数学分析笔记:2019春学期下半学期

期中考前空间解析几何知识点整理

向量

- 混合积:***a, b, c***坐标为$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)$则

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & b_2 & a_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- 三向量共面:混合积为零

空间平面和直线

- 点到平面的距离: $P_1(x_1, y_1, z_1)$到平面$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$的距离为:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- 直线的标准方程:

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}$$

其中(X, Y, Z)称为方向系数

- 两直线相交:设直线ℓ_i过点$M_i(x_i, y_i, z_i)$,方向向量为$(X_i, Y_i, Z_i)(i = 1, 2)$,则他们相交的充要条件为:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & X_1 & X_2 \\ y_2 - y_1 & Y_1 & Y_2 \\ z_2 - z_1 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

且他们不相交或重合

- ℓ与π平行的充要条件:$AX + BY + CZ = 0$且ℓ上有一点不在π上
- 异面直线间的距离:

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot v_1 \times v_2|}{|v_1 \times v_2|}$$

(考虑投影到公垂线段上)

空间曲面的方程

- 圆柱面: 半径为r,母线方向为$\boldsymbol{v}(l,m,n)$,对称轴ℓ_0过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,则$M(x,y,z)$在此圆柱面上的充要条件是

$$\frac{|\overrightarrow{MM_0}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=r$$

(注意叉乘)

- 圆锥面:设轴的方向向量为$\boldsymbol{v}$, 则$|cos<\overrightarrow{M_0M},\boldsymbol{v}>|=cos\alpha$

几类积分的联系

高斯公式

设空间区域Ω由分片光滑的闭曲面Σ构成,则

$$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$
$$\text{其中}P,Q,R:\text{一阶连续可微}$$

证明:

$$\text{设}\Omega\text{的下表面}\Sigma_{\text{下}}:z=z_1(x,y),\text{上表面}\Sigma_{\text{上}}:z=z_2(x,y)$$
$$\text{利用三重积分的先一后二和曲面积分的计算,考虑}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz\text{的穿线,有}$$
$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz&=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz\\&=\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))dxdy\\ \text{而}\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}Rdxdy&=\iint\limits_{\Sigma\text{上}}+\iint\limits_{\Sigma\text{下}}\\&=\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))-\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))dxdy\end{aligned}$$
$$\text{从而证明了原命题.}$$

使用Gaussian公式:常加入与坐标平面平行的平面组成封闭平面

eg1:

$$\text{求}I=\iint\limits_{\Sigma}y^2zdxdy-xzdydz+x^2ydzdx$$
$$\Sigma:z=x^2+y^2,x^2+y^2=1\text{及坐标面所围曲线的外侧}$$

注意:画好积分区域 主要在第一卦限

so1:

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(-z+x^2+y^2)dxdydx=\int_o^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1rdr\int_0^{r^2}(-z+r^2)dz$$

斯托克斯公式

考虑三维空间的曲面Σ,其边界为Γ,曲线方向取正向,曲面方向取右手螺旋,我们有

$$\oint\limits_{\Gamma}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\iint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

注意以Γ为边界的曲面Σ可能有若干个,可以选择一个比较合适的(有时甚至选择球面比较方便)

行列式记法:

$$=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz&dzdx&dxdy\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}$$

证明:

$$\text{希望把曲线积分(找参数方程)和曲面积分(设法投影)化到同一个东西}$$
$$\text{设}\Sigma:z=z(x,y),\text{将}\Sigma\text{投影到}xOy\text{面,得到}D_{xy},\text{记其边界线为}L:x=x(t),y=y(t).$$
$$\text{而}L\text{为}\Gamma\text{在}xOy\text{面的投影,故}\Gamma:x=x(t),y=y(t),z=z(x(t),y(t))$$

于是曲线积分

$$\oint_\Gamma P(x,y,z)dx=\oint_L P(x,y,z(x,y))dx$$
$$注意这是平面的曲线积分,由格林公式=\iint_{D_{xy}}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy,这样就把曲线积分化成了二重积分$$
$$由复合求导=\iint_{D_{xy}}-(\frac{\partial P}{\partial x}\times 0+\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x})dxdy,$$
$$考虑dxdy=cos\gamma dS,dzdx=cos\beta dS,往证$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}cos\gamma dS=-cos\beta dS$$
$$只需证\frac{\partial z}{\partial y}cos\gamma=-cos\beta$$
$$考虑\Sigma:z(x,y)-z=0,\vec{n}=(z_x,z_y,-1),易见\frac{cos\beta}{cos\gamma}=-z_y=\frac{\partial z}{\partial y},从而证明了原命题.$$

启示:重视基本含义,基本计算方法

eg2:

$$求I=\oint_\Gamma(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$
$$\Gamma:x^2+y^2=a^2与\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=2(a>0,b>0)的交线,方向为从x轴正向看去是逆时针$$

注意画图的技巧:把zOx面作为纸面

sol2:

$$考虑\Sigma:\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1,其投影D_{xy}:x^2+y^2\le a^2$$
$$I=\iint_\Sigma(-1-1)dydz+(-1-1)dzdx+(-1-1)dxdy$$
$$=-2\iint_\Sigma(dydz+dzdx+dxdy),它是曲面在坐标面上的投影的面积$$
$$考虑\Sigma在yOz面上的投影:a^2(1-\frac{z}{b})^2+y^2=a^2,即\frac{y^2}{a^2}+\frac{(z-b)^2}{b^2}=1$$
$$于是I=-2(\pi ab+0+\pi a^2)$$

