数学分析笔记:2019春学期下半学期

期中考前空间解析几何知识点整理

向量

- 混合积:***a, b, c***坐标为$(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2),(a_3,b_3,c_3)$则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & b_2 & a_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- 三向量共面:混合积为零

空间平面和直线

- 点到平面的距离: $P_1(x_1,y_1,z_1)$到平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$的距离为:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

- 直线的标准方程:

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

其中(X,Y,Z)称为方向系数

- 两直线相交:设直线ℓ_i过点$M_i(x_i,y_i,z_i)$,方向向量为$(X_i,Y_i,Z_i)(i=1,2)$,则他们相交的充要条件为:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & X_1 & X_2 \\ y_2-y_1 & Y_1 & Y_2 \\ z_2-z_1 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}=0$$

且他们不相交或重合

- ℓ与π平行的充要条件:$AX+BY+CZ=0$且ℓ上有一点不在π上
- 异面直线间的距离:

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot v_1\times v_2|}{|v_1\times v_2|}$$

(考虑投影到公垂线段上)

空间曲面的方程

- 圆柱面: 半径为r,母线方向为$\boldsymbol{v}(l,m,n)$,对称轴ℓ_0过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,则$M(x,y,z)$在此圆柱面上的充要条件是

$$\frac{|\overrightarrow{MM_0}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=r$$

(注意叉乘)

- 圆锥面:设轴的方向向量为$\boldsymbol{v}$, 则$|cos<\overrightarrow{M_0M},\boldsymbol{v}>|=cos\alpha$

几类积分的联系

高斯公式

设空间区域Ω由分片光滑的闭曲面Σ构成,则

$$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$
$$\text{其中}P,Q,R:\text{一阶连续可微}$$

证明:

$$\text{设}\Omega\text{的下表面}\Sigma_{\text{下}}:z=z_1(x,y),\text{上表面}\Sigma_{\text{上}}:z=z_2(x,y)$$
$$\text{利用三重积分的先一后二和曲面积分的计算, 考虑}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz\text{的穿线, 有}$$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz&=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz\\&=\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))dxdy\\ \text{而}\oiint\limits_{\Sigma}Rdxdy&=\iint\limits_{\Sigma\text{上}}+\iint\limits_{\Sigma\text{下}}\\&=\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))-\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))dxdy\\ &\text{从而证明了原命题.}\end{aligned}$$

使用Gaussian公式:常加入与坐标平面平行的平面组成封闭平面

eg1:

$$\text{求}I=\iint\limits_{\Sigma}y^2zdxdy-xzdydz+x^2ydzdx$$
$$\Sigma:z=x^2+y^2,x^2+y^2=1\text{及坐标面所围曲线的外侧}$$

注意:画好积分区域 主要在第一卦限

so1:

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(-z+x^2+y^2)dxdydx=\int_o^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1rdr\int_0^{r^2}(-z+r^2)dz$$

斯托克斯公式

考虑三维空间的曲面Σ,其边界为Γ,曲线方向取正向,曲面方向取右手螺旋,我们有

$$\oint\limits_{\Gamma}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\iint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

注意以Γ为边界的曲面Σ可能有若干个,可以选择一个比较合适的(有时甚至选择球面比较方便)

行列式记法:

$$=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz&dzdx&dxdy\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}$$

证明:

$$\begin{gathered}\text{希望把曲线积分(找参数方程)和曲面积分(设法投影)化到同一个东西}\\ \text{设}\Sigma:z=z(x,y),\text{将}\Sigma\text{投影到}xOy\text{面,得到}D_{xy},\text{记其边界线为}L:x=x(t),y=y(t).\\ \text{而}L\text{为}\Gamma\text{在}xOy\text{面的投影,故}\Gamma:x=x(t),y=y(t),z=z(x(t),y(t))\end{gathered}$$

