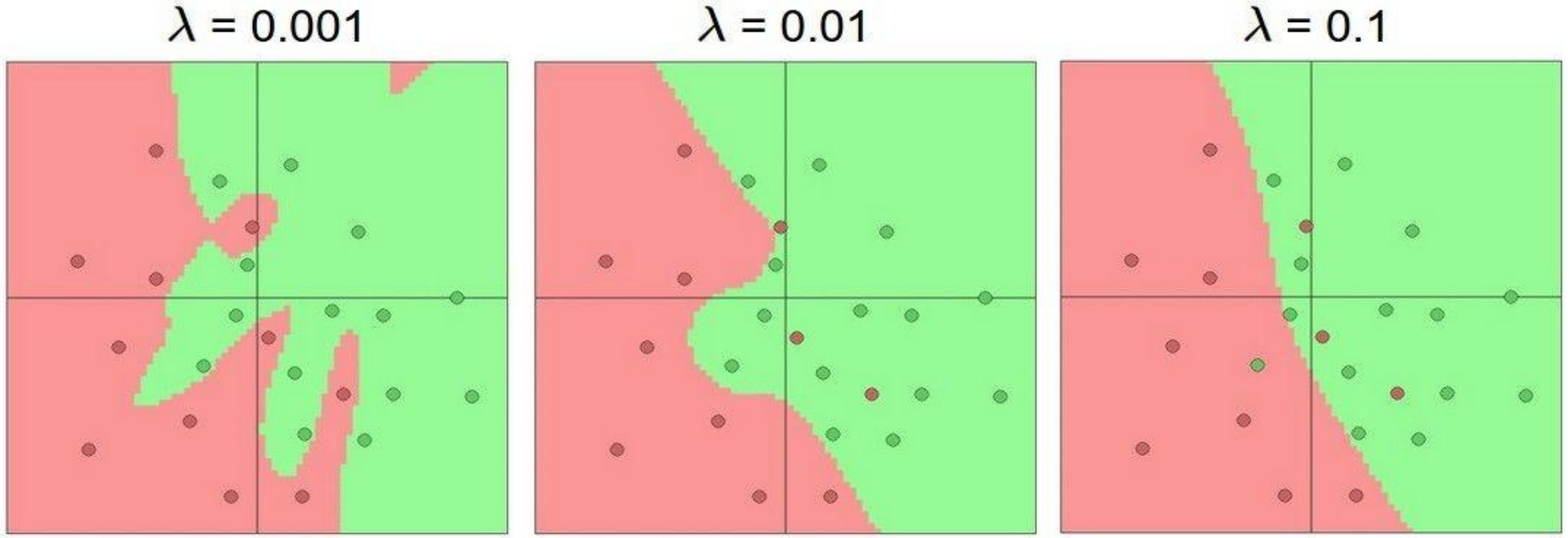
Градиентный спуск

Влияние количества нейронов и слоев



Больше слоев и нейронов - выше способность модели к аппроксимации данных.
Но также и выше шанс переобучения.

Регуляризация



Для нейронных сетей также можно использовать регуляризацию, чтобы ограничить переобучение.

(Веб-демо ConvNetJS: http://cs.stanford.edu/people/karpathy/convnetjs/demo/classify2d.html)

Подсчёт градиентов

$$s = f(x; W_1, W_2) = W_2 \max(0, W_1 x)$$ Нелинейная функция

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$ Функция ошибки SVM

$$R(W) = \sum_k W_k^2$$ Регуляризация

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} L_i + \lambda R(W_1) + \lambda R(W_2)$$ Итоговая ошибка

Если можем подсчитать $\frac{\partial L}{\partial W_1}, \frac{\partial L}{\partial W_2}$ сможем обучить W_1 и W_2

Подсчёт градиентов на листочке

$$s = f(x; W) = Wx$$

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$= \sum_{j \neq y_i} \max(0, W_{j,:} \cdot x + W_{y_i,:} \cdot x + 1)$$

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} L_i + \lambda \sum_k W_k^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq y_i} \max(0, W_{j,:} \cdot x + W_{y_i,:} \cdot x + 1) + \lambda \sum_k W_k^2$$

$$\nabla_W L = \nabla_W \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq y_i} \max(0, W_{j,:} \cdot x + W_{y_i,:} \cdot x + 1) + \lambda \sum_k W_k^2 \right)$$

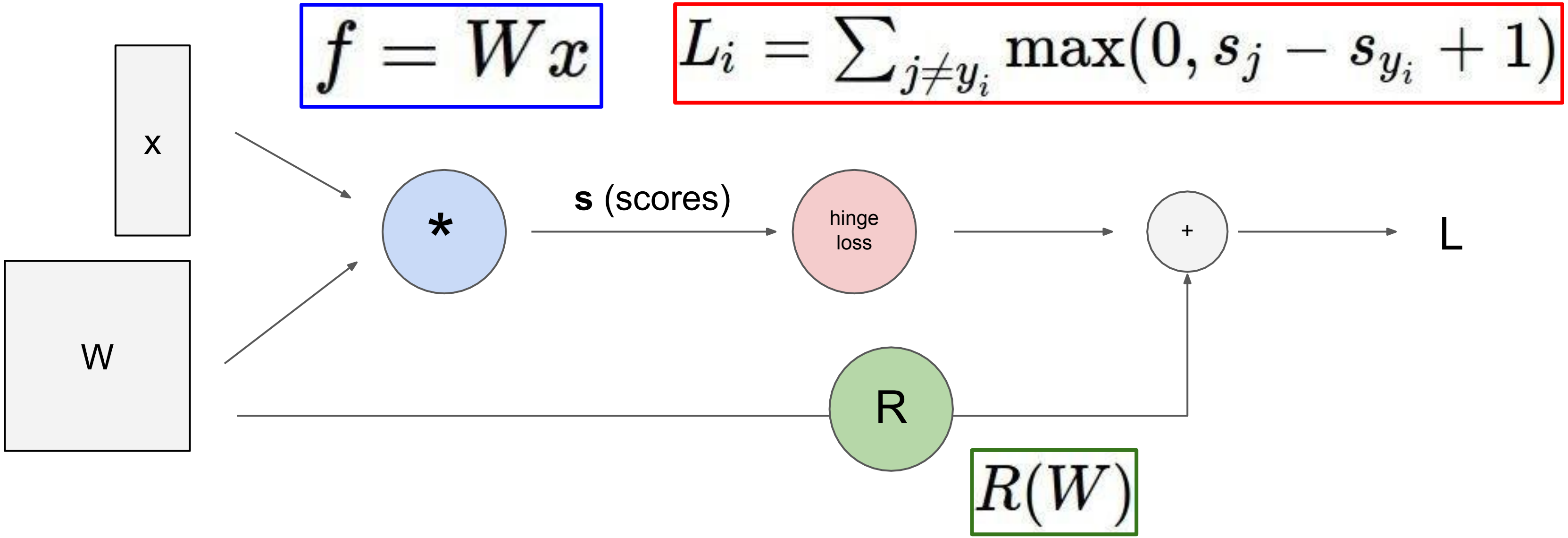
Проблемы такого подхода:

1. Крайне трудоемко
2. Не универсально (требует подсчетов для каждой модели
3. Практически невозможно для больших и сложных моделей

Backpropagation

Backpropagation

Backpropagation (Метод обратного распространения ошибки) основан на представлении нейронной сети в виде вычислительного графа

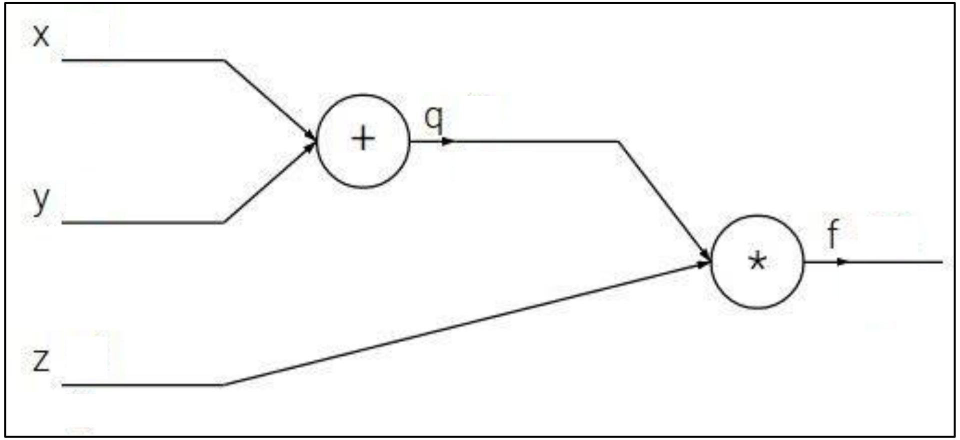


Backpropagation

$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

Backpropagation

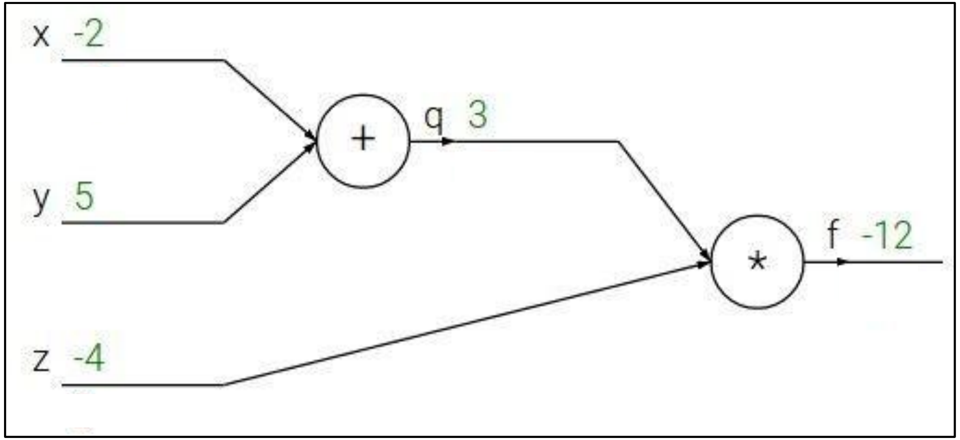
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$



Backpropagation

$$f(x,y,z) = (x+y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

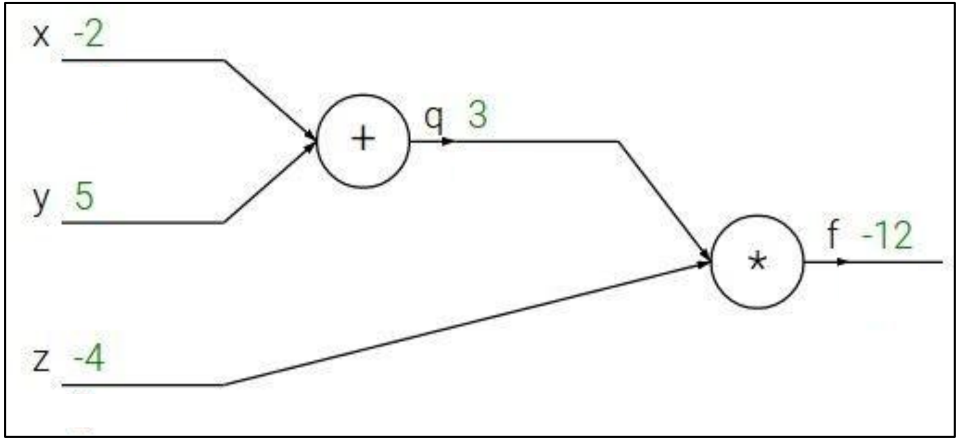


Backpropagation

$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$



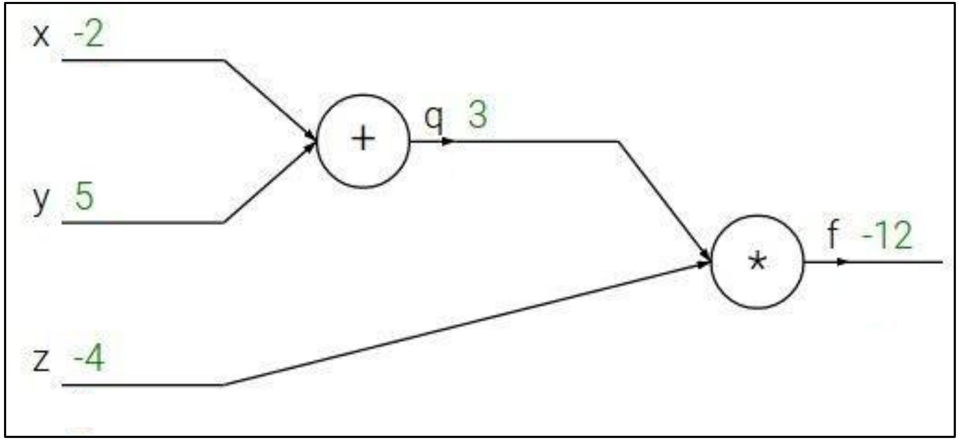
Backpropagation

$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$



Backpropagation

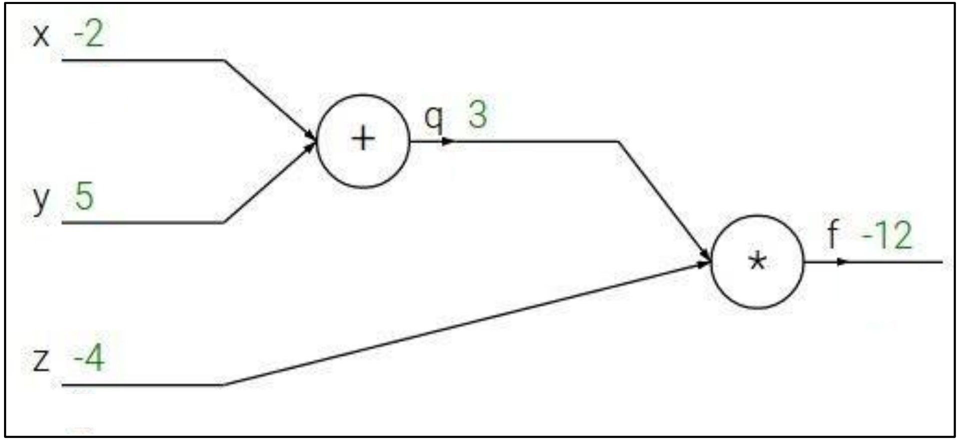
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