第七章 无穷级数

7.1 数项级数

7.1.1 常数项级数

- 定义:
  - 给定 $\{a_n\}$, $a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$,或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,简记为 $\sum a_n$
  - 研究问题:收敛/发散
  - 级数的收敛:定义**部分和** $S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$,构成**数列** $\{S_n\}$,其敛散性与原级数的敛散性相同; 研究级数的收敛性需要通过研究数列的收敛性.
  - 收敛级数的余项: $R_n=S-S_n$,其中 S为级数的和
- 判断敛散性
  - Cauchy收敛准则:

  $$给定\{b_n\},b_n\to b\Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists N>0,s.t.\forall p\in\mathbb{Z}_+,有对n>N,|b_{n+p}-b_n|<\epsilon$$

  - **级数的Cauchy收敛准则**:

  $级数\sum a_n,部分和S_n收敛\Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists N>0,s.t.\forall p\in\mathbb{Z}_+,有对n>N,|S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}|<\epsilon$. 要习惯这种 $\epsilon\delta$语言进行证明

  - 调和级数
    - 知道发散,知道发散的阶
    - 应用:随机树:每次只选一个叶子节点向下分,研究随机一个叶子节点的层数: lnn
- 收敛级数的性质
  - 线性性
  - 任意改动有限项不影响级数的收敛性
  - $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$(证明: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n-S_{n+1}=0$)
  - $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 任意加括号后级数收敛(反之不成立,反例: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$)(利用逆否命题:加括号发散 $\Rightarrow$原级数发散)

证明:

$$\begin{aligned}S_n &= a_1+a_2+\cdots+a_n\\ S'_k &= b_1+b_2+\cdots+b_k\\ &= a_1+a_2+\cdots+a_{nk}\\ &= S_{nk}\text{, 其为}S_n\text{的子列, 故收敛}\end{aligned}$$

Th1:

$$ln(1+n)\le S_n\le 1+lnn,\text{其中}S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

证明:

$$\begin{gathered}\text{对}x\in[i,i+1],\frac{1}{i+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{i}\\ \text{积分, 得}\frac{1}{i+1}\le\int_i^{i+1}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{i}\\ \text{累加, 得}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\le\sum_{i=1}^{n}\int_i^{i+1}\frac{1}{x}dx\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\\ \text{于是}S_n\ge\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=ln(n+1)\\ \text{且}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i+1}\le\int_1^{n}\frac{1}{x}dx=lnn,\text{则}S_n\le 1+lnn.\end{gathered}$$

eg1:

$$\text{证明}:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{收敛}$$

证明:

$$\begin{gathered}\text{任意}\epsilon>0,\exists N=\frac{1}{\epsilon},\text{对}\forall p\in\mathsf{Z}_+,\text{当}n>N\text{时},\\ \begin{aligned}&|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}|\\ &\le|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}|\\ &=|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}|\\ &\le\frac{1}{n}<\epsilon.\end{aligned}\text{由}Cauchy\text{收敛准则, 级数收敛}\end{gathered}$$

eg2

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}-\frac{1}{\sqrt{n}-1}&=\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}+1}-\frac{1}{\sqrt{n}-1})\\ &=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-2}{n-1}\end{aligned}\text{故其发散}$$

created on 2019-05-09

7.1.2 正项级数($a_n\ge 0$)

- 性质
  - S_n单调,收敛只需证其有界:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛}\Leftrightarrow S_n\le M,\text{即部分和有上界}\tag{1}$$

- 审敛法
  - 比较判别法(根本)

$$\begin{gathered}\text{若}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{与}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\text{为正项级数, 且}\exists N,\forall n>N,s.t.a_n\le b_n,\text{则}\\ 1.\sum_{n=1}^{\infty}b_n\text{收敛}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛}\\ 2.\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{发散}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n\text{发散}\end{gathered}\tag{2}$$

证明:考虑 (1)易见

-
  - 极限形式

$$\text{若}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{与}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\text{为正项级数,且}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\ell$$

$$i)0<\ell<\infty:\text{敛散性相同}$$
$$ii)\ell=0:\text{与(2)相同}$$
$$iii)\ell=\infty:\text{与(2)相反}$$

证明: 考虑$\ell-\epsilon\leq\frac{a_n}{b_n}\leq\ell+\epsilon$,取$\epsilon=\frac{\ell}{2}$即得

eg1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n^2}$$

考虑比较级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$即可

- - 比值判别法(d'Alembert)

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{为正项级数,若}\exists N,\forall n>N,\text{有}$$
$$i)\frac{a_{n+1}}{a_n}<1:\sum_{n=1}^{\infty}\text{收敛}$$
$$ii)\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{发散}$$

证明$i)$:

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}a_{N+1}\\&\leq q^{n-N-1}a_{N+1}\end{aligned}\text{其中}q\leq1.\text{故原级数收敛.}$$

