

01RAD

doc. Ing. Tomáš Hobza, Ph.D., Martin Kovanda, Michaela Mašková, Filip Bár

3. prosince 2020

Obsah

1 SME – regresní analýza	1
1.1 Jednorozměrná lineární regrese	1
1.2 Intervaly predikce	5
1.3 Vícerozměrná lineární regrese	6
2 Jednorozměrná lineární regrese	9
2.1 Odhad parametrů	10
2.1.1 Vlastnosti odhadů	13
2.2 Gauss - Markov theorem	16
2.3 IS pro β_0, β_1	18
2.3.1 TH pro β_0, β_1	19
2.4 ANOVA přístup pro testování	20
2.5 Regrese skrz počátek	25
2.5.1 Odhady a testy v případě $\beta_0 = 0$	26
2.5.2 Predikce	28
2.6 Grafy reziduů	32
3 Vícerozměrná lineární regrese	33
3.1 Odhad parametrů	35
3.1.1 Odhad parametru σ^2	35
3.1.2 Vlastnosti odhadů $\hat{\beta}, s_n^2$	36
3.1.3 Vlastnosti vektoru reziduů \hat{e}	39
3.2 Gauss - Markov theorem	40
3.3 Testování modelu - tabulka ANOVA	41
3.3.1 Celkový F-test (overall F-test)	41
3.4 IS a t-testy pro parametry	46
3.5 Obecná lineární hypotéza	47
3.6 Predikce	49
4 Rezidua, diagnostika a transformace	52
4.1 Rezidua	52
4.2 Grafy reziduů	53
4.2.1 Partial residual plot	54
4.3 PRESS rezidua (PRESS residuals, deleted residuals)	56
4.4 Míry influence	61
4.5 Transformace	63
4.5.1 Transformace vysvětlované proměnné y	63
4.5.2 Box-Cox transformace	65
4.5.3 Transformace vysvětlujících proměnných x	67

Obsah

4.6	Korelované chyby	72
4.6.1	Durbin-Watson statistika	73
4.7	Metody výběru modelu	75

Předmluva

Materiál byl sestaven na základě poznámek doc. Ing. Tomáše Hobzy, Ph.D., kterému bychom tímto chtěli poděkovat za rozsáhlou korekci vzniklého materiálu. Zmíněné přednášky proběhly v zimním semestru akademického roku 2020/2021 na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze. Přednášky nebyly uskutečněny prezenční formou vzhledem k probíhající pandemii Covid-19.

Tento učební text je určen posluchačům 1. ročníku navazujícího magisterského studia navštěvujícím kurs 01RAD *Regresní analýza dat*, který je zařazen mezi předměty oborů AMSM. Při sestavování textu se předpokládaly znalosti základů matematiky na úrovni absolvování kurzů 01MAB2-4, 01LAB1-2 a 01MIP.

Doporučená literatura:

- (1) ...

1 SME – regresní analýza

1.1 Jednorozměrná lineární regrese

Předpokládejme, že se sledují dvě fyzikální veličiny X a Y mezi kterými existuje lineární závislost

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X.$$

β_0 a β_1 nejsou známy, a proto se provádí experiment, při němž se zjišťují hodnoty dvojic (X, Y) . Často se stává, že měření hodnot X probíhá prakticky zcela přesně (například X se nastavuje na předem dané úrovně), zatímco Y se měří s určitou chybou. Zavádí se tedy model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + e_i \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

kde e_i je náhodný šum a e_1, \dots, e_n jsou *iid* $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ a dvojice $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ získáme měřením. Neznáme parametry jsou $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$, chtěli bychom je odhadnout na základě výběru (MLE odhady).

Rozdelení Y_i je $Y_i \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2)$, a tedy věrohodnostní funkce výběru y_1, \dots, y_n je

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}.$$

$$l = \ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

Je zřejmé, že pro libovolné σ^2 potřebujeme minimalizovat

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

přes β_0, β_1 , na což použijeme metodu nejmenších čtverců (poznámka?).

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_0} = 2 \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i = 0.$$

Z toho pak

$$\sum_{i=1}^n Y_i - n\beta_0 - \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i = 0,$$

$$\beta_0 = \bar{Y}_n - \beta_1 \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \beta_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

1 SME – regresní analýza

Po vynásobení poslední rovnice n úpravou dostaneme vztah

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n + \beta_1 \bar{x}_n - \beta_1 x_i) x_i = 0$$

a následně i vztah

$$\sum_{i=1}^n Y_i x_i - \bar{Y}_n \sum_{i=1}^n + \beta_1 \bar{x}_n \sum_{i=1}^n x_i - \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0.$$

Z toho už následně vyjádříme

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - n \bar{Y}_n \bar{x}_n}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}_n^2} \quad \text{a} \quad \hat{\beta}_0 = \bar{Y}_n - \hat{\beta}_1 \bar{x}_n.$$

Nyní již spočítáme logaritmickou věrohodnostní funkci

$$\frac{\partial l}{\partial (\sigma^2)} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = 0,$$

odkud

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2.$$

Pokud dále označíme

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i,$$

pak rozdíly

$$r_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

nazýváme **rezidua** (která by měla mít normální rozdělení, aby byly splněny předpoklady modelu) a

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2 = S_e$$

nazveme **reziduální součet čtverců**.

R^2 statistika

Tuto statistiku definujeme vztahem

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n r_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2},$$

který se dá chápat jako podíl součtu reziduálních čtverců a rozptylu Y . R^2 se interpretuje jako poměr variability v datech vysvětlené lineárním modelem. Čím větší je R^2 , tím lépe vysvětluje náš model data, v ideálním případě pak $R^2 = 1$. Dále bychom chtěli:

1. sestrojit IS pro parametry modelu $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$,
2. intervaly pro predikci hodnoty y v daném bodě x a

1 SME – regresní analýza

3. testovat hypotézy na parametrech modelu, například F-stat. v MATLABu testuje $H_0 : \beta_0 = 0$ a $\beta_1 = 0$, že vysvětlující proměnná y není korelovaná s vysvětlovanou proměnnou x .

Vše je podobné testům o parametrech $N(\mu, \sigma^2)$ (t-test, F-test), potřebujeme rozdělení odhadů $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}^2$. Sdružené rozdělení $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ se najde snadno, protože to jsou lineární funkce Y_i takže budou mít normální rozdělení, stačí tedy určit střední hodnoty, rozptyly, kovariance,... Označme výběrový rozptyl x jako

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}_n^2.$$

Platí, že

1.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &\sim \mathcal{N}\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{n\sigma_x^2}\right), \\ \hat{\beta}_0 &\sim \mathcal{N}\left(\beta_0, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}_n^2}{n\sigma_x^2}\right)\right) = \mathcal{N}\left(\beta_0, \frac{\sigma^2}{n\sigma_x^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2\right), \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) &= -\frac{\bar{x}_n \sigma^2}{n\sigma_x^2},\end{aligned}$$

2. $\hat{\sigma}^2$ je nezávislé na $\hat{\beta}_0$ a $\hat{\beta}_1$,

3.

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2).$$

POZNÁMKA 1.1. První bod znamená, že $(\beta_0, \beta_1) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, kde

$$\boldsymbol{\mu} = (\beta_0, \beta_1) \quad \text{a} \quad \Sigma = \frac{\sigma^2}{n\sigma_x^2} \begin{pmatrix} \bar{x}_n^2 & -\bar{x}_n \\ -\bar{x}_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Konfidenční intervaly

1. σ^2 , a protože $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$, víme, že s pravděpodobností $\mathbb{P} = 1 - \alpha$ bude

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-2) \leq \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-2),$$

a tedy $(1 - \alpha)\%$ IS (interval spolehlivosti) pro σ^2 je

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-2)} \leq \sigma^2 \leq \frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-2)}.$$

1 SME – regresní analýza

2. β_1

Veličiny $\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n\sigma_x^2}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ a $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$ jsou nezávislé. Z toho vyplývá, že

$$\frac{(\hat{\beta}_1 - \beta_1) / \sqrt{\frac{\sigma^2}{n\sigma_x^2}}}{\sqrt{\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \frac{1}{n-2}}} \sim t(n-2).$$

Z toho potom

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{(n-2)\sigma_x^2}}} = (\hat{\beta}_1 - \beta_1) \sqrt{\frac{(n-2)\sigma_x^2}{\hat{\sigma}^2}} \sim t(n-2), \quad (1.1)$$

což znamená, že

$$-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \leq (\hat{\beta}_1 - \beta_1) \sqrt{\frac{(n-2)\sigma_x^2}{\hat{\sigma}^2}} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$$

s pravděpodobností $\mathbb{P} = 1 - \alpha$, a tedy

$$\hat{\beta}_1 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{(n-2)\sigma_x^2}} \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{(n-2)\sigma_x^2}}$$

je $100(1 - \alpha)\%$ IS pro β_1 . Podobně pro β_0 dostaneme, že

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}_n^2}{\sigma_x^2} \right)}} \frac{1}{\sqrt{\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \frac{1}{n-2}}} \sim t(n-2), \\ & \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{\bar{x}_n^2}{\sigma_x^2}\right) \hat{\sigma}^2 \frac{1}{n-2}}} \sim t(n-2), \end{aligned} \quad (1.2)$$

a tedy

$$\hat{\beta}_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \sqrt{\left(1 + \frac{\bar{x}_n^2}{\sigma_x^2}\right) \hat{\sigma}^2 \frac{1}{n-2}} \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \sqrt{\left(1 + \frac{\bar{x}_n^2}{\sigma_x^2}\right) \hat{\sigma}^2 \frac{1}{n-2}}$$

je $100(1 - \alpha)\%$ IS pro β_0 .