于是曲线积分

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\Gamma}P(x,y,z)dx&=\oint_L P(x,y,z(x,y))dx\\ \text{注意这是平面的曲线积分,由格林公式}&=\iint\limits_{D_{xy}}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy,\text{这样就把曲线积分化成了二重积分}\\ \text{由复合求导}&=\iint\limits_{D_{xy}}-(\frac{\partial P}{\partial x}\times0+\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x})dxdy,\\ &\text{考虑}dxdy=cos\gamma dS,dzdx=cos\beta dS,\text{往证}\\ &\frac{\partial z}{\partial y}cos\gamma dS=-cos\beta dS\\ &\text{只需证}\frac{\partial z}{\partial y}cos\gamma=-cos\beta\end{aligned}$$

$\text{考虑}\Sigma:z(x,y)-z=0,\vec{n}=(z_x,z_y,-1),\text{易见}\frac{cos\beta}{cos\gamma}=-z_y=\frac{\partial z}{\partial y},\text{从而证明了原命题.}$

启示:重视基本含义,基本计算方法

eg2:

$$\text{求}I=\oint\limits_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$
$$\Gamma:x^2+y^2=a^2\text{与}\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=2(a>0,b>0)\text{的交线,方向为从}x\text{轴正向看去是逆时针}$$

注意画图的技巧:把zOx面作为纸面

sol2:

$$
\begin{gathered}
考虑\Sigma:\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1,其投影D_{xy}:x^2+y^2\le a^2\\
I=\iint\limits_{\Sigma}(-1-1)dydz+(-1-1)dzdx+(-1-1)dxdy\\
=-2\iint\limits_{\Sigma}(dydz+dzdx+dxdy),它是曲面在坐标面上的投影的面积\\
考虑\Sigma在yOz面上的投影:a^2(1-\frac{z}{b})^2+y^2=a^2,即\frac{y^2}{a^2}+\frac{(z-b)^2}{b^2}=1\\
于是I=-2(\pi ab+0+\pi a^2)
\end{gathered}
$$

第七章 无穷级数

7.1 数项级数

7.1.1 常数项级数

- 定义:
    - 给定 $\{a_n\}$, $a_1+a_2+\cdots+a_n+\ldots$,或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,简记为 $\sum a_n$
    - 研究问题:收敛/发散
    - 级数的收敛:定义**部分和** $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,构成**数列** $\{S_n\}$,其敛散性与原级数的敛散性相同; 研究级数的收敛性需要通过研究数列的收敛性.
    - 收敛级数的余项: $R_n=S-S_n$,其中 S为级数的和
- 判断敛散性
    - Cauchy收敛准则:

    $给定\{b_n\},b_n\to b\Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists N>0,s.t.\forall p\in \mathsf{Z}_+,有对n>N,|b_{n+p}-b_n|<\epsilon$

    - **级数的Cauchy收敛准则**:

    $级数\sum a_n,部分和S_n收敛\Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists N>0,s.t.\forall p\in \mathsf{Z}_+,有对n>N,|S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\epsilon$. 要习惯这种 $\epsilon\delta$语言进行证明

    - 调和级数
        - 知道发散,知道发散的阶
        - 应用:随机树:每次只选一个叶子节点向下分,研究随机一个叶子节点的层数: lnn
- 收敛级数的性质
    - 线性性
    - 任意改动有限项不影响级数的收敛性
    - $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$(证明: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n-S_{n+1}=0$)
    - $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 任意加括号后级数收敛(反之不成立,反例: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$)(利用逆否命题:加括号发散 $\Rightarrow$原级数发散)

证明:

$$
\begin{aligned}
S_n&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\
S'_k&=b_1+b_2+\cdots+b_k\\
&=a_1+a_2+\cdots+a_{nk}\\
&=S_{nk},其为S_n的子列,故收敛
\end{aligned}
$$

Th1:

$$
ln(1+n)\le S_n\le 1+lnn,其中S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}
$$