$ii)$:考虑必要条件

极限形式:

$$i)\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛}$$
$$ii)\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{发散}$$
$$iii)\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q=1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{不能确定}$$

$iii)$的反例:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$不存在:考虑上极限

eg2

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}+\frac{2\times5}{1\times5}+\cdots+\frac{2\times5\times8\times\cdots\times(3n-2)}{1\times5\times9\times\cdots\times(4n-1)}+\cdots$$

sol2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}<1\text{收敛}$$

- - 根式判别法(Cauchy)

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{为正项级数,若}\exists N,\forall n>N,\text{有}$$

$$i)\sqrt[n]{a_n}\leq\ell<1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛}$$
$$ii)\sqrt[n]{a_n}>1:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{发散}$$

证明:$i)a_n\leq\ell^n$, $\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}\ell^n$,收敛

$ii):a_n>1$, 则 $\lim_{n\to\infty}a_n\geq1$,考虑必要条件,发散

极限形式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

$$i)\ell < 1 : \sum_{n=1}^{\infty} a_n 收敛$$
$$ii)\ell > 1 : \sum_{n=1}^{\infty} a_n 发散$$
$$iii)\ell = 1 : 不能确定$$

反例: $a_n = \dfrac{1}{n}$和 $\dfrac{1}{n^2}$

eg3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$$

sol3

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2} < 1, 收敛$$

-
  - 根式与比值判别法的联系:比值判别法有效,根值判别法一定有效
  - trick:有阶乘:用比值;有n次方:根式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \le 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \le 1$$

证明:

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1$$
$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1} \to q$$

其中利用了结论 若$\{a_n\} \to a$,则 $\{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\} \to a$

eg4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

sol4 用根式判别法易见;比值判别法也未尝不可

eg5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$$

要利用结论 $\lim_{n\to\infty} .^n\sqrt{n^k} \to 1$

-
  - 积分判别法(有时在$q=1$时可用): 对于

$$f(x):[1,+\infty] \to (0,+\infty) 且单调递减, 则 \sum_{n=1}^{\infty} f(n) 与 \int_1^{\infty} f(x) 同收敛或发散$$

证明:

$$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n) dx$$
$$而对于 f(x) \in [n-1,n], f(n) \le f(x) \le f(n-1)$$
$$从而 f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n) dx \le \int_{n-1}^{n} f(x) dx \le \int_{n-1}^{n} f(n-1) dx = f(n-1)$$
$$则 \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le \int_1^{\infty} f(x) dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1).$$
$$再利用比较审敛法易见.$$

eg6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(lnn)^p}$$

用积分判别法

7.1.3 一般级数

- 交错级数: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n (a_n > 0)$

- Leibniz: 若 $i): a_n \downarrow ii) a_n \to 0 (n \to \infty)$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛

证明: 采用Cauchy判别法 $\forall \epsilon > 0, \exists N s.t. \forall n > N, p \in \mathbb{N}_+$,

$p = 2k$:

$$
\begin{aligned}
&|a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{p+1} a_{n+2p}| \\
&= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) - a_{n+2k} \\
&\le a_{n+1} < \epsilon (\text{利用} a_n \to 0 \text{和单调性})
\end{aligned}
$$

$p = 2k - 1$:同理

- 绝对收敛: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛
  - 性质: 绝对收敛→收敛

证明1:

$$
\begin{gathered}
0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n| \\
\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|.\text{则易见}
\end{gathered}
$$

证明2: 用Cauchy 见书.

- 条件收敛: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,但不绝对收敛.

eg1:判断是否绝对收敛:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} ln(1 + \frac{1}{n})
$$

tip: 小不等式 在学习理论证明中有用.(看来这里面也用了不少放缩)

$$
\begin{aligned}
ln(1+x) &\le x (x > -1) \\
ln(1+x) &\ge x - \frac{x^2}{4} (0 < x < 1) \\
1 + x &\le e^x
\end{aligned}
\tag{7.1.3.1}
$$

eg2:讨论敛散性(用上式):

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p + (-1)^{n-1}}
$$

eg3:

$$
f(x) \in C^2(-\delta, \delta), \text{且} \lim_{n \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.\text{证明}: \sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})\text{绝对收敛}.
$$

证明:

$$
\begin{gathered}
\text{易见} f(0) = 0, f'(0) = 0.\text{由泰勒展开}: f(\frac{1}{n}) = f''(\xi) \frac{1}{2n^2}, \xi \in [0, \frac{1}{n}] \\
\text{当} \frac{1}{n} = x < \frac{\delta}{2} \text{时}, f''(x)\text{有界}, |f''(x)| \le M, \text{则} \\
|f(\frac{1}{n})| \le \frac{M}{2n^2}.\text{则易见原命题成立}.
\end{gathered}
$$

Th: $f(x)\text{在}(-\delta, \delta)$二阶可导. $a_n = f(\frac{1}{n})$.则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛 $\Leftrightarrow f(0) = f'(0) = 0$

eg4

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - ln(1 + \frac{1}{n})
$$

用 $(7.1.3.1)$即可.

