

数理逻辑第十一讲习题参考答案*

2019 年 5 月 4 日

1

设: $\Delta \subseteq \Gamma, \Delta$ 为有穷集,

从而有 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$\Delta \subseteq \{(x > S^n 0) | n = 0, 1, 2, \dots, k\}$$

设 $N = \{\mathbb{N}, O, Suc, >\}$ 为算术的标准模型

其中 $Suc(x) = x + 1$, $>$ 为大于关系

令 σ 为 \mathbb{N} 上赋值使 $\sigma(x) = k + 1$

从而 $N \models_{\sigma} (x > S^n(0)) (n = 0, 1, 2, \dots, k)$

故 $N \models_{\sigma} \Delta$ 即 Δ 可满足

由紧致性定理知 Γ 可满足.

2

设 $\Gamma \models \varphi$

反设不存在 Γ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \models \varphi$

从而对任何 Γ 的有穷子集 Δ 有 $\Delta \not\models \varphi$

因此对任何 Γ 的有穷子集 Δ 有 $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ 可满足

故 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 的任何有穷子集可满足,

由紧致性定理知 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 可满足, 设

$\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. 即 $\mathfrak{M} \models \Gamma$ 且 $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$, 与 $\Gamma \models \varphi$ 矛盾.

因此存在 Γ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \models \varphi$.

3

令 $\varphi_n \triangleq \exists x_1, \dots, x_n. \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$

易见 $\mathfrak{M} \models \varphi_n \Leftrightarrow |M| \geq n$

$\mathfrak{M} \models \{\varphi_i | i \in \mathbb{N}^+\} \Leftrightarrow |M| \geq \aleph_0$

*Ver. 0.5. 原答案由宋方敏教授给出手稿, 乔羽同学录入, 最后由丁超同学修订补充. 此文档来源为https://github.com/sleepycoke/Mathematical_Logic_NJUCS由于时间紧张, 丁超只更正了比较明显的笔误, 没有仔细验证, 见谅. 欢迎各位同学提出意见共同维护.

令 $\Gamma \triangleq \Sigma \cup \{\varphi_i | i \in \mathbb{N}^+\}$, 对于任何 Γ 的有穷子集 $\Delta \subseteq \Sigma \cup \{\varphi_i | i \in \mathbb{N}^+\}$, 存在 k 使 $\Delta \subseteq \Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$, 由于 Σ 具有论域基数大于 k 的模型, 故 Δ 可满足, 由紧致性定理知 Γ 可满足, 那么有, $\mathfrak{M} \models \Gamma$ 从而 $\mathfrak{M} \models \{\varphi_i | i \in \mathbb{N}^+\}$, 故 $|M| \geq \aleph_0$.

4

只需证每个有穷图可 4 色则无穷图可四色.

设 MAP 为一张无穷地图, 令全体国家的集合为

$\{a_i | i \in I\}$, 这里 $|I| \geq \aleph_0$.

设一阶语言 \mathcal{L} 由以下构成

(1) 常元: $\{a_i | i \in I\}$

(2) 一元谓词符: $C_k(x) (k = 1, 2, 3, 4)$ ($C_k(x)$ 表示 x 着 k 色)

(3) 二元谓词符: $g(x, y)$ ($g(x, y)$ 表示 x 与 y 有大于 0 的公共边界).

令 $Q \triangleq \{ \langle i, j \rangle | i, j \in I \}$ 且在 MAP 中 a_i 与 a_j 有大于 0 的公共边界.

令 $\Gamma \triangleq \{q(a_i, a_j) | \langle i, j \rangle \in Q\}$

$\cup \{ \neg q(a_i, a_j) | \langle i, j \rangle \notin Q \}$

$\cup \{ \forall x (c_1(x) \vee c_2(x) \vee c_3(x) \vee c_4(x)) \}$

$\cup \{ \forall x \forall y (g(x, y) \rightarrow (\neg(c_1(x) \wedge c_1(y)) \wedge \neg(c_2(x) \wedge c_2(y)) \wedge \neg(c_3(x) \wedge c_3(y)) \wedge \neg(c_4(x) \wedge c_4(y)))) \}$

设 $S \subseteq \Gamma$ 为 Γ 的任何有穷子集, 不妨设 $\{a_0, \dots, a_n\}$

为出现在 S 中的全体常元, 令 $M = \{a_0, \dots, a_n\}$, $MAP[s]$ 为 $\{a_0, \dots, a_n\}$ 的生成子图. 从而 $MAP[s]$ 可着 4 色.

令 $(C_k)_{\mathfrak{M}} \triangleq \{a_i | a_i \text{ 着 } k \text{ 色 } i \leq n\} k = 1, \dots, 4$

$q_{\mathfrak{M}} = \{ \langle a_i, a_j \rangle | \langle i, j \rangle \in Q \}$ 从而 $\mathfrak{M} \models S$

由 compactness 知有 \mathfrak{M} 使 $\mathfrak{M} \models \Gamma$ 即 MAP 可 4 染色.

5

反设, 对任何 $m \in \mathbb{N}$ 都存在结构 $\mathfrak{M} \triangleq (M, I)$ 使

$m < |M| < \aleph_0$ 且 $\mathfrak{M} \models \neg \varphi$

令 φ_n 为 $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n (\bigwedge_{0 < i < j \leq n} \neg(x_i \doteq x_j))$

易见 (1) $\mathfrak{M} \models \varphi_n \Rightarrow |M| \geq n$. (2) 当 $m < n$ 时, $\mathfrak{M} \models \varphi_n \Rightarrow \mathfrak{M} \models \varphi_m$ (3) $\mathfrak{M} \models \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \Rightarrow |M| \geq \aleph_0$

令 $\Gamma \triangleq \{ \neg \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots \} = \{ \neg \varphi \} \cup \{ \varphi_n | n \in \mathbb{N}^+ \}$

对于有穷集 $S \subseteq \Gamma$, 有 k 使 $S \subseteq \{ \neg \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots \}$

从而由反设知 S 有模型, 因此由紧致定理知, Γ 有模型, 设为 $\mathfrak{M}' = (M', I')$, 从而

$\mathfrak{M}' \models \{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}$, 因此 $|M'| \geq \aleph_0$ 且

$\mathfrak{M}' \models \neg \varphi$ 与题设矛盾.

6

反设存在这样的 Σ . 令 $\{c_n | n \in \mathbb{N}\}$ 为新常元

集, 令 $\mathcal{L}' \triangleq \mathcal{L} \cup \{c_n | n \in \mathbb{N}\}$,

$\Sigma' \triangleq \Sigma \cup \{R(c_{n+1}, c_n), \neg(c_{n+1} \dot{=} c_n) | n \in \mathbb{N}\}$

因为 Σ 有一个无穷模型, 所以 Σ' 的任何有穷子集有模型, 从而 Σ' 有模型, 设为 \mathfrak{M} . 因此

$\mathfrak{M} \models \Sigma$. 令 $R_{\mathfrak{M}}$ 为 $<$, $(c_n)_{\mathfrak{M}}$ 为 a_n 从而

$a_0 > a_1 > a_2 \dots$ 为无穷下降链, 从而

$\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ 没有最小元.

故 $R_{\mathfrak{M}}$ 并非 M 上的良序. 矛盾