# 数理逻辑第六讲习题参考答案*

2018年6月30日

## 1

### 1.1

证明: 设$\Gamma := \Phi \cap \Psi$.
反设$Incon(\Gamma)$, 则存在非空有穷公式集$\Delta \subseteq \Gamma$ 使$\Delta \vdash$ 可证.
因为$\Delta \subseteq \Phi$ 所以$Incon(\Phi)$, 与$Con(\Phi)$ 矛盾. □

### 1.2

由于等词的存在, 我们可以确保公式集非空.
设$A$为任一公式, $\Phi := \{A\}$, $\Psi := \{\neg A\}$.
易见$Con(\Phi)$且$Con(\Psi)$, 但$Incon(\Phi \cup \Psi)$.

## 2

### 2.1

证明: $A, A \to B \vdash B$ 可证; 又$A, A \to B \in \Phi$, 由命题6.7知$B \in \Phi$. □

### 2.2

证明: 因为$\forall x.A \vdash A[\frac{t}{x}]$ 可证.
所以, 由命题6.7可知$A[\frac{t}{x}] \in \Phi$. □

## 3

证明: 首先注意根据本书的定义, 一阶语言都是可数的. 那么设$\Phi$为$\mathscr{L}$的公式集且$Con(\Phi)$, 令$\mathscr{L}$的全体公式集为$\{\varphi_n | n \in N\}$,

*Ver. 1.1. 原答案由宋方敏教授给出手稿, 乔羽同学录入, 最后由丁超同学修订补充. 此文档来源为https://github.com/sleepycoke/Mathematical_Logic_NJUCS, 欢迎各位同学提出意见共同维护.

$$\Gamma_0 := \Phi$$

$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & Con(\Gamma \cup \{\varphi_n\}) \\ \Gamma_n & Incon(\Gamma \cup \{\varphi_n\}) \end{cases}$$

$$\Gamma := \cup_{n \in N} \Gamma_n,$$

以下证明

(1) $\Phi \subseteq \Gamma$, 即$\Gamma$为$\Phi$的扩张, 易见.

(2) $Con(\Gamma)$. 对$n$作归纳易见$Con(\Gamma_n)$.

若$Incon(\Gamma)$那么存在有穷集$\Delta \subseteq \Gamma$使得$\Delta \vdash$可证. 注意到对于任意$\psi \in \Delta$, 存在$k \in \mathbb{N}$使得$\psi \in \Gamma_k$, 也就是有函数$f : \Delta \to \mathbb{N}$, $f(\psi) = k$. 取$m := \max\{f(\psi)|\psi \in \Delta\}$, 从而$\Delta \subseteq \Gamma_m$. 于是$Incon(\Gamma_m)$, 矛盾.

因此$Con(\Gamma)$.

(3) $\Gamma$为极大协调. 即若$Con(\Gamma \cup \{\varphi_n\})$, 则$\varphi_n \in \Gamma$.

设$Con(\Gamma \cup \{\varphi_n\})$.

Case1. $Con(\Gamma_n \cup \{\varphi_n\})$, 从而$\varphi \in \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} = \Gamma_{n+1}$. 又$\Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma$, 有$\varphi \in \Gamma$

Case2. $Incon(\Gamma_n \cup \{\varphi_n\})$, 从而有穷集$\Delta \subseteq \Gamma_n$使得$\Delta, \varphi \vdash$可证.又$\Delta \subseteq \Gamma$, 有$Incon(\Gamma \cup \{\varphi_n\})$, 矛盾.

因此$\Gamma$为$\Phi$的扩张且$\Gamma$是极大协调的. $\square$

# 4

## 4.1

证明: 令$P(x)$为$x \doteq s$.
从而$s \doteq t, P(s) \vdash P(t)$可证, 事实上为公理(定义6.10(3)).
即$s \doteq t, s \doteq s \vdash t \doteq s$可证.
又$\vdash s \doteq s$可证.
故$s \doteq t \vdash t \doteq s$可证(由前两条Cut得).
因此$\vdash (s \doteq t) \to (t \doteq s)$可证(对上条使用$\to R$). $\square$

## 4.2

证明: 令$P(x)$为$c \doteq u$,
从而$t \doteq s, P(t) \vdash P(s)$可证,
即$t \doteq s, t \doteq u \vdash s \doteq u$, 可证.
又$s \doteq t \vdash t \doteq s$ 可证,
故$s \doteq t, t \doteq u \vdash s \doteq u$ 可证(由前两条Cut得),
从而$\vdash (s \doteq t) \to ((t \doteq u) \to (s \doteq u))$可证(对上条使用两次$\to R$). $\square$

