数学分析笔记:2019春学期下半学期

期中考前空间解析几何知识点整理

向量

- 混合积:$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$坐标为$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)$则

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & b_2 & a_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- 三向量共面:混合积为零

空间平面和直线

- 点到平面的距离: $P_1(x_1, y_1, z_1)$到平面$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$的距离为:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- 直线的标准方程:

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}$$

其中(X, Y, Z)称为方向系数

- 两直线相交:设直线ℓ_i过点$M_i(x_i, y_i, z_i)$,方向向量为$(X_i, Y_i, Z_i)(i = 1, 2)$,则他们相交的充要条件为:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & X_1 & X_2 \\ y_2 - y_1 & Y_1 & Y_2 \\ z_2 - z_1 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

且他们不相交或重合

- ℓ与π平行的充要条件:$AX + BY + CZ = 0$且ℓ上有一点不在π上
- 异面直线间的距离:

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot v_1 \times v_2|}{|v_1 \times v_2|}$$

(考虑投影到公垂线段上)

空间曲面的方程

- 圆柱面: 半径为r,母线方向为$\boldsymbol{v}(l,m,n)$,对称轴ℓ_0过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,则$M(x,y,z)$在此圆柱面上的充要条件是

$$\frac{|\overrightarrow{MM_0}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=r$$

(注意叉乘)

- 圆锥面:设轴的方向向量为$\boldsymbol{v}$, 则$|cos<\overrightarrow{M_0M},\boldsymbol{v}>|=cos\alpha$

几类积分的联系

高斯公式

设空间区域Ω由分片光滑的闭曲面Σ构成,则

$$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=\oiint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$
$$\text{其中}P,Q,R:\text{一阶连续可微}$$

证明:

$$\text{设}\Omega\text{的下表面}\Sigma_{\text{下}}:z=z_1(x,y),\text{上表面}\Sigma_{\text{上}}:z=z_2(x,y)$$
$$\text{利用三重积分的先一后二和曲面积分的计算,考虑}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz\text{的穿线,有}$$
$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz&=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{z1(x,y)}^{z2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz\\&=\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))dxdy\\\text{而}\oiint\limits_{\Sigma}Rdxdy&=\iint\limits_{\Sigma_{\text{上}}}+\iint\limits_{\Sigma_{\text{下}}}\\&=\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))-\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))dxdy\end{aligned}$$
$$\text{从而证明了原命题.}$$

使用Gaussian公式:常加入与坐标平面平行的平面组成封闭平面

eg1:

$$\text{求}I=\iint\limits_{\Sigma}y^2zdxdy-xzdydz+x^2ydzdx$$
$$\Sigma:z=x^2+y^2,x^2+y^2=1\text{及坐标面所围曲线的外侧}$$

注意:画好积分区域 主要在第一卦限

so1:

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(-z+x^2+y^2)dxdydx=\int_o^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1rdr\int_0^{r^2}(-z+r^2)dz$$

斯托克斯公式

考虑三维空间的曲面Σ,其边界为Γ,曲线方向取正向,曲面方向取右手螺旋,我们有

$$\oint_{\Gamma}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\iint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

注意以Γ为边界的曲面Σ可能有若干个,可以选择一个比较合适的(有时甚至选择球面比较方便)

行列式记法:

$$=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz&dzdx&dxdy\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}$$

证明:

$$\text{希望把曲线积分(找参数方程)和曲面积分(设法投影)化到同一个东西}$$
$$\text{设}\Sigma:z=z(x,y),\text{将}\Sigma\text{投影到}xOy\text{面,得到}D_{xy},\text{记其边界线为}L:x=x(t),y=y(t).$$
$$\text{而}L\text{为}\Gamma\text{在}xOy\text{面的投影,故}\Gamma:x=x(t),y=y(t),z=z(x(t),y(t))$$

