

数理逻辑第七讲习题参考答案^{*}

2018 年 6 月 13 日

经黄毅飞提醒, 默认 P, Q, R 为谓词符, f 为函数符, c 为常元符, A 是公式, x, y, z, u 是变元.

1

此题答案由陈劭源给出.

$$\begin{aligned} & (\forall x \exists y \forall z \exists u P(x, y, z, u))^s \\ &= \forall x (\exists y \forall z \exists u P(x, y, z, u))^s \\ &= \forall x (\forall z \exists u P(x, f(x), z, u))^s \quad \text{这里 } f \text{ 为一元新函数} \\ &= \forall x \forall z (\exists u P(x, f(x), z, u))^s \\ &= \forall x \forall z (P(x, f(x), z, g(x, z)))^s \quad \text{这里 } g \text{ 为二元新函数} \\ &= \forall x \forall z P(x, f(x), z, g(x, z)) \end{aligned}$$

2

此题答案由杨嘉文板书补充得.

Proof. 引入记号 “ $\vdash\vdash$ ”:

$$A \vdash\vdash B \Leftrightarrow A \vdash B \text{ 且 } B \vdash A.$$

那么显然有

$$\vdash A \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \vdash\vdash B \Rightarrow A \rightarrow C \vdash\vdash B \rightarrow C \quad (*)$$

且它是一个等价关系.

$$\begin{aligned} & (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \rightarrow \exists z P(z) \\ & \vdash\vdash (\forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y))) \rightarrow \exists z P(z) && \text{命题 7.4(3), } (*) \\ & \vdash\vdash \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y) \rightarrow \exists z P(z)) && \text{命题 7.4(5), 命题 7.3(1)} \\ & \vdash\vdash \exists x \exists y \exists z (P(x) \wedge Q(y) \rightarrow P(z)) && \text{命题 7.4(8), 命题 7.3(1)} \end{aligned}$$

^{*}Ver. 1.2. 原答案由宋方敏教授给出手稿, 乔羽同学录入, 最后由丁超同学修订补充. 此文档来源为https://github.com/sleepycoke/Mathematical_Logic_NJUCS, 欢迎各位同学提出意见共同维护.

于是

$$\vdash [(\forall xP(x) \wedge \forall yQ(y)) \rightarrow \exists zP(z)] \leftrightarrow [\exists x\exists y\exists z(P(x) \wedge Q(y) \rightarrow P(z))].$$

□

3

此答案由孙旭东的板书精简得.

Proof. 设 A 中量词的个数为 n , 下面对 n 作归纳证明.

Basis: $n = 0$. 此时 $A^s = A$, 从而 $FV(A^s) = FV(A) = \emptyset$.

I.H.: $n \leq k$ 时 $FV(A^s) = \emptyset$.

I.S.: 设 $n = k+1$, A 呈形 QxB , 从而 B 的量词个数为 k , 且 $FV(B) \subseteq FV(A)$. 又 $FV(A) = \emptyset$, 则 $FV(B) = \emptyset$. 由归纳假设有 $FV(B^s) = FV(B) = \emptyset$.

若 Q 为 \forall , 那么 $A^s = \forall xB^s$. 而又由于 $FV(A^s) = FV(B^s) \setminus \{x\}$, $FV(A^s) = \emptyset$.

若 Q 为 \exists , 那么由 $FV(A) = \emptyset$ 有 $A^s = (B[\frac{c}{x}])^s$, c 为新常元. 注意到 $B[\frac{c}{x}]$ 的量词个数不超过 k 且 $FV(B[\frac{c}{x}]) = FV(B) \setminus \{x\} = \emptyset$, 那么由归纳假设 $FV((B[\frac{c}{x}])^s) = \emptyset$. 最后 $FV(A^s) = FV((B[\frac{c}{x}])^s) = FV(B^s) = \emptyset$.

综上, $FV(A^s) = \emptyset$.

□

4

先给出一个语义证明:

Proof. 设 \mathfrak{M} 为任意结构.

设 $\mathfrak{M} \models \exists x\forall yP(x, y)$, 以下证明 $\mathfrak{M} \models \forall y\exists xP(x, y)$.

$\mathfrak{M} \models \exists x\forall yP(x, y)$

\Rightarrow 存在 $a \in M$ 对任何 $b \in M$, 有 $(a, b) \in P_M$

\Rightarrow 对任何 $b \in M$, 有 $a \in M$ 使得 $(a, b) \in P_M$

$\Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall y\exists xP(x, y)$

□

再给出陈劭源在 G 中的语法证明:

Proof.

$$\begin{array}{c} \text{Axiom} \\ \frac{P(u, v) \vdash P(u, v)}{\forall yP(u, y) \vdash \exists xP(x, v)} \forall L, \exists R \\ \frac{\forall yP(u, y) \vdash \exists xP(x, v)}{\exists x\forall yP(x, y) \vdash \forall y\exists xP(x, y)} \forall R, \exists L \\ \frac{\exists x\forall yP(x, y) \vdash \forall y\exists xP(x, y)}{\vdash \exists x\forall yP(x, y) \rightarrow \forall y\exists xP(x, y)} \rightarrow R \end{array}$$

□

5

直接引用陈劭源的答案:

Proof. 构造模型 $\mathfrak{M} = (M, \sigma)$, 其中 $M = \{1, 2\}$, $P_M = \{(1, 1), (2, 2)\}$, 则易验证 $\mathfrak{M} \not\models_{\sigma} \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$, 从而 $\not\models \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$. \square

6

先给出一个语义证明:

Proof. 设 \mathfrak{M} 为任意结构

$\mathfrak{M} \models \forall x P(x, f(x))$

\Rightarrow 对任何 $a \in M$, $(a, f_M(a)) \in P_M$

\Rightarrow 对任何 $a \in M$ 有 $b \in M$ 使 $(a, b) \in P_M$

$\Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x, y)$

所以 $\mathfrak{M} \models \forall x P(x, f(x)) \Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x, y)$

即 $\models \forall x P(x, f(x)) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$ \square

再引用陈劭源在 G 中的语法证明:

Proof.

$$\begin{array}{c} \text{Axiom} \\ \frac{P(z, f(z)) \vdash P(z, f(z))}{P(z, f(z)) \vdash \exists y P(z, y)} \exists R \\ \frac{P(z, f(z)) \vdash \exists y P(z, y)}{\forall x P(x, f(x)) \vdash \exists y P(z, y)} \forall L \\ \frac{\forall x P(x, f(x)) \vdash \exists y P(z, y)}{\forall x P(x, f(x)) \vdash \forall x \exists y P(x, y)} \forall R \\ \frac{\forall x P(x, f(x)) \vdash \forall x \exists y P(x, y)}{\vdash \forall x P(x, f(x)) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)} \rightarrow R \end{array}$$

\square

7

此题实际上是定理 7.7 的一个直接结果.

首先给出宋方敏教授的证明:

Proof. $\forall x \exists y P(x, y)$ 可满足

\Rightarrow 存在结构 $\mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x, y)$. 设其论域为 M .

\Rightarrow 对任何 $a \in M$ 有 $b \in M$ 使得 $(a, b) \in P_M$.

\Rightarrow 对任何 $a \in M$, $M_a := \{b \mid (a, b) \in P_M\} \neq \emptyset$.

由选择公理知, 存在 $\tau: \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow M$.

\Rightarrow 对任何 $a \in M$, $\tau(M_a) \in M_a$

\Rightarrow 对任何 $a \in M$, $(a, \tau(M_a)) \in P_M$,

\Rightarrow 令 $f_{M'} = \{(a, \tau(M_a)) \mid a \in M\}$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + f_{M'}$.

那么有 $\mathfrak{M}' \models \forall x P(x, f(x))$, 即 $\forall x P(x, f(x))$ 可满足. \square

下面给出陈劭源的一个更具体的证明:

Proof. 构造模型 $\mathfrak{M} = (M, \sigma)$, 其中 $M = \{0\}$, $P_M = \{(0, 0)\}$, $f_{M'}(0) = 0$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + f_{M'}$. 则易验证 $\mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x, y)$ 和 $\mathfrak{M}' \models \forall x P(x, f(x))$. 从而 $\forall x \exists y P(x, y)$ 可满足 $\Rightarrow \forall x P(x, f(x))$ 可满足. \square

读到这里想必你已经发现, 由于此题的两个公式给得太具体了, 我们只要证出以下命题之一就足够

- $\forall x \exists y P(x, y)$ 矛盾;
- $\forall x P(x, f(x))$ 可满足.

而事实上后者很容易就可以构造出模型.

8

设 A 为 $P(f(c))$,

$$H_0 = \{c\},$$

$$H_1 = H_0 \cup \{f(t) | t \in H_0\} = \{c\} \cup \{f(c)\} = \{c, f(c)\},$$

$$H_2 = \{c, f(c), f^2(c)\},$$

...

$$H_n = \{c, f(c), \dots, f^n(c)\},$$

$$H = \{f^n(c) | n \in N\}.$$

9

丁超认为此题结论要修正为 $|H_n| < \aleph_0$ 而且 $|H_A| \leq \aleph_0$.

Proof. 若 A 中无函数符, 那么对任何 n , $H_A = H_n = H_0$, 结论成立.

若 A 中有函数符, 对 n 归纳证明 H_n 有穷.

Basis: $n = 0, H_0 = \{c_0\}$ 或 $\{c | c \text{ 为 } \alpha \text{ 中常元}\}$, 易见 H_n 有穷.

I.H.: H_k 有穷

I.S.: $H_{k+1} = H_k \cup \{f(t_1, \dots, t_m) | t_i \in H_k, f \text{ 为 } A \text{ 中 } m \text{ 元函数符}\}$

注意到对于特定的函数符 f_0 , $|\{f_0(t_1, \dots, t_m) | t_i \in H_k\}| = |H_k^m|$. 由归纳假设 H_k 有穷, 从而上式 $< \aleph_0$. 又由于 A 的函数符集是有穷的, $\{f(t_1, \dots, t_m) | t_i \in H_k, f \text{ 为 } A \text{ 中 } m \text{ 元函数符}\}$ 有穷.

从而 H_{k+1} 有穷.

于是 H_n 有穷.

最后 H_A 是可数个有穷集的并, 一定可数. 而由第 8 题知 H_A 又是无穷的, 那么就一定有 $|H_A| = \aleph_0$. \square