# Лабораторная работа №8

**Задача на собственные значения**

Ишанова А.И. группа НФИ-02-19

# Содержание

# List of Figures

# 1 Цель работы

Научиться искать собственные значения и вектора в Octave, работать с Марковскими цепями, использовать собственные вектора для нахождения векторов равновесного состояния в них.

# 2 Задание работы

Выполнить лабораторную работу и сделать отчет по лабораторной работе в форматах md, docx и pdf.

# 3 Теоретичсекое введение

**Собственные значения и собственные векторы**

Ненулевой вектор ($\vec{u}$), который при умножении на некоторую квадратную матрицу ($A$) превращается в самого же себя с числовым коэффициентом $\lambda$, называется собственным вектором матрицы. Число $\lambda$ называют собственным значением или собственным числом данной матрицы.

$A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. [2]

**Марковские цепи**

Цепь Маркова — последовательность случайных событий с конечным или счётным числом исходов, где вероятность наступления каждого события зависит только от состояния, достигнутого в предыдущем событии. Характеризуется тем свойством, что, говоря нестрого, при фиксированном настоящем будущее независимо от прошлого. [3]

*Случайное блуждание*

Случайное блуждание — математический объект, известный как стохастический или случайный процесс, который описывает путь, состоящий из последовательности случайных шагов в каком-нибудь математическом пространстве (например, на множестве целых чисел).[4]

Пусть $T$- транспонированная матрица переходов, матричное произведение $T\vec{x}$, где $\vec{x}$— начальный ветор вероятности, дает новое распределение вероятностей после одного периода времени. Тогда:

$\vec{y} = T^k\vec{x}$, где $\vec{y}$— вектор вероятности после $k$ ходов.

*Равновесное состояние*

Равновесное состояние $\vec{x_p}$ — такой вектор вероятности, что $\vec{x} = T\vec{x}$.

# 4 Выполнение лабораторной работы

(Работа выполена согласно методическому пособию [1].)

1. Создаем каталог для работы в папке laboratory. (mkdir) (fig. 4.1)

```
(base) alinaishanova@iMac-Alina ~ % cd work/2020-2021/"Введение в научное програ
ммирование"/laboratory
(base) alinaishanova@iMac-Alina laboratory % mkdir lab08
```

Figure 4.1: подготовка к лабораторной работе

2. Начинаем сессию журналирования. (fig. 4.2)

```
>> diary on
```

Figure 4.2: начало журналирования

## 4.1 Собственные значения и собственные векторы

1. Задаем матрицу $A$.(fig. 4.3)

```
>> A = [1 2 -3; 2 4 0; 1 1 1]
A =

   1   2  -3
   2   4   0
   1   1   1
```

Figure 4.3: задача матрицы $A$

2. Находим ее собственные векторы и числа командой eig.(fig. 4.4)

```
>> [v lambda] = eig(A)
v =

  -0.2400 +      0i  -0.7920 +      0i  -0.7920 -      0i
  -0.9139 +      0i   0.4523 + 0.1226i   0.4523 - 0.1226i
  -0.3273 +      0i   0.2322 + 0.3152i   0.2322 - 0.3152i

lambda =

Diagonal Matrix

   4.5251 +      0i                  0                  0
                  0   0.7374 + 0.8844i                  0
                  0                  0   0.7374 - 0.8844i
```

Figure 4.4: нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы $A$

3. Для того чтобы получить матрицу с действительными собственными значениями высчитываем матрицу $C = A^T * A$.(fig. 4.5)

```
>> C = A' * A
C =

    6   11   -2
   11   21   -5
   -2   -5   10
```

Figure 4.5: вычисление матрицы $C$

4. Находим собственные векторы и числа для матрицы $C$.(fig. 4.6)

```
>> [v lambda] = eig(C)
v =

   0.876137   0.188733  -0.443581
  -0.477715   0.216620  -0.851390
  -0.064597   0.957839   0.279949

lambda =

Diagonal Matrix

     0.1497          0          0
          0     8.4751          0
          0          0    28.3752
```