于是曲线积分

$$\oint_\Gamma P(x,y,z)dx=\oint_L P(x,y,z(x,y))dx$$
$$注意这是平面的曲线积分,由格林公式=\iint_{D_{xy}}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy,这样就把曲线积分化成了二重积分$$
$$由复合求导=\iint_{D_{xy}}-(\frac{\partial P}{\partial x}\times 0+\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x})dxdy,$$
$$考虑dxdy=cos\gamma dS,dzdx=cos\beta dS,往证$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}cos\gamma dS=-cos\beta dS$$
$$只需证\frac{\partial z}{\partial y}cos\gamma=-cos\beta$$
$$考虑\Sigma:z(x,y)-z=0,\vec{n}=(z_x,z_y,-1),易见\frac{cos\beta}{cos\gamma}=-z_y=\frac{\partial z}{\partial y},从而证明了原命题.$$

启示:重视基本含义,基本计算方法

eg2:

$$求I=\oint_\Gamma (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$
$$\Gamma:x^2+y^2=a^2与\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=2(a>0,b>0)的交线,方向为从x轴正向看去是逆时针$$

注意画图的技巧:把zOx面作为纸面

sol2:

$$考虑\Sigma:\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1,其投影D_{xy}:x^2+y^2\le a^2$$
$$I=\iint_\Sigma(-1-1)dydz+(-1-1)dzdx+(-1-1)dxdy$$
$$=-2\iint_\Sigma(dydz+dzdx+dxdy),它是曲面在坐标面上的投影的面积$$
$$考虑\Sigma在yOz面上的投影:a^2(1-\frac{z}{b})^2+y^2=a^2,即\frac{y^2}{a^2}+\frac{(z-b)^2}{b^2}=1$$
$$于是I=-2(\pi ab+0+\pi a^2)$$

第七章 无穷级数

7.1 数项级数

7.1.1 常数项级数

- 定义:
  - 给定 $\{a_n\}$, $a_1+a_2+\cdots+a_n+\ldots$,或 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,简记为 $\sum a_n$
  - 研究问题:收敛/发散
  - 级数的收敛:定义**部分和** $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,构成**数列** $\{S_n\}$,其敛散性与原级数的敛散性相同; 研究级数的收敛性需要通过研究数列的收敛性.
  - 收敛级数的余项: $R_n=S-S_n$,其中 S为级数的和
- 判断敛散性
  - Cauchy收敛准则:

  $给定\{b_n\},b_n\to b\Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists N>0,s.t.\forall p\in\mathbb{Z}_+,有对n>N,|b_{n+p}-b_n|<\epsilon$

  - **级数的Cauchy收敛准则**:

  $级数\sum a_n,部分和S_n收敛\Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists N>0,s.t.\forall p\in\mathbb{Z}_+,有对n>N,|S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\epsilon.$ 要习惯这种 $\epsilon\delta$语言进行证明

  - 调和级数
    - 知道发散,知道发散的阶
    - 应用:随机树:每次只选一个叶子节点向下分,研究随机一个叶子节点的层数: lnn
- 收敛级数的性质
  - 线性性
  - 任意改动有限项不影响级数的收敛性
  - $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛 $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0$(证明: $\lim_{n\to\infty}S_n-S_{n+1}=0$)

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 任意加括号后级数收敛(反之不成立,反例: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$)(利用逆否命题:加括号发散 $\Rightarrow$原级数发散)

证明:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ S'_k &= b_1 + b_2 + \cdots + b_k \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{nk} \\ &= S_{n_k}, 其为S_n的子列, 故收敛 \end{aligned}$$

Th1:

$$ln(1+n) \leq S_n \leq 1 + lnn, 其中S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

证明:

$$\begin{gathered} 对x \in [i, i+1], \frac{1}{i+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{i} \\ 积分, 得\frac{1}{i+1} \leq \int_i^{i+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{i} \\ 累加, 得\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \\ 于是S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = ln(n+1) \\ 且\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx = lnn, 则S_n \leq 1 + lnn. \end{gathered}$$

eg1:

$$证明: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}收敛$$

证明:

$$\begin{gathered} 任意\epsilon > 0, \exists N = \frac{1}{\epsilon}, 对\forall p \in \mathbb{Z}_+, 当n > N时, \\ \left.\begin{aligned} &|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}| \\ &\leq |\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}| \\ &= |\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}| \\ &\leq \frac{1}{n} < \epsilon. \end{aligned}\right. 由Cauchy收敛准则, 级数收敛 \end{gathered}$$

eg2

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1} - \frac{1}{\sqrt{n}-1} &= \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}+1} - \frac{1}{\sqrt{n}-1}) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{n-1} \end{aligned}\right. 故其发散$$

created on 2019-05-09

7.1.2 正项级数($a_n \geq 0$)