证明:

$$
\begin{gathered}
对x\in[i,i+1],\frac{1}{i+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{i}\\
积分,得\frac{1}{i+1}\le\int_i^{i+1}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{i}\\
累加,得\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\le\sum_{i=1}^{n}\int_i^{i+1}\frac{1}{x}dx\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\\
于是S_n\ge\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=ln(n+1)
\end{gathered}
$$

$$且\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i+1}\le\int_1^n\frac{1}{x}dx=lnn,则S_n\le 1+lnn.$$

eg1:

$$证明:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}收敛$$

证明:

$$\begin{aligned}&任意\epsilon>0,\exists N=\frac{1}{\epsilon},对\forall p\in \mathsf{Z}_+,当n>N时,\\ &|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}|\\ &\le|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}|\\ &=|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}|\\ &\le\frac{1}{n}<\epsilon.\end{aligned}\quad 由Cauchy收敛准则,级数收敛$$

eg2

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}-\frac{1}{\sqrt{n}-1}&=\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}+1}-\frac{1}{\sqrt{n}-1})\\ &=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-2}{n-1}\end{aligned}\quad 故其发散$$

created on 2019-05-09

7.1.2 正项级数($a_n\ge 0$)

- 性质
  - S_n单调,收敛只需证其有界:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n收敛\Leftrightarrow S_n\le M,即部分和有上界 \tag{1}$$

- 审敛法
  - 比较判别法(根本)

$$\begin{aligned}&若\sum_{n=1}^{\infty}a_n与\sum_{n=1}^{\infty}b_n为正项级数,且\exists N,\forall n>N,s.t.a_n\le b_n,则\\ &1.\sum_{n=1}^{\infty}b_n收敛\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n收敛\\ &2.\sum_{n=1}^{\infty}a_n发散\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n发散\end{aligned} \tag{2}$$

证明:考虑 (1)易见

-
  - 极限形式

$$\begin{aligned}&若\sum_{n=1}^{\infty}a_n与\sum_{n=1}^{\infty}b_n为正项级数,且\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\ell\\ &i)0<\ell<\infty:敛散性相同\\ &ii)\ell=0:与(2)相同\\ &iii)\ell=\infty:与(2)相反\end{aligned}$$

证明: 考虑$\ell-\epsilon\le\frac{a_n}{b_n}\le\ell+\epsilon$,取 $\epsilon=\frac{\ell}{2}$即得

eg1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n^2}$$

考虑比较级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$即可

-
  - 比值判别法(d'Alembert)

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n为正项级数,若\exists N,\forall n>N,有$$

$$i)\frac{a_{n+1}}{a_n}<1:\sum_{n=1}^{\infty}\text{收敛}$$
$$ii)\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{发散}$$

证明$i)$:

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\dots\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}a_{N+1}\\&\leq q^{n-N-1}a_{N+1}\end{aligned}\text{其中}q\leq 1.\text{故原级数收敛.}$$

$ii)$:考虑必要条件

极限形式:

$$i)\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛}$$
$$ii)\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{发散}$$
$$iii)\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q=1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{不能确定}$$

$iii)$的反例:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

若$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$不存在:考虑上极限

eg2

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}+\frac{2\times 5}{1\times 5}+\dots+\frac{2\times 5\times 8\times\dots\times(3n-2)}{1\times 5\times 9\times\dots\times(4n-1)}+\cdots$$

sol2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}<1\text{收敛}$$

-
  - 根式判别法(Cauchy)

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{为正项级数,若}\exists N,\forall n>N,\text{有}$$
$$i)\ \sqrt[n]{a_n}\leq\ell<1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛}$$
$$ii)\ \sqrt[n]{a_n}>1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{发散}$$

证明:$i)a_n\leq\ell^n,\ \sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}\ell^n$,收敛

$ii):a_n>1,\text{则}\lim_{n\to\infty}a_n\geq 1$,考虑必要条件,发散

极限形式

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell$$
$$i)\ell<1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛}$$
$$ii)\ell>1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{发散}$$
$$iii)\ell=1:\text{不能确定}$$

反例: $a_n=\frac{1}{n}$和$\frac{1}{n^2}$

eg3

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$$

sol3

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}<1,\text{收敛}$$

-
  - 根式与比值判别法的联系:比值判别法有效,根值判别法一定有效
  - trick:有阶乘:用比值;有n次方:根式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\le 1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q\le 1$$

证明:

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}a_1\\ \sqrt[n]{a_n}&=\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}a_1}\to q\end{aligned}$$

