فرمول‌های ریاضیاتی بازسازی سه‌بعدی:

① تمامی مختصات‌ها بصورت هموژنیوس نمایش داده می‌شوند.

↳ یعنی اینکه تمامی بردارهای زیر با هم برابرند

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mx \\ my \\ m \end{bmatrix}$$

Projection matrix

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{مختصات در تصویر دو بعدی}} = \overbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix}}^{\text{Projection matrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{مختصات در فضای سه بعدی}}$$

برای بدست آوردن ماتریس Projection کافیست حداقل ۶ نقطه‌ی متناظر در فضای دو بعدی و سه بعدی که هیچ سه تایی در یک راستا نیستند انتخاب و ماتریس A را اینگونه ساخت:

n. تعداد نقاط انتخاب شده

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_1X_1 & -u_1Y_1 & -u_1Z_1 & -u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -v_1X_1 & -v_1Y_1 & -v_1Z_1 & -v_1 \\ \vdots \\ X_n & Y_n & Z_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_nX_n & -u_nY_n & -u_nZ_n & -u_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_n & Y_n & Z_n & 1 & -v_nX_n & -v_nY_n & -v_nZ_n & -v_n \end{bmatrix}_{2n\times 12}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{14} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{24} \\ m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \\ m_{34} \end{bmatrix}}_{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{2n\times 1}$$

برای بدست آوردن M کافیست بردار ویژه‌ی شامل کمترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A^TA را بدست آوریم.

توجه شود که در این روش بعد از پیدا کردن بردار ویژه‌ی منظر باید آن را بر مقدار m_{34} تقسیم کرد تا به حالت استاندارد خودش تبدیل شود.

بدست آوردن خط معادل یک نقطه‌ی تصویر در فضای سه بعدی با وجود مشخص بودن ماتریس M

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & (m_{14}-x_0) \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & (m_{24}-y_0) \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & (m_{34}-1) \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نقطه‌ی فضای دو بعدی: $[x_0 \ y_0 \ 1]$

↳ این ماتریس با بالا راهنمای اول صفر مشخص شده است

و برای محاسبه‌ی خط کافیست باز هم به کمک بردار ویژه‌ها این مقادیر X_0 و Y_0 و Z_0 را پیدا کرد.

- فرمول خط:

$$\text{line} = \underline{P_0} + \overset{\text{Scale}}{s}R$$

P_0. یک نقطه در خط

P_1. یک نقطه در خط

$R = P_1 - P_0$

Scanned by CamScanner

■ تقاطع دو خط در فضای سه بعدی (دو نقطه با کمترین فاصله)

دو خط مد نظر ما : $\begin{cases} L_1 = P_0 + \lambda(DR_1) \\ L_2 = q_0 + \mu(DR_2) \end{cases}$

DR: Direction
منظور جهت بردار است

اگر دو نقطه در دو خط در فضای سه بعدی داشته باشیم، زمانی که بردار وصل این دو نقطه با DR های هر کدام از خطوط عمود داشته باشد، آن دو نقطه در نزدیک‌ترین فاصله قرار دارند.

$\longrightarrow$ ضرب داخلی برابر با صفر

معادلات ضرب داخلی :

$$(L_1 - L_2) \cdot DR_1 = 0$$

$$\longrightarrow (P_0 - q_0) \cdot DR_1 + \lambda (DR_1) \cdot (DR_1) - \mu (DR_2) \cdot (DR_1) = 0$$

$$(L_1 - L_2) \cdot DR_2 = 0$$

$$\longrightarrow (P_0 - q_0) \cdot DR_2 + \lambda (DR_1) \cdot (DR_2) - \mu (DR_2)(DR_2) = 0$$

ساختار ماتریسی :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (DR_1)\cdot(DR_1) & -(DR_2)\cdot(DR_1) \\ (DR_1)\cdot(DR_2) & -(DR_2)(DR_2) \end{bmatrix}}_{\text{dot\_DRs ماتریس}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}}_{\text{Scale}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (q_0 - P_0)\cdot DR_1 \\ (q_0 - P_0)\cdot DR_2 \end{bmatrix}}_{\text{diff ماتریس}}$$

و

$$\left[\, dot\_DR_s \;\vdots\; -diff \,\right] \begin{bmatrix} s\lambda \\ s\mu \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و در نهایت برای بدست آوردن Scale ها کافیست از روش بردار ویژه استفاده کرد.

Scanned by CamScanner