- 性质
  - S_n单调,收敛只需证其有界:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n收敛 \Leftrightarrow S_n \leq M, 即部分和有上界 \tag{1}$$

- 审敛法
  - 比较判别法(根本)

$$\begin{gathered} 若\sum_{n=1}^{\infty} a_n与\sum_{n=1}^{\infty} b_n为正项级数, 且\exists N, \forall n > N, s.t. a_n \leq b_n, 则 \\ 1. \sum_{n=1}^{\infty} b_n收敛 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n收敛 \\ 2. \sum_{n=1}^{\infty} a_n发散 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n发散 \end{gathered} \tag{2}$$

证明:考虑 (1)易见

- - 极限形式

$$
\begin{gathered}
若\sum_{n=1}^{\infty} a_n 与 \sum_{n=1}^{\infty} b_n 为正项级数,且\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\ell \\
i)0<\ell<\infty:敛散性相同 \\
ii)\ell=0:与(2)相同 \\
iii)\ell=\infty:与(2)相反
\end{gathered}
$$

证明: 考虑$\ell-\epsilon\leq\frac{a_n}{b_n}\leq\ell+\epsilon$,取 $\epsilon=\frac{\ell}{2}$即得

eg1

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n^2}
$$

考虑比较级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$即可

- - 比值判别法(d'Alembert)

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n 为正项级数,若\exists N,\forall n>N,有 \\
i)\frac{a_{n+1}}{a_n}<1:\sum_{n=1}^{\infty}收敛 \\
ii)\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n 发散
\end{gathered}
$$

证明$i)$:

$$
\begin{aligned}
a_n&=\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\dots\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}a_{N+1} \\
&\leq q^{n-N-1}a_{N+1}
\end{aligned}
其中q\leq1.故原级数收敛.
$$

$ii)$:考虑必要条件

极限形式:

$$
\begin{gathered}
i)\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n 收敛 \\
ii)\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n 发散 \\
iii)\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q=1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n 不能确定
\end{gathered}
$$

$iii)$的反例:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$不存在:考虑上极限

eg2

$$
\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}+\frac{2\times5}{1\times5}+\cdots+\frac{2\times5\times8\times\cdots\times(3n-2)}{1\times5\times9\times\cdots\times(4n-1)}+\cdots
$$

sol2

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}<1收敛
$$

- - 根式判别法(Cauchy)

$$
\sum_{n=1}^{\infty} a_n 为正项级数,若\exists N,\forall n>N,有
$$

$$
\begin{gathered}
i)\sqrt[n]{a_n}\leq\ell<1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n 收敛 \\
ii)\sqrt[n]{a_n}>1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n 发散
\end{gathered}
$$

证明:$i) a_n \le \ell^n,\ \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n \le \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \ell^n$,收敛

$ii): a_n > 1,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge 1$,考虑必要条件,发散

极限形式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$
$$i)\ell < 1: \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{收敛}$$
$$ii)\ell > 1: \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{发散}$$
$$iii)\ell = 1: \text{不能确定}$$

反例: $a_n = \dfrac{1}{n}$和 $\dfrac{1}{n^2}$

eg3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$$

sol3

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2} < 1, \text{收敛}$$

-
    - 根式与比值判别法的联系:比值判别法有效,根值判别法一定有效
    - trick:有阶乘:用比值;有n次方:根式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \le 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \le 1$$

证明:

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1$$
$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1} \to q$$

其中利用了结论 若$\{a_n\} \to a$,则 $\{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\} \to a$

eg4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

sol4 用根式判别法易见;比值判别法也未尝不可

eg5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$$

要利用结论 $\lim\limits_{n\to\infty} .\sqrt[n]{n^k} \to 1$

-
    - 积分判别法(有时在$q = 1$时可用): 对于

$$f(x): [1, +\infty] \to (0, +\infty)\text{且单调递减, 则} \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\text{与} \int_1^{\infty} f(x)\text{同收敛或发散}$$