Statistiky (1.1) a (1.2) se dají použít i pro konstrukci testů například $H_0 : \beta_1 = 0$. Za platnosti H_0 totiž

$$T_1 = \hat{\beta}_1 \sqrt{\frac{(n-2)\sigma_x^2}{\hat{\sigma}^2}} \sim t(n-2),$$

a tedy H_0 zamítáme, pokud

$$|T_1| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2).$$

TEST: H_0 zamítáme, pokud $|T_1| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$.

1 SME – regresní analýza

PŘÍKLAD 1.2 (Měření rychlosti zvuku v závislosti na teplotě).

teplota	-20	0	20	50	100
rychlosť (m/s)	323	327	340	364	386

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 30, \quad \bar{Y}_n = 348, \quad \sum_{i=1}^n X_i Y_i = 57140, \quad \sum_{i=1}^n X_i^2 = 13300,$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 = \frac{1}{5} 13300 - 900 = 1760,$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - 5\bar{X}_n \bar{Y}_n}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - 5\bar{X}_n^2} = 0.561,$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y}_n - \hat{\beta}_1 \bar{X}_n = 331.16,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2 = 11.37 \text{ a nestranný}$$

$$s^2 = \frac{1}{5-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2 = 18.95.$$

Spočítáme IS například pro β_1 . Dostaneme tedy $t_{0.975}(5-2) = 3.18$, který dosadíme do vzorečku na výpočet IS pro β_1 , kde $\beta_1 \in (0.414, 0.709)$.

$\beta_1 = 0$, $T_1 = 12.097$, $|T_1| \geq t_{0.975}(3) = 3.18$, a proto nezamítáme H_0 .

1.2 Intervaly predikce

Předpokládejme, že máme nové pozorování X , pro které je Y neznámé a my bychom chtěli predikovat hodnoty Y , případně najít intervaly spolehlivosti pro Y . Vzhledem k lineárnímu regresnímu modelu $Y = \beta_0 + \beta_1 X + e$ je přirozené vzít za predikci

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X.$$

Najdeme rozdělení rozdílu $Y - \hat{Y}$. Zřejmě se jedná o normální rozdělení ($\beta_0 \sim \mathcal{N}(\dots)$, $\beta_1 \sim \mathcal{N}(\dots)$, $e \sim \mathcal{N}(\dots)$, $Y \sim \mathcal{N}(\dots)$) stačí tedy určit střední hodnotu a rozptyl.

$$\mathbb{E}(\hat{Y} - Y) = \mathbb{E}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X) - \beta_0 - \beta_1 X - \mathbb{E}(e) = \beta_0 + \beta_1 X - \beta_0 - \beta_1 X - 0 = 0.$$

Protože nový pár (X, Y) je nezávislý na předchozích datech, platí, že Y je nezávislé na \hat{Y} (β_0, β_1 jsou spočteny pouze pomocí Y_1, \dots, Y_n). Pak tedy

$$\text{D}(\hat{Y} - Y) = \text{D}(\hat{Y}) + \text{D}(Y) = \text{D}(\hat{Y}) + \sigma^2,$$

protože $\text{D}(Y) = \text{D}(e) = \sigma^2$.

$$\begin{aligned} \text{D}(\hat{Y}) &= \text{D}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X) = \mathbb{E}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X - \beta_0 - \beta_1 X)^2 = \mathbb{E} \left[\hat{\beta}_0 - \beta_0 + X(\hat{\beta}_1 - \beta_1) \right]^2 = \\ &= \underbrace{\mathbb{E}(\hat{\beta}_0 - \beta_0)^2}_{\text{D}\hat{\beta}_0} + \underbrace{X^2 \mathbb{E}(\hat{\beta}_1 - \beta_1)}_{\text{D}\hat{\beta}_0} + \underbrace{2X \mathbb{E}(\hat{\beta}_0 - \beta_0)(\hat{\beta}_1 - \beta_1)}_{\text{D}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)} = \\ &= \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_n)^2}{x \sigma_X^2} \right) \sigma^2 + X^2 \frac{\sigma^2}{n \sigma_X^2} - 2X \frac{\bar{x}_n \sigma^2}{n \sigma_X^2} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_n - X)^2}{n \sigma_X^2} \right) \end{aligned}$$

1 SME – regresní analýza

Máme tedy

$$\hat{Y} - Y \sim \mathcal{N} \left(0, \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_n - X)^2}{n\sigma_x^2} \right) \right),$$

a proto

$$\frac{(\hat{Y} - Y) / \sqrt{\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_n - X)^2}{n\sigma_x^2} \right)}}{\sqrt{\frac{1}{n-2} \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}}$$

a tedy $100(1 - \alpha)\%$ interval prediktu??? je

$$\hat{Y} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n-2} \left(n + 1 + \frac{(\bar{x}_n - X)^2}{\sigma_x^2} \right)} \leq Y \leq \hat{Y} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n-2} \left(n + 1 + \frac{(\bar{x}_n - X)^2}{\sigma_x^2} \right)}.$$

Tohle kreslí MATLAB (polytool)

PŘÍKLAD 1.3 (Rychlost zvuku). Mějme $\bar{x}_n = 30$, $\sigma_x^2 = 1760$, $\hat{\beta}_1 = 0.561$, $\hat{\beta}_0 = 331.16$, $\sigma^2 = 11.37$, nestraný, $\hat{s}^2 = 18.95$. Nové $X = 35^\circ C$ a $\hat{Y} = 331.16 + 0.561 \cdot 35 = 350.8$.

$$\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n-2} \left(n + 1 + \frac{(\bar{x}_n - X)^2}{\sigma_x^2} \right)} = \sqrt{\frac{11.37}{3} \left(6 + \frac{(30 - 35)^2}{1760} \right)} = 4.77$$

$$t_{0.975}(3) = 3.1824 \text{ a tedy } IP = (335.6, 366.0)$$

1.3 Vícerozměrná lineární regrese

Předpokládejme model

$$Y_i = \beta_1 X_{i1} + \dots + \beta_p X_{ip} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

kde $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ iid $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. V maticové formě

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon,$$

kde $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{n \times 1}$, $\varepsilon = \varepsilon_{n \times 1}$, $\beta = \beta_{p \times 1}$ a $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{n \times p}$. Sloupce matice \mathbf{X} označíme X_1, \dots, X_p , tedy $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)$ a předpokládejme, že jsou nezávislé. Pokud by nebyly nezávislé, nebylo by možné získat (rekonstruovat) parametr β z \mathbf{X} a \mathbf{Y} ani kdyby nebyl přítomný šum ε . (Vlastně bychom měli soustavu $\mathbf{X}\beta = \mathbf{Y}$.)

Poznámka 1.4. V jednorozměrné regresi by to odpovídalo případu, kdy jsou všechny X_i stejné, tzn. že by nebylo možné odhadnout přímku přímo z pozorování pouze v jednom bodě.

Dále předpokládejme, že

$$n > p, \quad h(\mathbf{X}) = p.$$

Zkusíme následně vypočítat MLE parametrů β, σ^2 .

Věta 1.5. Pro MLE parametrů β a σ^2 platí, že

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) = \frac{1}{n} \| \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta} \|^2 = \frac{1}{n} \| \mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \|^2.$$

1 SME – regresní analýza

Důkaz. zřejmě $Y_i \sim \mathcal{N}(\beta_1 X_{i1} + \dots + \beta_p X_{ip}, \sigma^2)$ a její hustota tedy je

$$f_i(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{(y - \beta_1 X_{i1} - \dots - \beta_p X_{ip})^2}{2\sigma^2}$$

a věrohodnostní funkce

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^n f_i(Y_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp -\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_1 X_{i1} - \dots - \beta_p X_{ip})^2}{2\sigma^2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp -\frac{1}{2\sigma^2} \|Y - X\beta\|^2 \\ l &= \ln L = C - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \|Y - X\beta\|^2 \end{aligned}$$

Je třeba minimalizovat

$$\begin{aligned} \|Y - X\beta\|^2 &= (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) = (Y - \sum_{i=1}^p \beta_i X_i)^T (Y - \sum_{i=1}^p \beta_i X_i) \\ &= Y^T Y - 2 \sum_{i=1}^p \beta_i Y X_i + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p \beta_i \beta_j X_i^T X_j. \end{aligned}$$

Derivujeme podle β_i . Potom

$$-2Y^T X_i + 2 \sum_{j=1}^p \beta_j X_i^T X_j = 0, \quad \text{a tedy} \quad Y^T X_i = \sum_{j=1}^p \beta_j X_i^T X_j, \quad \forall i \leq p.$$

V maticovém zápisu se $\mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \beta$ nazývá **soustava normálních rovnic**. Matice $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ má rozměr $p \times p$ a je invertibilní, protože $h(\mathbf{X}) = p$ a $h(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = h(\mathbf{X})$ pro libovolnou matici \mathbf{X} . Proto tedy

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}.$$

Derivujeme podle σ^2 . Potom

$$\begin{aligned} -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \|Y - X\beta\|^2 &= 0, \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \|Y - X\hat{\beta}\|^2 = \frac{1}{n} \underbrace{(Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta})}_R = \frac{1}{n} R, \end{aligned}$$

kde R je reziduální součet čtverců. \square

Pro statistickou analýzu potřebujeme rozdělení odhadů $\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2$.

