数理逻辑第十讲习题参考答案[*]

2018 年 6 月 26 日

习题 10.1

由于这两套系统的推理规则相同, 只要保证一套系统的公理在另一套系统内可证即可保证证明树存在, 从而矢列保持可证.

“$\Rightarrow$”

$A \vdash A$ 为 $\Gamma, A, \Delta \vdash \Pi, A, \Lambda$ 的特例, 故其为 LK' 中的公理, 也就在 LK' 中可证.

“$\Leftarrow$”

首先证明以下引理:
对于任何公式 A, 有 $A \vdash A$ 在 LK 中可证. (*)
下面对 A 的结构进行归纳证明.

Basis: A 是原子公式, 从而 $A \vdash A$ 是 LK 的公理, 故 (*) 成立.

I.H.: 对于复合公式 A 的所有真子公式 B 都有 $B \vdash B$ 在 LK 中可证.

I.S.: 对复合公式 A 的最外层的逻辑联结词进行讨论:

情况 1: A 形为 $\neg B$, 由归纳假设, $B \vdash B$ 在 LK 中可证, 从而有

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$B \vdash B$}
\doubleLine
\RightLabel{$\neg L, \neg R$}
\UnaryInfC{$\neg B \vdash \neg B$}
\end{prooftree}
$$

情况 2: A 形为 $B \to C$, 由归纳假设 $B \vdash B$ 和 $C \vdash C$ 在 LK 中可证, 从而有

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$B \vdash B$}
\RightLabel{WR}
\UnaryInfC{$B \vdash B, C$}
\RightLabel{ER}
\UnaryInfC{$B \vdash C, B$}
\AxiomC{$C \vdash C$}
\RightLabel{WL}
\UnaryInfC{$B, C \vdash C$}
\RightLabel{EL}
\UnaryInfC{$C, B \vdash C$}
\RightLabel{$\to L$}
\BinaryInfC{$B \to C, B \vdash C$}
\RightLabel{EL}
\UnaryInfC{$B, B \to C \vdash C$}
\RightLabel{$\to R$}
\UnaryInfC{$B \to C \vdash B \to C$}
\end{prooftree}
$$

情况 3: A 形为 $B \wedge C$ 或 $B \vee C$, 同理可证.

[*] Ver. 1.0. 原答案由宋方敏教授给出手稿, 由丁超同学录入并修订补充. 此文档来源为https://github.com/sleepycoke/Mathematical_Logic_NJUCS 欢迎各位同学提出意见共同维护.

情况 4: A 形为 $\forall x B(x)$, 由归纳假设, $B(a) \vdash B(a)$ 在 LK 中可证. 从而有:

$$\dfrac{\dfrac{B(a) \ \vdash \ B(a)}{\forall x B(x) \ \vdash \ B(a)}\ \forall L}{\forall x B(x) \ \vdash \ \forall x B(x)}\ \forall R$$

情况 5: A 形为 $\exists x B(x)$ 与上同理.

综上 (*) 成立.

接下来我们证明 $\Gamma, A, \Delta \vdash \Pi, A, \Lambda$ 在 LK 中可证. 我们已证 $A \vdash A$ 可证, 从而有证明树:

$$\dfrac{\dfrac{A \ \vdash \ A}{\Gamma, \Delta, A \ \vdash \ A, \Pi, \Lambda}\ WL, WR}{\Gamma, A, \Delta \ \vdash \ \Pi, A, \Lambda}\ EL, ER$$

□

习题 10.2

定义:

$$R_1 \triangleq \{(A, B) | A \in sub(B)\}$$
$$R_2 \triangleq \{(A, B) | A\text{是 } B \text{ 的前辈}\}$$
$$R_3 \triangleq \{(A, B) | A\text{是 } B \text{ 的立接前辈}\}$$

易见 R_1 满足传递性, 且 R_2 是 R_3 的传递闭包. 所以只需证

若 C 为 D 的立接前辈, 则 C 为 D 的子公式...(*).

设 C 与 D 分别在规则 J 的上矢列和下矢列中.

情况 1: J 为 Cut, 由于 Cut 公式没有立接后辈, 从而 C 只能是旁公式.

情况 2: C 为旁公式, 从而 $D = C$, (*) 成立.

情况 3: J 为 *Exchange*, C 为 J 的辅公式, D 为主公式, 从而 $D = C$, (*) 成立.

情况 4: J 不是 *Exchange* 或 Cut, C 为 J 的辅公式, D 为主公式；可逐个验证 C 是 D 的子公式.