## 5

证明: 因为$||\mathscr{L}|| = \aleph_0$(注: 事实上按书上定义的一阶语言都是可数的)
所以$||\mathcal{T}erm|| = \aleph_0$, $||\mathcal{F}ormula|| = \aleph_0$. 令$\mathscr{L}' := \mathscr{L} \cup \{c_n | n \in \mathbb{N}\}$,
$\Phi$有模型 $\Rightarrow Con(\Phi) \Rightarrow$ 存在$\Phi$在$\mathscr{L}'$中的Henkin集扩张$\Psi$.(定理6.17).
又$\Psi$是Hintikka集(定理6.18), 可根据定义3.11和引理3.33找到$\Psi$的一个$\mathscr{L}'$中的可数模型$\mathbb{H}$. 由于$\Phi \subseteq \Psi$, $\mathbb{H}$也同时满足了$\Phi$中的所有公式. 那么我们最后只要定义$\mathbb{M}$为$\mathbb{H}$去掉$\mathscr{L}' \backslash \mathscr{L}$中额外加入的常元的解释后得到的结构, $\mathbb{M}$就是$\Phi$的一个(在$\mathscr{L}$中的)可数模型. $\square$

此问题有更一般的结果，参见Löwenheim-Skolem Theorem.

## 6

证明: $\Gamma, A[\frac{c}{x}] \models B$
$\Rightarrow \Gamma, A[\frac{c}{x}] \vdash B$可证(完全性).
$\Rightarrow \Gamma, A[\frac{c}{x}] \vdash B$ 有证明树, 设为$T(c)$.
$\Rightarrow \Gamma, A[\frac{y}{x}] \vdash B$ 有证明树$T(y)$.
这里$T(y)$为在$T(c)$中由$y$替换$c$而得, 且$y$为新变元. 理由同命题10.10. 可由结构归纳得.
$\Rightarrow \Gamma, \exists x A \vdash B$可证(规则$\exists L$).
$\Rightarrow \Gamma, \exists x A \models B$(有效性). $\square$

## 7

本题借用了LK中的$WL, WR$规则, 其定义参见定义10.6, 在G中的正确性由命题4.12保证.

(1) 反例: $M := \{0,1\}$, $P_M := \{0\}$.

(2) 证明:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$Q(z), P(z) \vdash Q(z)$}
\RightLabel{$\to R$}
\UnaryInfC{$Q(z) \vdash P(z) \to Q(z)$}
\RightLabel{$WL$}
\UnaryInfC{$\forall y Q(y), Q(z) \vdash P(z) \to Q(z)$}
\RightLabel{$\forall L, \forall R$}
\UnaryInfC{$\forall y Q(y) \vdash \forall x (P(x) \to Q(x))$}
\AxiomC{$P(z) \vdash Q(z), P(z)$}
\RightLabel{$\to R$}
\UnaryInfC{$\vdash P(z) \to Q(z), P(z)$}
\RightLabel{$WR$}
\UnaryInfC{$\vdash P(z) \to Q(z), P(z), \exists x P(x)$}
\RightLabel{$\exists R, \forall R$}
\UnaryInfC{$\vdash \forall x (P(x) \to Q(x)), \exists x P(x)$}
\RightLabel{$\to L$}
\BinaryInfC{$\exists x P(x) \to \forall y Q(y) \vdash \forall x (P(x) \to Q(x))$}
\RightLabel{$\to R$}
\UnaryInfC{$\vdash (\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to (\forall x (P(x) \to Q(x)))$}
\end{prooftree}
$$

$\square$

(3) 反例: $M := \{0,1\}$, $P_M := Q_M := \{0\}$.

(4) 证明: 设$A$为任一公式, 我们有:

$$\dfrac{\dfrac{\neg A \vdash \neg A \qquad \dfrac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A}\,\neg R}{A \to \neg A \vdash \neg A}\to L \qquad \dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A}\,\neg R}{\neg A \to A \vdash A}\to L}{\neg A \to A, \neg A \vdash}\,\neg L}{A \leftrightarrow \neg A \vdash}\,Cut, \wedge L$$

从而有$R(z,z) \leftrightarrow \neg R(z,z) \vdash$可证. 再注意到

$$R(z,z) = R(x,z)[\frac{z}{x}], \quad \neg R(z,z) = \neg R(x,x)[\frac{z}{x}]$$

继而有

$$R(z,z) \leftrightarrow \neg R(z,z) = (R(x,z) \leftrightarrow \neg R(x,x))[\frac{z}{x}].$$

那么我们有证明树

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{R(z,z) \leftrightarrow \neg R(z,z) \vdash}{\forall x(R(x,z) \leftrightarrow \neg R(x,x)), R(z,z) \leftrightarrow \neg R(z,z) \vdash}\,WL}{\forall x(R(x,z) \leftrightarrow \neg R(x,x)) \vdash}\,\forall L}{\exists y \forall x(R(x,y) \leftrightarrow \neg R(x,x)) \vdash}\,\exists L}{\vdash \neg \exists y \forall x(R(x,y) \leftrightarrow \neg R(x,x))}\,\neg R$$

$\square$