数理逻辑第七讲习题参考答案*

2019 年 5 月 27 日

经黄毅飞提醒, 默认 P, Q, R 为谓词符, f 为函数符, c 为常元符, A 是公式, x, y, z, u 是变元.

1

此题答案由陈劭源给出.

$$\begin{aligned}
&(\forall x\exists y\forall z\exists uP(x,y,z,u))^s\\
=&\forall x(\exists y\forall z\exists uP(x,y,z,u))^s\\
=&\forall x(\forall z\exists uP(x,f(x),z,u))^s \quad \text{这里 } f \text{ 为一元新函数}\\
=&\forall x\forall z(\exists uP(x,f(x),z,u))^s\\
=&\forall x\forall z(P(x,f(x),z,g(x,z)))^s \quad \text{这里 } g \text{ 为二元新函数}\\
=&\forall x\forall zP(x,f(x),z,g(x,z))
\end{aligned}$$

2

此题答案由杨嘉文板书补充得.

证明. 引入记号 “$\vdash\dashv$”:

$$A \vdash\dashv B \Leftrightarrow A \vdash B \text{且} B \vdash A.$$

那么显然有

$$\vdash A \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \vdash\dashv B \Rightarrow A \to C \vdash\dashv B \to C \qquad (*)$$

且它是一个等价关系.

$$\begin{aligned}
&(\forall xP(x) \land \forall yQ(y)) \to \exists zP(z) & \\
\vdash\dashv&(\forall x\forall y(P(x) \land Q(y))) \to \exists zP(z) & \text{命题 7.4(3), (*)}\\
\vdash\dashv&\exists x\exists y(P(x) \land Q(y) \to \exists zP(z)) & \text{命题 7.4(5), 命题 7.3(1)}\\
\vdash\dashv&\exists x\exists y\exists z(P(x) \land Q(y) \to P(z)) & \text{命题 7.4(8), 命题 7.3(1)}
\end{aligned}$$

*Ver. 1.4. 原答案由宋方敏教授给出手稿, 乔羽同学录入, 最后由丁超同学修订补充. 此文档来源为`https://github.com/sleepycoke/Mathematical_Logic_NJUCS`, 欢迎各位同学提出意见共同维护.

于是

$$\vdash [(\forall xP(x) \wedge \forall yQ(y)) \to \exists zP(z)] \leftrightarrow [\exists x\exists y\exists z(P(x) \wedge Q(y) \to P(z))].$$

□

3

丁超在简写孙旭东的板书时引入了一个明显且致命的错误, 感谢黄毅飞指出它并给出另一个证明: 我们证明一个更强的结论，$FV(A^s) \subseteq FV(A)$

证明. 设 A 的量词数为 n, 我们对 n 进行归纳证明.

Basis: $n = 0$. 此时 $A^s = A$, 从而 $FV(A^s) \subseteq FV(A)$.

I.H.: $n \leq k$ 时 $FV(A^s) \subseteq FV(A)$.

I.S.: 设 $n = k + 1$, A 呈形 QxB, 从而 B 的量词个数为 k, 以及 $FV(A) = FV(B)\backslash\{x\}$.

若 Q 为 $\forall$, 那么 $A^s = \forall xB^s$, 则 $FV(A^s) = FV(B^s)\backslash\{x\}$. 又根据归纳假设有 $FV(B^s) \subseteq FV(B)$, 有 $FV(A^s) = FV(B^s)\backslash\{x\} \subseteq FV(B)\backslash\{x\} = FV(A)$.

若 Q 为 $\exists$, 那么不妨设 $FV(A) = \{x_1, x_2, ..., x_i\}$($FV(A) = \emptyset$ 情况类似, 不赘述), 从而 $A^s = (B[\frac{f(x_1,x_2,...,x_i)}{x}])^s$. 注意到 $B[\frac{f(x_1,x_2,...,x_i)}{x}]$ 的量词只有 k 个, 因此根据归纳假设我们有 $FV((B[\frac{f(x_1,x_2,...,x_i)}{x}])^s) \subseteq FV(B[\frac{f(x_1,x_2,...,x_i)}{x}])$. 另有 $FV(B[\frac{f(x_1,x_2,...,x_i)}{x}]) \subseteq FV(A)$, 整体有

$$FV(A^s) = FV((B[\frac{f(x_1, x_2, ..., x_i)}{x}])^s) \subseteq FV(A).$$

综上, $FV(A^s) \subseteq FV(A)$，从而有 $FV(A) = \emptyset \Rightarrow FV(A^s) = \emptyset$ □

4

先给出一个语义证明:

证明. 设 $\mathfrak{M}$ 为任意结构.
设 $\mathfrak{M} \models \exists x\forall yP(x, y)$, 以下证明 $\mathfrak{M} \models \forall y\exists xP(x, y)$.
$\mathfrak{M} \models \exists x\forall yP(x, y)$
$\Rightarrow$ 存在 $a \in M$ 对任何 $b \in M$, 有 $(a, b) \in P_{\mathfrak{M}}$
$\Rightarrow$ 对任何 $b \in M$, 有 $a \in M$ 使得 $(a, b) \in P_{\mathfrak{M}}$
$\Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall y\exists xP(x, y)$ □

再给出陈劭源在 G 中的语法证明:

证明.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Axiom}}{P(u,v) \vdash P(u,v)}}{\forall yP(u,y) \vdash \exists xP(x,v)}\ \forall L, \exists R}{\exists x\forall yP(x,y) \vdash \forall y\exists xP(x,y)}\ \forall R, \exists L}{\vdash \exists x\forall yP(x,y) \to \forall y\exists xP(x,y)}\ \to R$$

$\square$

5

直接引用陈劭源的答案:

证明. 构造模型 $\mathfrak{M} = (M, \sigma)$，其中 $M = \{1, 2\}$，$P_{\mathfrak{M}} = \{(1,1), (2,2)\}$，则易验证 $\mathfrak{M} \not\models_{\sigma} \forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$，从而 $\not\models \forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$. $\square$

6

先给出一个语义证明:

证明. 设 $\mathfrak{M}$ 为任意结构
$\mathfrak{M} \models \forall x P(x, f(x))$
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M, (a, f_{\mathfrak{M}}(a)) \in P_{\mathfrak{M}}$
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$ 有 $b \in M$ 使 $(a,b) \in P_{\mathfrak{M}}$
$\Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x,y)$
所以 $\mathfrak{M} \models \forall x P(x, f(x)) \Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x,y)$
即 $\models \forall x P(x, f(x)) \to \forall x \exists y P(x,y)$ $\square$

再引用陈劭源在 G 中的语法证明:

证明.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Axiom}}{P(z, f(z)) \vdash P(z, f(z))}}{P(z, f(z)) \vdash \exists y P(z, y)}\ \exists R}{\forall x P(x, f(x)) \vdash \exists y P(z, y)}\ \forall L}{\forall x P(x, f(x)) \vdash \forall x \exists y P(x, y)}\ \forall R}{\vdash \forall x P(x, f(x)) \to \forall x \exists y P(x, y)}\ \to R
$$

$\square$

7

此题实际上是定理 7.7 的一个直接结果.
首先给出宋方敏教授的证明:

证明. $\forall x \exists y P(x,y)$ 可满足
$\Rightarrow$ 存在结构 $\mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x,y)$. 设其论域为 M.
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$ 有 $b \in M$ 使得 $(a,b) \in P_{\mathfrak{M}}$.
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$, $M_a := \{b | (a,b) \in P_{\mathfrak{M}}\} \neq \emptyset$.
由选择公理知, 存在 $\tau : \mathcal{P}(M) \backslash \{\emptyset\} \to M$.
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$, $\tau(M_a) \in M_a$
$\Rightarrow$ 对任何 $a \in M$, $(a, \tau(M_a)) \in P_{\mathfrak{M}}$,

$\Rightarrow$ 令 $f_{\mathfrak{M}'} = \{(a, \tau(M_a))|a \in M\}$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + f_{\mathfrak{M}'}$.
那么有 $\mathfrak{M}' \vDash \forall x P(x, f(x))$, 即 $\forall x P(x, f(x))$ 可满足.

□

下面给出陈劭源的一个更具体的证明:

证明. 构造模型 $\mathfrak{M} = (M, \sigma)$, 其中 $M = \{0\}$，$P_{\mathfrak{M}} = \{(0,0)\}$，$f_{\mathfrak{M}'}(0) = 0$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + f_{\mathfrak{M}'}$. 则易验证 $\mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x, y)$ 和 $\mathfrak{M}' \models \forall x P(x, f(x))$. 从而 $\forall x \exists y P(x, y)$ 可满足 $\Rightarrow \forall x P(x, f(x))$ 可满足. □

读到这里想必你已经发现，由于此题的两个公式给得太具体了，我们只要证出以下命题之一就足够

- $\forall x \exists y P(x, y)$ 矛盾;
- $\forall x P(x, f(x))$ 可满足.

而事实上后者很容易就可以构造出模型.

8

设 A 为 $P(f(c))$,
$H_0 = \{c\}$,
$H_1 = H_0 \cup \{f(t)|t \in H_0\} = \{c\} \cup \{f(c)\} = \{c, f(c)\}$,
$H_2 = \{c, f(c), f^2(c)\}$,
...
$H_n = \{c, f(c), ..., f^n(c)\}$,
$H_A = \{f^n(c)|n \in N\}$.

9

丁超认为此题结论要修正为 $|H_n| < \aleph_0$ 而且 $|H_A| \leq \aleph_0$.

证明. 若 A 中无函数符，那么对任何 n, $H_A = H_n = H_0$, 结论成立.
若 A 中有函数符, 对 n 归纳证明 H_n 有穷.

Basis: $n = 0, H_0 = \{c_0\}$ 或 $\{c|c$ 为 α 中常元 $\}$, 易见 H_n 有穷.

I.H.: H_k 有穷

I.S.: $H_{k+1} = H_k \cup \{f(t_1, ..., t_m)|t_i \in H_k$, f 为 A 中 m 元函数符.$\}$

注意到对于特定的函数符 f_0，$|\{f_0(t_1, ..., t_m)|t_i \in H_k\}| = |H_k^m|$. 由归纳假设 H_k 有穷，从而上式 $< \aleph_0$. 又由于 A 的函数符集是有穷的，$\{f(t_1, ..., t_m)|t_i \in H_k$, f 为 A 中 m 元函数符.$\}$ 有穷.

从而 H_{k+1} 有穷.

于是 H_n 有穷.

最后 H_A 是可数个有穷集的并，一定可数. 而由第 8 题知 H_A 又是无穷的, 那么就一定有 $|H_A| = \aleph_0$.

$\square$