其中利用了结论 若$\{a_n\}\to a$,则$\{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\}\to a$

eg4

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

sol4 用根式判别法易见;比值判别法也未尝不可

eg5

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$$

要利用结论 $\lim_{n\to\infty}.\sqrt[n]{n^k}\to 1$

-
  - 积分判别法(有时在$q=1$时可用): 对于

$$f(x):[1,+\infty]\to(0,+\infty)\text{且单调递减, 则}\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\text{与}\int_1^{\infty}f(x)\text{同收敛或发散}$$

证明:

$$\begin{gathered}f(n)=\int_{n-1}^{n}f(n)dx\\ \text{而对于}f(x)\in[n-1,n],f(n)\le f(x)\le f(n-1)\\ \text{从而}f(n)=\int_{n-1}^{n}f(n)dx\le\int_{n-1}^{n}f(x)dx\le\int_{n-1}^{n}f(n-1)dx=f(n-1)\\ \text{则}\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\le\int_1^{\infty}f(x)dx\le\sum_{n=1}^{\infty}f(n-1).\\ \text{再利用比较审敛法易见.}\end{gathered}$$

eg6

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(lnn)^p}$$

用积分判别法

7.1.3 一般级数

- 交错级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n(a_n>0)$
  - Leibniz: 若 $i):a_n\downarrow ii)a_n\to 0(n\to\infty)$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛

证明: 采用Cauchy判别法 $\forall\epsilon>0,\exists N s.t.\forall n>N,p\in\mathbb{N}_+,$

$p=2k:$

$$\begin{aligned}&|a_{n+1}-a_{n+2}+\cdots+(-1)^{p+1}a_{n+2p}|\\&=a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-\cdots-(a_{n+2k-2}-a_{n+2k-1})-a_{n+2k}\\&\le a_{n+1}<\epsilon(\text{利用}a_n\to 0\text{和单调性})\end{aligned}$$

$p=2k-1$:同理

- 绝对收敛: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛
  - 性质: 绝对收敛→收敛

证明1:

$$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|.\text{则易见}$$

证明2: 用Cauchy 见书.

- 条件收敛: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,但不绝对收敛.

eg1:判断是否绝对收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} ln(1+\frac{1}{n})$$

tip: 小不等式 在学习理论证明中有用.(看来这里面也用了不少放缩)

$$\begin{aligned} ln(1+x) &\le x(x>-1) \\ ln(1+x) &\ge x - \frac{x^2}{4}(0<x<1) \\ 1+x &\le e^x \end{aligned} \tag{7.1.3.1}$$

eg2:讨论敛散性(用上式):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p + (-1)^{n-1}}$$

eg3:

$$f(x) \in C^2(-\delta, \delta), \text{且} \lim_{n \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.\text{证明}: \sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})\text{绝对收敛}.$$

证明:

$$\begin{gathered} \text{易见} f(0)=0, f'(0)=0.\text{由泰勒展开}: f(\frac{1}{n}) = f''(\xi)\frac{1}{2n^2}, \xi \in [0, \frac{1}{n}] \\ \text{当}\frac{1}{n} = x < \frac{\delta}{2}\text{时}, f''(x)\text{有界}, |f''(x)| \le M, \text{则} \\ |f(\frac{1}{n})| \le \frac{M}{2n^2}.\text{则易见原命题成立}. \end{gathered}$$

Th: $f(x)$在$(-\delta, \delta)$二阶可导. $a_n = f(\frac{1}{n})$.则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛 $\Leftrightarrow f(0) = f'(0) = 0$

eg4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - ln(1+\frac{1}{n})$$

用 $(7.1.3.1)$即可.