- 绝对收敛的性质
  - 可任意重排,都收敛,和一样.(条件收敛不可,考虑调和级数)
  - 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$都绝对收敛,和为 A, B, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} a_k b_{n-k+1}$ 收敛于 AB(事实上乘积项按任意次序排列均可)
- (Abel) $\{a_n\}$单调有界, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.
- (Dirichlet) $\{a_n\}$单调且 $a_n \to 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 部分和有界, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.(可依此证明 Leibniz)

eg:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosnx}{n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sinnx}{n}$$

7.2 函数项级数

7.2.1 函数列的一致收敛性

- Intuition: 求极限与求积分,求导数能不能交换次序
- 设函数列 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots,x\in I$. 如果 $\forall x_0\in D,\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x)$, 则称 $\{f_n\}$在D上收敛于 f. 若 D 包含所有收敛点,则称其为函数列的收敛域

$\forall\epsilon>0,\exists N=N(\epsilon,x)>0,\forall n>N,|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$ (注意与不同x取值有关)

eg1: 求 $f_n(x)=x^n$的收敛域

sol1: $|x|<1:f_n(x)\to 0,n\to\infty;x=1:\text{收敛};x=-1:\text{不收敛};|x|>1:\text{发散}$.故收敛域为 $(-1,1]$

- 讨论: $f_n(x)$每一项都连续,可导,可积.....,极限是否有相应的性质

- 一致收敛性$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$: 设函数列 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots,x\in D$,$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists N=N(\epsilon)>0,\forall n>N,|f_n(x)-f(x)|<\epsilon,\forall x\in D$
- 反: $\exists\epsilon>0,\forall N,n>N\text{时},\exists x_n,|f_n(x_n)-f(x_n)|\geq\epsilon$

eg2: 证明 $f_n(x)=x^n$非一致收敛

sol2:

$$|f_n(x)-f(x)|=|x^n|,let\ x_n\ be\ (1-\frac{1}{n})^n$$
$$|f_n(x)-f(x)|=1-\frac{1}{n}\geq\frac{1}{2}.$$

- 几何意义: $n>N$时, $y=f_n(x)$被限制在一个小区间之内
- Cauchy判别法: $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists N=N(\epsilon)>0,\forall n,m>N,|f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon,\forall x\in D$
- 余项判别法: $D\text{上},f_n(x)\rightrightarrows f(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$

eg3: $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$

sol3:

$$f(x)=0.$$
$$\sup_{x\in D}f_n(x)=\frac{nx}{e^{nx^2}},\text{求导求最大值}=\frac{n}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}\to\infty\neq 0.$$

故不一致收敛

- 性质1: $D\text{上},f_n(x)\rightrightarrows f(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to x0}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x0}f_n(x)=\lim\limits_{x\to x0}f(x)$
- 性质2: $D\text{上},f_n(x)\rightrightarrows f(x)\Rightarrow\forall n\geq 1,f_n(x)$连续,则 $f(x)$连续.
- 性质3: $D\text{上},f_n(x)\rightrightarrows f(x)\Rightarrow\forall n\geq 1,f_n(x)$连续,则 $f(x)$可积,且

$$\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)$$

- 性质4: $f_n(x)\text{在}D\text{上可导},f_n'(x)\rightrightarrows f'(x)\Rightarrow\{f_n(x)\}$的极限函数可导,且

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)$$

eg4:验证性质:

$$f_n(x)=\frac{2x+n}{x+n},x\in[0,b]$$
$$f_n(x)=x-\frac{x^n}{n},x\in[0,1]$$

sol4:

1. 用余项

7.2.2 函数项级数

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. 研究部分和函数 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, 构成函数列 $S_1(x), S_2(x), \cdots, S_n(x), \cdots$. $S_n(x_0)$收敛,称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 $x = x_0$处收敛. 在集合上收敛,收敛域类似定义.若部分和函数一致收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$一致收敛.
- 和函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$

eg1: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$的收敛域

- 柯西判别法: 同7.1.1; 必要条件: 通项 $u_n(x) \rightrightarrows 0$
- 余项判别法: 同7.1.1;

eg2: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$在 $x \in (-1,1)$上的一致收敛性

sol2: 当出现 $\sup\limits_{x\in(-1,1)} \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$时,无需求导得最小值,只需令 $x = \dfrac{n}{n+1}$, $\sup\limits_{x\in(-1,1)} \dfrac{x^{n+1}}{1-x} \geq \dfrac{(\frac{n}{n+1})^{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = (n+1)(1-\dfrac{1}{n+1})^{n+1} \to \infty$,故不一致收敛

- 维尔斯特拉斯判别法: 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$收敛,且 $\forall n \in \mathsf{N}_+ \forall x \in D, |u_n(x)| \leq M_n$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$一致收敛

Intuition: 将函数的上界换为数列

- 性质
  - 连续性: 若 $u_n(x)$连续,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$连续
  - 逐项可积: 若 $u_n(x)$连续,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$可积,且 $\displaystyle\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x u_n(x)dx$
  - 逐项可导: $u_n(x) \in C^{(1)}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$一致收敛,则 $S(x)$可导,且 $S'(x) = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$
  - 内闭一致收敛: 在区间内任意一个闭区间一致收敛,则上面的性质都可用

eg3: $u_n(x) = \dfrac{1}{n^3} ln(1+n^2x^2)$. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 $[0,1]$一致收敛

sol3:

Weierstrass: $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^3} ln(1+x^2k^2) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^3} ln(1+k^2)$. 考虑 $M_n = \dfrac{1}{n^3} ln(1+n^2)$,易见原命题成立.