Нужно найти: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



Backpropagation

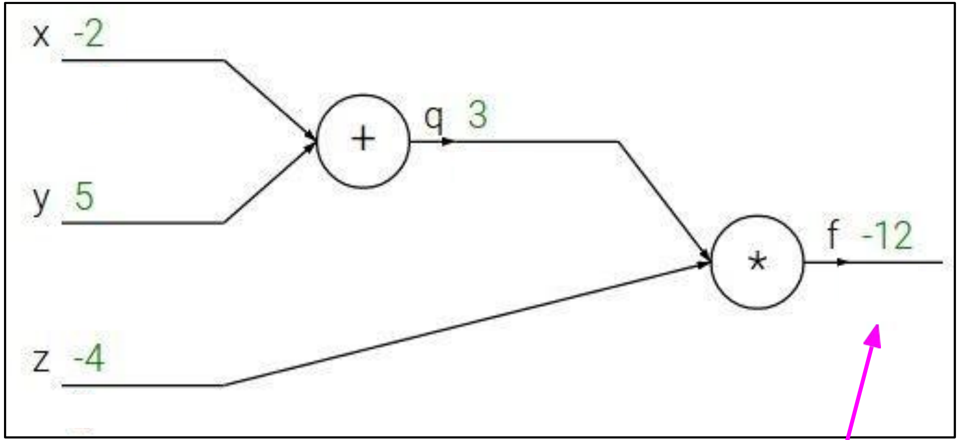
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

Нужно найти: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

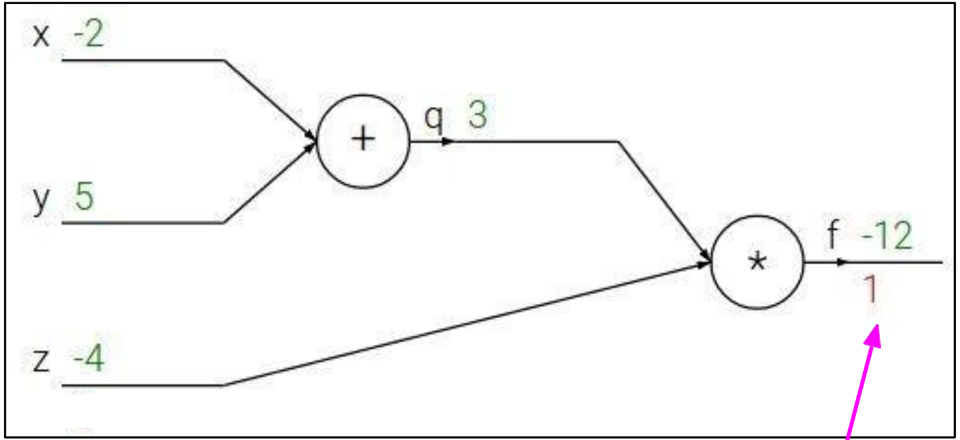


$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial f}}$$

Backpropagation

$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4



$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

$$\frac{\partial f}{\partial f}$$

Нужно найти: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

Backpropagation

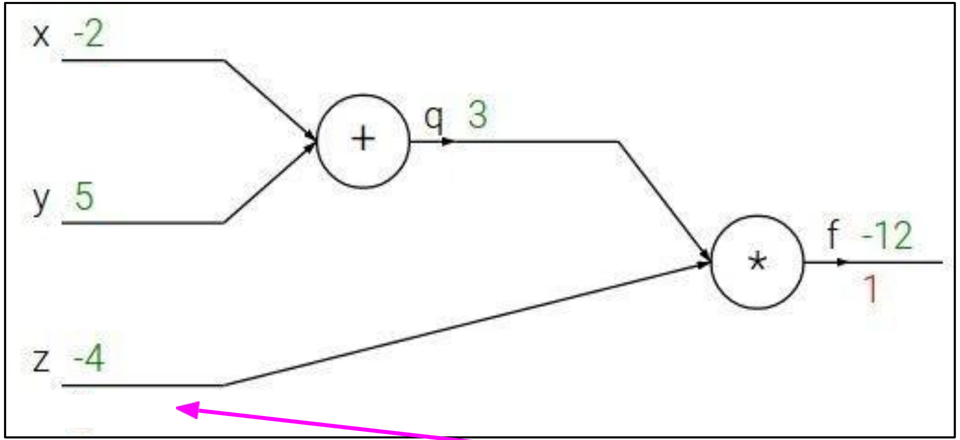
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

Нужно найти: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



$$\frac{\partial f}{\partial z}$$

Backpropagation

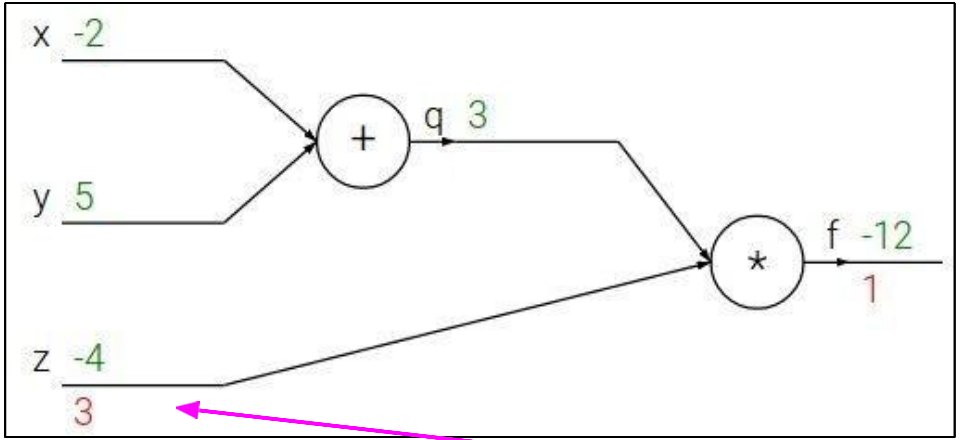
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