证明:

$$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n) dx$$
$$\text{而对于} f(x) \in [n-1, n], f(n) \le f(x) \le f(n-1)$$
$$\text{从而} f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n) dx \le \int_{n-1}^{n} f(x) dx \le \int_{n-1}^{n} f(n-1) dx = f(n-1)$$
$$\text{则} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le \int_1^{\infty} f(x) dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1).$$
$$\text{再利用比较审敛法易见.}$$

eg6

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(lnn)^p}$$

用积分判别法

7.1.3 一般级数

- 交错级数: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n(a_n>0)$
    - Leibniz: 若 $i):a_n\downarrow ii)a_n\to 0(n\to\infty)$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛

证明: 采用Cauchy判别法 $\forall\epsilon>0,\exists N s.t.\forall n>N,p\in\mathbb{N}_+,$

$p=2k:$

$$\begin{aligned}&|a_{n+1}-a_{n+2}+\cdots+(-1)^{p+1}a_{n+2p}|\\&=a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-\cdots-(a_{n+2k-2}-a_{n+2k-1})-a_{n+2k}\\&\leq a_{n+1}<\epsilon(利用a_n\to 0和单调性)\end{aligned}$$

$p=2k-1$:同理

- 绝对收敛: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛
    - 性质: 绝对收敛→收敛

证明1:

$$0\leq a_n+|a_n|\leq 2|a_n|$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n+|a_n|\leq\sum_{n=1}^{\infty}2|a_n|.则易见$$

证明2: 用Cauchy 见书.

- 条件收敛: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,但不绝对收敛.

eg1:判断是否绝对收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!},\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}ln(1+\frac{1}{n})$$

tip: 小不等式 在学习理论证明中有用.(看来这里面也用了不少放缩)

$$\begin{aligned}ln(1+x)&\leq x(x>-1)\\ln(1+x)&\geq x-\frac{x^2}{4}(0<x<1)\\1+x&\leq e^x\end{aligned}\tag{7.1.3.1}$$

eg2:讨论敛散性(用上式):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}$$

eg3:

$$f(x)\in C^2(-\delta,\delta),且\lim_{n\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.证明:\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})绝对收敛.$$

证明:

$$易见f(0)=0,f'(0)=0.由泰勒展开:f(\frac{1}{n})=f''(\xi)\frac{1}{2n^2},\xi\in[0,\frac{1}{n}]$$
$$当\frac{1}{n}=x<\frac{\delta}{2}时,f''(x)有界,|f''(x)|\leq M,则$$
$$|f(\frac{1}{n})|\leq\frac{M}{2n^2}.则易见原命题成立.$$

Th: $f(x)在(-\delta,\delta)二阶可导.$ $a_n=f(\frac{1}{n})$.则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛 $\Leftrightarrow f(0)=f'(0)=0$

eg4

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-ln(1+\frac{1}{n})$$

用 (7.1.3.1)即可.

- 绝对收敛的性质
    - 可任意重排,都收敛,和一样.(条件收敛不可,考虑调和级数)
    - 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛,和为 A, B, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{k} a_k b_{n-k+1}$ 收敛于 AB(事实上乘积项按任意次序排列均可)

- (Abel) $\{a_n\}$单调有界, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

- (Dirichlet) $\{a_n\}$单调且 $a_n \to 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 部分和有界, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.(可依此证明 Leibniz)

eg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosnx}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinnx}{n}$$

7.2 函数项级数

7.2.1 函数列的一致收敛性

- Intuition: 求极限与求积分,求导数能不能交换次序
- 设函数列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots, x \in I$. 如果 $\forall x_0 \in D, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x)$, 则称 $\{f_n\}$在D上收敛于 f. 若 D 包含所有收敛点,则称其为函数列的收敛域

$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon, x) > 0, \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ (注意与不同x取值有关)

eg1: 求 $f_n(x) = x^n$的收敛域

sol1: $|x| < 1 : f_n(x) \to 0, n \to \infty; x = 1 : 收敛; x = -1 : 不收敛; |x| > 1 : 发散$.故收敛域为 $(-1, 1]$