同时, $u_n'(x) \leq \dfrac{1}{n^2}$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$一致收敛,可知 $S'(x)$

eg4: 证明: $ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$

sol4:

恒成立: $1 + x = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n+1} x^n + \cdots$

两边积分: $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \int_0^x 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n+1} x^n + \cdots$,化为逐项积分易见.

注意为何符合条件

7.3 幂级数

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$
- $Th(Abel):$
  - $i)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在 $x = x_0$处收敛,则 $\forall x. |x| < |x_0|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$收敛
  - $ii)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在 $x = x_0$处发散,则 $\forall x. |x| > |x_0|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$发散

证明:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ = $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n (\dfrac{x^n}{x_0^n})$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$收敛,知 $a_n x_0^n \leq M$有界,又 $(\dfrac{x}{x_0})^n < 1$则易见收敛.

(ii) 反证

- 收敛半径 R :阻隔收敛与发散 关于原点对称

- 幂级数的收敛性判别法

  - 比式 $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|$
    - $0 < \rho < \infty : R = \dfrac{1}{\rho}$

        - $\rho = 0 : R = \infty$
        - $\rho = \infty : R = 0$

证明: 用正项级数的比式判别法

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = |x| \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$,比较其与1的大小关系

- - 根式 $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
        - $0 < \rho < \infty : R = \frac{1}{\rho}$
        - $\rho = 0 : R = \infty$
        - $\rho = \infty : R = 0$

eg1: 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$的收敛域

sol1: 直接用比式判别法,多一个分情况讨论

eg2: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n}$

注意: Strling 公式

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

- 性质
    - 和函数在 $(-R, R)$连续
    - 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在 $x = R/-R$收敛,则和函数 S_n在该点单边收敛
    - 收敛半径内,和函数可逐项求导,求积分
    - $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n+1} x^{n+1}$有相同的收敛半径

证明: $\forall x \in (-R, R), \exists y \in (-R, R), |x| < |y|$. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y_n \frac{n}{y} \frac{x^{n-1}}{y^{n-1}} \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} M \frac{n}{y} \frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$.这是由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛,通项有界.用比式判别法易证其收敛.

- - $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. $S(0) = a_0, S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, S'(0) = a_1 . a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$

eg3 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n$

sol1: 收敛半径: $(-1, 1)$.

$$\begin{aligned}
S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n n x^{n-1} = x g(x) \\
\int_0^x g(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n = x f(x) \\
\int_0^x f(t)dt = \frac{-x}{1+x} \\
\text{求导}, f(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \int_0^x g(t)dt = -\frac{1}{x(1+x)^2} \\
g(x) = \cdots, S(x) = x g(x)
\end{aligned}$$

函数的幂级数展开

- Taylor级数 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$

反例:

$$\begin{aligned}
f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\
= 0, x = 0
\end{aligned}$$

其求n阶导为0, $S(x) = 0$.

- Th: 若 $f(x)$在 $x = x_0$处有任意阶导数, 且对$|x - x_0| < r$, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$,则 $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r), f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$

余项的表达式: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} x^{n+1}$

eg4 求 $f(x) = ln(1-x)$的幂级数展开

sol4: 用求导等运算 eg5: $ln\frac{1+x}{1-x}$

sol5:

$$\begin{aligned}ln(\frac{1+x}{1-x}) &= ln(1+x) - ln(1-x)\\&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n}\\&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\\&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\end{aligned}$$

eg6:求 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$的 n阶导数

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$

比较系数得 $f^{(2n)}(0) = 0$,$f^{(2n+1)}(0) = \frac{(-1)^n(2n+1)!}{n!(2n+1)}$

7.4 傅里叶级数

- 若 $f(x)$以 2π为周期,则在傅里叶系数 a_n, b_n下,

$$\begin{aligned}f(x) &\sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}A_n sin(nx+\phi_n)\\&= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}A_n(sin\phi_n cosnx + cos\phi_n sinnx)\\&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n cosnx + b_n sinnx \quad (1)\end{aligned}$$

- 收敛性:$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| + |b_n|$收敛,则 (1)收敛且一致收敛
- 正交性:若 $\phi(x), \psi(x)$在 $[a, b]$可积且 $< \phi, \psi >= \int_a^b \phi(x)\psi(x)dx = 0$,则称$\phi(x), \psi(x)$在$[a, b]$正交
- 三角函数系 $1, sinx, cosx, \cdots, sinnx, cosnx$
  - 周期为 2π
  - 宛如正交基, $< a_i, a_j >= \pi\delta(i, j)$
- 与 $f(x)$的联系
  - $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnxdx, n = 0, 1, 2, \cdots$
  - $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinnxdx, n = 1, 2, \cdots$

证明: (1)两边积分.求 a_n:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n cosnx + b_n sinnx$$

$$\text{由正交性, 一致收敛性:}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnxdx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}cos^2 nx = \pi a_n$$