Нужно найти: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



$$\frac{\partial f}{\partial z}$$

Backpropagation

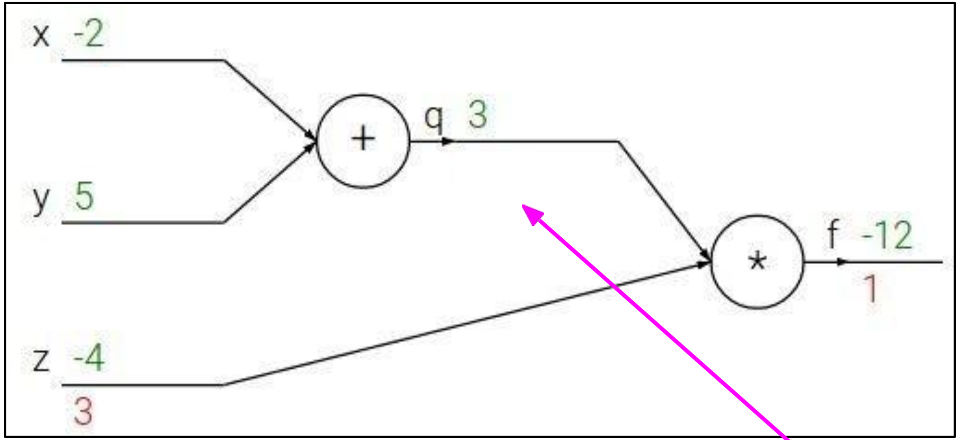
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

Нужно найти: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial q}}$$

Backpropagation

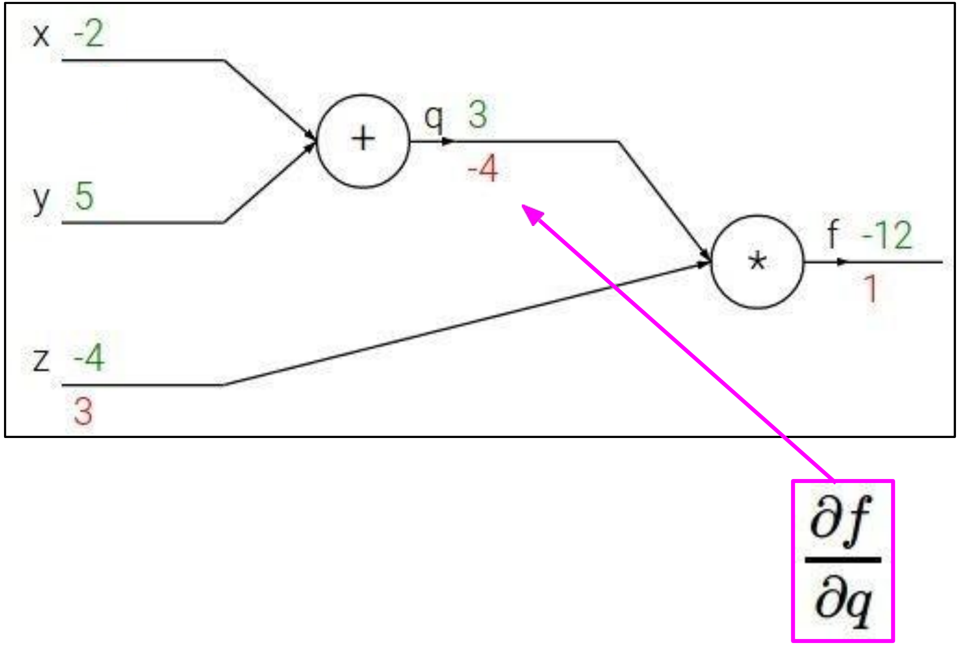
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

Нужно найти: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



Backpropagation

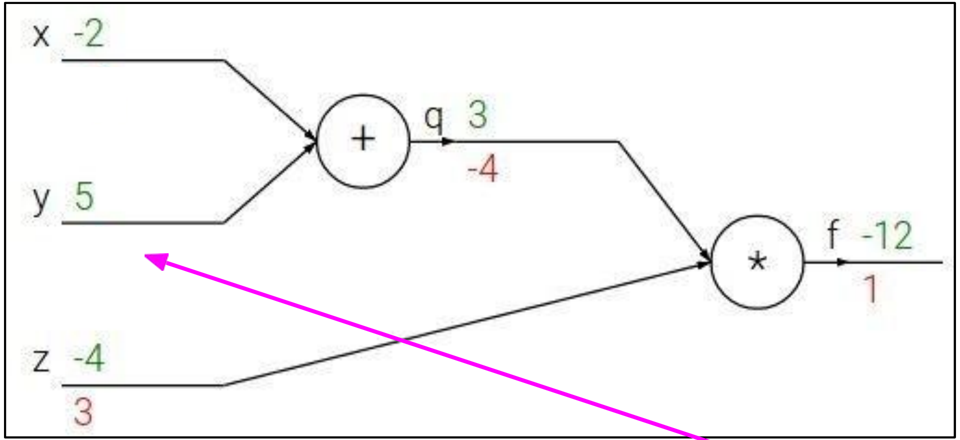
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

Нужно найти: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



$\frac{\partial f}{\partial y}$

Правило цепи:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}}$$

Восходящий градиент

Локальный градиент

Backpropagation

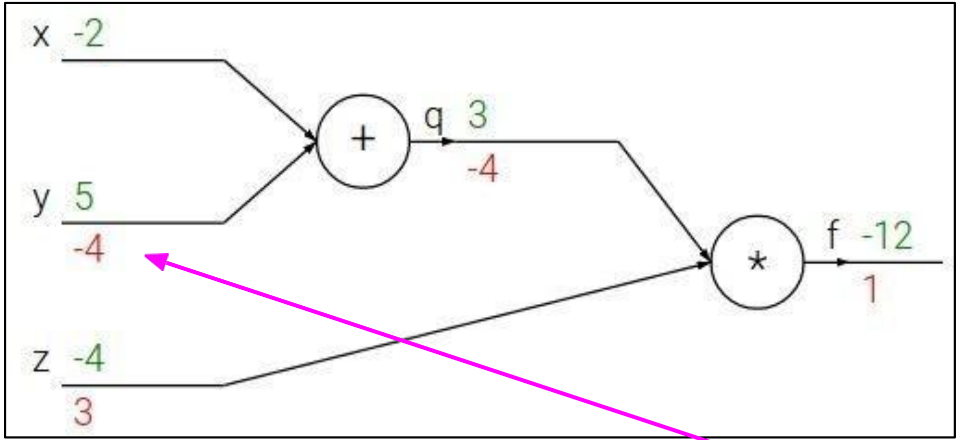
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

