

数理逻辑作业

陈劲源

161240004

2018 年 6 月 29 日

3

(a) $\mathfrak{F} = (W, R)$, 其中 $W = \{a, b\}, R = \{(a, b)\}$, 则对于状态 a , $\Box\perp$ 不成立 (无论标记函数是什么) 从而 $\Box\perp$ 在该框架下非有效。

该公式在满足 $R = \emptyset$ 的框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$ 上均有效。

(b) $\mathfrak{F} = (W, R)$, 其中 $W = \{a, b, c\}, R = \{(a, b), (a, c)\}$, 则对于标记函数 $L = \{(a, \emptyset), (b, \{p\}), (c, \emptyset)\}$, 在模型 (\mathfrak{F}, L) 下, 公式 $\Diamond p \rightarrow \Box p$ 在状态 a 上非真, 从而该公式在上述框架下非有效。

该公式在满足对于任意 $u \in W$, 存在至多一个 $v \in W$ 使得 Ruv 的框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$ 上均有效。

(c) $\mathfrak{F} = (W, R)$, 其中 $W = \{a, b\}, R = \{(a, b)\}$, 则对于标记函数 $L = \{(a, \{p\}), (b, \emptyset)\}$, 在模型 (\mathfrak{F}, L) 下, 公式 $p \rightarrow \Box\Diamond p$ 在状态 a 上非真, 从而该公式在前述框架下非有效。

该公式在所有对称框架下均有效。

(d) $\mathfrak{F} = (W, R)$, 其中 $W = \{a, b, c, d\}, R = \{(a, b), (b, c), (b, d)\}$, 则对标记函数 $L = \{(a, \emptyset), (b, \emptyset), (c, \{p\}), (d, \emptyset)\}$, 在模型 (\mathfrak{F}, L) 下, 公式 $\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$ 在状态 a 上非真, 从而该公式在前述框架下非有效。

该公式在状态转换图呈一个环形的所有框架下均有效。

4

(a) 1, 2, 3, 4

(b) 无

(c) 1, 2, 3, 4

(h) 1, 2, 3, 4

(k) 1^1

6

$(\Box p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$ 的 K-证明

1. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

K

2. $\Box(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box\neg q)$

US : 1

¹丁超注: $\forall(y\mathcal{U}r)$ 只在状态 1 上有效, 因为其它结点都有不经过标记 r 的全路径.

3. $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg q)$	TAUT
4. $(\Box p \rightarrow \Box \neg q) \rightarrow \neg(\Box p \wedge \neg \Box \neg q)$	US : 3
5. $\Box(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(\Box p \wedge \neg \Box \neg q)$	PL : 2, 3
6. $\Box(\neg(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q))$	N : TAUT
7. $\Box(\neg(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow (\Box \neg(p \wedge q)) \rightarrow \Box(p \rightarrow \neg q)$	US : 1
8. $(\Box \neg(p \wedge q)) \rightarrow \Box(p \rightarrow \neg q)$	MP : 6, 7
9. $(\Box \neg(p \wedge q)) \rightarrow \neg(\Box p \wedge \neg \Box \neg q)$	PL : 8, 5
10. $(\Box p \wedge \neg \Box \neg q) \rightarrow (\neg \Box \neg(p \wedge q))$	PL : 9
11. $(\Box p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$	PL : 10, DUAL, (US : DUAL)

$\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$ 的 K-证明

1. $\Box(p \wedge q \rightarrow p)$	N : TAUT
2. $\Box(p \wedge q \rightarrow p) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p)$	US : K
3. $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p$	MP : 1, 2
4. $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q$	同理
5. $\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	PL : 3, 4
6. $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$	课本例 12.9
7. $(\Box p \wedge \Box q) \leftrightarrow \Box(p \wedge q)$	PL : 5, 6
8. $(\Box \neg p \wedge \Box \neg q) \leftrightarrow \Box(\neg p \wedge \neg q)$	US : 7
9. $(\neg \Box \neg(p \vee q)) \leftrightarrow ((\neg \Box \neg p) \vee (\neg \Box \neg q))$	PL : 8
10. $\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$	PL : 9, DUAL, (US : DUAL)

7

易验证 **S4** 对于所有自反且传递的框架均是可靠的 (新增加的 $p \rightarrow \Diamond p$ 要求框架具有自反性)。为证明 $p \rightarrow \Box \Diamond p$ 在 **S4** 中不可证, 构造模型 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, L)$, 其中 $\mathfrak{F} = (\{a, b\}, \{(a, a), (a, b), (b, b)\})$, $L = \{(a, \{p\}), (b, \emptyset)\}$ 。易验证框架 \mathfrak{F} 自反且传递, 但 $p \rightarrow \Box \Diamond p$ 在该模型的状态 a 上不为真, 从而该公式在 **S4** 中不可证。

记 **S5** 系统中新增加的公理为 :

- T'** $p \rightarrow \Diamond p$
4' $\Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$
B $p \rightarrow \Box \Diamond p$

则 $\Diamond \Box p \rightarrow \Box p$ 在该系统中的证明为 :

1. $p \rightarrow \Box \Diamond p$	B
2. $\Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond \Box p$	US : 1
3. $\Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$	4'
4. $\Diamond \Diamond \Box p \rightarrow \Diamond \Box p$	US : 3
5. $\Box(\Diamond \Diamond \Box p \rightarrow \Diamond \Box p)$	N : 4
6. $\Box(\Diamond \Diamond \Box p \rightarrow \Diamond \Box p) \rightarrow (\Box \Diamond \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond \Box p)$	US : K
7. $\Box \Diamond \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond \Box p$	MP : 5, 6

8. $\neg p \rightarrow \Box \Diamond \neg p$	US : 1
9. $\Box \neg \neg p \rightarrow \neg \Diamond \neg p$	PL : (US : DUAL)
10. $\Box(p \rightarrow \neg \neg p)$	N : TAUT
11. $\Box(p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box \neg \neg p)$	US : K
12. $\Box p \rightarrow \Box \neg \neg p$	MP : 10, 11
13. $\Box p \rightarrow \neg \Diamond \neg p$	PL : 12, 9
14. $\Diamond \neg p \rightarrow \neg \Box p$	PL : 13
15. $\Box \Diamond \neg p \rightarrow \Box \neg \Box p$	MP : (N : 14, US : K)
16. $\neg \Box \neg \Box p \rightarrow p$	PL : 8, 15
17. $\neg \Box \neg \Box p \leftrightarrow \Diamond \Box p$	US : DUAL
18. $\Diamond \Box p \rightarrow p$	PL : 17, 16
19. $\Box \Diamond \Box p \rightarrow \Box p$	MP : (N : 18, US : K)
20. $\Diamond \Box p \rightarrow \Box p$	PL : 2, 7, 19