- 和函数收敛定理:若 $f(x)$以 2π为周期,且 $[-\pi, \pi]$按段光滑,则 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 傅里叶级数收敛至 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$
- 按段光滑: $f(x)$在$[a, b]$满足:
  - 除有限第一类间断点外, $f(x)$连续
  - 除有限第一类间断点外, $f'(x)$存在.且若 x_0为不连续点,则 $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$存在

第四章 常微分方程

4.1 可分离变量的微分方程

- 通解: 包括常数的解, 独立常数的个数与微分方程的阶相同.
- 可分离变量的微分方程(包括变量代换后可分离的)

eg1:

$$\text{求}\frac{dy}{dx} = 3x^2 y\text{的通解.}$$

sol1:

$$
\begin{gathered}
当y \not= 0时, \int \frac{1}{y} dy = \int 3x^2 dx + C, y = Ce^{x^3} (C \not= 0) \\
(通解,但不包括所有解) \\
当y = 0时, C = 0;\ 故y = Ce^{x^3}
\end{gathered}
$$

- 齐次方程

$$
\begin{gathered}
\frac{dy}{dx} = F(x, y) = \phi(\frac{y}{x}) \\
令u = \frac{y}{x}, y'_x = (ux)' = \frac{du}{dx} x + u = \phi(u) \\
\frac{du}{\phi(u) - u} = \frac{1}{x} dx
\end{gathered}
$$

eg2:

$$
(x + \sqrt{x^2 + y^2}) y' = y
$$

sol2:

$$
\begin{gathered}
x > 0 : (1 + \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\
或 : \frac{dx}{dy} = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + (\frac{x}{y})^2} \\
令u = \frac{x}{y},\ x = uy, \frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy} y + u = u + \sqrt{1 + u^2}
\end{gathered}
$$

eg3:

$$
y' = \frac{3x + 2y + 1}{4x + 2y + 2}
$$

线性代换,待定系数

4.4 一阶线性微分方程

- 形式: $y' + P(x) y = Q(x)$
  - $Q(x) \equiv 0$: 齐次; $y = Ce^{\int -P(x) dx}$
  - 非齐次: 常数变易法(想法: $C \to u(x)$, 令其为方程特解)

$$
\begin{aligned}
y' &= u'(x) e^{\int -P(x) dx} + u(x) e^{\int -P(x) dx} (-P(x)) \\
&= u'(x) e^{\int -P(x) dx} - y P(x) \\
带入原方程 : \frac{du}{dx} e^{\int -P(x) dx} &= Q(x)\ (yP(x)一定会被消掉) \\
u &= \int Q(x) e^{\int P(x) dx} + C \\
故y &= Ce^{\int -P(x) dx} + e^{\int -P(x) dx} \int Q(x) e^{\int P(x) dx} \\
&= 通解 + 特解
\end{aligned}
$$

eg1

$$
y' - \frac{2}{x + 1} y = (x + 1)^{\frac{2}{5}}
$$

eg2

$$
y' = \frac{1}{x + y}
$$

sol2:

法一: $u = x + y$, 可分离变量

法二: $\frac{dx}{dy} = x + y$一阶线性(反函数微分 常用)

eg3(略作变化)

$$
f(x) = sinx - \int_0^x f(x - t) dt
$$

sol3:

$$
\int_0^x f(x - t) dt = -\int_0^x f(x - t) d(x - t) = \int_0^x f(u) du;\ 可对x求导
$$

- 伯努利方程 $y' + P(x) y = Q(x) y^n$

$$
\begin{aligned}
y' + P(x)y &= Q(x) \\
y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} &= Q(x) \\
\text{令} z = y^{1-n}&, z' = (1-n)y^{-n}y' \\
z' + (1-n)P(x)z &= Q(x)(1-n) \\
&\text{(可照常求解)}
\end{aligned}
$$

eg4

$$y' + \frac{1}{x}y = alnx \cdot y^2$$

4.5 可降阶的高阶微分方程

- $y^{(n)} = f(x)$ 求n次不定积分
- $y'' = f(x, y')$: 令 $u = f'$

eg1

$$
\begin{gathered}
x > -1.\ g'(x) + g(x) - \frac{1}{1+x}\int_0^x g(t)dt = 0.\ g(0) = 1 \\
\text{求}: i)g'(x); ii)e^{-x} \le g(x) \le 1, x \ge 0
\end{gathered}
$$

sol:

$$\text{证} g(x) \ge e^{-x} : f(x) = g(x) - e^{-x}, \text{求} f'(x)$$

- $y'' = f(y, y')$: 令 $y' = P, y'' = \dfrac{dP}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy}p, \Rightarrow pp' = f(y, p)$

4.6 高阶线性微分方程

$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$; $f(x) \equiv 0$: 齐次

- 考虑 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, 若 $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$是它的解, 则 $y = C_1y_1 + C_2y_2$也是它的解. 证明: 利用求导的线性性 $(Cy)'' = Cy''$; 到 n阶也成立
- 函数组线性相关: $k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \cdots + k_ny_n(x) \equiv 0, s.t.\ k_1k_2\cdots k_n \not= 0$
- $Liouville\ Th$: 若$y_1(x)$是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$的解,则 $y_2(x) = y_1(x)\displaystyle\int \frac{exp(-\int p(x)dx)}{y_1^2(x)}dx$
- 非齐次的情况: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$; 若 $y^* = y^*(x)$是它的特解,且 $Y = Y(X)$是对应齐次方程的通解,则 $y = y^* + Y$也是原方程的解.