Věta 1.6. Platí, že

$$\hat{\beta} \sim \mathcal{N}_p(\beta, \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}) \quad \text{a} \quad \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-p}.$$

Odhady $\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2$ jsou nezávislé.

1 SME – regresní analýza

Důkaz. $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$, a proto

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{X}\beta + \varepsilon) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})\beta + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \varepsilon = \beta + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \varepsilon.$$

Z toho vyplývá, že $\mathbb{E}\hat{\beta} = \beta$, protože $\mathbb{E}\varepsilon = 0$. Kovarianční matici můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T &= \mathbb{E}((X^T X)^{-1} X^T \varepsilon \varepsilon^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbb{E}(\varepsilon \varepsilon^T) \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$

□

2 Jednorozměrná lineární regrese

Předpokládejme, že sledujeme dvě veličiny x a y mezi kterými existuje lineární závislost

$$y = \beta_0 + \beta_1 x, \quad \text{kde } \beta_0, \beta_1 \text{ neznáme.}$$

Provede se experiment a zjistí se hodnoty dvojic (x, y) . Často se stává, že x je změreno prakticky zcela přesně.

POZNÁMKA 2.1. To nastává například v případě, kdy se x nastavuje na předem dané úrovni a následně se k němu změří odpovídající y .

Oproti tomu u y obvykle předpokládáme měření s chybou. Chyba může být náhodná a proto i y budeme chápat jako náhodnou veličinu, kterou budeme značit Y . Pro dvojice $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$ se zavádí model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i \quad (*) \quad i = 1, \dots, n.$$

Jednotlivé proměnné se pak nazývají následovně

- Y_i – vysvětlovaná (závislá) proměnná
- x_i – vysvětlující (nezávislá) proměnná, *popřípadě prediktor nebo regresor*
- β_0, β_1 – neznámé regresní parametry
- e_i – náhodný šum, (náhodná chyba)

Budeme předpokládat, že e_i jsou nezávislé (někdy bude dokonce stačit, aby byly nekorelované) a $e_i \sim (0, \sigma^2)$. A tedy splňuje $\mathbb{E}[e_i] = 0$, $D[e_i] = \sigma^2$ pro $\forall i$ (homoskedasticita).

Měřením získáme data $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ a cílem statistické analýzy je určit, zda model (*) schopen popsat pozorovanou variabilitu u y .

První krok

Odhadneme neznámé parametry $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$. Proložíme data přímkou ve tvaru

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

a porovnáme y_i – *naměřená data* a $\hat{y}(x_i)$ – *predikovaná hodnota lineární regrese* pro $\forall i$. To nám umožnuje posoudit adekvátnost modelu.

Pro proložení dat přímkou existuje několik způsobů. Zásadní ovšem bude znalost rozdělení e_i a tady i Y_i i když apriori není zřejmé proč znát rozdělení a ne β_0, β_1 .

Zde máme následující možnosti:

1. Odhadnout β_0, β_1 pomocí metody nezáviselých na rozdělení chyb
2. Udělat věrohodnostní předpoklad o rozdělení chyb, odhadnout β_0, β_1 a následně ověřit předpoklad

POZNÁMKA 2.2. Speciální důležitý případ je $e_i \sim N(0, \sigma^2)$ který při MLE odhadu β_0, β_1 vede na metodu nejmenších čtverců, která může být použita bez ohledu na rozdělení chyb.

2.1 Odhad parametrů

Data s předpokladem normality dat

Předpokládáme, že e_1, \dots, e_n iid $N(0, \sigma^2)$. To znamená, že $Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$ a jednotlivé Y_1, \dots, Y_n jsou nezávislé.

MLE odhady

Věrohodnostní funkce je ve tvaru

$$L = L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \right)$$

$$l = \ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

pro pevné $\sigma^2 > 0$ je maximalizace l ekvivalentní s minimalizováním S , kde

$$S = S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

Proto tuto metodu někdy nazýváme metodou nejmenších čtverců.

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i = 0.$$

Z první rovnice pak dostaneme

$$\beta_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \beta_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{y}_n - \beta_1 \bar{x}_n$$

a dosazením do druhé dostaneme výraz

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i - \beta_0 \sum_{i=1}^n x_i - \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i - \bar{y}_n \sum_{i=1}^n x_i - \beta_1 \bar{x}_n \sum_{i=1}^n x_i - \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0.$$

Jednotlivé MLE odhad parametrů pak mají následující tvar

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y}_n - \hat{\beta}_1 \bar{x}_n \quad a \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{x}_n \bar{y}_n}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}_n^2}.$$

Nyní najdeme odhad parametru σ^2

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = 0,$$

2 Jednorozměrná lineární regrese

vyjádřením σ^2 z rovnice dostaneme výraz

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n} \text{SSE},$$

kde $\hat{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$ je predikce modelu (odhad $\mathbb{E}[Y_i]$) a zkratka SSE je odvozena z anglického *sum of the squares of errors*. Rozdíl $\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i$ nazýváme i -té reziduum. Velikost reziduů indikuje, jak dobře odhadnutá přímka odpovídá datům. Rezidua jsou vlastně odhady chyb e_i , jejich analýza hraje významnou roli v ověření předpokladů rozdělení chyb.

Poznámka 2.3. Pro odhad σ^2 se používá častěji statistika $s_n^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n-2} \text{SSE}$, která je nestranným odhadem parametru σ^2 (pro libovolné rozdělení e_i), zatímco σ_{MLE}^2 je vychýlený odhad i pro normální rozdělení chyb.

Odhad σ

pro odhad parametru σ využíváme statistiku nazývanou standardní chyba regrese (standard error), která má tvar

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}.$$

Tento odhad není nestranný.

Data bez předpokladu normality

Bez předpokladu normality chyb. Tedy, že e_1, \dots, e_n jsou nekorelované, $e_1, \dots, e_n \sim (0, \sigma^2)$. Pro odhad β_0, β_1 lze použít minimalizaci S (nejmenší čtverce), což je rozumné provedení, když si uvědomíme ?????? interpret??? (strana 5).

Nechť $y = \beta_0 + \beta_1 x$ je rovnice nějaké přímky, potom $y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)$ je vertikální vzdálenost bodu (x_i, y_i) od přímky a

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

je míra udávající, jak dobře přímka prokládá data. Dává smysl vybrat takovou přímku, která minimalizuje S. Minimalizací S získáme stejné odhady $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ jako u MLE odhadů pro normální data. Ted' se ale nazývají odhad metodou nejmenších čtverců LSE (least squares estimators). Existuje více měr vhodnosti přímky. Použití LSE pro libovolné rozdělení chyb má dvě zdůvodnění.

1. pro normální rozdělení chyby LSE splývá s MLE.
2. LSE odhad je navíc BLUE (best linear unbiased estimator) jak ukážeme v Gauss–Markov theorem

Příklad 2.4. Nechť e_1, \dots, e_n jsou iid s hustotou

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2} e^{-|\varepsilon|} \quad \text{Laplaceovo rozdělení}$$

potom hustota Y_i je

$$f_{Y_i}(y_i) = \frac{1}{2} e^{-|y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i|}$$

2 Jednorozměrná lineární regrese

a věrohodnostní funkce L a l mají tvar

$$L = \frac{1}{2^n} e^{-\sum_{i=1}^n |y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i|}$$

$$l = -n \ln 2 - \sum_{i=1}^n |y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i|$$

MLE odhad parametrů β_0, β_1 získáme minimalizací

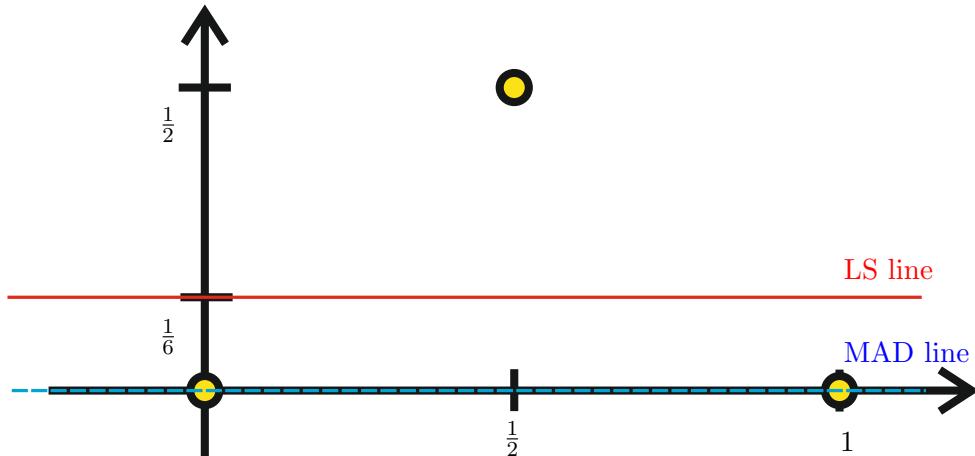
$$A = \sum_{i=1}^n |y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i| \quad \dots \quad \text{MAD (minimum absolute deviation).}$$

Zde budou odhady jiné než u LSE.

