数学分析笔记:2019春学期下半学期

期中考前空间解析几何知识点整理

向量

- 混合积:$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$坐标为$(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2),(a_3,b_3,c_3)$则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & b_2 & a_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- 三向量共面:混合积为零

空间平面和直线

- 点到平面的距离: $P_1(x_1,y_1,z_1)$到平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$的距离为:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

- 直线的标准方程:

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

其中(X,Y,Z)称为方向系数

- 两直线相交:设直线ℓ_i过点$M_i(x_i,y_i,z_i)$,方向向量为$(X_i,Y_i,Z_i)(i=1,2)$,则他们相交的充要条件为:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & X_1 & X_2 \\ y_2-y_1 & Y_1 & Y_2 \\ z_2-z_1 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}=0$$

且他们不相交或重合

- ℓ与π平行的充要条件:$AX+BY+CZ=0$且ℓ上有一点不在π上
- 异面直线间的距离:

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot v_1\times v_2|}{|v_1\times v_2|}$$

(考虑投影到公垂线段上)

空间曲面的方程

- 圆柱面: 半径为r,母线方向为$\boldsymbol{v}(l,m,n)$,对称轴ℓ_0过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,则$M(x,y,z)$在此圆柱面上的充要条件是

$$\frac{|\overrightarrow{MM_0}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=r$$

(注意叉乘)

- 圆锥面:设轴的方向向量为$\boldsymbol{v}$, 则$|cos<\overrightarrow{M_0M},\boldsymbol{v}>|=cos\alpha$

4.25习题课

极限

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^y$不存在:

   两个累次极限不相等

- $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}((x,y)\to(0,0))$

  令$y=x$: $f(x,y)\to 0$

  令$y=x^2-x^3$: $f(x,y)=\frac{x^3+(x^2-x^3)^3}{x^3}=1+o(1)\to 1$

- 证偏导数不连续:把除该点外的偏导数用公式求出

空间解几

- 求曲线$x^2+y^2+z^2=6,x+y+z=0$在(1,-2,1)处的切线方程

  直线的方向向量:$(\frac{dx}{dx},\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx})$

两式对x求偏导:$2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0$

$1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0$

带入数值,求出$\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$

- 不一定要写出参数方程再做 把他们看成x的函数

- 求椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在$M(x_0,y_0,z_0)$点的切平面方程

  法向量:(F_x,F_y,F_z),即$(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2})$

  故切平面方程为$\frac{2x0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z0}{c^2}(z-z_0)=0$

函数极值

- 给定$f(x,y)=2(y-x^2)^2-\frac{1}{7}x^7-y^2$

  (1)求(x,y)的极值

  (2)证明:沿(0,0)点的每条直线,(0,0)点都是定义在该直线上的函数$f(x,y)$的极小值点

  (1)
  $A:f''_{xx},B:f''_{xy},C:f''_{yy}$

  $(0,0)$点:$B^2-AC>0$不能确定是否是极值点,故令$x=0,f(x,y)=y^2$,此时$f(0,0)\le f(x,y)$,为极小值

  再令$y=x^2$,$f(x,x^2)=-\frac{1}{7}x^7-x^4\le 0,f(0,0)$为极大值

  (2)
  令$y=kx(k>0),f(x,kx)=x^2(k^2-4kx-2x^2-\frac{1}{7}x^5)$,当$x\to 0$时,$f(x,kx)$恒大于0,$f(0,0)$为极小值点

  若$k=0,f(x,0)=x^4(2-\frac{1}{7}x^3)>0,f(0,0)$为极小值点

计算重积分

- $I=\iint\limits_D\sqrt{1-y^2}dxdy$
  - 注意偶函数的对称性
- $I=\int_0^1dy\int_y^0\frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dx$
  - 交换积分次序:$I=\int_0^1dx\int_0^x\frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dy=\int_0^1\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^3}}dx$
- 求曲面$z=xy,z=0,x+y=1$所围立体的体积
  - $I=\iint\limits_D dxdy\int_0^{xy}dz$

