数理逻辑第十一讲习题参考答案*

2018 年 6 月 24 日

1

设:$\Delta \subseteq \Gamma, \Delta$ 为有穷集,
从而有 $k \in \mathbb{N}$ 使得
$\Delta \subseteq \{(x > S^n 0) | n = 0, 1, 2, .., k\}$
设 $N = \{\mathbb{N}, O, Suc, >\}$ 为算术的标准模型
其中 $Suc(x) = x + 1$，为大于关系
令 σ 为 $\mathbb{N}$ 上赋值使 $\sigma(x) = k + 1$
从而 $N \vDash_\sigma (x > S^n(0))(n = 0, 1, 2, .., k)$
故 $N \vDash_\sigma \Delta$ 即 Δ 可满足
由紧致性定理知 Γ 可满足.

2

设 $\Gamma \vDash \varphi$
反设不存在 Γ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \vDash \varphi$
从而对任何 Γ 的有穷子集 Δ 有 $\Delta \nvDash \varphi$
因此对任何 Γ 的有穷子集 Δ 有 $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ 可满足
故 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 的任何有穷子集可满足,
由紧致性定理知 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 可满足，设
$\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. 即 $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ 且 $\mathfrak{M} \vDash \neg\varphi$, 与 $\Gamma \models \varphi$ 矛盾.
因此存在 Γ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \models \varphi$.

3

令 $\varphi \equiv \exists x_1, ..., x_n.\mathbb{M}_{1\leq i\leq j\leq n}\neg(x_i \doteq x_j)$
易见 $\mathfrak{M} \models \varphi_n \Leftrightarrow |M| \geq n$
$\mathfrak{M} \models \{\varphi_i | i \in \mathbb{N}^+\} \Leftrightarrow |M| \geq \aleph_0$

*Ver. 0.2. 原答案由宋方敏教授给出手稿，乔羽同学录入，最后由丁超同学修订补充. 此文档来源为https://github.com/sleepycoke/Mathematical_Logic_NJUCS由于时间紧张，丁超只更正了比较明显的笔误, 没有仔细验证, 见谅. 欢迎各位同学提出意见共同维护.

令 $\Gamma=\Sigma\cup\{\varphi_i|i\in\mathbb{N}^+\}$，对于任何 Γ 的
有穷子集 $\Delta\subseteq\Sigma\cup\{\varphi_i|i\in\mathbb{N}^+\}$，存在 k 使
$\Delta\subseteq\Sigma\cup\{\varphi_1,...,\varphi_k\}$, 由于 Σ 具有论域
基数大于 k 的模型，故 Δ 可满足,
由紧致性定理知 Γ 可满足，那么有，$\mathfrak{M}\vDash\Gamma$
从而 $\mathfrak{M}\vDash\{\varphi_i|i\in\mathbb{N}^+\}$, 故 $|M|\geq\aleph_0$.

4

只需证每个有穷图可 4 色则无穷图可四色.
设 MAP 为一张无穷地图，令全体国家的集合为
$\{a_i|i\in I\}$, 这里 $|I|\geq\aleph_0$.
设一阶语言 $\mathcal{L}$ 由以下构成
(1) 常元:$\{a_i|i\in I\}$
(2) 一元谓词 : $C_k(x)(k=1,2,3,4)\{C_k(x)$ 表示 x 着 k 色$\}$
(3) 二元谓词 : $g(x,y)\{g(x,y)$ 表示 x 与 y 有大于 0 的公共边界$\}$.
令 $Q=\{<i,j>|i,j\in I\}$ 且在 MAP 中 a_i 与 a_j 有大于 0 的公共边界.
令 $\Gamma=\{q(a_i,a_j)|<i,j>\in Q\}$
$\cup\{\neg q(a_i,a_j)|<i,j>\notin Q\}$
$\cup\{\forall x(c_1(x)\vee c_2(x)\vee c_3(x)\vee c_4(x))\}$
$\cup\{\forall x\forall y(q(x,y)\rightarrow(\neg(c_1(x)\wedge c_1(y))\wedge\neg(c_2(x)\wedge c_2(y))\wedge\neg(c_3(x)\wedge c_3(y))\wedge\neg(c_4(x)\wedge c_4(y))))\}$
设 $S\subseteq\Gamma$ 为 Γ 的任何有穷子集，不妨设 $\{a_0,...,a_n\}$
为出现在 S 中的全体常元，令 $M=\{a_0,...,a_n\},MAP[s]$ 为 $\{a_0,\ldots,a_n\}$ 的生成子图. 从而 $MAP[s]$ 可着 4 色.
令 $C_{kM}=\{a_i|a_i$ 着 k 色 $i\leq n\}k=1,...,4$
$q_M=\{<a_i,a_j>|<i,j>\in Q\}$ 从而 $\mathfrak{M}\vDash S$
由 compactness 知有 $\mathfrak{M}$ 使 $\mathfrak{M}\vDash\Gamma$ 即 MAP 可 4 染色.

5

反设，对任何 $m\in\mathbb{N}$ 都存在结构 $\mathfrak{M}=(M,I)$ 使
$m<|M|<\aleph_0$ 且 $\mathfrak{M}\vDash\neg\varphi$
令 φ_n 为 $\exists x_1\exists x_2...\exists x_n(\wedge_{0<i<j\leq n}\neg(x_i\doteq x_j))$
易见 (1)$\mathfrak{M}\vDash\varphi_n\Rightarrow|M|\geq n$. (2) 当 $m<n$ 时,$\mathfrak{M}\vDash\varphi_n\Rightarrow\mathfrak{M}\vDash\varphi_m$ (3)$\mathfrak{M}\vDash\{\varphi_1,\varphi_2...\}\Rightarrow|M|\geq\aleph_0$
令 $\Gamma=\{\neg\varphi,\varphi_1,...,\varphi_n,...\}=\{\neg\varphi\}\cup\{\varphi_n|n\in N^+\}$
对于有穷集 $S\subseteq\Gamma$, 有 k 使 $S\subseteq\{\neg\varphi,\varphi_1,...,\varphi_n,...\}$
从而由反设知 S 有模型, 因此由紧致定理知,Γ 有模型, 设为 $\mathfrak{M}'=(M',I')$, 从而
$\mathfrak{M}'\vDash\{\varphi_1,...,\varphi_n...\}$, 因此 $|M'|\geq\aleph_0$ 且
$\mathfrak{M}'\vDash\neg\varphi$ 与题设矛盾.

6

反设存在这样的 Σ. 令 $\{c_n|n \in N\}$ 为新常元
集，令 $\mathscr{L}' \triangleq \mathscr{L} \cup \{c_n|n \in N\}$,
$\Sigma' \triangleq \Sigma \cup \{R(c_{n+1}, c_n), \neg(c_{n+1} \doteq c_n)|n \in N\}$
因为 Σ 有一个无穷模型，所以 Σ' 的任何有穷子集有
模型，从而 Σ' 有模型，设为 $\mathfrak{M}$. 因此
$\mathfrak{M} \vDash \Sigma$. 令 R_M 为 $<$, $(c_n)_M$ 为 a_n 从而
$a_0 > a_1 > a_2 ...$ 为无穷下降链，从而
$\{a_n|n \in \mathbb{N}\}$ 没有最小元.
故 R_M 并非 M 上的良序. 矛盾