Uvažujme 3 body: $(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$$\text{MLE: } \beta_0 = \beta_1 = 0 \quad , \quad A = 0.5 \quad , \quad \hat{y} = 0$$

$$\text{LSE: } \bar{x} = \frac{1}{2}, \bar{y} = \frac{1}{6} \quad , \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{5}{4}, \sum_{i=1}^n x_i y_i = \frac{1}{4} \quad , \quad \beta_1 = 0, \beta_0 = \frac{1}{6}$$



Poznámka 2.5. I když s_n^2 je nestranný odhad σ^2 , s_n je vychýlený odhad σ ! Je to obecná vlastnost odhadů (nestranných) rozptylů, neboť s^2 nestranný odhad $\sigma^2 \Rightarrow \mathbb{E}[s] \leq \sigma$

Uvažujme náhodnou veličinu X pro kterou platí, že $D[X] < +\infty$

$$\mathbb{E}[X^2] = D[X] + \mathbb{E}[X]^2 \quad \text{dosazením } X = s \quad \text{dostaneme}$$

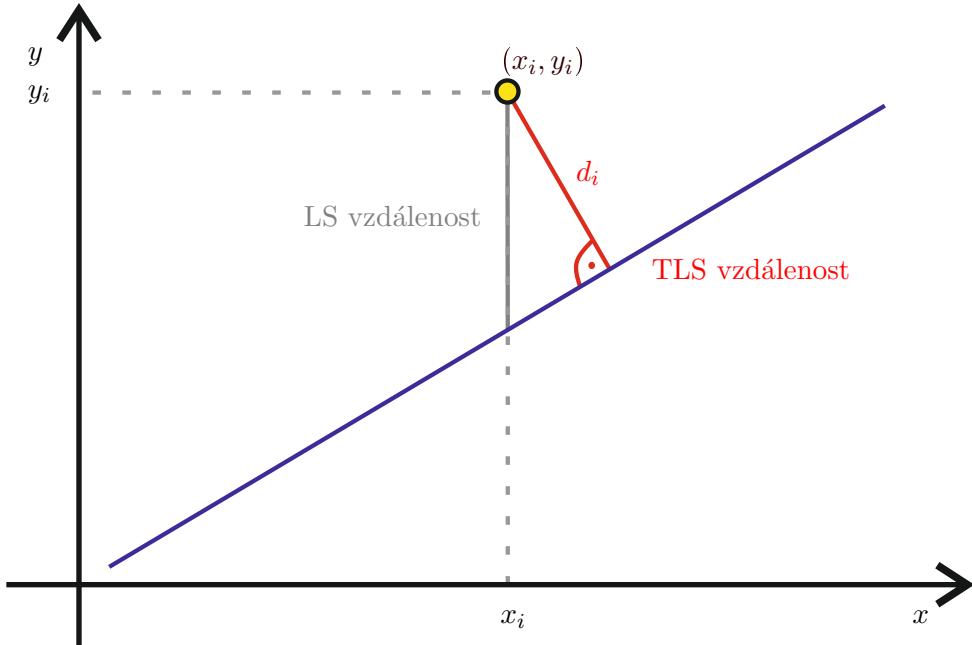
$$\mathbb{E}[s^2] = D[s] + \mathbb{E}[s]^2$$

$$\mathbb{E}[s]^2 \leq \sigma^2 \quad \mathbb{E}[s] \leq \sigma \quad (2.1)$$

a rovnost nastává pokud $D[s] = 0$.

Například pro normální chyby je $s_n^2 \propto \chi^2 \Rightarrow \mathbb{E}[s_n] < \sigma$

Poznámka 2.6. předpokládali jsme, že hodnoty x_i jsou dány přesně, což nemusí být vždy pravda. Často obě veličiny (x, y) jsou měřeny nepřesně. EIV models "error in variable" v těchto modelech jsou často preferovány jiné odhady než LSE. Populární metoda: total least squares (ortogonal least squares). Zde minimalizujeme $\sum_{i=1}^n d_i^2$, kde d_i je minimální vzdálenost bodu a přímky (kolmice na přímku protínající bod). To znamená, že neupřednostňujeme veličinu x , ale přistupujeme k x a y rovnoměrně.



Poznámka 2.7. v literatuře se někdy x uvažují jako realizace náhodné veličiny (ne vždy se x nastavuje předem, nebo je jasně dané (třeba pohlaví – ???? (8 strana)))

Model má potom tvar

$$\mathbb{E}[Y_i|X_i] = \beta_0 + \beta_1 X_i \quad D[Y_i|X_i] = \sigma^2$$

pro většinu výsledků prezentovaných v této přednášce ale není podstatné, zde je x chápáno jako pevné nebo náhodné. Důkazy většinou fungují s podmíněnými výrazy (\mathbb{E}, D, \dots) při dané hodnotě x místo nepodmíněných. Nicméně větší pozornost je třeba u odvození asymptotických rozdělení odhadů.

2.1.1 Vlastnosti odhadů

Vlastnosti odhadů $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, s_n^2$.

Věta 2.8. Nechť $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ jsou LSE odhady parametrů β_0, β_1 v lineárním modelu

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i \quad i = 1, \dots, n,$$

kde e_i jsou nezávislé náhodné veličiny (postačí i nekorelovanost) se stejným rozptylem σ^2 . Potom platí:

$$1. \quad \mathbb{E}[\hat{\beta}_0] = \beta_0, \quad \mathbb{E}[\hat{\beta}_1] = \beta_1, \quad (\text{nestranné odhady})$$

$$2. \quad D[\hat{\beta}_0] = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}, \quad \text{kde} \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

$$3. \quad D[\hat{\beta}_1] = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}_n^2}{S_{xx}} \right)$$

$$4. \quad \text{Pokud navíc platí, že } e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad i = 1, \dots, n \quad \text{potom} \quad \hat{\beta}_j \sim \mathcal{N}(\beta_j, D[\hat{\beta}_j]) \quad j = 0, 1$$

2 Jednorozměrná lineární regrese

Důkaz

1. upravíme $\hat{\beta}_1$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{x}_n \bar{y}_n}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}_n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} = \\ &= \frac{1}{S_{xx}} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)y_i - \bar{y}_n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n) \right) = \frac{1}{S_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)y_i\end{aligned}$$

potom má střední hodnota $\hat{\beta}_1$ tvar

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\beta}_1] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{S_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)Y_i \right] = \frac{1}{S_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)\mathbb{E}[Y_i] = \frac{1}{S_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(\beta_0 + \beta_1 x_i) = \\ &= \frac{\beta_0}{S_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n) + \frac{\beta_1}{S_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)x_i = 0 + \frac{\beta_1}{S_{xx}} S_{xx} = \beta_1\end{aligned}$$

a střední hodnota pro $\hat{\beta}_0$ má tvar

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}_0] = \mathbb{E}[\bar{Y}_n - \hat{\beta}_1 \bar{X}_n] = \mathbb{E}[\bar{Y}_n] - \bar{x}_n \mathbb{E}[\hat{\beta}_1] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i] - \bar{x}_n \beta_1 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}_n \beta_1 = \beta_0$$

2.

$$D[\hat{\beta}_1] = D \left[\frac{1}{S_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)Y_i \right] = \frac{1}{S_{xx}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 D[Y_i] = \frac{\sigma^2 S_{xx}}{S_{xx}^2} = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

3.

$$\begin{aligned}D[\hat{\beta}_0] &= D[\bar{Y}_n - \hat{\beta}_1 \bar{X}_n] = d[\bar{Y}_n] + \bar{x}_n^2 D[\hat{\beta}_1] - 2 \bar{x}_n \text{cov}(\bar{Y}_n, \hat{\beta}_1) = \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\bar{x}_n^2 \sigma^2}{S_{xx}} - 2 \bar{x}_n \text{cov}(\bar{Y}_n, \hat{\beta}_1) \\ \text{cov}(\bar{Y}_n, \hat{\beta}_1) &= \text{cov} \left(\bar{Y}_n, \frac{1}{S_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)Y_i \right) = \frac{1}{S_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n) \text{cov}(\bar{Y}_n, Y_i) \\ \text{cov}(\bar{Y}_n, Y_i) &= \text{cov} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j, Y_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{cov}(Y_j, Y_i) = \frac{1}{n} \text{cov}(Y_i, Y_i) = \frac{1}{n} D Y_i = \frac{\sigma^2}{n} \\ &\Rightarrow \text{cov}(\bar{Y}_n, \hat{\beta}_1) = 0 = \frac{\sigma^2}{n S_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)\end{aligned}$$

Věta 2.9. Za předpokladu předchozí věty platí

$$\mathbb{E}(s_n^2) = \sigma^2,$$

tedy s_n^2 je nestranný odhad σ^2 .