几类积分的联系

高斯公式

设空间区域Ω由分片光滑的闭曲面Σ构成,则

$$\iiint\limits_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=\oiint\limits_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$
$$\text{其中}P,Q,R:\text{一阶连续可微}$$

证明:

$$\text{设}\Omega\text{的下表面}\Sigma_{\text{下}}:z=z_1(x,y),\text{上表面}\Sigma_{\text{上}}:z=z_2(x,y)$$
$$\text{利用三重积分的先一后二和曲面积分的计算,考虑}\iiint\limits_\Omega\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz\text{的穿线,有}$$
$$\iiint\limits_\Omega\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{z1(x,y)}^{z2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz=\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))dxdy$$
$$\text{而}\oiint\limits_\Sigma Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma\text{上}}+\iint\limits_{\Sigma\text{下}}=\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))-\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))dxdy$$
$$\text{从而证明了原命题.}$$

使用Gaussian公式:常加入与坐标平面平行的平面组成封闭平面

eg1:

$$\text{求}I=\iint\limits_\Sigma y^2zdxdy-xzdydz+x^2ydzdx$$
$$\Sigma:z=x^2+y^2,x^2+y^2=1\text{及坐标面所围曲线的外侧}$$

注意:画好积分区域 主要在第一卦限

so1:

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(-z+x^2+y^2)dxdydx=\int_o^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{r^2}(-z+r^2)dz$$

斯托克斯公式

考虑三维空间的曲面Σ,其边界为Γ,曲线方向取正向,曲面方向取右手螺旋,我们有

$$\oint_{\Gamma}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\iint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

注意以Γ为边界的曲面Σ可能有若干个,可以选择一个比较合适的(有时甚至选择球面比较方便)

证明:

$$\text{希望把曲线积分(找参数方程)和曲面积分(设法投影)化到同一个东西设}\Sigma:z=z(x,y),\text{将}\Sigma\text{投影到}xOy\text{面,得到}D_{xy},\text{记其边界线为}L:x=x(t$$
$$\text{而}L\text{为}\Gamma\text{在}xOy\text{面的投影,故}\Gamma:x=x(t),y=y(t),z=z(x(t),y(t))$$
$$\text{于是曲线积分}\oint\limits_{\Gamma}P(x,y,z)dx=\oint_{L}P(x,y,z(x,y))dx,\text{注意这是平面的曲线积分,由格林公式}$$
$$=\iint\limits_{Dxy}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy,\text{这样就把曲线积分化成了二重积分.}$$
$$=\iint\limits_{D_{xy}}-(\frac{\partial P}{\partial x}\times 0+\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x})dxdy,\text{由复合求导}$$
$$\text{考虑}dxdy=cos\gamma dS,dzdx=cos\beta dS,\text{往证}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}cos\gamma dS=-cos\beta dS$$
$$\text{只需证}\frac{\partial z}{\partial y}cos\gamma=-cos\beta$$
$$\text{考虑}\Sigma:z(x,y)-z=0,\vec{n}=(z_x,z_y,-1),\text{易见}\frac{cos\beta}{cos\gamma}=-z_y=\frac{\partial z}{\partial y},\text{从而证明了原命题.}$$

启示:重视基本含义,基本计算方法

eg2:

$$\text{求}I=\oint\limits_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$
$$\Gamma:x^2+y^2=a^2\text{与}\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=2(a>0,b>0)\text{的交线,方向为从}x\text{轴正向看去是逆时针}$$

注意画图的技巧:把zOx面作为纸面

sol2:

$$\text{考虑}\Sigma:\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1,\text{其投影}D_{xy}:x^2+y^2\le a^2$$
$$I=\iint\limits_{\Sigma}(-1-1)dydz+(-1-1)dzdx+(-1-1)dxdy$$
$$=-2\iint\limits_{\Sigma}(dydz+dzdx+dxdy),\text{它是曲面在坐标面上的投影的面积}$$
$$\text{考虑}\Sigma\text{在}yOz\text{面上的投影}:a^2(1-\frac{z}{b})^2+y^2=a^2,\text{即}\frac{y^2}{a^2}+\frac{(z-b)^2}{b^2}=1$$
$$\text{于是}I=-2(\pi ab+0+\pi a^2)$$