

# 数理逻辑第十一讲习题参考答案\*

2018 年 6 月 24 日

## 1

设:  $\Delta \subseteq \Gamma, \Delta$  为有穷集,  
从而有  $k \in \mathbb{N}$  使得  
 $\Delta \subseteq \{(x > S^n 0) | n = 0, 1, 2, \dots, k\}$   
设  $N = \{\mathbb{N}, O, Suc, >\}$  为算术的标准模型  
其中  $Suc(x) = x + 1$ ,  $>$  为大于关系  
令  $\sigma$  为  $\mathbb{N}$  上赋值使  $\sigma(x) = k + 1$   
从而  $N \models_{\sigma} (x > S^n(0)) (n = 0, 1, 2, \dots, k)$   
故  $N \models_{\sigma} \Delta$  即  $\Delta$  可满足  
由紧致性定理知  $\Gamma$  可满足.

## 2

设  $\Gamma \models \varphi$   
反设不存在  $\Gamma$  的有穷子集  $\Delta$  使  $\Delta \models \varphi$   
从而对任何  $\Gamma$  的有穷子集  $\Delta$  有  $\Delta \not\models \varphi$   
因此对任何  $\Gamma$  的有穷子集  $\Delta$  有  $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$  可满足  
故  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  的任何有穷子集可满足,  
由紧致性定理知  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  可满足, 设  
 $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ . 即  $\mathfrak{M} \models \Gamma$  且  $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$ , 与  $\Gamma \models \varphi$  矛盾.  
因此存在  $\Gamma$  的有穷子集  $\Delta$  使  $\Delta \models \varphi$ .

## 3

令  $\varphi \equiv \exists x_1, \dots, x_n. \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j)$   
易见  $\mathfrak{M} \models \varphi_n \Leftrightarrow |M| \geq n$   
 $\mathfrak{M} \models \{\varphi_i | i \in \mathbb{N}^+\} \Leftrightarrow |M| \geq \aleph_0$

---

\*Ver. 0.2. 原答案由宋方敏教授给出手稿, 乔羽同学录入, 最后由丁超同学修订补充. 此文档来源为[https://github.com/sleepycoke/Mathematical\\_Logic\\_NJUCS](https://github.com/sleepycoke/Mathematical_Logic_NJUCS)由于时间紧张, 丁超只更正了比较明显的笔误, 没有仔细验证, 见谅. 欢迎各位同学提出意见共同维护.

令  $\Gamma = \Sigma \cup \{\varphi_i | i \in \mathbb{N}^+\}$ , 对于任何  $\Gamma$  的  
有穷子集  $\Delta \subseteq \Sigma \cup \{\varphi_i | i \in \mathbb{N}^+\}$ , 存在  $k$  使  
 $\Delta \subseteq \Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ , 由于  $\Sigma$  具有论域  
基数大于  $k$  的模型, 故  $\Delta$  可满足,  
由紧致性定理知  $\Gamma$  可满足, 那么有,  $\mathfrak{M} \models \Gamma$   
从而  $\mathfrak{M} \models \{\varphi_i | i \in \mathbb{N}^+\}$ , 故  $|M| \geq \aleph_0$ .

## 4

只需证每个有穷图可 4 色则无穷图可四色.

设 MAP 为一张无穷地图, 令全体国家的集合为

$\{a_i | i \in I\}$ , 这里  $|I| \geq \aleph_0$ .

设一阶语言  $\mathcal{L}$  由以下构成

(1) 常元:  $\{a_i | i \in I\}$

(2) 一元谓词:  $C_k(x) (k = 1, 2, 3, 4) \{C_k(x)$  表示  $x$  着  $k$  色

(3) 二元谓词:  $g(x, y) \{g(x, y)$  表示  $x$  与  $y$  有大于 0 的公共边界}.

令  $Q = \{ \langle i, j \rangle | i, j \in I \}$  且在 MAP 中  $a_i$  与  $a_j$  有大于 0 的公共边界.

令  $\Gamma = \{q(a_i, a_j) | \langle i, j \rangle \in Q\}$

$\cup \{\neg q(a_i, a_j) | \langle i, j \rangle \notin Q\}$

$\cup \{\forall x (c_1(x) \vee c_2(x) \vee c_3(x) \vee c_4(x))\}$

$\cup \{\forall x \forall y (g(x, y) \rightarrow (\neg(c_1(x) \wedge c_1(y)) \wedge \neg(c_2(x) \wedge c_2(y)) \wedge \neg(c_3(x) \wedge c_3(y)) \wedge \neg(c_4(x) \wedge c_4(y))))\}$

设  $S \subseteq \Gamma$  为  $\Gamma$  的任何有穷子集, 不妨设  $\{a_0, \dots, a_n\}$

为出现在  $S$  中的全体常元, 令  $M = \{a_0, \dots, a_n\}$ ,  $MAP[s]$  为  $\{a_0, \dots, a_n\}$  的生成子图. 从而  
 $MAP[s]$  可着 4 色.

令  $C_{kM} = \{a_i | a_i \text{ 着 } k \text{ 色 } i \leq n\} k = 1, \dots, 4$

$q_M = \{ \langle a_i, a_j \rangle | \langle i, j \rangle \in Q \}$  从而  $\mathfrak{M} \models S$

由 compactness 知有  $\mathfrak{M}$  使  $\mathfrak{M} \models \Gamma$  即 MAP 可 4 染色.

## 5

反设, 对任何  $m \in \mathbb{N}$  都存在结构  $\mathfrak{M} = (M, I)$  使

$m < |M| < \aleph_0$  且  $\mathfrak{M} \models \neg \varphi$

令  $\varphi_n$  为  $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n (\bigwedge_{0 < i < j \leq n} \neg(x_i \doteq x_j))$

易见 (1)  $\mathfrak{M} \models \varphi_n \Rightarrow |M| \geq n$ . (2) 当  $m < n$  时,  $\mathfrak{M} \models \varphi_n \Rightarrow \mathfrak{M} \models \varphi_m$  (3)  $\mathfrak{M} \models \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \Rightarrow$   
 $|M| \geq \aleph_0$

令  $\Gamma = \{\neg \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\} = \{\neg \varphi\} \cup \{\varphi_n | n \in \mathbb{N}^+\}$

对于有穷集  $S \subseteq \Gamma$ , 有  $k$  使  $S \subseteq \{\neg \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}$

从而由反设知  $S$  有模型, 因此由紧致定理知,  $\Gamma$  有模型, 设为  $\mathfrak{M}' = (M', I')$ , 从而

$\mathfrak{M}' \models \{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}$ , 因此  $|M'| \geq \aleph_0$  且

$\mathfrak{M}' \models \neg \varphi$  与题设矛盾.

## 6

反设存在这样的  $\Sigma$ . 令  $\{c_n | n \in N\}$  为新常元

集, 令  $\mathcal{L}' \triangleq \mathcal{L} \cup \{c_n | n \in N\}$ ,

$\Sigma' \triangleq \Sigma \cup \{R(c_{n+1}, c_n), \neg(c_{n+1} \dot{=} c_n) | n \in N\}$

因为  $\Sigma$  有一个无穷模型, 所以  $\Sigma'$  的任何有穷子集有模型, 从而  $\Sigma'$  有模型, 设为  $\mathfrak{M}$ . 因此

$\mathfrak{M} \models \Sigma$ . 令  $R_M$  为  $<$ ,  $(c_n)_M$  为  $a_n$  从而

$a_0 > a_1 > a_2 \dots$  为无穷下降链, 从而

$\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  没有最小元.

故  $R_M$  并非  $M$  上的良序. 矛盾