- 绝对收敛的性质
  - 可任意重排,都收敛,和一样.(条件收敛不可,考虑调和级数)
  - 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$都绝对收敛,和为 A, B, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} a_k b_{n-k+1}$ 收敛于 AB(事实上乘积项按任意次序排列均可)
- (Abel) $\{a_n\}$单调有界, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.
- (Dirichlet) $\{a_n\}$单调且 $a_n \to 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 部分和有界, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.(可依此证明 Leibniz)

eg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosnx}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinnx}{n}$$

7.2 函数项级数

第四章 常微分方程

4.1 可分离变量的微分方程

- 通解: 包括常数的解, 独立常数的个数与微分方程的阶相同.
- 可分离变量的微分方程(包括变量代换后可分离的)

eg1:

$$求\frac{dy}{dx} = 3x^2y的通解.$$

sol1:

$$当y \neq 0时, \int \frac{1}{y}dy = \int 3x^2dx + C, y = Ce^{x^3}(C \neq 0)$$
$$(通解, 但不包括所有解)$$
$$当y = 0时, C = 0;\ 故y = Ce^{x^3}$$

- 齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = \phi(\frac{y}{x})$$
$$令u = \frac{y}{x}, y'_x = (ux)' = \frac{du}{dx}x + u = \phi(u)$$
$$\frac{du}{\phi(u) - u} = \frac{1}{x}dx$$

eg2:

$$(x + \sqrt{x^2 + y^2})y' = y$$

sol2:

$$x > 0 : (1 + \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$
$$或 : \frac{dx}{dy} = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + (\frac{x}{y})^2}$$
$$令u = \frac{x}{y},\ x = uy, \frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy}y + u = u + \sqrt{1 + u^2}$$

eg3:

$$y' = \frac{3x + 2y + 1}{4x + 2y + 2}$$

线性代换,待定系数

4.4 一阶线性微分方程

- 形式: $y' + P(x)y = Q(x)$
  - $Q(x) \equiv 0$: 齐次; $y = Ce^{\int -P(x)dx}$
  - 非齐次: 常数变易法(想法: $C \to u(x)$, 令其为方程特解)

$$\begin{aligned} y' &= u'(x)e^{\int -P(x)dx} + u(x)e^{\int -P(x)dx}(-P(x)) \\ &= u'(x)e^{\int -P(x)dx} - yP(x) \\ 带入原方程 : \frac{du}{dx}e^{\int -P(x)dx} &= Q(x)\ (yP(x)一定会被消掉) \\ u &= \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C \\ 故y &= Ce^{\int -P(x)dx} + e^{\int -P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx} \\ &= 通解 + 特解 \end{aligned}$$

eg1

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^{\frac{2}{5}}$$

eg2

$$y' = \frac{1}{x+y}$$

sol2:

法一: $u = x + y$, 可分离变量

法二: $\frac{dx}{dy} = x + y$一阶线性(反函数微分 常用)

eg3(略作变化)

$$f(x) = sinx - \int_0^x f(x-t)dt$$

sol3:

$$\int_0^x f(x-t)dt = -\int_0^x f(x-t)d(x-t) = \int_0^x f(u)du;\ 可对x求导$$

- 伯努利方程 $y'+P(x)y=Q(x)y^n$

$$\begin{aligned} y'+P(x)y&=Q(x)\\ y^{-n}y'+P(x)y^{1-n}&=Q(x)\\ 令z=y^{1-n}&,z'=(1-n)y^{-n}y'\\ z'+(1-n)P(x)z&=Q(x)(1-n)\\ &(可照常求解)\end{aligned}$$

eg4

$$y'+\frac{1}{x}y=alnx\cdot y^2$$

4.5 可降阶的高阶微分方程

- $y^{(n)}=f(x)$ 求n次不定积分
- $y''=f(x,y')$: 令 $u=f'$

eg1

$$x>-1.\ g'(x)+g(x)-\frac{1}{1+x}\int_0^x g(t)dt=0.\ g(0)=1$$
$$求: i)g'(x); ii)e^{-x}\le g(x)\le 1, x\ge 0$$

sol:

$$证g(x)\ge e^{-x}: f(x)=g(x)-e^{-x}, 求f'(x)$$

- $y''=f(y,y')$: 令 $y'=P, y''=\frac{dP}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p, \Rightarrow pp'=f(y,p)$

