

# 数理逻辑第六讲习题参考答案\*

2019年5月4日

## 1

### 1.1

证明: 设  $\Gamma := \Phi \cap \Psi$ .

反设  $Incon(\Gamma)$ , 则存在非空有穷公式集  $\Delta \subseteq \Gamma$  使  $\Delta \vdash$  可证.

因为  $\Delta \subseteq \Phi$  所以  $Incon(\Phi)$ , 与  $Con(\Phi)$  矛盾. □

### 1.2

由于等词的存在, 我们可以确保公式集非空.

设  $A$  为任一公式,  $\Phi := \{A\}$ ,  $\Psi := \{\neg A\}$ .

易见  $Con(\Phi)$  且  $Con(\Psi)$ , 但  $Incon(\Phi \cup \Psi)$ .

## 2

### 2.1

证明:  $A, A \rightarrow B \vdash B$  可证; 又  $A, A \rightarrow B \in \Phi$ , 由命题6.7知  $B \in \Phi$ . □

### 2.2

证明: 因为  $\forall x. A \vdash A[\frac{t}{x}]$  可证.

所以, 由命题6.7可知  $A[\frac{t}{x}] \in \Phi$ . □

## 3

证明: 首先注意根据本书的定义, 一阶语言都是可数的. 那么设  $\Phi$  为  $\mathcal{L}$  的公式集且  $Con(\Phi)$ , 令  $\mathcal{L}$  的全体公式集为  $\{\varphi_n | n \in N\}$ ,

---

\*Ver. 1.2. 原答案由宋方敏教授给出手稿, 乔羽同学录入, 最后由丁超同学修订补充. 此文档来源为[https://github.com/sleepycoke/Mathematical\\_Logic\\_NJUCS](https://github.com/sleepycoke/Mathematical_Logic_NJUCS), 欢迎各位同学提出意见共同维护.

$$\Gamma_0 := \Phi$$

$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{Con}(\Gamma \cup \{\varphi_n\}) \\ \Gamma_n & \text{Incon}(\Gamma \cup \{\varphi_n\}) \end{cases}$$

$$\Gamma := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n,$$

以下证明

(1)  $\Phi \subseteq \Gamma$ , 即 $\Gamma$ 为 $\Phi$ 的扩张, 易见.

(2)  $\text{Con}(\Gamma)$ . 对 $n$ 作归纳易见 $\text{Con}(\Gamma_n)$ .

若 $\text{Incon}(\Gamma)$ 那么存在有穷集 $\Delta \subseteq \Gamma$ 使得 $\Delta \vdash$ 可证. 注意到对于任意 $\psi \in \Delta$ , 存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\psi \in \Gamma_k$ , 也就是有函数 $f: \Delta \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(\psi) = k$ . 取 $m := \max\{f(\psi) | \psi \in \Delta\}$ , 从而 $\Delta \subseteq \Gamma_m$ . 于是 $\text{Incon}(\Gamma_m)$ , 矛盾.

因此 $\text{Con}(\Gamma)$ .

(3)  $\Gamma$ 为极大协调. 即若 $\text{Con}(\Gamma \cup \{\varphi_n\})$ , 则 $\varphi_n \in \Gamma$ .

设 $\text{Con}(\Gamma \cup \{\varphi_n\})$ .

Case1.  $\text{Con}(\Gamma_n \cup \{\varphi_n\})$ , 从而 $\varphi \in \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} = \Gamma_{n+1}$ . 又 $\Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma$ , 有 $\varphi \in \Gamma$

Case2.  $\text{Incon}(\Gamma_n \cup \{\varphi_n\})$ , 从而有有穷集 $\Delta \subseteq \Gamma_n$ 使得 $\Delta, \varphi \vdash$ 可证. 又 $\Delta \subseteq \Gamma$ , 有 $\text{Incon}(\Gamma \cup \{\varphi_n\})$ , 矛盾.

因此 $\Gamma$ 为 $\Phi$ 的扩张且 $\Gamma$ 是极大协调的. □

## 4

### 4.1

证明: 令 $P(x)$ 为 $x \doteq s$ .

从而 $s \doteq t, P(s) \vdash P(t)$ 可证, 事实上为公理(定义6.10(3)).

即 $s \doteq t, s \doteq s \vdash t \doteq s$ 可证.

又 $\vdash s \doteq s$ 可证.

故 $s \doteq t \vdash t \doteq s$ 可证(由前两条Cut得).

因此 $\vdash (s \doteq t) \rightarrow (t \doteq s)$ 可证(对上条使用 $\rightarrow R$ ). □

### 4.2

证明: 令 $P(x)$ 为 $c \doteq u$ ,

从而 $t \doteq s, P(t) \vdash P(s)$ 可证,

即 $t \doteq s, t \doteq u \vdash s \doteq u$ , 可证.