- 讨论: $f_n(x)$每一项都连续,可导,可积....,极限是否有相应的性质

- 一致收敛性$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$: 设函数列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots, x \in D$,$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) > 0, \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in D$

- 反: $\exists \epsilon > 0, \forall N, n > N时, \exists x_n, |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$

eg2: 证明 $f_n(x) = x^n$非一致收敛

sol2:

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n|, let\ x_n\ be\ (1 - \frac{1}{n})^n$$
$$|f_n(x) - f(x)| = 1 - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}.$$

- 几何意义: $n > N$时, $y = f_n(x)$被限制在一个小区间之内
- Cauchy判别法: $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) > 0, \forall n, m > N, |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \forall x \in D$
- 余项判别法: $D上, f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$

eg3: $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$

sol3:

$$f(x) = 0.$$
$$\sup_{x\in D} f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx^2}}, 求导求最大值 = \frac{n}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}} \to \infty \neq 0.$$

故不一致收敛

- 性质1: $D上, f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- 性质2: $D上, f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow \forall n \geq 1, f_n(x)$连续,则 $f(x)$连续.
- 性质3: $D上, f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow \forall n \geq 1, f_n(x)$连续,则 $f(x)$可积,且

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)$$

- 性质4: $f_n(x)在D上可导, f_n'(x) \rightrightarrows f'(x) \Rightarrow \{f_n(x)\}$的极限函数可导,且

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

eg4:验证性质:

$$f_n(x) = \frac{2x+n}{x+n}, x \in [0,b]$$
$$f_n(x) = x - \frac{x^n}{n}, x \in [0,1]$$

sol4:

1. 用余项

7.2.2 函数项级数

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. 研究部分和函数 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, 构成函数列 $S_1(x), S_2(x), \cdots, S_n(x), \cdots$. $S_n(x_0)$收敛,称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 $x = x_0$处收敛. 在集合上收敛,收敛域类似定义.
- 和函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$

eg1: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$的收敛域

eg1: 求 $f_n(x) = x^n$的收敛域

sol1: $|x| < 1: f_n(x) \to 0, n \to \infty; x = 1: 收敛; x = -1: 不收敛; |x| > 1: 发散$.故收敛域为 $(-1, 1]$

第四章 常微分方程

4.1 可分离变量的微分方程

- 通解: 包括常数的解, 独立常数的个数与微分方程的阶相同.
- 可分离变量的微分方程(包括变量代换后可分离的)

eg1:

$$求\frac{dy}{dx} = 3x^2y的通解.$$

sol1:

$$当y \neq 0时, \int \frac{1}{y}dy = \int 3x^2dx + C, y = Ce^{x^3}(C \neq 0)$$
$$(通解,但不包括所有解)$$
$$当y = 0时, C = 0;\ 故y = Ce^{x^3}$$

- 齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) = \phi(\frac{y}{x})$$
$$令u = \frac{y}{x}, y'_x = (ux)' = \frac{du}{dx}x + u = \phi(u)$$
$$\frac{du}{\phi(u) - u} = \frac{1}{x}dx$$

eg2:

$$(x + \sqrt{x^2+y^2})y' = y$$

sol2:

$$x > 0: (1 + \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$
$$或: \frac{dx}{dy} = \frac{x + \sqrt{x^2+y^2}}{y} = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + (\frac{x}{y})^2}$$
$$令u = \frac{x}{y},\ x = uy, \frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy}y + u = u + \sqrt{1+u^2}$$

eg3:

$$y' = \frac{3x+2y+1}{4x+2y+2}$$

线性代换,待定系数

4.4 一阶线性微分方程

- 形式: $y' + P(x)y = Q(x)$
  - $Q(x) \equiv 0$: 齐次; $y = Ce^{\int -P(x)dx}$
  - 非齐次: 常数变易法(想法: $C \to u(x)$, 令其为方程特解)

$$
\begin{aligned}
y' &= u'(x)e^{\int -P(x)dx} + u(x)e^{\int -P(x)dx}(-P(x)) \\
&= u'(x)e^{\int -P(x)dx} - yP(x) \\
\text{带入原方程}: \frac{du}{dx}e^{\int -P(x)dx} &= Q(x)\ (yP(x)\text{一定会被消掉}) \\
u &= \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C \\
\text{故}y &= Ce^{\int -P(x)dx} + e^{\int -P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx} \\
&= \text{通解} + \text{特解}
\end{aligned}
$$

eg1

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^{\frac{2}{5}}$$

eg2

$$y' = \frac{1}{x+y}$$

sol2:

法一: $u = x + y$, 可分离变量

法二: $\frac{dx}{dy} = x + y$一阶线性(反函数微分 常用)

eg3(略作变化)

$$f(x) = sinx - \int_0^x f(x-t)dt$$

sol3:

$$\int_0^x f(x-t)dt = -\int_0^x f(x-t)d(x-t) = \int_0^x f(u)du;\ \text{可对}x\text{求导}$$

- 伯努利方程 $y' + P(x)y = Q(x)y^n$

$$
\begin{aligned}
y' + P(x)y &= Q(x) \\
y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} &= Q(x) \\
\text{令}z = y^{1-n}, z' &= (1-n)y^{-n}y' \\
z' + (1-n)P(x)z &= Q(x)(1-n) \\
&(\text{可照常求解})
\end{aligned}
$$

eg4

$$y' + \frac{1}{x}y = alnx \cdot y^2$$

4.5 可降阶的高阶微分方程

- $y^{(n)} = f(x)$ 求n次不定积分
- $y'' = f(x, y')$: 令 $u = f'$

eg1

$$
\begin{gathered}
x > -1.\ g'(x) + g(x) - \frac{1}{1+x}\int_0^x g(t)dt = 0.\ g(0) = 1 \\
\text{求}: i)g'(x); ii)e^{-x} \le g(x) \le 1, x \ge 0
\end{gathered}
$$

sol:

$$\text{证}g(x) \ge e^{-x}: f(x) = g(x) - e^{-x}, \text{求}f'(x)$$

- $y'' = f(y, y')$: 令 $y' = P, y'' = \frac{dP}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p, \Rightarrow pp' = f(y, p)$

4.6 高阶线性微分方程

$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$; $f(x) \equiv 0$: 齐次

- 考虑 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, 若 $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$是它的解, 则 $y = C_1y_1 + C_2y_2$也是它的解. 证明: 利用求导的线性性 $(Cy)'' = Cy''$; 到 n阶也成立
- 函数组线性相关: $k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \cdots + k_ny_n(x) \equiv 0, s.t.\ k_1k_2\cdots k_n \neq 0$
- $Liouville\ Th$: 若$y_1(x)$是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$的解,则 $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{exp(-\int p(x)dx)}{y_1^2(x)}dx$
- 非齐次的情况: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$; 若 $y^* = y^*(x)$是它的特解,且 $Y = Y(X)$是对应齐次方程的通解,则 $y = y^* + Y$也是原方程的解.

4.7 常系数齐次线性方程

- $y''+py'+qy=0$; 试探: $y=e^{rx}\Rightarrow r^2e^{rx}+rpe^{rx}+qr^{rx}=(r^2+pr+q)e^{rx}\equiv 0, r^2+pr+q=0$; 讨论其根的分布
  - $i)\Delta>0, r_1, r_2, y=C_1e^{r1x}+C_2e^{r2x}$
  - $ii)\Delta=0, y=e^{rx}(C_1+C_2x)$
  - $iii)\Delta<0, r_{1,2}=\dfrac{-p\pm i\sqrt{-\Delta}}{2}=\alpha\pm i\beta, y=e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

eg1:

$$y''-2y'+5=0$$

sol1: 特征方程: $r^2-2r+5=0;\ r_{1,2}=1\pm 2i;\ y=e^x(C_1cos2x+C_2sin2x)$

eg2:

$$z=f(e^x siny)\ s.t.\ (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})+(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})=e^{2x}z.求f(u)$$

sol: 依次求二阶导, $(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2})=f''(u)e^{2x}sin^2y+f'(u)e^x siny, (\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2})=f''(u)e^{2x}cos^2y-f'(u)e^x siny$ 故 $f''(u)=f(u)$