Нужно найти: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



$\frac{\partial f}{\partial y}$

Правило цепи:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y}$$

Восходящий градиент

Локальный градиент

Backpropagation

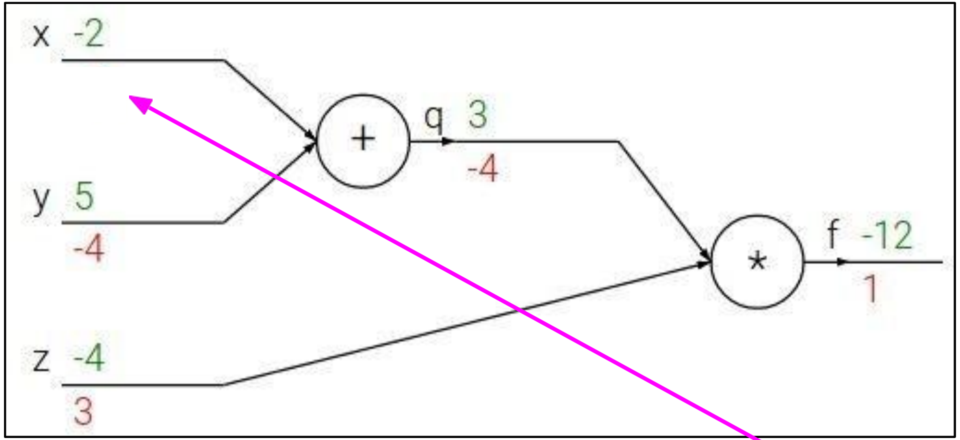
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

Нужно найти: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Правило цепи:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}$$

Восходящий градиент

Локальный градиент

Backpropagation

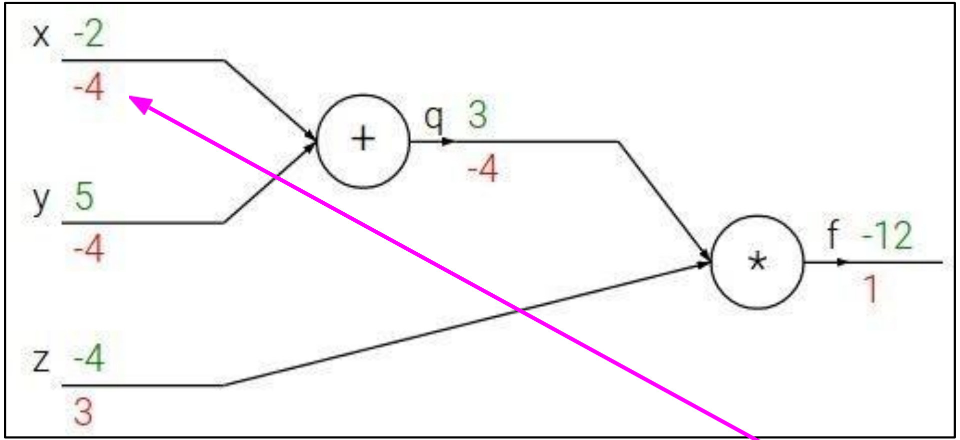
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

Нужно найти: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



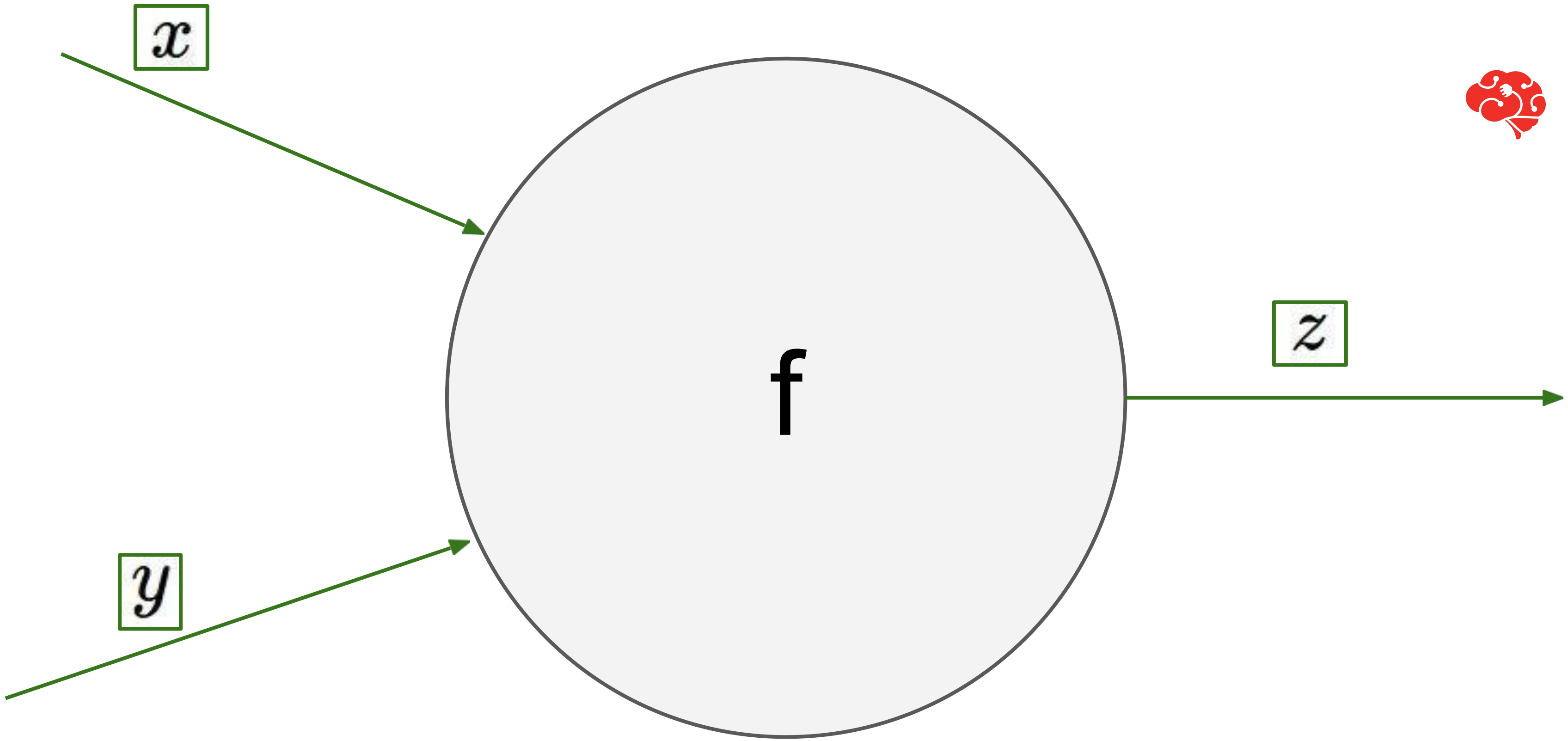
$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