又 $s \doteq t \vdash t \doteq s$ 可证,

故 $s \doteq t, t \doteq u \vdash s \doteq u$ 可证(由前两条Cut得),

从而 $\vdash (s \doteq t) \rightarrow ((t \doteq u) \rightarrow (s \doteq u))$ 可证(对上条使用两次 $\rightarrow R$ ). □

## 5

证明: 因为 $||\mathcal{L}|| = \aleph_0$ (注: 事实上按书上定义的一阶语言都是可数的)

所以 $||Term|| = \aleph_0, ||Formula|| = \aleph_0$ . 令 $\mathcal{L}' := \mathcal{L} \cup \{c_n | n \in \mathbb{N}\}$ ,

$\Phi$ 有模型  $\Rightarrow Con(\Phi) \Rightarrow$  存在 $\Phi$ 在 $\mathcal{L}'$ 中的Henkin集扩张 $\Psi$ . (定理6.17).

又 $\Psi$ 是Hintikka集(定理6.18), 可根据定义3.11和引理3.33找到 $\Psi$ 的一个 $\mathcal{L}'$ 中的可数模型 $\mathbb{M}$ . 由于 $\Phi \subseteq \Psi$ ,  $\mathbb{M}$ 也同时满足了 $\Phi$ 中的所有公式. 那么我们最后只要定义 $\mathbb{M}$ 为 $\mathbb{M}$ 去掉 $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ 中额外加入的常元的解释后得到的结构,  $\mathbb{M}$ 就是 $\Phi$ 的一个(在 $\mathcal{L}$ 中的)可数模型.  $\square$

此问题有更一般的结果, 参见Löwenheim-Skolem Theorem.

## 6

证明:  $\Gamma, A[\frac{c}{x}] \vdash B$

$\Rightarrow \Gamma, A[\frac{c}{x}] \vdash B$  可证(完全性).

$\Rightarrow \Gamma, A[\frac{c}{x}] \vdash B$  有证明树, 设为 $T(c)$ .

$\Rightarrow \Gamma, A[\frac{y}{x}] \vdash B$  有证明树 $T(y)$ .

这里 $T(y)$ 为在 $T(c)$ 中由 $y$ 替换 $c$ 而得, 且 $y$ 为新变元. 理由同命题10.10. 可由结构归纳得.

$\Rightarrow \Gamma, \exists x A \vdash B$  可证(规则 $\exists L$ ).

$\Rightarrow \Gamma, \exists x A \vdash B$  (有效性).  $\square$

## 7

本题借用了LK中的 $WL, WR$ 规则, 其定义参见定义10.6, 在G中的正确性由命题4.12保证.

(1) 反例:  $M := \{0, 1\}, P_M := \{0\}$ .

(2) 证明:

$$\frac{\frac{\frac{Q(z), P(z) \vdash Q(z)}{Q(z) \vdash P(z) \rightarrow Q(z)} \rightarrow R}{\forall y Q(y), Q(z) \vdash P(z) \rightarrow Q(z)} WL}{\forall y Q(y) \vdash \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))} \forall L, \forall R \quad \frac{\frac{\frac{P(z) \vdash Q(z), P(z)}{\vdash P(z) \rightarrow Q(z), P(z)} \rightarrow R}{\vdash P(z) \rightarrow Q(z), P(z), \exists x P(x)} WR}{\vdash \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x)} \exists R, \forall R \rightarrow L$$

$$\frac{\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y) \vdash \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))}{\vdash (\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)) \rightarrow (\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)))} \rightarrow R$$

$\square$

(3) 反例:  $M := \{0, 1\}, P_M := Q_M := \{0\}$ .

(4) 证明: 设 $A$ 为任一公式, 我们有:

$$\frac{\frac{\neg A \vdash \neg A \quad \frac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A} \neg R}{A \rightarrow \neg A \vdash \neg A} \rightarrow L \quad \frac{\frac{A \vdash A \quad \frac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A} \neg R}{\neg A \rightarrow A \vdash A} \rightarrow L}{\neg A \rightarrow A, \neg A \vdash} \neg L}{A \leftrightarrow \neg A \vdash} Cut, \wedge L$$

从而有  $R(z, z) \leftrightarrow \neg R(z, z) \vdash$  可证. 再注意到

$$R(z, z) = R(x, z)\left[\frac{z}{x}\right], \quad \neg R(z, z) = \neg R(x, x)\left[\frac{z}{x}\right]$$

继而有

$$R(z, z) \leftrightarrow \neg R(z, z) = (R(x, z) \leftrightarrow \neg R(x, x))\left[\frac{z}{x}\right].$$

那么我们有证明树

$$\frac{\frac{\frac{R(z, z) \leftrightarrow \neg R(z, z) \vdash}{\forall x(R(x, z) \leftrightarrow \neg R(x, x)), R(z, z) \leftrightarrow \neg R(z, z) \vdash} WL}{\frac{\forall x(R(x, z) \leftrightarrow \neg R(x, x)) \vdash}{\exists y \forall x(R(x, y) \leftrightarrow \neg R(x, x)) \vdash} \exists L} \forall L}{\vdash \neg \exists y \forall x(R(x, y) \leftrightarrow \neg R(x, x))} \neg R$$

□