- n阶的情况: $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0$;   特征方程: $r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_n=0$
  - $i).r$为k重实根: $e^{rx}(C_0+C_1x+\cdots+C_{k-1}x^{k-1})$
  - $ii).r$为k重复根: $e^{\alpha x}\left[(C_0+C_1x+\cdots+C_{k-1}x^{k-1})cos\beta x+(D_0+D_1x+\cdots+D_{k-1}x^{k-1})sin\beta x\right]$

4.8 常系数非齐次微分方程

- $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$. 可做的情形: $f(x)=e^{\lambda x}P_n(x)$或 $f(x)=e^{\alpha x}(R^{(\ell)(x)}cos\omega x+R^{(r)}(x)sin\omega x)$
- $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=e^{\lambda x}P_n(x)$.
  - 二次的情形:

假设 $y^*=e^{\lambda x}Q(x)$,则 $y'^*=e^{\lambda x}(\lambda Q(x)+Q'(x)), y''^*=\cdots$,带入整理,得 $Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_n(x)$

i)$\lambda^2+p\lambda+q\not=0$,待定系数: $Q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$,比较系数易得.

ii) $\lambda^2+p\lambda+q=0, 2\lambda+p\not=0: Q(x):n+1$次,待定系数: $Q(x)=b_0x+b_1x^2+\cdots+b_nx^{n+1}$

iii) $\lambda^2+p\lambda+q=0, 2\lambda+p=0$:待定系数: $Q(x)=b_0x^2+b_1x^3+\cdots+b_nx^{n+2}$

eg1:

$$y''+2y'-3y=(3-4x)e^x$$

sol1:先求通解. $r_1=1, r_2=3$.注意 $\lambda=1$,是特征方程的解但不是重根,故设 $y^*=e^x(Ax+Bx^2)$,带入整理易得.

-
  - n阶的情形 $y^*=e^{\lambda x}x^kQ_n(x)$,其中 $Q_n(x)$与$P_n(x)$次数相同,k是λ为齐次方程特征方程的根的重数
- $f(x)=e^{\alpha x}(R^{(\ell)}(x)cos\beta x+R^{(r)}(x)sin\beta x)$,特解为 $y^*=e^{\alpha x}x^k(R_1(x)cos\beta x+R_2(x)sin\beta x), R_1(x), R_2(x)$的次数为 $max(\ell, r)$,且 $\alpha+\beta i$为 k 重特征根

eg2

$$y''+y=xcos2x$$

sol2: $y''+y=(xcos2x+0sin2x)e^{0x}$.求对应齐次方程的特征根: $\pm i$. $\alpha+\beta i=2i$不是特征根. 故令 $y^*=(Ax+B)cos2x+(Cx+D)sin2x$,解出系数即得.

eg3

$$y^{(4)}+2y''+y=sinx$$

习题课

4.25习题课

- 极限

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^y$不存在:

   两个累次极限不相等

- $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}((x,y)\to(0,0))$

  令$y=x$: $f(x,y)\to 0$

  令$y=x^2-x^3$: $f(x,y)=\frac{x^3+(x^2-x^3)^3}{x^3}=1+o(1)\to 1$

- 证偏导数不连续:把除该点外的偏导数用公式求出

- 空间解几
  - 求曲线$x^2+y^2+z^2=6,x+y+z=0$在(1,-2,1)处的切线方程

  直线的方向向量:$(\frac{dx}{dx},\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx})$

  两式对x求偏导:$2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0$

  $1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0$

  带入数值,求出$\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$

  - 不一定要写出参数方程再做 把他们看成x的函数
  - 求椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在$M(x_0,y_0,z_0)$点的切平面方程

  法向量:(F_x,F_y,F_z),即$(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2})$

  故切平面方程为$\frac{2x0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z0}{c^2}(z-z_0)=0$

- 函数极值
  - 给定$f(x,y)=2(y-x^2)^2-\frac{1}{7}x^7-y^2$

  (1)求(x,y)的极值

  (2)证明:沿(0,0)点的每条直线,(0,0)点都是定义在该直线上的函数$f(x,y)$的极小值点

  (1)
  $A:f''_{xx},B:f''_{xy},C:f''_{yy}$

  $(0,0)$点:$B^2-AC>0$不能确定是否是极值点,故令$x=0,f(x,y)=y^2$,此时$f(0,0)\le f(x,y)$,为极小值

  再令$y=x^2$,$f(x,x^2)=-\frac{1}{7}x^7-x^4\le 0,f(0,0)$为极大值

  (2)
  令$y=kx(k>0),f(x,kx)=x^2(k^2-4kx-2x^2-\frac{1}{7}x^5)$,当$x\to 0$时,$f(x,kx)$恒大于0,$f(0,0)$为极小值点