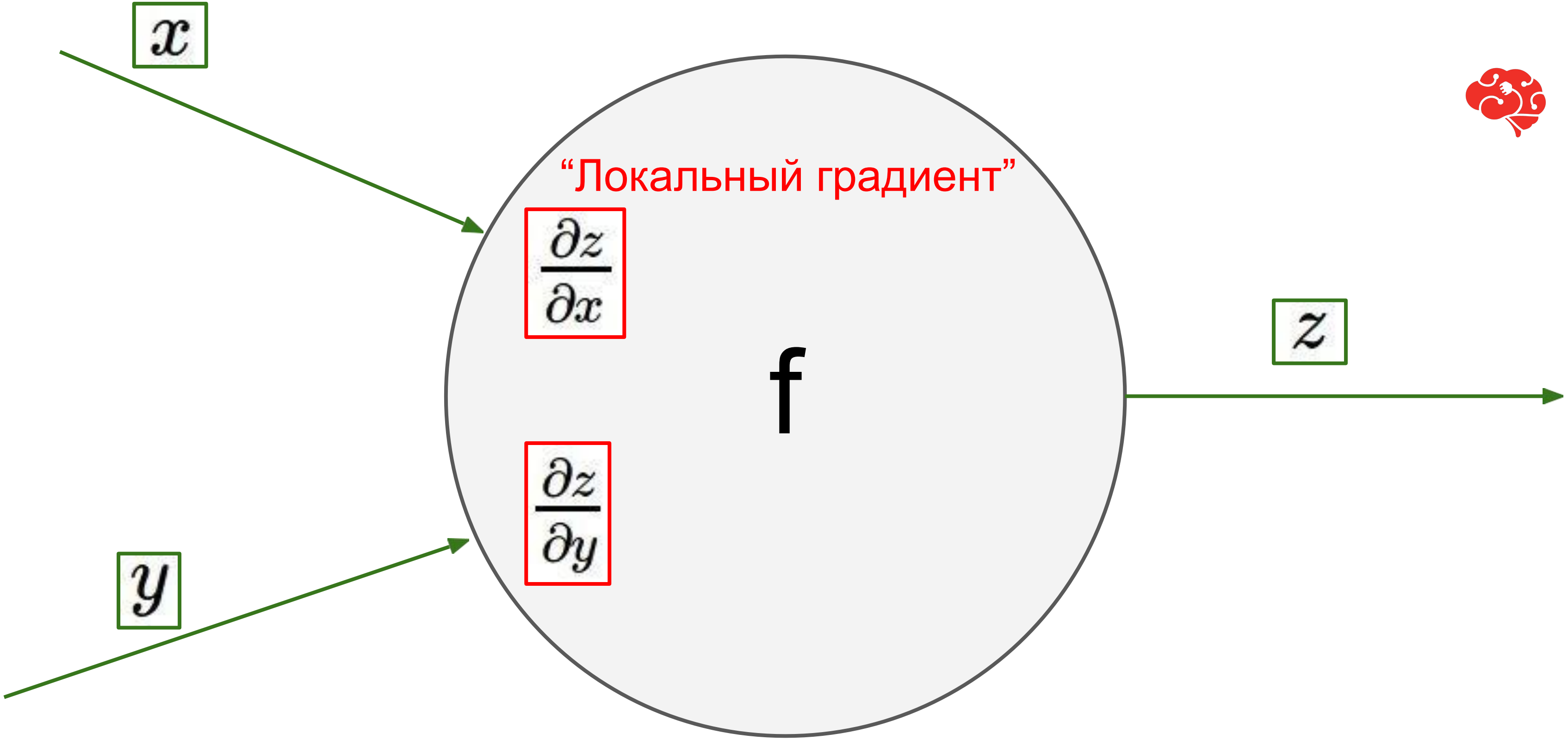
Правило цепи:

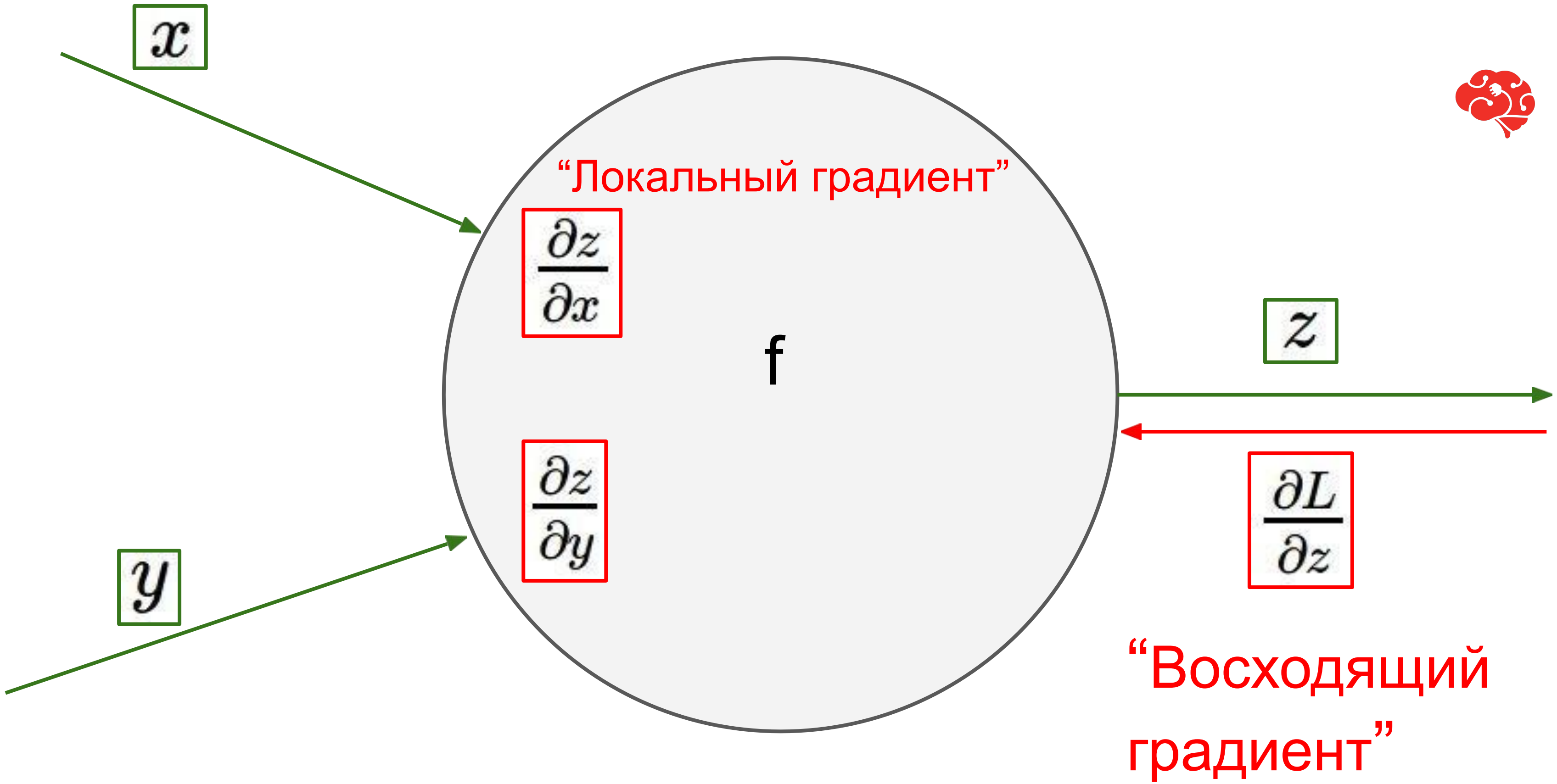
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x}$$

