

# 数理逻辑第七讲习题参考答案\*

2019 年 5 月 4 日

经黄毅飞提醒, 默认  $P, Q, R$  为谓词符,  $f$  为函数符,  $c$  为常元符,  $A$  是公式,  $x, y, z, u$  是变元.

## 1

此题答案由陈劭源给出.

$$\begin{aligned} & (\forall x \exists y \forall z \exists u P(x, y, z, u))^s \\ &= \forall x (\exists y \forall z \exists u P(x, y, z, u))^s \\ &= \forall x (\forall z \exists u P(x, f(x), z, u))^s \quad \text{这里 } f \text{ 为一元新函数} \\ &= \forall x \forall z (\exists u P(x, f(x), z, u))^s \\ &= \forall x \forall z (P(x, f(x), z, g(x, z)))^s \quad \text{这里 } g \text{ 为二元新函数} \\ &= \forall x \forall z P(x, f(x), z, g(x, z)) \end{aligned}$$

## 2

此题答案由杨嘉文板书补充得.

证明. 引入记号 “ $\vdash$ ”:

$$A \vdash \neg B \Leftrightarrow A \vdash B \text{ 且 } B \vdash A.$$

那么显然有

$$\vdash A \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \vdash \neg B \Rightarrow A \rightarrow C \vdash \neg B \rightarrow C \quad (*)$$

且它是一个等价关系.

$$\begin{aligned} & (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \rightarrow \exists z P(z) \\ & \vdash \neg (\forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y))) \rightarrow \exists z P(z) && \text{命题 7.4(3), (*)} \\ & \vdash \neg \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y) \rightarrow \exists z P(z)) && \text{命题 7.4(5), 命题 7.3(1)} \\ & \vdash \neg \exists x \exists y \exists z (P(x) \wedge Q(y) \rightarrow P(z)) && \text{命题 7.4(8), 命题 7.3(1)} \end{aligned}$$

---

\*Ver. 1.3. 原答案由宋方敏教授给出手稿, 乔羽同学录入, 最后由丁超同学修订补充. 此文档来源为[https://github.com/sleepycoke/Mathematical\\_Logic\\_NJUCS](https://github.com/sleepycoke/Mathematical_Logic_NJUCS), 欢迎各位同学提出意见共同维护.

于是

$$\vdash [(\forall xP(x) \wedge \forall yQ(y)) \rightarrow \exists zP(z)] \leftrightarrow [\exists x\exists y\exists z(P(x) \wedge Q(y) \rightarrow P(z))].$$

□

### 3

丁超在简写孙旭东的板书时引入了一个明显且致命的错误, 感谢黄毅飞指出它并给出另一个证明: 我们证明一个更强的结论,  $FV(A^s) \subseteq FV(A)$

证明. 设  $A$  的量词数为  $n$ , 我们对  $n$  进行归纳证明.

Basis:  $n = 0$ . 此时  $A^s = A$ , 从而  $FV(A^s) \subseteq FV(A)$ .

I.H.:  $n \leq k$  时  $FV(A^s) \subseteq FV(A)$ .

I.S.: 设  $n = k + 1$ ,  $A$  呈形  $QxB$ , 从而  $B$  的量词个数为  $k$ , 以及  $FV(A) = FV(B) \setminus \{x\}$ .

若  $Q$  为  $\forall$ , 那么  $A^s = \forall xB^s$ , 则  $FV(A^s) = FV(B^s) \setminus \{x\}$ . 又根据归纳假设有  $FV(B^s) \subseteq FV(B)$ , 有  $FV(A^s) = FV(B^s) \setminus \{x\} \subseteq FV(B) \setminus \{x\} = FV(A)$ .