4.6 高阶线性微分方程

$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$; $f(x)\equiv 0$: 齐次

- 考虑 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$, 若 $y_1=y_1(x), y_2=y_2(x)$是它的解, 则 $y=C_1y_1+C_2y_2$也是它的解. 证明: 利用求导的线性性 $(Cy)''=Cy''$; 到 n阶也成立
- 函数组线性相关: $k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)\equiv 0, s.t.\ k_1k_2\cdots k_n\not=0$
- $Liouville\ Th$: 若$y_1(x)$是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$的解,则 $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{exp(-\int p(x)dx)}{y_1^2(x)}dx$
- 非齐次的情况: $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$;　 若 $y^*=y^*(x)$是它的特解,且 $Y=Y(X)$是对应齐次方程的通解,则 $y=y^*+Y$也是原方程的解.

4.7 常系数齐次线性方程

- $y''+py'+qy=0$; 试探: $y=e^{rx}\Rightarrow r^2e^{rx}+rpe^{rx}+qr^{rx}=(r^2+pr+q)e^{rx}\equiv 0, r^2+pr+q=0$; 讨论其根的分布
  - $i)\Delta>0, r_1, r_2, y=C_1e^{r1x}+C_2e^{r2x}$
  - $ii)\Delta=0, y=e^{rx}(C_1+C_2x)$
  - $iii)\Delta<0, r_{1,2}=\frac{-p\pm i\sqrt{-\Delta}}{2}=\alpha\pm i\beta, y=e^{\alpha x}(C_1cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

eg1:

$$y''-2y'+5=0$$

sol1: 特征方程: $r^2-2r+5=0;\ r_{1,2}=1\pm 2i;\ y=e^x(C_1cos2x+C_2sin2x)$

eg2:

$$z=f(e^xsiny)\ s.t.\ (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})+(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})=e^{2x}z.求f(u)$$

sol: 依次求二阶导, $(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})=f''(u)e^{2x}sin^2y+f'(u)e^xsiny, (\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})=f''(u)e^{2x}cos^2y-f'(u)e^xsiny$ 故 $f''(u)=f(u)$

- n阶的情况: $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0$;　 特征方程: $r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_n=0$
  - $i).r$为k重实根: $e^{rx}(C_0+C_1x+\cdots+C_{k-1}x^{k-1})$
  - $ii).r$为k重复根: $e^{\alpha x}\left[(C_0+C_1x+\cdots+C_{k-1}x^{k-1})cos\beta x+(D_0+D_1x+\cdots+D_{k-1}x^{k-1})sin\beta x\right]$

习题课

4.25习题课

- 极限

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^y$不存在:

   两个累次极限不相等

- $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}((x,y)\to(0,0))$

  令$y=x$: $f(x,y)\to 0$

  令$y=x^2-x^3$: $f(x,y)=\frac{x^3+(x^2-x^3)^3}{x^3}=1+o(1)\to 1$

- 证偏导数不连续:把除该点外的偏导数用公式求出
- 空间解几
  - 求曲线$x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$在(1,-2,1)处的切线方程

  直线的方向向量:$(\frac{dx}{dx},\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx})$

  两式对x求偏导:$2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0$

  $1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0$

  带入数值,求出$\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$

  - 不一定要写出参数方程再做 把他们看成x的函数
  - 求椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在$M(x_0,y_0,z_0)$点的切平面方程

  法向量:(F_x,F_y,F_z),即$(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2})$

  故切平面方程为$\frac{2x0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z0}{c^2}(z-z_0)=0$

- 函数极值
  - 给定$f(x,y)=2(y-x^2)^2-\frac{1}{7}x^7-y^2$

  (1)求(x,y)的极值

  (2)证明:沿(0,0)点的每条直线,(0,0)点都是定义在该直线上的函数$f(x,y)$的极小值点

  (1)
  $A:f''_{xx},B:f''_{xy},C:f''_{yy}$

  $(0,0)$点:$B^2-AC>0$不能确定是否是极值点,故令$x=0,f(x,y)=y^2$,此时$f(0,0)\le f(x,y)$,为极小值

  再令$y=x^2$,$f(x,x^2)=-\frac{1}{7}x^7-x^4\le 0, f(0,0)$为极大值

  (2)
  令$y=kx(k>0), f(x,kx)=x^2(k^2-4kx-2x^2-\frac{1}{7}x^5)$,当$x\to 0$时,$f(x,kx)$恒大于0,$f(0,0)$为极小值点