2 Jednorozměrná lineární regrese

Důkaz.

$$\mathbb{E}(s_n^2) = \frac{1}{n-2} \mathbb{E} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \frac{1}{n-2} \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}_{\text{ozn. } A}$$

Protože $\mathbb{E}(\hat{Y}_i) = \mathbb{E}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i = \mathbb{E}Y_i$, platí, že:

$$\mathbb{E}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = D(Y_i - \hat{Y}_i) = \mathbb{E}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 - \underbrace{(\mathbb{E}(Y_i - \hat{Y}_i)^2)}_{=0}$$

Dostáváme tak

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n D(Y_i - \hat{Y}_i) = \sum_{i=1}^n [D(Y_i) + D(\hat{Y}_i) - 2\text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_i)] = \\ &= n\sigma^2 + \sum_{i=1}^n D(\hat{Y}_i) - 2 \sum_{i=1}^n \text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_i) \end{aligned} \quad (\#)$$

Rozepíšeme

$$D\hat{Y}_i = D(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) = D\hat{\beta}_0 + x_i^2 D\hat{\beta}_1 + 2x_i,$$

kde

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \text{Cov}(\hat{Y}_n - \hat{\beta}_1 \hat{x}_n, \hat{\beta}_1) = \underbrace{\text{Cov}(\hat{Y}_n, \hat{\beta}_1)}_{=0 \text{ (viz. dříve)}} - \hat{x}_n \underbrace{D(\hat{\beta}_1)}_{\frac{\sigma^2}{s_{xx}}} = -\frac{\sigma^2 \hat{x}_n}{s_{xx}}$$

a tedy

$$\begin{aligned} D\hat{Y}_i &= \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}_n^2}{s_{xx}} + x_i^2 \frac{1}{s_{xx}} - \frac{2x_i \bar{x}_n}{s_{xx}} \right] = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x}_n)^2}{s_{xx}} \right] \\ \sum_{i=1}^n D\hat{Y}_i &= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{s_{xx}} \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}_{=s_{xx}} = 2\sigma^2 \end{aligned}$$

Následně máme

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_i) &= \text{Cov}(Y_i, \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0) = \text{Cov}(Y_i, \hat{\beta}_0) + x_0 \text{Cov}(Y_i, \hat{\beta}_1) \\ \text{Cov}(Y_i, \hat{\beta}_1) &= \frac{1}{s_{xx}} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_n) \underbrace{\text{Cov}(Y_i, Y_j)}_{=0 \text{ pro } i \neq j} = \frac{\sigma^2 (x_i - \bar{x}_n)}{s_{xx}} \\ \text{Cov}(Y_i, \hat{\beta}_0) &= \text{Cov}(Y_i, \bar{Y}_n - \bar{x}_n \hat{\beta}_1) = \text{Cov}(Y_i, \bar{Y}) - \bar{x}_n \text{Cov}(Y_i, \hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\bar{x}_n \sigma^2 (x_i - \bar{x}_n)}{s_{xx}} \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_i) &= \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\bar{x}_n \sigma^2 (x_i - \bar{x}_n)}{s_{xx}} + \frac{x_i \sigma^2 (x_i - \bar{x}_n)}{s_{xx}} = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{s_{xx}} (x_i - \bar{x}_n)^2 \\ \sum_{i=1}^n \text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_i) &= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{s_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 = 2\sigma^2 \end{aligned}$$

2 Jednorozměrná lineární regrese

Dosazením do (#) dostaneme

$$A = n\sigma^2 + 2\sigma^2 - 4\sigma^2$$

a celkem máme

$$\mathbb{E}(s_n^2) = \frac{1}{n-2}A = \sigma^2.$$

□

Tvrzení 2.10. Nechť platí předpoklady věty 1 a nechť e_1, \dots, e_n iid $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Potom platí:

a) $\frac{(n-2)s_n^2}{\sigma^2} \sim \chi(n-2)$

b) s_n^2 je nezávislé na $\hat{\beta}_0$ a $\hat{\beta}_1$.

Důkaz. Vyplýne z obecnějších tvrzení pro vícerozměrnou regresi. □

POZNÁMKA 2.11. Spočetli jsme

$$\underbrace{D(\hat{\beta}_0)}_{\text{ozn. } \sigma^2(\hat{\beta}_0)} = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}_n^2}{s_{xx}} \right] \quad \text{a} \quad \underbrace{D(\hat{\beta}_1)}_{\text{ozn. } \sigma^2(\hat{\beta}_1)} = \frac{\sigma^2}{s_{xx}}$$

Nestranné odhady jsou:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\hat{\beta}_0) &= s_n^2 \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}_n^2}{s_{xx}} \right] = s_n^2 \delta_0 \\ \sigma^2(\hat{\beta}_1) &= \frac{s_n^2}{s_{xx}} = s_n^2 \delta_1, \end{aligned}$$

kde δ_0 a δ_1 jsou tzv. variance multiplication factors.

Odhady směrodatné odchylky veličin $\hat{\beta}_0$ a $\hat{\beta}_1$ pak jsou

$$\hat{\sigma}(\hat{\beta}_0) = s_n \sqrt{\delta_0} \quad \text{a} \quad \hat{\sigma}(\hat{\beta}_1) = s_n \sqrt{\delta_1},$$

kterým se pak říká standardní chyby odhadů $\hat{\beta}_0$ a $\hat{\beta}_1$. Hrají zásadní roli při konstrukci IS a TH.

2.2 Gauss - Markov theorem

- Chyby normální \Rightarrow LSE pro $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ je MLE ... parametrů (eficientní odhad)
- Pokud nejsou chyby normální, jaké je opodstatnění použít LSE?

Ukážeme, že LSE jsou BLUE (best linear unbiased estimators), tedy lineární nestranné odhady s minimálním rozptylem

- Je ale třeba poznamenat, že můžou existovat nelineární nebo vychýlené odhady parametrů β_0, β_1 , které jsou eficientnější než LSE, pokud se rozdělení chyb liší výrazně od normálního (tím se zabývá robustní regresní analýza).

Uvažujme model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (*)$$

2 Jednorozměrná lineární regrese

Definice 2.12. Lineární odhad parametru β je statistika tvaru

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n c_i Y_i,$$

kde c_i jsou dané reálné konstanty a $i = 1, \dots, n$.

Věta 2.13. Nechť e_1, \dots, e_n v modelu (*) jsou nekorelované a mají stejný rozptyl $D(e_i) = \sigma^2, i = 1, \dots, n$. Potom LSE $\hat{\beta}_j, j = 0, 1$ je BLUE parametru β_j .

Důkaz. Ukážeme pro β_1 , pro β_0 je důkaz podobný.

Nechť $\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^n c_i Y_i$, pak

$$D\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^n c_i^2 D Y_i = \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^2$$

Aby byl $\hat{\beta}_1$ nestranný, musí platit $\mathbb{E}\hat{\beta}_1 = \beta_1$, tedy

$$\mathbb{E}\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{E}Y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^n c_i + \beta_1 \sum_{i=1}^n c_i x_i \stackrel{!}{=} \beta_1$$

protože to musí platit pro lib. β_0, β_1 , dostáváme

$$\sum_{i=1}^n c_i = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i = 1.$$

Hledání lineárního, nestranného odhadu β_1 je tedy redukováno na minimalizaci $\sum_{i=1}^n c_i^2$ za vazebních podmínek $\sum_{i=1}^n c_i = 0$ a $\sum_{i=1}^n c_i x_i = 1$.

Lagrangeova funkce: $L = \sum_{i=1}^n c_i^2 - 2\lambda_1(\sum_{i=1}^n c_i) - 2\lambda_2(\sum_{i=1}^n c_i x_i - 1)$.

$$\frac{\partial L}{\partial c_i} = 2c_i - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -2(\sum_{i=1}^n c_i) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -2(\sum_{i=1}^n c_i x_i - 1) = 0$$

Sečteme prvních n rovnic

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n c_i}_{=0} - n\lambda_1 - \lambda_2 \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow n\lambda_1 + \lambda_2 \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 \bar{x}_n$$

2 Jednorozměrná lineární regrese

Sečteme dálé prvních n rovnic vynásobených x_i :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i x_i - \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i - \lambda_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 1 \\ -\lambda_2 \bar{x}_n \cdot n \bar{x}_n + \lambda_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 1 \\ \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}_n^2 \right) &= 1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{s_{xx}} \quad \text{a} \quad \lambda_1 = -\frac{\bar{x}_n}{s_{xx}} \end{aligned}$$

Dosadíme za λ_1, λ_2 :

$$c_i + \frac{\bar{x}_n}{s_{xx}} - \frac{x_i}{s_{xx}} = 0 \Rightarrow c_i = \frac{x_i - \bar{x}_n}{s_{xx}}$$

a $\hat{\beta}_1 = \frac{1}{s_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n) Y_i$, což je LSE.

□

Poznámka 2.14. Ukázali jsme pouze, že to je stacionární bod, že je tam i minimum ukážeme v obecnější větě ve vícerozměrné regresi.