若  $Q$  为  $\exists$ , 那么不妨设  $FV(A) = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$  ( $FV(A) = \emptyset$  情况类似, 不赘述), 从而  $A^s = (B[\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i)}{x}])^s$ . 注意到  $B[\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i)}{x}]$  的量词只有  $k$  个, 因此根据归纳假设我们有  $FV((B[\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i)}{x}])^s) \subseteq FV(B[\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i)}{x}])$ . 另有  $FV(B[\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i)}{x}]) \subseteq FV(A)$ , 整体有

$$FV(A^s) = FV((B[\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i)}{x}])^s) \subseteq FV(A).$$

综上,  $FV(A^s) \subseteq FV(A)$ , 从而有  $FV(A) = \emptyset \Rightarrow FV(A^s) = \emptyset$

□

### 4

先给出一个语义证明:

证明. 设  $\mathfrak{M}$  为任意结构.

设  $\mathfrak{M} \models \exists x \forall y P(x, y)$ , 以下证明  $\mathfrak{M} \models \forall y \exists x P(x, y)$ .

$\mathfrak{M} \models \exists x \forall y P(x, y)$

$\Rightarrow$  存在  $a \in M$  对任何  $b \in M$ , 有  $(a, b) \in P_{\mathfrak{M}}$

$\Rightarrow$  对任何  $b \in M$ , 有  $a \in M$  使得  $(a, b) \in P_{\mathfrak{M}}$

$\Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall y \exists x P(x, y)$

□

再给出陈劭源在  $G$  中的语法证明:

证明.

$$\begin{array}{c} \text{Axiom} \\ \frac{P(u, v) \vdash P(u, v)}{\forall y P(u, y) \vdash \exists x P(x, v)} \forall L, \exists R \\ \frac{\forall y P(u, y) \vdash \exists x P(x, v)}{\exists x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \exists x P(x, y)} \forall R, \exists L \\ \frac{\exists x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \exists x P(x, y)}{\vdash \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)} \rightarrow R \end{array}$$

□

## 5

直接引用陈劭源的答案:

证明. 构造模型  $\mathfrak{M} = (M, \sigma)$ , 其中  $M = \{1, 2\}$ ,  $P_{\mathfrak{M}} = \{(1, 1), (2, 2)\}$ , 则易验证  $\mathfrak{M} \not\models_{\sigma} \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$ , 从而  $\not\models \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$ . □

## 6

先给出一个语义证明:

证明. 设  $\mathfrak{M}$  为任意结构

$\mathfrak{M} \models \forall x P(x, f(x))$

$\Rightarrow$  对任何  $a \in M$ ,  $(a, f_{\mathfrak{M}}(a)) \in P_{\mathfrak{M}}$

$\Rightarrow$  对任何  $a \in M$  有  $b \in M$  使  $(a, b) \in P_{\mathfrak{M}}$

$\Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x, y)$

所以  $\mathfrak{M} \models \forall x P(x, f(x)) \Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x, y)$

即  $\models \forall x P(x, f(x)) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$  □

再引用陈劭源在  $G$  中的语法证明:

证明.

$$\begin{array}{c}
 \text{Axiom} \\
 \frac{P(z, f(z)) \vdash P(z, f(z))}{P(z, f(z)) \vdash \exists y P(z, y)} \exists R \\
 \frac{P(z, f(z)) \vdash \exists y P(z, y)}{\forall x P(x, f(x)) \vdash \exists y P(z, y)} \forall L \\
 \frac{\forall x P(x, f(x)) \vdash \exists y P(z, y)}{\forall x P(x, f(x)) \vdash \forall x \exists y P(x, y)} \forall R \\
 \frac{\forall x P(x, f(x)) \vdash \forall x \exists y P(x, y)}{\vdash \forall x P(x, f(x)) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)} \rightarrow R
 \end{array}$$

□

## 7

此题实际上是定理 7.7 的一个直接结果.

首先给出宋方敏教授的证明:

证明.  $\forall x \exists y P(x, y)$  可满足

$\Rightarrow$  存在结构  $\mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x, y)$ . 设其论域为  $M$ .