Figure 4.6: нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы $C$

## 4.2 Марковские цепи

### 4.2.1 Случайное блуждание

1. Задаем матрицу переходов $T$. (fig. 4.7)

```
>> T = [1 0.5 0 0 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0.5 0 0.5 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0 0 0.5 1];
```

Figure 4.7: задача матрицы $T$

2. Задаем начальные вектора вероятности $a$, $b$, $c$ и $d$. (fig. 4.8)

```
>> a = [0.2; 0.2; 0.2; 0.2; 0.2];
>> b = [0.5; 0; 0; 0; 0.5];
>> c = [0; 1; 0; 0; 0];
>> d = [0; 0; 1; 0; 0];
```

Figure 4.8: задача начальных векторов вероятности $a$, $b$, $c$ и $d$

3. Находим веротяности будущих состояний для каждого из них через 5 ходов.(fig. 4.9, fig. 4.10, fig. 4.11 и fig. 4.12)

```
>> T^5 * a
ans =

   0.450000
   0.025000
   0.050000
   0.025000
   0.450000
```

Figure 4.9: вероятности будущего состояния для вектора $a$

```
>> T^5 * b
ans =

   0.5000
        0
        0
        0
   0.5000
```

Figure 4.10: вероятности будущего состояния для вектора $b$

```
>> T^5 * c
ans =

   0.6875
        0
   0.1250
        0
   0.1875
```

Figure 4.11: вероятности будущего состояния для вектора $c$

```
>> T^5 * d
ans =

   0.3750
   0.1250
        0
   0.1250
   0.3750
```

Figure 4.12: вероятности будущего состояния для вектора $d$

### 4.2.2 Равновесное состояние

1. Задаем новую переходную матрицу $T$. (fig. 4.13)

```
>> T = [0.48 0.51 0.14; 0.29 0.04 0.52; 0.23 0.45 0.34]
T =

   0.480000   0.510000   0.140000
   0.290000   0.040000   0.520000
   0.230000   0.450000   0.340000
```

Figure 4.13: задача матрицы $T$

2. Высчитываем ее собственные векторы и числа. (fig. 4.14)

```
>> [v lambda] = eig(T)
v =

  -0.6484  -0.8011   0.4325
  -0.5046   0.2639  -0.8160
  -0.5700   0.5372   0.3835

lambda =

Diagonal Matrix

   1.0000        0        0
        0   0.2181        0
        0        0  -0.3581
```

Figure 4.14: нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы $T$

3. Рассчитываем вектор равновесного состояния $x$. (fig. 4.15)

```
>> x = v(:,1)/sum(v(:,1))
x =

   0.3763
   0.2929
   0.3308
```

Figure 4.15: нахождение вектора равновесного состояния

4. Проверяем, что $x$— вектор равновесного состояния. (fig. 4.16)

```
>> T^10 * x
ans =

   0.3763
   0.2929
   0.3308

>> T^50 * x
ans =

   0.3763
   0.2929
   0.3308

>> T^50 * x - T^10 * x
ans =

   4.4409e-16
   2.7756e-16
   3.8858e-16
```

Figure 4.16: проверка вектора равновесного состояния

3. Завершаем сессию журналирования. (fig. 4.17)

```
>> diary off
```

Figure 4.17: завершение сессии журналирования

# 5 Вывод

В ходе выполнения работы мы научились находить собственные векторы и собственные числа матриц, рассчитывать вероятности будущих состояний Марковых цепей и находить вектор равновесного состояния для них.

# 6 Библиография


1. *Lachniet J.* Introduction to GNU Octave. 2nd ed. 2019. pp. 46-50,73-77
2. Wikipedia: Eigenvalues and eigenvectors (https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors)
3. Wikipedia: Markov chain (https://en.wikipedia.org/wiki/Markov_chain)
4. Wikipedia: Random walk (https://en.wikipedia.org/wiki/Random_walk)