2.3 IS pro β_0, β_1

- IS poskytuje jistou ”míru přesnosti” bodových odhadů
- pro jejich konstrukci potřebujeme znát rozdělení pravděpodobnosti bodového odhadu
- budeme tedy uvažovat normalitu chyb
- spočtené IS se ale často používají, i když rozdělení chyb není normální, jejich použití se zdůvodňuje tím, že LSE odhady par. β jsou lineární funkcií $Y_i, i = 1, \dots, n$, což umožňuje aplikovat CLT a dostat asymptotickou normalitu odhadů $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$

Uvažujme model $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$, e_i i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Víme:

$$\hat{\beta}_i \sim \mathcal{N}(\beta_i, \sigma^2(\hat{\beta}_i)), \quad \frac{(n-2)s_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \text{a nezávisí na } \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1.$$

Poznámka 2.15.

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1), Y \sim \chi^2(n), X, Y \text{ nezávislé} \Rightarrow \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

Tedy

$$T_i = \frac{\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma(\hat{\beta}_i)}}{\frac{s_n}{\sigma}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}}(\hat{\beta}_i) \sim t(n-2, i=0, 1)$$

neboť $\sigma(\hat{\beta}_i) = \sigma\sqrt{\delta_i}$ a $\hat{\sigma}(\hat{\beta}_i) = s_n\sqrt{\delta_i}$.

2 Jednorozměrná lineární regrese

Tzn. $P \left[-t_{1-\alpha/2}(n-2) \leq \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}}(\hat{\beta}_i) \leq t_{1-\alpha/2}(n-2) \right]$ a vyjádřením β_i dostaneme

$$P \left[\hat{\beta}_i - t_{1-\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma}(\hat{\beta}_i) \leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i + t_{1-\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma}(\hat{\beta}_i) \right] = 1 - \alpha$$

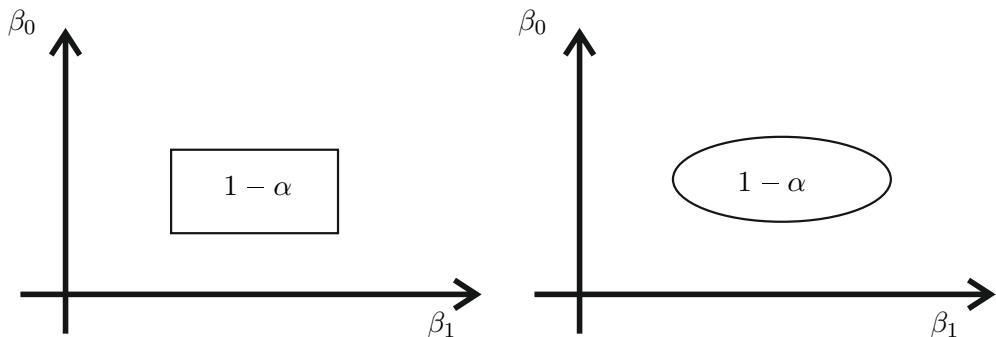
a tedy $(\hat{\beta}_i \pm t_{1-\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma}(\hat{\beta}_i))$ je $100(1-\alpha)\%$ IS pro $\beta_i, i = 0, 1$.

Dosazením za $\hat{\sigma}(\hat{\beta}_i)$ dostaneme

- $100(1-\alpha)\%$ IS pro β_0 : $\hat{\beta}_0 \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot s_n \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}_n^2}{s_{xx}}}$
- $100(1-\alpha)\%$ IS pro β_1 : $\hat{\beta}_1 \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot s_n \frac{1}{\sqrt{s_{xx}}}$

POZNÁMKA 2.16. Z tvarů IS lze pozorovat, že IS pro β_0 bude ve většině praktických případů širší než IS pro β_1 , tzn. směrnice je obecně odhadnuta s větší přesností než absolutní člen (intercept).

POZNÁMKA 2.17. Někdy se konstruují simultánní IS pro oba parametry.



Zmíníme podrobněji u vícerozměrné regrese.

2.3.1 TH pro β_0, β_1

Chtěli bychom ověřit platnost předpokladu lineárního vztahu mezi x a y .

Předpokládejme nyní, že model je lineární a že x je jediná dostupná vysvětlující proměnná. Otázku je, zda je x užitečná ve vysvětlení variability v y , chceme tedy rozhodnout mezi dvěma modely:

$$Y_i = \beta_0 + e_i \quad \text{a} \quad Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$$

tzn. otestovat hypotézu $H_0 : \beta_1 = 0$ vs. $H_1 : \beta_1 \neq 0$.

Pokud nezamítneme H_0 , závěr bude, že x nevysvětuje nic z variability y a není v modelu významné. Pokud zamítneme H_0 , znamená to, že x je významné.

POZNÁMKA 2.18. Tyto závěry jsou správné pouze za předpokladu, že model je lineární!

- nezamítnutí H_0 nemusí znamenat, že x není užitečná, může to pouze indikovat, že vztah mezi y a x není lineární
- zamítnutí H_0 naopak ří, že existuje lineární trend mezi x a y , ale mohou tam být i jiné typy závislosti

2 Jednorozměrná lineární regrese

Pro konstrukci testů využijeme odvozené IS.

POZNÁMKA 2.19. Opakování: $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta \neq \theta_0 \Rightarrow (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ je $100(1 - \alpha)\%$ IS pro θ . Pak $W = \{x | \theta_0 \notin (\underline{\theta}, \bar{\theta})\}$ je kritický obor test na hladině α .

$H_0 : \beta_1 = 0$ zamítneme, pokud $0 \notin \left(\hat{\beta}_1 \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot \frac{s_n}{\sqrt{s_{xx}}} \right)$, tzn.

$$\text{bud } \hat{\beta}_1 + t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot \frac{s_n}{\sqrt{s_{xx}}} < 0 \iff \hat{\beta}_1 \frac{\sqrt{s_{xx}}}{s_n} < -t_{1-\alpha/2}(n-2)$$

$$\text{nebo } \hat{\beta}_1 - t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot \frac{s_n}{\sqrt{s_{xx}}} > 0 \iff \hat{\beta}_1 \frac{\sqrt{s_{xx}}}{s_n} > t_{1-\alpha/2}(n-2)$$

A zapsáno dohromady

$$|T_n| = |\hat{\beta}_1| \frac{\sqrt{s_{xx}}}{s_n} > t_{1-\alpha/2}(n-2).$$

POZNÁMKA 2.20. Intuitivní interpretace: $|T_n| = |\hat{\beta}_1| \frac{\sqrt{s_{xx}}}{s_n} = \frac{|\hat{\beta}_1|}{\hat{\sigma}(\hat{\beta}_1)}$ je převrácená hodnota relativní chyby.

Pokud je β_1 dobře odhadnuto, očekáváme malý rozptyl $\hat{\sigma}(\hat{\beta}_1)$, tedy T bude velké.

t-test tedy říká, že zamítneme H_0 , pokud je relativní chyba odhadu malá.

POZNÁMKA 2.21. Někdy dopředu známe kandidáta b_1 jako hodnotu parametru β_1 a chtěli bychom testovat $H_0 : \beta_1 = b_1$ vs. $H_1 : \beta_1 \neq b_1$. Test bude zamítnut H_0 , pokud

$$|\beta_1 - b_1| \cdot \frac{\sqrt{S_{xx}}}{s_n} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2).$$

Test významnosti interceptu

Otázka je, zda přímka prochází počátkem $(0, 0)$, tedy $H_0 : \beta_0 = 0$ vs. $H_1 : \beta_0 \neq 0$. Nezamítnutí H_0 znamená, že jednodušší model $y = \beta_1 x + e$ lépe popisuje datta, než $y = \beta_0 + \beta_1 x + e$. H_0 potom zamítneme, pokud

$$T_n = \frac{|\hat{\beta}_0|}{\hat{\sigma}(\hat{\beta}_0)} = |\hat{\beta}_0| \frac{1}{s_n \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2).$$

2.4 ANOVA přístup pro testování

Odvodili jsme t -test významnosti koeficientů a nyní odvodíme ekvivalentní F -test, který může být zobecněn na test celkové významnosti vícerozměrného regresního modelu (testy významnosti jednotlivých koeficientů mohou být totiž zavádějící).

Myšlenkou metody (analýza rozptylu ANOVA) je určit, kolik variability v pozorováních (y_1, y_2, \dots, y_n) je "vysvětleno" regresním modelem (přímkou). Míru variability v datech pak spočítáme jako podíl součtu sum od regrese a celkového počtu čtverců, tedy

$$\text{SST} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2,$$

2 Jednorozměrná lineární regrese

pokud regresní přímka $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ dobře prokládá data, tedy $\hat{y}_i \approx y_i$. Dále bude platit, že

$$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2 \approx \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2.$$

Ukážeme, že $\bar{\hat{y}} = \bar{y}_n$ a tak

$$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2 = \text{SSR}$$

regresi sum ob squares, regresní součet čtverců. Podíl

$$R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2}$$

tak vyjadřuje variabilitu v (y_1, \dots, y_n) vysvětlené regresním modelem.

R^2 - koeficient determinace (*coefficient of determination*) (pro každý model by měl mít hodnotu $R^2 \approx 1$). Ukážeme, že R^2 je kvadrát výběrového korelačního koeficientu mezi \mathbf{x} a \mathbf{y} , což dává statistice R^2 význam míry "dobré shody".

