1

设:$\Delta \subseteq \Gamma, \Delta$ 为有穷集,

从而有$k \in \mathcal{N}$使得

$\Delta \subseteq \{(x > S^n O) | n = 0, 1, 2, .., k$

设$N = \{\mathbb{N}, O, Suc, >\}$ 为算术的标准模型

期中$Suc(x) = x + 1. >$为大于关系

令σ 为$\mathbb{N}$上赋值使$\sigma(x) = k + 1$

从而$N \models_\sigma (x > S^n(o))(n = 0, 1, 2, .., k)$

故$N \models_\sigma \Delta$即Δ可满足

由紧致性定理知Γ可满足.

2

设$\Gamma \models \phi$

反设不存在Γ的有穷子集Δ使$\Delta \models \phi$

从而对任何Γ的有穷子集Δ有$\Delta \not\models \phi$

因此对任何Γ的有穷子集Δ有$\Delta \cup \{\neg\phi\}$可满足

故$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$的任何有穷子集可满足,

由紧致性定理知$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$可满足，设

$m \models \cup\{\neg\phi\}$从而$\Gamma \models \phi$知道$m \models \phi$

矛盾！

3

令$\phi \equiv \exists x_1, ..., x_n.\mathbb{M}_{1 \leq i \leq j \neg(x_i \doteq x_j)}$

易见$\phi_n \iff |M| \geq n$

$\{\phi_n | i \in \mathbb{N}^+\} |M| \geq \aleph_0$

令$\Gamma = \Sigma \cup \{\phi_i | i \in \mathbb{N}^+\}$，对于任何$\Gamma$的

有穷子集$\Delta \subseteq \Sigma \cup \{\phi_i | i \in \mathbb{N}^+\}$，存在$k$使

$\Delta \subseteq \Sigma \cup \{\phi_1, ..., \phi_k\}$,由于$\Sigma$具有论域

基数大于k的模型，故Δ可满足,

由紧致性定理知Γ 可满足，say，$\models \Gamma$

从而$\models \{\phi_i | i \in \mathbb{N}^+\}$,故$|M| \geq \aleph_0$.

4

只需证每个有穷图可4色则无穷图可四色.

设MAP为一张无穷地图，令全体国家的集合为

$a_i | i \in I$,这里$|I| \geq \aleph_0$.

设一阶语言$\mathcal{L}$由一下构成

(1)常元:$\{a_i | i \in I\}$

(2)一元谓词：$C_k(x)(k = 1, 2, 3, 4)\{C_k(x)$表示x着$k$色$\}$

(3)二元谓词：$g(x, y)\{g(x, y)$表示x与y有大于0的公关边界$\}$.

令$Q = \{< i, j > | i, j \in I\}$且在MAP中$a_i$与$a_j$有大于0的公关边界.

令$\Gamma = \{q(a_i, a_j) | < i, j > \in Q\}$

$\cup = \{\neg q(a_i, a_j) | < i, j > \notin Q\}$

$\cup\{\forall x(c_1(x) \vee$

反设，对任何$m \in N$ 都存在结构$m = (M, I)$使

$m < |M| < \aleph_0$ 且$m \models \neg\varpi$

令φ_n 为$\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n(\vee_{0 < i < j \leq n} \neg(x_i \doteq x_j))$

易见(1)$m \models \varphi_n \Rightarrow |M| \geq n$，(2)当$m < n$时 $m \models \varphi_n \Rightarrow m \models \varphi_m$，(3)$m \models$

令$Q = \{< i, j > | i, j \in I\}$且在MAP中$a_i$与$a_j$有大于0的公关边界.
令$\Gamma = \{q(a_i, a_j) | < i, j > \in Q\}$
$\cup = \{\neg q(a_i, a_j) | < i, j > \notin Q\}$
$\cup\{\forall x(c_1(x)\vee$

反设，对任何$m \in N$ 都存在结构$m = (M, I)$使
$m < |M| < \aleph_0$ 且$m \vDash \neg\varpi$
令φ_n 为$\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n(\vee_{0<i<j\leq n}\neg(x_i \doteq x_j))$
易见(1)$m \vDash \varphi_n \Rightarrow |M| \geq n$. (2)当$m < n$时,$m \vDash \varphi_n \Rightarrow m \vDash \varphi_m$ (3)$m \vDash \varphi_1, \varphi_2 ... \Rightarrow |M| \geq \aleph_0$
令$\Gamma = \{\neg\varphi, \varphi, ..., \varphi_n, ...\} = \{\neg\phi\} \cup \{\varphi_n | n \in N^+\}$
对于有穷集$S \subseteq \Gamma$, 有k使$S \subseteq \{\neg\varphi, \varphi, ..., \varphi_n, ...\}$
从而由反设知S有模型,因此由紧致定理知,Γ 有模型,设为$m' = (M', I')$,从而
$m' \vDash \{\varphi_1, ..., \varphi_n ...\}$,因此$|M| \geq \aleph_0$且
$m' \vDash \neg\varphi$ 与题设矛盾.

6

反设存在这样的Σ.令$\{C_n | n \in N\}$为新常元
集，令$\mathbb{L}' \doteq \mathbb{L} \cup \{C_n | n \in N\}$,
$\Sigma' \doteq \Sigma \cup \{R(C_{n+1}), C_n), \neg(C_{n+1} \doteq C_n) | n \in N\}$
因为Σ有一个无穷模型，所以Σ'的任何有穷子集有
model，从而Σ'有model，say，m,因此
$m \vDash \Sigma$,令R_M为¡, $(C_n)_M$为a_n从而
$a_0 > a_1 > a_2$...为无穷下降链，从而
$a_n | n \in N$ has no the least element.
故R_m并非M上的良序.矛盾