Восходящий градиент

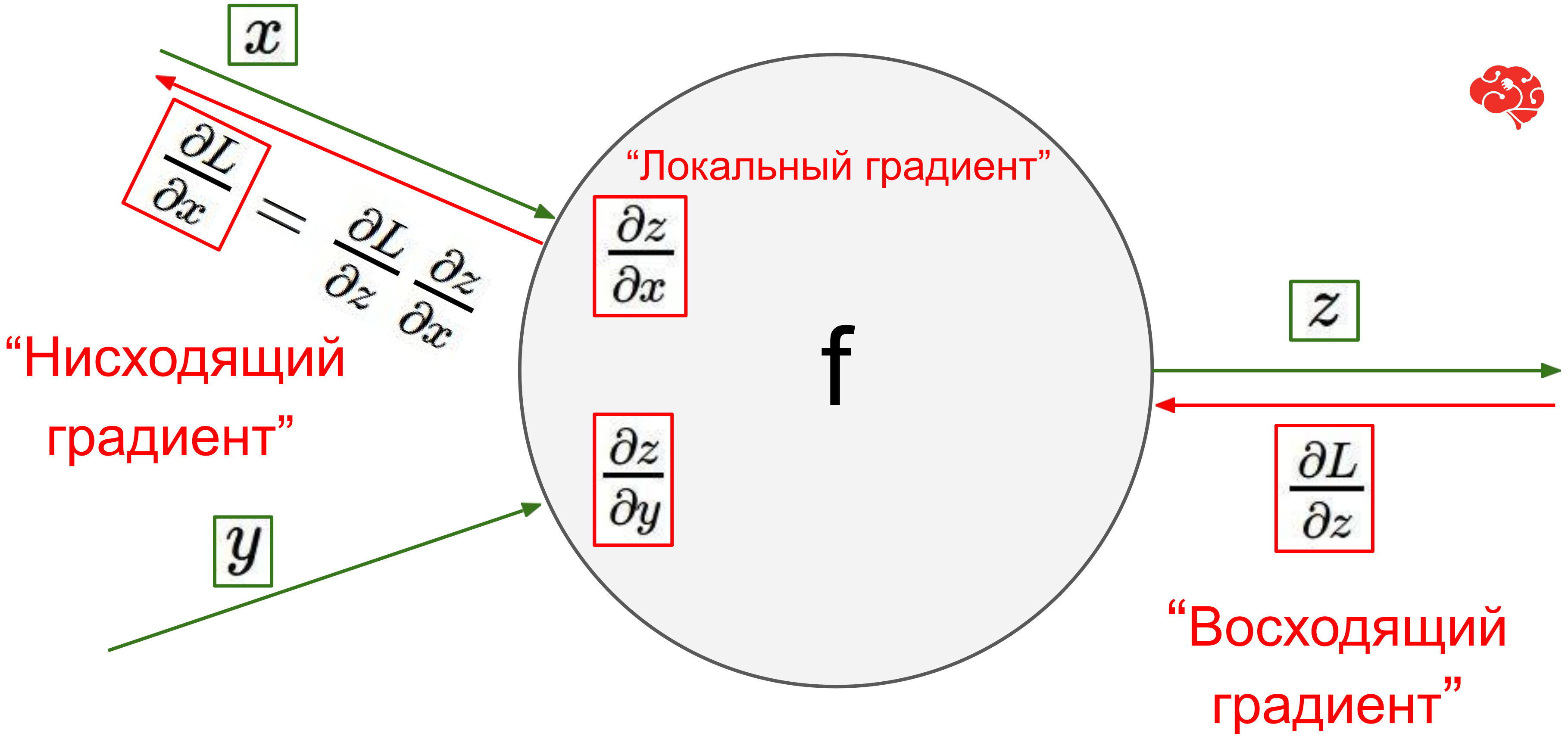
Локальный градиент

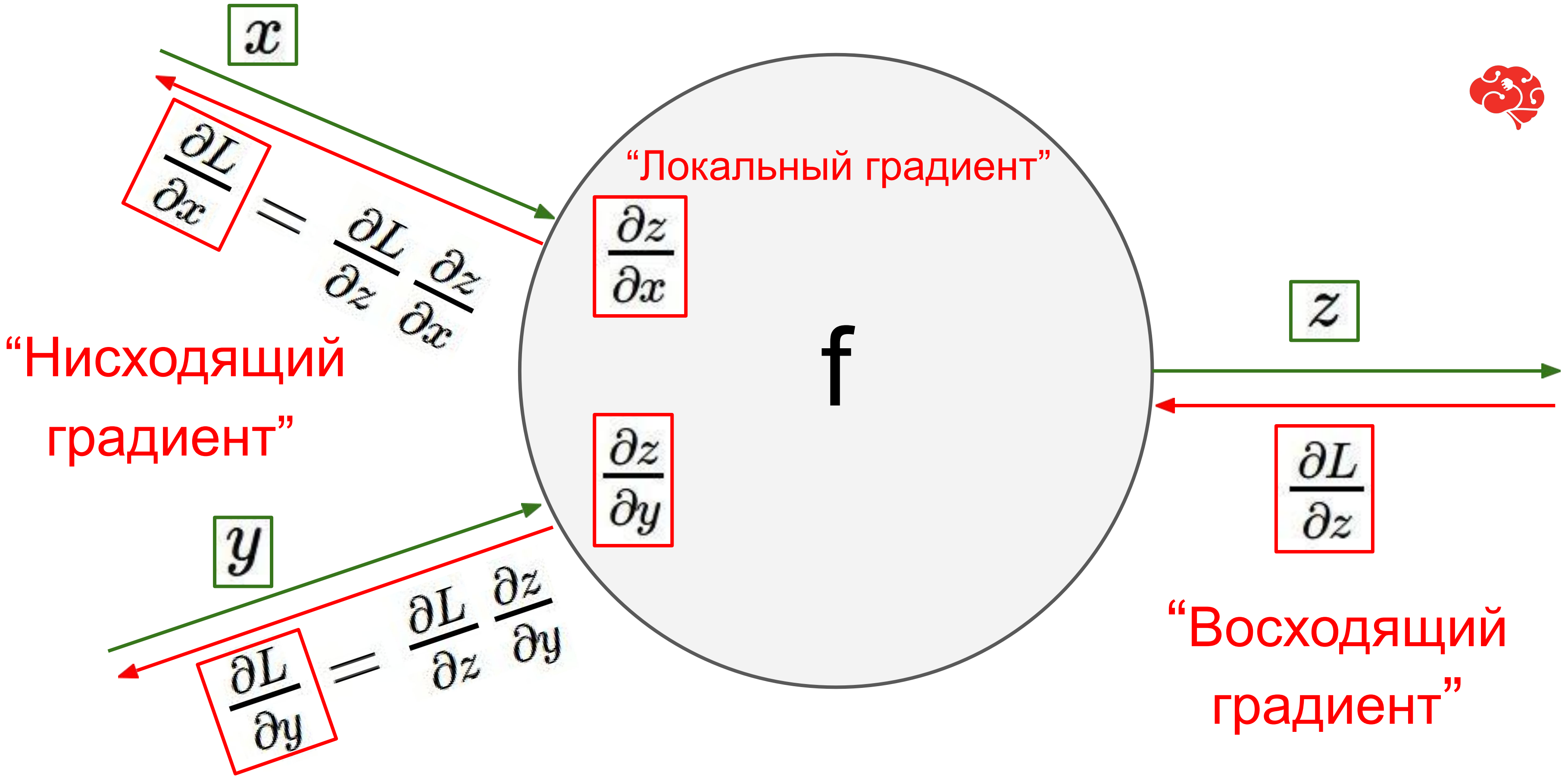

x
y
f
z


x
“Локальный градиент”
$\frac{\partial z}{\partial x}$
f
z
$\frac{\partial z}{\partial y}$
y

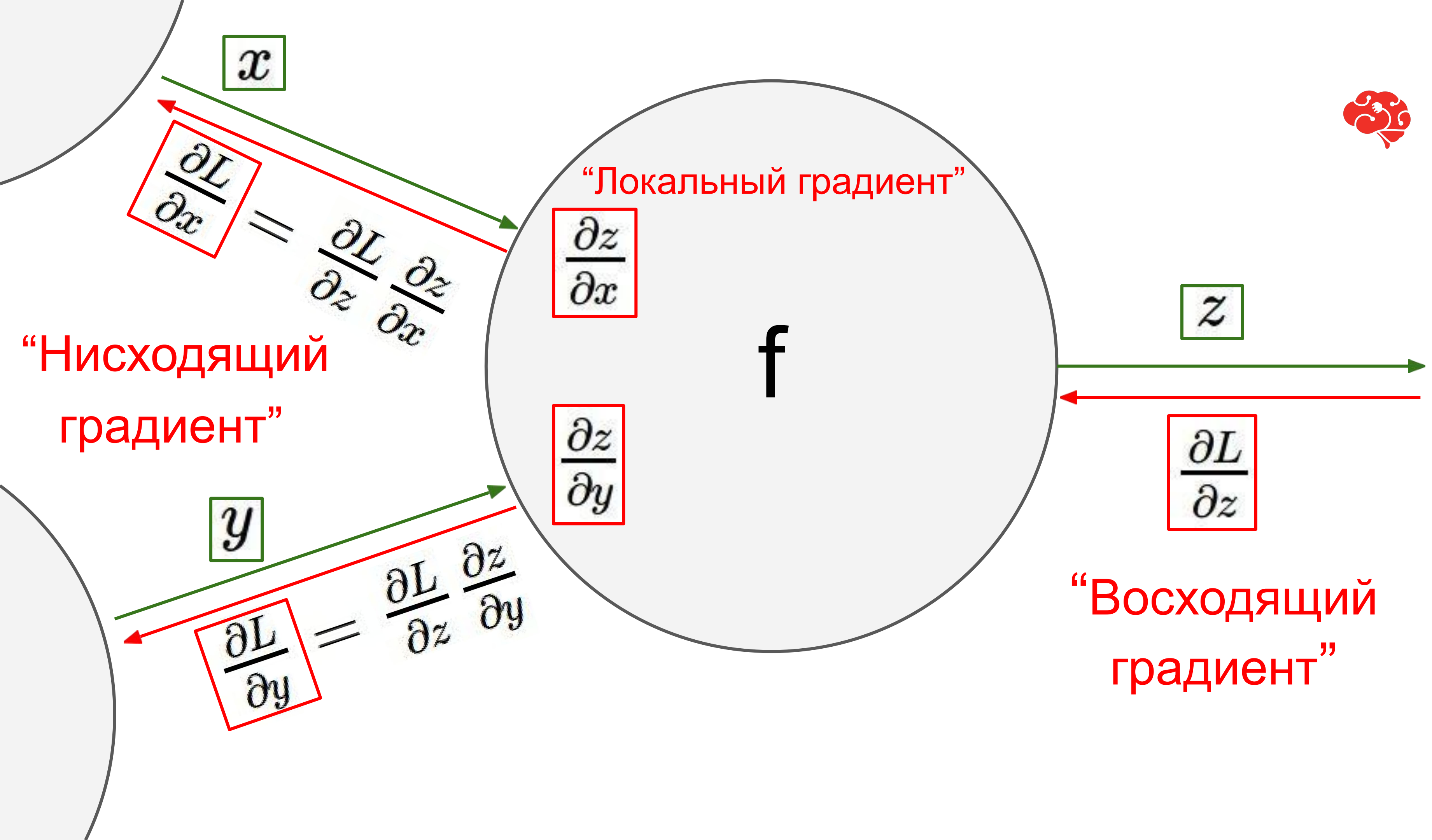


x
y
“Локальный градиент”
$\frac{\partial z}{\partial x}$
$\frac{\partial z}{\partial y}$
f
z
$\frac{\partial L}{\partial z}$
“Восходящий градиент”


x
$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$
“Нисходящий градиент”
y
“Локальный градиент”
$\frac{\partial z}{\partial x}$
$\frac{\partial z}{\partial y}$
f
z
$\frac{\partial L}{\partial z}$
“Восходящий градиент”



x
$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$
“Нисходящий градиент”
y
$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$
“Локальный градиент”
$\frac{\partial z}{\partial x}$
$\frac{\partial z}{\partial y}$
f
z
$\frac{\partial L}{\partial z}$
“Восходящий градиент”


“Локальный градиент”
$\frac{\partial z}{\partial x}$
$\frac{\partial z}{\partial y}$
f
x
y
z
$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$
$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$
$\frac{\partial L}{\partial z}$
“Нисходящий градиент”
“Восходящий градиент”