Pokud bychom znali rozdělení pravděpodobnostní statistiky R^2 , nabízí se její použití pro test $H_0 : \beta_1 = 0$, kterou bychom zamítlí, pokud bude $R^2 \approx 1$. Protože každá monotonní funkce R^2 vede na ekvivalentní test, budeme uvažovat statistiku

$$F = \frac{(n-2)R}{1-R^2}.$$

Lemma 2.22. Nechť $\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i$ značí rezidua, kde $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ a $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ jsou LSE. Potom

$$1. \sum_{i=1}^n \hat{e}_i = 0,$$

$$2. \bar{\hat{y}}_n = \bar{y}_n,$$

$$3. \sum_{i=1}^n \hat{e}_i \hat{y}_i = 0.$$

Důkaz. 1. Z rovnice $\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = 0$ dostaneme

$$0 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i.$$

2. Z bodu 1) plyne, že $\sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n y_i$, podělením n dostaneme dokazované tvrzení.

3. Z rovnice $\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0$ dostaneme

$$0 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) x_i = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i x_i$$

2 Jednorozměrná lineární regrese

a tedy

$$\sum_{i=1}^n \hat{e}_i \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \hat{e}_i \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_0 \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i}_{=0} + \hat{\beta}_1 \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i \hat{e}_i}_{=0} = 0.$$

□

Věta 2.23. *Předpokládejme, že SST ≠ 0. Potom platí*

1. $0 \leq R^2 \leq 1$,
2. $R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}$, kde $SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ jako reziduální součet čtverců,
3. $R^2 = 1 \Leftrightarrow (\forall i \in \hat{n})(\hat{y}_i = y_i)$ (všechna data leží na přímce),
4. pokud označíme $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, potom $R^2 = \rho^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, kde

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n) \right)^2}{S_{xx} S_{yy}}$$

je druhá mocnina výběrového korelačního koeficientu vektorů \mathbf{x}, \mathbf{y} ,

5. $F = \frac{SSR}{s_n^2} = T^2$,
6. pokud jsou chyby e_1, \dots, e_n iid $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ a $\beta_1 = 0$ (platí $H_0 : \beta_1 = 0$) v modelu, potom $F \sim F(1, n - 2)$.

Důkaz. Důkaz věty bude založen na rozkladu

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

neboli $SST = SSR + SSE$. Z lemmatu 2.22 vyplývá, že

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2 = \sum_{i=1}^n [(y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y}_n)]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \bar{y}_n) = SSE + SSR + 0, \end{aligned}$$

neboť

$$\sum_{i=1}^n (\underbrace{(y_i - \hat{y}_i)}_{=\hat{e}_i} (\hat{y}_i - \bar{y}_n)) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i \hat{y}_i}_{=0} - \bar{y}_n \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i}_{=0} = 0.$$

Z toho potom dokazujeme jednotlivé body věty.

1. Protože $SST = SSE + SSR$, pak $0 \leq R^2 = \frac{SSR}{SST} \leq \frac{SST}{SST} = 1$.

2 Jednorozměrná lineární regrese

$$2. \text{ SSR} = \text{SST} - \text{SSE} \Rightarrow R^2 = \frac{\text{SST}-\text{SSE}}{\text{SST}} = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}}.$$

$$3. \text{ Z bodu 2 plyne, že } R^2 = 1 \Leftrightarrow \text{SSE} = 0 \text{ a } \text{SSE} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0 \Leftrightarrow y_i = \hat{y}_i \forall i \in \hat{n}.$$

$$4. \hat{y}_i = \underbrace{\hat{\beta}_0}_{=\bar{y}_n} + \hat{\beta}_1 x_i = \bar{y}_n - \hat{\beta}_1 (\bar{x}_n - x_i). \text{ Proto pak}$$

$$\text{SSR} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2 + \hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 = \hat{\beta}_1^2 S_{xx},$$

$$\text{a protože } \hat{\beta}_1 = \frac{1}{S_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n), \text{ dostaneme}$$

$$\varrho^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n) \right]^2}{S_{xx} S_{yy}} = \frac{\hat{\beta}_1^2 S_{xx}}{S_{yy}} = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = R^2,$$

$$\text{neboť } S_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2 = \text{SST}.$$

5. Z definice F plyne, že

$$F = \frac{(n-2)R^2}{1-R^2} = \frac{(n-2)\frac{\text{SSR}}{\text{SST}}}{\frac{\text{SSE}}{\text{SST}}} = \frac{\text{SSR}}{\frac{\text{SSE}}{n-2}} = \frac{\text{SSR}}{s_n^2}.$$

Protože $T_n = \hat{\beta}_1 \frac{\sqrt{S_{xx}}}{s_n}$, pak

$$T^2 = \frac{\hat{\beta}_1^2 S_{xx}}{s_n^2} = \frac{\text{SSR}}{s_n^2} = F.$$

$$6. T \sim t(n-2) \Rightarrow F = T^2 \sim F(1, n-2).$$

□

POZNÁMKA 2.24. 1. Z bodů 5 a 6 vyplývá, že použití libovolné statistiky T_n, R^2 nebo F vede na ekvivalentní test významnosti regrese.

2. R^2 poskytuje hrubou představu o kvalitě modelu, čím je blíže 1, tím lépe přímka prokládá data (nicméně je třeba jisté obezřetnosti, jak uvidíme později).

3. F lze chápout jako statistiku pro test významnosti velkých hodnot R^2 .

Výsledky se většinou uvádí v tabulce ANOVA:

Source	df	SS	MS	F
Regression	1	SSR	MSR=SSR	$\frac{\text{MSR}}{\text{MSE}}$
Residual	$n-2$	SSE	$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n-2} = s_n^2$	
Total	$n-1$	SST		

$$R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}}$$

Kde **source** je zdroj součtu čtverců, **df** počet stupňů volnosti příslušný danému součtu čtverců, **SS** počet čtverců a **MS** ($MS = \frac{SS}{df}$) "mean squares".

2 Jednorozměrná lineární regrese

Poznámka 2.25. $H_0 : \beta_1 = 0$ je zamítelný, pokud $F > F_{1-\alpha}(1, n-2)$. V tomto jednorozměrném případě je to ekvivalentní t -testu, neboť $F = T^2$.

Věta 2.26. Mějme e_1, \dots, e_n iid $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Za platnosti $H_0 : \beta_1 = 0$ je splněno, že

$$\frac{\text{SSR}}{\sigma^2} \sim \chi^2(1), \quad \frac{\text{SSE}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2), \quad \frac{\text{SST}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Poznámka 2.27. Proto v tabulce ANOVA 2.4 uvádí df po řadě $1, n-2, n-1$. Používají se však i v případě jiného rozdělení chyb. Představit si je lze takto:

1. $\text{SSE} = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2$, na n -reziční $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ máme 2 podmínky $\sum_{i=1}^n \hat{e}_i = 0$ a $\sum_{i=1}^n x_i \hat{e}_i = 0$. Z toho vyplývá, že mají $n-2$ stupňů volnosti.
2. $\text{SST} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2 \dots y_i - \bar{y}_n$ musí splňovat $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n) = 0$, a proto má $n-1$ stupňů volnosti.
3. $\text{SSR} = \text{SST} - \text{SSE}$, a počet stupňů volnosti je roven $(n-1) - (n-2) = 1$.

Důkaz. V důkazu věty ?? jsme ukázali, že $\text{SSR} = \hat{\beta}_1^2 S_{xx}$, takže $\frac{\text{SSR}}{\sigma^2} = \left(\frac{\hat{\beta}_1 \sqrt{S_{xx}}}{\sigma}\right)^2$, víme, že $\hat{\beta}_1 \sim \mathcal{N}(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}})$ a tedy $(\hat{\beta}_1 - \beta_1) \frac{S_{xx}}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Pro $\beta_1 = 0$ tedy

$$\hat{\beta}_1 \frac{\sqrt{S_{xx}}}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow \frac{\text{SSR}}{\sigma^2} \sim \chi^2(1).$$

Zároveň také $\frac{\text{SSE}}{\sigma^2} = \frac{(n-2)s_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$ (viz dříve) a nezávisí na $\hat{\beta}_1$. Z toho vyplývá, že $\frac{\text{SSR}}{\sigma^2}$ a $\frac{\text{SSE}}{\sigma^2}$ jsou nezávislé. Dále platí, že

$$\frac{\text{SST}}{\sigma^2} = \frac{\text{SSR}}{\sigma^2} + \frac{\text{SSE}}{\sigma^2} \Rightarrow \frac{\text{SST}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

□

Poznámka 2.28. R^2 statistika - pozor na zjednodušení kvality modelu.

1. Nízké hodnoty R^2 nemusí znamenat, že regresní model není významný. V datech jen může být velké množství nevysvětlitelné náhodné variability. Například opakování hodnoty regresoru x snižuje hodnotu R^2 oproti modelům s různými x .
2. Velké hodnoty R^2 mohou být způsobeny velkým měřítkem dat (S_{xx} je velká). Platí totiž, že

$$\mathbb{E}(R^2) \approx \frac{\beta_1^2 S_{xx}}{\beta_1^2 S_{xx} + \sigma^2},$$

což je rostoucí funkce S_{xx} .

Velký rozptyl (x_1, \dots, x_n) může mít za následek velké R^2 a přitom nic neříká o kvalitě modelu.