$\Rightarrow$  对任何  $a \in M$  有  $b \in M$  使得  $(a, b) \in P_{\mathfrak{M}}$ .

$\Rightarrow$  对任何  $a \in M$ ,  $M_a := \{b \mid (a, b) \in P_{\mathfrak{M}}\} \neq \emptyset$ .

由选择公理知, 存在  $\tau : \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow M$ .

$\Rightarrow$  对任何  $a \in M$ ,  $\tau(M_a) \in M_a$

$\Rightarrow$  对任何  $a \in M$ ,  $(a, \tau(M_a)) \in P_{\mathfrak{M}}$ ,

$\Rightarrow$  令  $f_{\mathfrak{M}'} = \{(a, \tau(M_a)) | a \in M\}$ ,  $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + f_{\mathfrak{M}'}$ .  
 那么有  $\mathfrak{M}' \models \forall x P(x, f(x))$ , 即  $\forall x P(x, f(x))$  可满足.

□

下面给出陈劭源的一个更具体的证明:

证明. 构造模型  $\mathfrak{M} = (M, \sigma)$ , 其中  $M = \{0\}$ ,  $P_{\mathfrak{M}} = \{(0, 0)\}$ ,  $f_{\mathfrak{M}'}(0) = 0$ ,  $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + f_{\mathfrak{M}'}$ . 则  
 易验证  $\mathfrak{M} \models \forall x \exists y P(x, y)$  和  $\mathfrak{M}' \models \forall x P(x, f(x))$ . 从而  $\forall x \exists y P(x, y)$  可满足  $\Rightarrow \forall x P(x, f(x))$   
 可满足. □

读到这里想必你已经发现, 由于此题的两个公式给得太具体了, 我们只要证出以下命题之一  
 就足够

- $\forall x \exists y P(x, y)$  矛盾;
- $\forall x P(x, f(x))$  可满足.

而事实上后者很容易就可以构造出模型.

## 8

设  $A$  为  $P(f(c))$ ,

$$H_0 = \{c\},$$

$$H_1 = H_0 \cup \{f(t) | t \in H_0\} = \{c\} \cup \{f(c)\} = \{c, f(c)\},$$

$$H_2 = \{c, f(c), f^2(c)\},$$

...

$$H_n = \{c, f(c), \dots, f^n(c)\},$$

$$H = \{f^n(c) | n \in N\}.$$

## 9

丁超认为此题结论要修正为  $|H_n| < \aleph_0$  而且  $|H_A| \leq \aleph_0$ .

证明. 若  $A$  中无函数符, 那么对任何  $n$ ,  $H_A = H_n = H_0$ , 结论成立.

若  $A$  中有函数符, 对  $n$  归纳证明  $H_n$  有穷.

Basis:  $n = 0$ ,  $H_0 = \{c_0\}$  或  $\{c | c \text{ 为 } \alpha \text{ 中常元}\}$ , 易见  $H_n$  有穷.

I.H.:  $H_k$  有穷

I.S.:  $H_{k+1} = H_k \cup \{f(t_1, \dots, t_m) | t_i \in H_k, f \text{ 为 } A \text{ 中 } m \text{ 元函数符}\}$

注意到对于特定的函数符  $f_0$ ,  $|\{f_0(t_1, \dots, t_m) | t_i \in H_k\}| = |H_k^m|$ . 由归纳假设  $H_k$  有穷,  
 从而上式  $< \aleph_0$ . 又由于  $A$  的函数符集是有穷的,  $\{f(t_1, \dots, t_m) | t_i \in H_k, f \text{ 为 } A \text{ 中 } m \text{ 元函数符}\}$  有穷.

从而  $H_{k+1}$  有穷.

于是  $H_n$  有穷.

最后  $H_A$  是可数个有穷集的并, 一定可数. 而由第 8 题知  $H_A$  又是无穷的, 那么就一定有  $|H_A| = \aleph_0$ .

□