4.7 常系数齐次线性方程

- $y'' + py' + qy = 0$; 试探: $y = e^{rx} \Rightarrow r^2e^{rx} + rpe^{rx} + qr^{rx} = (r^2 + pr + q)e^{rx} \equiv 0, r^2 + pr + q = 0$; 讨论其根的分布
  - $i)\Delta > 0, r_1, r_2, y = C_1e^{r1x} + C_2e^{r2x}$
  - $ii)\Delta = 0, y = e^{rx}(C_1 + C_2x)$
  - $iii)\Delta < 0, r_{1,2} = \dfrac{-p \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha \pm i\beta, y = e^{\alpha x}(C_1cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

eg1:

$$y'' - 2y' + 5 = 0$$

sol1: 特征方程: $r^2 - 2r + 5 = 0;\ r_{1,2} = 1 \pm 2i;\ y = e^x(C_1cos2x + C_2sin2x)$

eg2:

$$z = f(e^x siny)\ s.t.\ (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}) + (\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) = e^{2x}z.\text{求}f(u)$$

sol: 依次求二阶导, $(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}) = f''(u)e^{2x}sin^2y + f'(u)e^x siny, (\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}) = f''(u)e^{2x}cos^2y - f'(u)e^x siny$ 故 $f''(u) = f(u)$

- n阶的情况: $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0$; 特征方程: $r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_n = 0$
  - $i).r$为k重实根: $e^{rx}(C_0 + C_1x + \cdots + C_{k-1}x^{k-1})$
  - $ii).r$为k重复根: $e^{\alpha x}\left[(C_0 + C_1x + \cdots + C_{k-1}x^{k-1})cos\beta x + (D_0 + D_1x + \cdots + D_{k-1}x^{k-1})sin\beta x\right]$

4.8 常系数非齐次微分方程

- $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$. 可做的情形: $f(x) = e^{\lambda x}P_n(x)$或 $f(x) = e^{\alpha x}(R^{(\ell)(x)}cos\omega x + R^{(r)}(x)sin\omega x)$
- $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = e^{\lambda x}P_n(x)$.
  - 二次的情形:

假设 $y^* = e^{\lambda x}Q(x)$,则 $y'^* = e^{\lambda x}(\lambda Q(x) + Q'(x)), y''^* = \cdots$,带入整理得 $Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_n(x)$

i)$\lambda^2 + p\lambda + q \not= 0$,待定系数: $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$,比较系数易得.

ii) $\lambda^2 + p\lambda + q = 0, 2\lambda + p \not= 0 : Q(x) : n + 1$次,待定系数: $Q(x) = b_0x + b_1x^2 + \cdots + b_nx^{n+1}$

iii) $\lambda^2 + p\lambda + q = 0, 2\lambda + p = 0$:待定系数: $Q(x) = b_0x^2 + b_1x^3 + \cdots + b_nx^{n+2}$

eg1:

$$y'' + 2y' - 3y = (3-4x)e^x$$

sol1:先求通解. $r_1 = 1, r_2 = 3$.注意 $\lambda = 1$,是特征方程的解但不是重根,故设 $y^* = e^x(Ax + Bx^2)$,带入整理易得.

- - n阶的情形 $y^* = e^{\lambda x}x^kQ_n(x)$,其中 $Q_n(x)$与$P_n(x)$次数相同,k是λ为齐次方程特征方程的根的重数
- $f(x) = e^{\alpha x}(R^{(\ell)}(x)cos\beta x + R^{(r)}(x)sin\beta x)$,特解为 $y^* = e^{\alpha x}x^k(R_1(x)cos\beta x + R_2(x)sin\beta x), R_1(x), R_2(x)$的次数为 $max(\ell, r)$,且 $\alpha + \beta i$为 k 重特征根

eg2

$$y'' + y = xcos2x$$

sol2: $y'' + y = (xcos2x + 0sin2x)e^{0x}$.求对应齐次方程的特征根: $\pm i$. $\alpha + \beta i = 2i$不是特征根. 故令 $y^* = (Ax+B)cos2x + (Cx+D)sin2x$,解出系数即得.

eg3

$$y^{(4)} + 2y'' + y = sinx$$

习题课

4.25习题课

- 极限

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^y$不存在:

   两个累次极限不相等

- $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y}((x,y)\to(0,0))$

  令$y = x$: $f(x,y)\to 0$

  令$y = x^2 - x^3$: $f(x,y) = \frac{x^3+(x^2-x^3)^3}{x^3} = 1 + o(1) \to 1$

- 证偏导数不连续:把除该点外的偏导数用公式求出

- 空间解几

  - 求曲线$x^2+y^2+z^2 = 6, x+y+z = 0$在(1,-2,1)处的切线方程

  直线的方向向量:$(\frac{dx}{dx}, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx})$

  两式对x求偏导:$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2z\frac{dz}{dx} = 0$