  若$k=0, f(x,0)=x^4(2-\frac{1}{7}x^3)>0, f(0,0)$为极小值点

- 计算重积分
  - $I=\iint_D\sqrt{1-y^2}dxdy$
    - 注意偶函数的对称性
  - $I=\int_0^1 dy\int_y^0\frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dx$
    - 交换积分次序:$I=\int_0^1 dx\int_0^x\frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dy=\int_0^1\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^3}}dx$
  - 求曲面$z=xy, z=0, x+y=1$所围立体的体积
    - $I=\iint_D dxdy\int_0^{xy}dz$

5.10习题课

- 第一型曲线积分
- 第二型曲线积分
  - $\int_{\partial\Omega}Pdx+Qdy=\int_{\partial\Omega}(P,Q)\cdot\vec{n}ds$,其中 $\vec{n}$为曲线在 (x,y)点的法向量.
- 曲面面积　设 $f:D\to$ R为连续可微函数, $D\subset$ R^{n-1},则 $graph(f)$为 R^n 中超曲面,其面积公式为

$$\sigma=\int_D\sqrt{1+||\nabla f||^2}$$

- 第二型曲面积分　设 Σ为 R^{3}中可定向的曲面,其与定向相容的参数表示为

$$r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),(u,v)\in\Omega.$$

则对于定义在 Σ上的连续向量值函数 (P,Q,R),定义其曲面积分为

$$I=\int_\Omega(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})dudv$$

eg

$$\Phi=\int_\Sigma x^2dy\wedge dz+y^2dz\wedge dx+x^2dx\wedge dy$$

其中 Σ为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$,方向为外侧

sol: 进行球坐标变换,计算

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\phi,\theta)}=R^2sin^2\phi cos\theta,\text{等等}$$

考虑定向: $\vec{n}=(x_0-a,y_0-b,z_0-c)=(Rsin\phi cos\theta,Rsin\phi sin\theta,Rcos\phi)$,其与 $\vec{N}$方向相同.

法二: 考虑

$$\vec{v}=(P,Q,R)$$
$$\Phi=\int_\Sigma\vec{v}\cdot\vec{n}d\sigma$$

- 格林公式
  - 诱导定向: 从法向量转向切向量是逆时针
  - 平面分部积分公式(在偏微分方程中有用)
- 高斯公式
  - 散度: $\vec{X}=(P,Q,R),div\vec{X}=(\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z})$.则高斯公式的散度形式为

$$\int_\Omega div\vec{X}dxdydz=\int_{\partial\Omega}\vec{X}\cdot\vec{n}d\sigma$$

其中 $\vec{n}$为边界曲面的单位外法向量

eg2: 设 C为平面上连续可微的闭曲线, $\vec{v}$为固定的向量,证明:

$$\int_C\vec{v}\cdot\vec{n}ds=0$$

其中 $\vec{n}$为 C的单位外法向量

sol2: 在 $x(t),y(t)$点,$\vec{n}ds=(\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\frac{-x'(t)}{\sqrt{x'^2+y'^2}})\sqrt{x'^2+y'^2}dt=(dy,-dx)$. 带入原式,用Green公式立得.

eg3:计算积分

$$I=\int_{\partial\Omega}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

其中 Ω为八分之一单位球面(第一卦限),方向为外侧诱导定向

用Stokes公式, $I=-2\int_\Omega dy\wedge dz+dz\wedge dx+dx\wedge dy$,用投影.

5.24 习题课

- $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)})$, 易于消项
- 注意高尉不等式 $ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{4}(0<x<1)$
- $(lnn)^{lnn}=e^{lnnlnlnn}=n^{lnlnn}$
- $\sqrt[n]{n}-1=e^{\frac{1}{n}lnn}-1\sim\frac{1}{n}lnn$
- $2^{n^2}=2^{n\times n}=(2^n)^n=2^n\times2^n\times\cdots\times2^n$ 熟悉指数的指数