数理逻辑第七讲习题参考答案*

2018 年 6 月 12 日

1

此题答案由陈邵源给出.

$$
\begin{aligned}
&(\forall x\exists y\forall z\exists u P(x,y,z,u))^s\\
=&\forall x(\exists y\forall z\exists u P(x,y,z,u))^s\\
=&\forall x(\forall z\exists u P(x,f(x),z,u))^s \quad \text{这里 } f \text{ 为一元新函数}\\
=&\forall x\forall z(\exists u P(x,f(x),z,u))^s\\
=&\forall x\forall z(P(x,f(x),z,g(x,z)))^s \quad \text{这里 } g \text{ 为二元新函数}\\
=&\forall x\forall z P(x,f(x),z,g(x,z))
\end{aligned}
$$

2

此题答案由杨嘉文板书补充得.

Proof. 引入记号 “$\vdash\dashv$”:

$$A\vdash\dashv B \Leftrightarrow A\vdash B \text{且} B\vdash A.$$

那么显然有

$$\vdash A\leftrightarrow B \Leftrightarrow A\vdash\dashv B$$

且它是一个等价关系.

$$
\begin{aligned}
&(\forall xP(x)\wedge\forall yQ(y))\to\exists zP(z)\\
\vdash\dashv&(\forall x\forall y(P(x)\wedge Q(y)))\to\exists zP(z) && \text{命题 7.4(3)}\\
\vdash\dashv&\exists x\exists y(P(x)\wedge Q(y)\to\exists zP(z)) && \text{命题 7.4(5), 命题 7.3(1)}\\
\vdash\dashv&\exists x\exists y\exists z(P(x)\wedge Q(y)\to P(z)) && \text{命题 7.4(8), 命题 7.3(1)}
\end{aligned}
$$

于是

$$\vdash[(\forall xP(x)\wedge\forall yQ(y))\to\exists zP(z)]\leftrightarrow[\exists x\exists y\exists z(P(x)\wedge Q(y)\to P(z))].$$

□

*Ver. 1.0. 原答案由宋方敏教授给出手稿，乔羽同学录入，最后由丁超同学修订补充. 此文档来源为https://github.com/sleepycoke/Mathematical_Logic_NJUCS, 欢迎各位同学提出意见共同维护.

3

此答案由孙旭东的板书精简得.

Proof. 设 A 中量词的个数为 n, 下面对 n 作归纳证明.

Basis: $n = 0$. 此时 $A^s = A$, 从而 $FV(A^s) = FV(A) = \emptyset$.

I.H.: $n \le k$ 时 $FV(A^s) = \emptyset$.

I.S.: 设 $n = k+1$, A 呈形 QxB, 从而 B 的量词个数为 k, 且 $FV(B) \subseteq FV(A)$. 又 $FV(A) = \emptyset$, 则 $FV(B) = \emptyset$. 由归纳假设有 $FV(B^s) = FV(B) = \emptyset$.

若 Q 为 $\forall$, 那么 $A^s = \forall x B^s$. 而又由于 $FV(A^s) = FV(B^s) \backslash \{x\}$, $FV(A^s) = \emptyset$.

若 Q 为 $\exists$, 那么由 $FV(A) = \emptyset$ 有 $A^s = (B[\frac{c}{x}])^s$, c 为新常元. 注意到 $B[\frac{c}{x}]$ 的量词个数不超过 k 且 $FV(B[\frac{c}{x}]) = FV(B) \backslash \{x\} = \emptyset$, 那么由归纳假设 $FV((B[\frac{c}{x}]^s) = \emptyset$. 最后 $FV(A^s) = FV((B[\frac{c}{x}])^s) = FV(B^s) = \emptyset$.

综上, $FV(A^s) = \emptyset$. □

4

先给出一个语义证明:

Proof. 设 $\mathfrak{M}$ 为任意结构.
设 $\mathfrak{M} \vDash \exists x \forall y P(x, y)$, 以下证明 $\mathfrak{M} \vDash \forall y \exists x P(x, y)$.
$\mathfrak{M} \vDash \exists x \forall y P(x, y)$
$\Rightarrow$ 存在 $a \in M$ 对任何 $b \in M$, 有 $(a, b) \in P_M$
$\Rightarrow$ 对任何 $b \in M$, 有 $a \in M$ 使得 $(a, b) \in P_M$
$\Rightarrow \mathfrak{M} \vDash \forall y \exists x P(x, y)$ □

再给出陈邵源在 G 中的语法证明:

Proof.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Axiom}}{P(u,v) \vdash P(u,v)}}{\forall y P(u,y) \vdash \exists x P(x,v)} \forall L, \exists R}{\exists x \forall y P(x,y) \vdash \forall y \exists x P(x,y)} \forall R, \exists L}{\vdash \exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)} \to R$$

□

5

直接引用陈邵源的答案:

Proof. 构造模型 $\mathfrak{M} = (M, \sigma)$, 其中 $M = \{1, 2\}$, $P_M = \{(1, 1), (2, 2)\}$, 则易验证 $\mathfrak{M} \nvDash_\sigma \forall x \exists y P(x, y) \to \exists y \forall x P(x, y)$, 从而 $\nvDash \forall x \exists y P(x, y) \to \exists y \forall x P(x, y)$. □

6

先给出一个语义证明:

Proof. 设 $\mathfrak{M}$ 为任意结构
$\mathfrak{M} \vDash \forall x P(x, f(x))$
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M, (a, f_M(a)) \in P_M$
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$ 有 $b \in M$ 使 $(a, b) \in P_M$
$\Rightarrow \mathfrak{M} \vDash \forall x \exists y P(x, y)$
所以 $\mathfrak{M} \vDash \forall x P(x, f(x)) \Rightarrow \mathfrak{M} \vDash \forall x \exists y P(x, y)$
即 $\vDash \forall x P(x, f(x)) \to \forall x \exists y P(x, y)$ □

再引用陈邵源在 G 中的语法证明:

Proof.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\text{Axiom}\\ P(z, f(z)) \vdash P(z, f(z))\end{array}}{P(z, f(z)) \vdash \exists y P(z, y)}\;\exists R}{\forall x P(x, f(x)) \vdash \exists y P(z, y)}\;\forall L}{\forall x P(x, f(x)) \vdash \forall x \exists y P(x, y)}\;\forall R}{\vdash \forall x P(x, f(x)) \to \forall x \exists y P(x, y)}\;\to R$$

□

7

此题实际上是定理 7.7 的一个直接结果.
首先给出宋方敏教授的证明:

Proof. $\forall x \exists y P(x, y)$ 可满足
$\Rightarrow$ 存在结构 $\mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x, y)$. 设其论域为 M.
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$ 有 $b \in M$ 使得 $(a, b) \in P_M$.
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$, $M_a := \{b | (a, b) \in P_M\} \neq \emptyset$.
由选择公理知, 存在 $\tau : \mathcal{P}(M) \backslash \{\emptyset\} \to M$.
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$, $\tau(M_a) \in M_a$
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$, $(a, \tau(M_a)) \in P_M$,
$\Rightarrow$ 令 $f_{M'} = \{(a, \tau(M_a)) | a \in M\}$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + f_{M'}$.
那么有 $\mathfrak{M}' \vDash \forall x P(x, f(x))$, 即 $\forall x P(x, f(x))$ 可满足.

□

下面给出陈邵源的一个更具体的证明:

Proof. 构造模型 $\mathfrak{M} = (M, \sigma)$, 其中 $M = \{0\}$, $P_M = \{(0, 0)\}$, $f_{M'}(0) = 0$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + f_{M'}$. 则易验证 $\mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x, y)$ 和 $\mathfrak{M}' \models \forall x P(x, f(x))$. 从而 $\forall x \exists y P(x, y)$ 可满足 $\Rightarrow \forall x P(x, f(x))$ 可满足. □

读到这里想必你已经发现, 由于此题的两个公式给得太具体了, 我们只要证出以下命题之一就足够

- $\forall x\exists yP(x,y)$ 矛盾;
- $\forall xP(x,f(x))$ 可满足.

而事实上后者很容易就可以构造出模型.

8

设 A 为 $P(f(c))$,
$H_0=\{c\}$,
$H_1=H_0\cup\{f(t)|t\in H_0\}=\{c\}\cup\{f(c)\}=\{c,f(c)\}$,
$H_2=\{c,f(c),f^2(c)\}$,
...
$H_n=\{c,f(c),...,f^n(c)\}$,
$H=\{f^n(c)|n\in N\}$.

9

丁超认为此题结论要修正为 $|H_n|<\aleph_0$ 而且 $|H_A|\leq\aleph_0$.

Proof. 若 A 中无函数符, 那么对任何 n, $H_A=H_n=H_0$, 结论成立.
若 A 中有函数符, 对 n 归纳证明 H_n 有穷.

Basis: $n=0, H_0=\{c_0\}$ 或 $\{c|c$ 为 α 中常元 $\}$, 易见 H_n 有穷.

I.H.: H_k 有穷

I.S.: $H_{k+1}=H_k\cup\{f(t_1,...,t_m)|t_i\in H_k, f$ 为 A 中 m 元函数符.$\}$

注意到对于特定的函数符 f_0, $|\{f_0(t_1,...,t_m)|t_i\in H_k\}|=|H_k^m|$. 由归纳假设 H_k 有穷, 从而上式 $<\aleph_0$. 又由于 A 的函数符集是有穷的, $\{f(t_1,...,t_m)|t_i\in H_k, f$ 为 A 中 m 元函数符.$\}$ 有穷.

从而 H_{k+1} 有穷.

于是 H_n 有穷.
最后 H_A 是可数个有穷集的并, 一定可数. 而由第 8 题知 H_A 又是无穷的, 那么就一定有 $|H_A|=\aleph_0$.

□