数理逻辑第七讲习题参考答案*

2018 年 6 月 24 日

经黄毅飞提醒, 默认 P, Q, R 为谓词符, f 为函数符, c 为常元符, A 是公式, x, y, z, u 是变元.

1

此题答案由陈劭源给出.

$$
\begin{aligned}
&(\forall x \exists y \forall z \exists u P(x,y,z,u))^s \\
=&\forall x (\exists y \forall z \exists u P(x,y,z,u))^s \\
=&\forall x (\forall z \exists u P(x,f(x),z,u))^s \quad \text{这里 } f \text{ 为一元新函数} \\
=&\forall x \forall z (\exists u P(x,f(x),z,u))^s \\
=&\forall x \forall z (P(x,f(x),z,g(x,z)))^s \quad \text{这里 } g \text{ 为二元新函数} \\
=&\forall x \forall z P(x,f(x),z,g(x,z))
\end{aligned}
$$

2

此题答案由杨嘉文板书补充得.

Proof. 引入记号 "$\vdash\dashv$":

$$A \vdash\dashv B \Leftrightarrow A \vdash B \text{且} B \vdash A.$$

那么显然有

$$\vdash A \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \vdash\dashv B \Rightarrow A \to C \vdash\dashv B \to C \tag{*}$$

且它是一个等价关系.

$$
\begin{aligned}
&(\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \to \exists z P(z) && \\
\vdash\dashv&(\forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y))) \to \exists z P(z) && \text{命题 7.4(3), (*)} \\
\vdash\dashv&\exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y) \to \exists z P(z)) && \text{命题 7.4(5), 命题 7.3(1)} \\
\vdash\dashv&\exists x \exists y \exists z (P(x) \wedge Q(y) \to P(z)) && \text{命题 7.4(8), 命题 7.3(1)}
\end{aligned}
$$

*Ver. 1.3. 原答案由宋方敏教授给出手稿, 乔羽同学录入, 最后由丁超同学修订补充. 此文档来源为https://github.com/sleepycoke/Mathematical_Logic_NJUCS, 欢迎各位同学提出意见共同维护.

于是

$$\vdash [(\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \rightarrow \exists z P(z)] \leftrightarrow [\exists x \exists y \exists z (P(x) \wedge Q(y) \rightarrow P(z))].$$

□

3

丁超在简写孙旭东的板书时引入了一个明显且致命的错误, 感谢黄毅飞指出它并给出另一个证明: 我们证明一个更强的结论, $FV(A^s) \subseteq FV(A)$

Proof. 设 A 的量词数为 n, 我们对 n 进行归纳证明.

Basis: $n = 0$. 此时 $A^s = A$, 从而 $FV(A^s) \subseteq FV(A)$.

I.H.: $n \leq k$ 时 $FV(A^s) \subseteq FV(A)$.

I.S.: 设 $n = k + 1$, A 呈形 QxB, 从而 B 的量词个数为 k, 以及 $FV(A) = FV(B) \backslash \{x\}$.

若 Q 为 $\forall$, 那么 $A^s = \forall x B^s$, 则 $FV(A^s) = FV(B^s) \backslash \{x\}$. 又根据归纳假设有 $FV(B^s) \subseteq FV(B)$, 有 $FV(A^s) = FV(B^s) \backslash \{x\} \subseteq FV(B) \backslash \{x\} = FV(A)$.

若 Q 为 $\exists$, 那么不妨设 $FV(A) = \{x_1, x_2, ..., x_i\}$($FV(A) = \emptyset$ 情况类似, 不赘述), 从而 $A^s = (B[\frac{f(x_1,x_2,...,x_i)}{x}])^s$. 注意到 $B[\frac{f(x_1,x_2,...,x_i)}{x}]$ 的量词只有 k 个, 因此根据归纳假设我们有 $FV((B[\frac{f(x_1,x_2,...,x_i)}{x}])^s) \subseteq FV(B[\frac{f(x_1,x_2,...,x_i)}{x}])$. 另有 $FV(B[\frac{f(x_1,x_2,...,x_i)}{x}]) \subseteq FV(A)$, 整体有

$$FV(A^s) = FV((B[\frac{f(x_1,x_2,...,x_i)}{x}])^s) \subseteq FV(A).$$

综上, $FV(A^s) \subseteq FV(A)$, 从而有 $FV(A) = \emptyset \Rightarrow FV(A^s) = \emptyset$ □

4

先给出一个语义证明:

Proof. 设 $\mathfrak{M}$ 为任意结构.
设 $\mathfrak{M} \models \exists x \forall y P(x,y)$, 以下证明 $\mathfrak{M} \models \forall y \exists x P(x,y)$.
$\mathfrak{M} \models \exists x \forall y P(x,y)$
$\Rightarrow$ 存在 $a \in M$ 对任何 $b \in M$, 有 $(a,b) \in P_M$
$\Rightarrow$ 对任何 $b \in M$, 有 $a \in M$ 使得 $(a,b) \in P_M$
$\Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall y \exists x P(x,y)$ □

再给出陈劭源在 G 中的语法证明:

Proof.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Axiom}}{P(u,v) \vdash P(u,v)}}{\forall y P(u,y) \vdash \exists x P(x,v)}\ \forall L, \exists R}{\exists x \forall y P(x,y) \vdash \forall y \exists x P(x,y)}\ \forall R, \exists L}{\vdash \exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)}\ \rightarrow R$$

□

5

直接引用陈劭源的答案:

Proof. 构造模型 $\mathfrak{M} = (M, \sigma)$，其中 $M = \{1, 2\}$，$P_M = \{(1,1),(2,2)\}$，则易验证 $\mathfrak{M} \nvDash_\sigma \forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$，从而 $\nvDash \forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$. □

6

先给出一个语义证明:

Proof. 设 $\mathfrak{M}$ 为任意结构
$\mathfrak{M} \vDash \forall x P(x, f(x))$
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M, (a, f_M(a)) \in P_M$
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$ 有 $b \in M$ 使 $(a, b) \in P_M$
$\Rightarrow \mathfrak{M} \vDash \forall x \exists y P(x, y)$
所以 $\mathfrak{M} \vDash \forall x P(x, f(x)) \Rightarrow \mathfrak{M} \vDash \forall x \exists y P(x, y)$
即 $\vDash \forall x P(x, f(x)) \to \forall x \exists y P(x, y)$ □

再引用陈劭源在 G 中的语法证明:

Proof.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Axiom}}{P(z, f(z)) \vdash P(z, f(z))}}{P(z, f(z)) \vdash \exists y P(z, y)} \exists R}{\forall x P(x, f(x)) \vdash \exists y P(z, y)} \forall L}{\forall x P(x, f(x)) \vdash \forall x \exists y P(x, y)} \forall R}{\vdash \forall x P(x, f(x)) \to \forall x \exists y P(x, y)} \to R$$

□

7

此题实际上是定理 7.7 的一个直接结果.
首先给出宋方敏教授的证明:

Proof. $\forall x \exists y P(x, y)$ 可满足
$\Rightarrow$ 存在结构 $\mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x, y)$. 设其论域为 M.
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$ 有 $b \in M$ 使得 $(a, b) \in P_M$.
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$, $M_a := \{b | (a, b) \in P_M\} \neq \emptyset$.
由选择公理知, 存在 $\tau : \mathcal{P}(M) \backslash \{\emptyset\} \to M$.
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$, $\tau(M_a) \in M_a$
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$, $(a, \tau(M_a)) \in P_M$,

$\Rightarrow$ 令 $f_{M'} = \{(a, \tau(M_a)) | a \in M\}$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + f_{M'}$.
那么有 $\mathfrak{M}' \vDash \forall x P(x, f(x))$, 即 $\forall x P(x, f(x))$ 可满足.

$\square$

下面给出陈劭源的一个更具体的证明:

Proof. 构造模型 $\mathfrak{M} = (M, \sigma)$, 其中 $M = \{0\}$, $P_M = \{(0,0)\}$, $f_{M'}(0) = 0$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + f_{M'}$. 则易验证 $\mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x, y)$ 和 $\mathfrak{M}' \models \forall x P(x, f(x))$. 从而 $\forall x \exists y P(x, y)$ 可满足 $\Rightarrow \forall x P(x, f(x))$ 可满足. $\square$

读到这里想必你已经发现, 由于此题的两个公式给得太具体了, 我们只要证出以下命题之一就足够

- $\forall x \exists y P(x, y)$ 矛盾;
- $\forall x P(x, f(x))$ 可满足.

而事实上后者很容易就可以构造出模型.

8

设 A 为 $P(f(c))$,
$H_0 = \{c\}$,
$H_1 = H_0 \cup \{f(t) | t \in H_0\} = \{c\} \cup \{f(c)\} = \{c, f(c)\}$,
$H_2 = \{c, f(c), f^2(c)\}$,
...
$H_n = \{c, f(c), ..., f^n(c)\}$,
$H = \{f^n(c) | n \in N\}$.

9

丁超认为此题结论要修正为 $|H_n| < \aleph_0$ 而且 $|H_A| \leq \aleph_0$.

Proof. 若 A 中无函数符, 那么对任何 n, $H_A = H_n = H_0$, 结论成立.
若 A 中有函数符, 对 n 归纳证明 H_n 有穷.

Basis: $n = 0, H_0 = \{c_0\}$ 或 $\{c | c$ 为 α 中常元 $\}$, 易见 H_n 有穷.

I.H.: H_k 有穷

I.S.: $H_{k+1} = H_k \cup \{f(t_1, ..., t_m) | t_i \in H_k$, f 为 A 中 m 元函数符.$\}$

注意到对于特定的函数符 f_0, $|\{f_0(t_1, ..., t_m) | t_i \in H_k\}| = |H_k^m|$. 由归纳假设 H_k 有穷, 从而上式 $< \aleph_0$. 又由于 A 的函数符集是有穷的, $\{f(t_1, ..., t_m) | t_i \in H_k$, f 为 A 中 m 元函数符.$\}$ 有穷.

从而 H_{k+1} 有穷.

于是 H_n 有穷.

最后 H_A 是可数个有穷集的并，一定可数. 而由第 8 题知 H_A 又是无穷的, 那么就一定有 $|H_A| = \aleph_0$.

$\square$