综上 (*) 成立. □

习题 10.3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a) \ \vdash \ A(a)}{A(A) \ \vdash \ B, A(a)}\ WR}{\vdash \ A(a) \to B, A(a)}\ \to R}{\vdash \ \exists x(A(x) \to B), A(a)}\ \exists R}{\vdash \ \exists x A(x) \to B, \forall x A(x)}\ \forall R \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \ \vdash \ B}{A(a), B \ \vdash \ B}\ WL}{B \ \vdash \ A(a) \to B}\ \to R}{B \ \vdash \ \exists x(A(x) \to B)}\ \exists R}{\forall x A(x) \to B \ \vdash \ \exists x(A(x) \to B)}\ \to L$$

□

习题 10.4

对 $P(a)$ 的深度 n 归纳证明:

Basis: $n=0$, $P(a)$ 为公理, 设其呈形 $A(a) \vdash A(a)$. 从而 $P(t)$ 为 $A(t) \vdash A(t)$, 也为公理, 于是 $P(t)$ 为证明树.

I.H.: $n \leq k$ 时, 有 $P(t)$ 为证明树.

I.S.: 往证当 $n=k+1$ 时, $P(t)$ 同样是证明树.

情况 1: $P(a)$ 呈形 $\dfrac{Q(a)}{B(a)} J$ 其中 $Q(a)$ 是深度为 k 的证明树, $B(a)$ 为 $P(a)$ 的终矢列. 以下仅证明 J 为 $\forall R$ 的情况, 其它情况类似. 我们设 $Q(a)$ 的终矢列 $C(a)$ 呈形 $\Gamma(a) \vdash \Delta(a), A(a,b)$; $B(a)$ 呈形 $\Gamma(a) \vdash \Delta(a), \forall x A(a,x)$. 由于 a 不是特征变元, $a \neq b, A(a,b)[\frac{t}{a}] = A(t,b)$, 那么 $P(t)$ 最后一层推理呈形

$$\frac{\Gamma(t) \ \vdash \ \Delta(t), A(t,b)}{\Gamma(t) \ \vdash \ \Delta(t), \forall x A(t,x)} \forall R$$

由于 t 中不自由出现特征变元, 所以 b 是新变元, 这是有效推理. 又由归纳假设 $C(t)$ 可证, 从而 $P(t)$ 是证明树.

情况 2: $P(a)$ 呈形 $\dfrac{Q(a) \qquad R(a)}{B(a)} J$ 同样由归纳假设 $Q(t)$, $R(t)$ 为证明树. 再对推理规则逐条验证可证明 $P(t)$ 为证明树. 不再赘述.

$\square$

习题 10.5

$Mix \Rightarrow Cut$

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, A \qquad A, \Gamma \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \Gamma^* \ \vdash \ \Delta^*, \Delta} Mix(A)}{\Gamma \ \vdash \ \Delta} Exchange, Contraction$$

$Cut \Rightarrow Mix$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \ \vdash \ \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \Delta^*, A} ER, CR}{\Gamma, \Pi^* \ \vdash \ \Delta^*, \Lambda, A} Weakening, Exchange \qquad \cfrac{\cfrac{\Pi \ \vdash \ \Lambda}{A, \Pi^* \ \vdash \ \Lambda} EL, CL}{A, \Gamma, \Pi^* \ \vdash \ \Delta^*, \Lambda} Weakening, Exchange}{\Gamma, \Pi^* \ \vdash \ \Delta^*, \Lambda} Cut$$

$\square$

习题 10.6

利用习题 10.2, 只需证任何公式都有在终矢列的后辈. 对除 Cut 之外的规则逐条验证上矢列中的公式都有后辈即可.

习题 10.7

反设 $\vdash$ 可证, 那么它有一个无切证明树 T. 设 T 的一个叶子为 $A \vdash A$, 那么 A 不可能是终矢列中任何公式的子公式, 与习题 10.6 矛盾.
于是 $\vdash$ 不可证. $\square$

习题 10.8

反设 $P(a) \vdash Q(a)$ 可证, 那么它存在一个无切证明树 T. 由于 $P(a)$ 与 $Q(a)$ 皆为原子公式, 由习题 10.6, T 中出现的公式只能是二者之一. 于时 T 中不能出现逻辑规则, 只能有三种弱规则. 注意到这三种规则都只有一个上矢列, 从而 T 只有一个叶子, 设其呈形 $A \vdash A$. 若 $A = P(a)$, 注意到 CR 不能将 $P(a)$ 从后件完全消除, WR 与 ER 不会消除公式, 从而 T 中所有矢列的后件都会有 $P(a)$ 那么, $P(a) \vdash Q(a)$ 不可能在 T 中. $A = Q(a)$ 同理.
于是, $P(a) \vdash Q(a)$ 不可证. $\square$

习题 10.9

根据习题 10.1 我们有以下证明树的叶子可证:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \vdash C, A \qquad \dfrac{A, B \vdash C, B \qquad C, A, B \vdash C}{B \to C, A, B \vdash C}\to L}{A \to (B \to C), A, B \vdash C}\to L}{A, B, A \to (B \to C) \vdash C}EL}{B, A \to (B \to C) \vdash A \to C}\to R}{A \to (B \to C) \vdash B \to A \to C}\to R
$$

$\square$