1

1.1

反设Incon(Φ)，则有在有公式集$S \subseteq \Phi \cap \Psi$ 使$S \vdash$ 可证，
因为$S \subseteq \Phi$ 所以$Incon(\Phi)$ 与$con(\Phi)$ 矛盾。

1.2

情况a，当$\Phi = \Psi$ 时，1.2 成立。
情况b，当$\Phi = \{p(a)\}$, $\Phi = \{\neg p(a)\}$
这里P为一元谓词, a为常元，易见$con(\Phi)$，且$con(\Psi)$，但$Incon(\Psi \cup \Phi)$.

2

2.1

因为$A, A \to B \vdash$, 可证，又$A, A \to B \in \Phi$
所以由命题9.7知$B \in \Phi$

2.2

因为$\forall x.A \vdash A[\frac{t}{x}]$ 可证
所以由命题9.7克制$A[\frac{t}{x}] \in \Phi$

3

设Φ 为$\mathscr{L}$的公式集且$con(\Phi)$,
令$\mathscr{L}$ 的全体公式集为$\{\varphi_n | n \in N\}$.
令$\Gamma_0 = \Phi$
$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & con(\Gamma \cup \{\varphi_n\}) \\ \Gamma_n & con(\neg\Gamma \cup \{\varphi_n\}) \end{cases}$
$\Gamma = \cup_{n \in N} \Gamma_n$, 以下证明
（1）$\Phi \in \Gamma$, 即Γ为Φ的扩展，易见，
（2）$con(\Gamma)$,对n 作归纳易见$con(\Gamma_n)$
而$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq ... \subseteq \Gamma_n \subseteq ...$ 因此$con(\Gamma)$.
（3）Γ为极大协调，即若$con(\Gamma, \varphi_n)$，则$\varphi \in \Gamma$
设$con(\Gamma, \varphi_n)$。
case1. $con(\Gamma_n, \varphi_n)$,从而$\varphi_n \in \Gamma_{n+1}$,故$\varphi_n \in \Gamma$
case2. $\neg con(\Gamma_n, \varphi_n)$ 从而与$con(\Gamma, \varphi_n)$矛盾，此情况不成立。
因此Γ 为Φ 的扩张且Γ 是极大协调的。

4

4.1

令$P(x)$ 为$x \doteq S$
从而$S \doteq t, P(s) \vdash P(t)$可证，事实上为公理。
即$S \doteq t, S \doteq S \vdash t \doteq S$可证
又$\vdash S \doteq S$可证
故$S \doteq t \vdash t \doteq S$可证
因此$\vdash (S \doteq t) \to (t \doteq s)$ 可证

4.2

令$P(x)$ 为$c \doteq u$,从而
$t \doteq S, P(t) \vdash P(S)$ 可证，即
$t \doteq S, t \doteq u \vdash s \doteq u$, 可证又$S \doteq t, \vdash t \doteq s$, 可证
故$S \doteq t, t \doteq u \vdash s \doteq u$ 可证，从而
$\vdash (S \doteq t) \to ((t \doteq u) \to (s \doteq u))$可证

5

因为$||\mathscr{L}|| = \aleph_0$
所以$||\mathscr{T}erm|| = \aleph_0$，$||\mathscr{F}ormula|| = \aleph_0$
因为ΦL 又model
$\Rightarrow con(\Phi)$
$\Rightarrow$存在$\Psi \leq \Phi$ 使$||\Psi|| \leq \aleph_0$,且Ψ为Henkin集。
$\Rightarrow$存在$\Psi \leq \Phi$ 使$||\Psi|| \leq \aleph_0$,且Ψ为Hintikka集。
$\Rightarrow$存在$\Psi \leq \Phi$ 使$||\Psi|| \leq \aleph_0$,且Ψ有model其域势$\leq \aleph_0$。
$\Rightarrow$ Φ有model其域势$\leq \aleph_0$。

6

因为$\Gamma, A\frac{c}{x}B$
$\Rightarrow \Gamma, A\frac{c}{x} \vdash B$ 可证
$\Rightarrow \Gamma, A\frac{c}{x} \vdash B$ 有证明树$T(c)$
$\Rightarrow \Gamma, A\frac{y}{x} \vdash B$ 有证明树$T(y)$
这里$T(y)$为在$T(c)$中由y势c而得y为新变元。
$\Rightarrow$ 从而$\Gamma, \exists x A \vdash B$可证
$\Rightarrow \Gamma, \exists x A \vdash$可证

7

(1),(3),(4)反例
(2)可证