  若$k=0,f(x,0)=x^4(2-\frac{1}{7}x^3)>0,f(0,0)$为极小值点

- 计算重积分
  - $I=\iint\limits_D\sqrt{1-y^2}dxdy$
    - 注意偶函数的对称性
  - $I=\int_0^1dy\int_y^0\frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dx$
    - 交换积分次序:$I=\int_0^1dx\int_0^x\frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dy=\int_0^1\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^3}}dx$
  - 求曲面$z=xy,z=0,x+y=1$所围立体的体积
    - $I=\iint\limits_D dxdy\int_0^{xy}dz$

5.10习题课

- 第一型曲线积分
- 第二型曲线积分
  - $\int_{\partial\Omega}Pdx+Qdy=\int_{\partial\Omega}(P,Q)\cdot\vec{n}ds$,其中 $\vec{n}$为曲线在 (x,y)点的法向量.
- 曲面面积　设 $f:D\to\mathbb{R}$为连续可微函数, $D\subset\mathbb{R}^{n-1}$,则 $graph(f)$为 $\mathbb{R}^n$ 中超曲面,其面积公式为

$$\sigma=\int_D\sqrt{1+||\nabla f||^2}$$

- 第二型曲面积分　设 Σ为 $\mathbb{R}^3$中可定向的曲面,其与定向相容的参数表示为

$$r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),(u,v)\in\Omega.$$

则对于定义在 Σ上的连续向量值函数 (P,Q,R),定义其曲面积分为

$$I=\int_\Omega(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})dudv$$

eg

$$\Phi=\int_\Sigma x^2dy\wedge dz+y^2dz\wedge dx+x^2dx\wedge dy$$

其中 Σ为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$,方向为外侧

sol: 进行球坐标变换,计算

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\phi,\theta)} = R^2 sin^2\phi cos\theta, 等等$$

考虑定向: $\vec{n} = (x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c) = (Rsin\phi cos\theta, Rsin\phi sin\theta, Rcos\phi)$,其与 $\vec{N}$方向相同.

法二: 考虑

$$\vec{v} = (P, Q, R)$$
$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

- 格林公式
  - 诱导定向: 从法向量转向切向量是逆时针
  - 平面分部积分公式(在偏微分方程中有用)
- 高斯公式
  - 散度: $\vec{X} = (P, Q, R), div\vec{X} = (\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z})$.则高斯公式的散度形式为

$$\int_{\Omega} div\vec{X} dxdydz = \int_{\partial\Omega} \vec{X} \cdot \vec{n} d\sigma$$

其中 $\vec{n}$为边界曲面的单位外法向量

eg2: 设 C为平面上连续可微的闭曲线, $\vec{v}$为固定的向量,证明:

$$\int_C \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 0$$

其中 $\vec{n}$为 C的单位外法向量

sol2: 在 $x(t), y(t)$点,$\vec{n}ds = (\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{-x'(t)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}})\sqrt{x'^2 + y'^2}dt = (dy, -dx)$. 带入原式,用Green公式立得.

eg3:计算积分

$$I = \int_{\partial\Omega} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$

其中 Ω为八分之一单位球面(第一卦限),方向为外侧诱导定向

用Stokes公式, $I = -2\int_{\Omega} dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy$,用投影.

5.24 习题课

- $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)})$, 易于消项
- 注意高尉不等式 $ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{4}(0 < x < 1)$
- $(lnn)^{lnn} = e^{lnnlnlnn} = n^{lnlnn}$
- $\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{1}{n}lnn} - 1 \sim \frac{1}{n}lnn$
- $2^{n^2} = 2^{n\times n} = (2^n)^n = 2^n \times 2^n \times \cdots \times 2^n$ 熟悉指数的指数