  $1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0$

  带入数值,求出$\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$

  - 不一定要写出参数方程再做 把他们看成x的函数

  - 求椭球面$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$在$M(x_0, y_0, z_0)$点的切平面方程

  法向量:(F_x, F_y, F_z),即$(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2})$

  故切平面方程为$\frac{2x0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z0}{c^2}(z - z_0) = 0$

- 函数极值

  - 给定$f(x,y) = 2(y-x^2)^2 - \frac{1}{7}x^7 - y^2$

  (1)求(x,y)的极值

  (2)证明:沿(0,0)点的每条直线,(0,0)点都是定义在该直线上的函数$f(x,y)$的极小值点

  (1)
  $A: f''_{xx}, B: f''_{xy}, C: f''_{yy}$

  $(0,0)$点:$B^2 - AC > 0$不能确定是否是极值点,故令$x = 0, f(x,y) = y^2$,此时$f(0,0) \le f(x,y)$,为极小值

  再令$y = x^2$,$f(x,x^2) = -\frac{1}{7}x^7 - x^4 \le 0, f(0,0)$为极大值

  (2)
  令$y = kx(k>0), f(x,kx) = x^2(k^2 - 4kx - 2x^2 - \frac{1}{7}x^5)$,当$x\to 0$时,$f(x,kx)$恒大于0,$f(0,0)$为极小值点

  若$k = 0, f(x,0) = x^4(2 - \frac{1}{7}x^3) > 0, f(0,0)$为极小值点

- 计算重积分

- $I=\iint\limits_D \sqrt{1-y^2}dxdy$
  - 注意偶函数的对称性
- $I=\int_0^1 dy\int_y^0 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dx$
  - 交换积分次序:$I=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dy=\int_0^1 \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^3}}dx$
- 求曲面$z=xy,z=0,x+y=1$所围立体的体积
  - $I=\iint\limits_D dxdy\int_0^{xy}dz$

5.10习题课

- 第一型曲线积分
- 第二型曲线积分
  - $\int_{\partial\Omega} Pdx+Qdy=\int_{\partial\Omega}(P,Q)\cdot\vec{n}ds$,其中 $\vec{n}$为曲线在 (x,y)点的法向量.
- 曲面面积　设 $f:D\to$ R为连续可微函数, $D\subset$ R^{n-1},则 $graph(f)$为 R^n 中超曲面,其面积公式为

$$\sigma=\int_D\sqrt{1+||\nabla f||^2}$$

- 第二型曲面积分　设 Σ为 R^{3}中可定向的曲面,其与定向相容的参数表示为

$$r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),(u,v)\in\Omega.$$

则对于定义在 Σ上的连续向量值函数 (P,Q,R),定义其曲面积分为

$$I=\int_\Omega(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})dudv$$

eg

$$\Phi=\int_\Sigma x^2dy\wedge dz+y^2dz\wedge dx+x^2dx\wedge dy$$

其中 Σ为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$,方向为外侧

sol: 进行球坐标变换,计算

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\phi,\theta)}=R^2sin^2\phi cos\theta,\text{等等}$$

考虑定向: $\vec{n}=(x_0-a,y_0-b,z_0-c)=(Rsin\phi cos\theta,Rsin\phi sin\theta,Rcos\phi)$,其与 $\vec{N}$方向相同.

法二: 考虑

$$\vec{v}=(P,Q,R)$$
$$\Phi=\int_\Sigma\vec{v}\cdot\vec{n}d\sigma$$

- 格林公式
  - 诱导定向: 从法向量转向切向量是逆时针
  - 平面分部积分公式(在偏微分方程中有用)
- 高斯公式
  - 散度: $\vec{X}=(P,Q,R),div\vec{X}=(\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z})$.则高斯公式的散度形式为

$$\int_\Omega div\vec{X}dxdydz=\int_{\partial\Omega}\vec{X}\cdot\vec{n}d\sigma$$

其中 $\vec{n}$为边界曲面的单位外法向量

eg2: 设 C为平面上连续可微的闭曲线, $\vec{v}$为固定的向量,证明:

$$\int_C\vec{v}\cdot\vec{n}ds=0$$

其中 $\vec{n}$为 C的单位外法向量

sol2: 在 $x(t),y(t)$点,$\vec{n}ds=(\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\frac{-x'(t)}{\sqrt{x'^2+y'^2}})\sqrt{x'^2+y'^2}dt=(dy,-dx)$. 带入原式,用Green公式立得.

eg3:计算积分

$$I=\int_{\partial\Omega}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

其中 Ω为八分之一单位球面(第一卦限),方向为外侧诱导定向

用Stokes公式, $I=-2\int_{\Omega} dy\wedge dz+dz\wedge dx+dx\wedge dy$,用投影.

5.24 习题课

- $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)})$, 易于消项
- 注意高尉不等式 $ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{4}(0<x<1)$
- $(lnn)^{lnn}=e^{lnnlnlnn}=n^{lnlnn}$
- $\sqrt[n]{n}-1=e^{\frac{1}{n}lnn}-1\sim\frac{1}{n}lnn$
- $2^{n^2}=2^{n\times n}=(2^n)^n=2^n\times 2^n\times\cdots\times 2^n$ 熟悉指数的指数