$\mathbb{E}(R^2)$ je také rostoucí funkcií β_1^2 . Modely s velkou směrnicí tedy budou mít obecně větší $yRM R^2$, než modely s "malou" směrnicí.

2 Jednorozměrná lineární regrese

Při hodnocení kvality modelu potřebujeme více kritérií. Mezi ně patří například

1. ”velké” R^2 ,
2. ”velké” F nebo $|T|$ hodnoty,
3. ”malé” hodnoty s_n^2 vzhledem k \bar{y}_n .

Další kritéria budeme probírat později.

PŘÍKLAD 2.29. Velká hodnota R^2 indikuje přibližně lineární vztah mezi x a y , ale vysoký stupeň korelace nemusí znamenat příčinný vztah. data: 1924-1937

y_i - počet mentálních onemocnění na 100000 obyvatel Anglie.

x_i - počet rádií v populaci.

model - $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$.

$$\hat{\beta}_0 = 4.5822, \quad \hat{\beta}_1 = 2.2042, \quad R^2 = 0.984,$$

tzv. velmi významný lineární vztah mezi x a y . Závěr by mohl být, že rádia způsobují mentální onemocnění. I když by to mohla být pravda, nabízí se věrohodnější vysvětlení, a to takové, že x i y rostou lineárně s časem, tzn. y roste lineárně s x .

Rádia byla s časem dostupnější, lepší diagnostické procedury umožňovaly identifikovat více lidí s mentálními problémy.

POZNÁMKA 2.30. korelace VS příčinnost

- **Příčinná spojitost** - i když je příčinná spojitost mezi x a y korelace samotná nám neřekne, zda x ovlivňuje y nebo naopak.
- **Skrytá příčinnost** - skrytá veličina z ovlivňuje x i y , což způsobuje jejich korelovanost.
- **Confounding factor** - skryté proměnné z i x ovlivňují y , výsledek tedy závisí i na z .
- **Coincidence** - korelace je náhodná.

2.5 Regrese skrz počátek

Existují případy, kdy přípustný model vyžaduje $\beta_0 = 0$, tj.

$$Y_i = \beta_1 x_i + e_i, \quad \text{kde } i = 1, \dots, n$$

PŘÍKLAD 2.31. • Je to předem známo na základě nějakých fyzikálních úvah

$$\mathbb{E}[Y_0] = \beta_0 = 0$$

potom nemá smysl odhadnout β_0 , protože to obecně sníží přesnost odhadu σ^2 a tedy i β_1

- Na začátek předpokládáme, že $\beta_0 \neq 0$ a t-test nezamítne hypotézu $H_0 : \beta_0 = 0$, potom β_0 může být z modelu odstraněn.

POZNÁMKA 2.32. V praktických situacích si často nemůžeme být jisti, že model platí i blízko počátku. Část statistiků trvá na přítomnosti interceptu v modelu, i když je nevýznamný.

Položit β_0 apriorně, může nýt chybné i když $\mathbb{E}[Y_0] = 0$. Pokud totiž nevíme jistě, že model je lineární na okolí 0, volba $\beta_0 = 0$ může vést k vychýleným odhadům β_1 , pokud jsou nezávislé proměnné daleko od $x = 0$.

—————PICTURE—————

2.5.1 Odhad a testy v případě $\beta_0 = 0$

LSE parametru β_1 dostaneme minimalizací $S = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_1 x_i)^2$ ve tvaru:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

pokud e_1, \dots, e_n i.i.d. $N(0, \sigma^2)$, potom $\mathbb{E}[\hat{\beta}_1] = \beta_1$ a $D[\hat{\beta}_1] = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Takže $\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2})$

a $s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-1} = \frac{SSE}{n-1}$ je nestranný odhad σ^2 . Dále $\frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ a nezávisí na $\hat{\beta}_1$.
 $H_0 : \beta_1 = 0$ lze otestovat za pomoci statistiky:

$$T = \frac{\frac{\hat{\beta}_1}{s_n}}{\sqrt{\sum x_i^2}} \sim t(n-1)$$

$$100(1-\alpha)\% \text{ IS pro } \beta_1 \text{ je } (\hat{\beta}_1 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s_n}{\sqrt{\sum x_i^2}})$$

- Zatím je vše podobné jako pro případ $\beta_1 \neq 0$.
- Rozdíl je ale v tabulce ANOVA a v míře dobré shody, problém je, že neplatí rozklad $SST = SSR + SSE$ neboť součet reziduů $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)$ nemusí být 0 a tedy $\bar{\hat{y}}_n \neq \bar{y}_n$. Odvodíme nový rozklad, který platí v obou případech, dokážeme ho ale jen pro $\beta_0 = 0$

Věta 2.33. V modelu s $\beta_0 = 0$ platí

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Důkaz.

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i + \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) \hat{y}_i$$

$$\text{z rovnice } \frac{dS}{d\beta_1} = 0 \text{ dostaneme } \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_1 x_i) x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) \hat{y}_i = 0 \quad \text{Q. E. D.}$$

□

2 Jednorozměrná lineární regrese

Pokud vezmeme $\sum y_i^2$ jako míru variability v datech, analogie R^2 statistiky bude

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2} \Leftrightarrow 1 - R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

=definujeme $F = \frac{(n-1)R^2}{1-R^2}$ potom

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} = \frac{\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2}{s_n^2} = T^2$$

vztah mezi R^2 , F a T^2 je tedy stejný jako pro $\beta_0 \neq 0$.

POZNÁMKA 2.34. Tato definice R^2 se ale v praxi moc nepoužívá, protože neumožňuje přímé srovnání modelů bez a s interceptem.

$$\beta_0 = 0 \quad : \quad R^2 = 1 - \frac{\text{SSE}}{\sum_{i=1}^n y_i^2} \quad \beta_0 \neq 0 \quad : \quad R^2 = 1 - \frac{\text{SSE}}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2}$$

obecně ale $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2 < \sum_{i=1}^n y_i^2$, R^2 v modelu s $\beta_0 = 0$ tedy bude větší než R^2 modelu s $\beta_0 \neq 0$ i když jsou jejich SSE srovnatelné.

- Definice vhodné R^2 pro $\beta_0 = 0$ vyvolává jistou kontroverzi a existuje několik verzí.
- Možná volba je $R^2 = (\varrho(y_I, \bar{y}_I))^2$, kde $\bar{y}_I = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ protože tato vlastnost platí i pro případ $\beta_0 = 0$.
- Další možnost je srovnat modely pomocí hodnot s_n^2 . (preferuje se model s nejnižší hodnotou s_n^2)

Source	df	SS	MS	F
Regression	1	$\text{SSR} = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2$	$\text{MSR} = \frac{\text{SSR}}{1}$	$\frac{\text{SSR}}{s_n^2}$
Residual	$n - 1$	$\text{SSE} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n-1}$	
Total	n	$\text{SST} = \sum_{i=1}^n y_i^2$		
		$R^2 = \varrho^2(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}})$		

Tabulka 2.1: Tabulka ANOVA pro $\beta_0 = 0$.

2 Jednorozměrná lineární regrese

2.5.2 Predikce

Jakmile máme model, často bývá cílem odhadnout hodnoty veličiny Y_0 pro nové x_0 , které není v původních datech. Budeme uvažovat dva typy predikce:

1. predikce střední hodnoty $\mu_0 = \mathbb{E}[Y_0]$ v bodě x_0 ,
2. predikce hodnoty nového pozorování Y_0 v bodě x_0 .

Pro oba typy použijeme bodový odhad

$$\hat{Y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0.$$

Intervalové odhady se ale budou lišit.

Ad 1

Protože je $\mu_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0$ vlastně parametr, lze pro něj odvodit IS (za předpokladu normality chyb).

Spočteme tedy $D(\hat{Y}_0)$. Dosazením odhadů $\hat{\beta}_0$ a $\hat{\beta}_1$ dostaneme $\hat{Y}_0 = \bar{y} + \hat{\beta}_1(x_0 - \bar{x})$ a

$$D\hat{Y}_0 = D(\bar{Y}) + (x_0 - \bar{x})^2 D(\hat{\beta}_1) + 2(x_0 - \bar{x}) \underbrace{\text{Cov}(\bar{Y}, \hat{\beta}_1)}_{=0} = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right].$$

Nahrazením σ^2 statistika s_n^2 dostaneme odhad $D(\hat{Y}_0)$ ve tvaru

$$\hat{\sigma}^2(\bar{Y}_0) = s_n^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right].$$

$\hat{\sigma}(\hat{Y}_0)$ se obvykle nazývá **standardní chyba predikce v bodě x_0** . Jsou-li e_1, \dots, e_m iid $\mathbb{N}(0, \sigma^2)$, platí, že

$$\hat{Y}_0 \sim \mathbb{N}\left(\mu_0, \underbrace{\sigma^2 \left[\frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]}_{\hat{\sigma}^2(\hat{Y}_0)}\right)$$

a tedy

$$\frac{\hat{Y}_0 - \mu_0}{\hat{\sigma}(\hat{Y}_0)} \sim \mathbb{N}(0, 1).$$

Celkem tedy

$$T = \frac{\frac{\hat{Y}_0 - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}}}{\sqrt{\frac{(n-2)s_n^2}{\sigma^2} \frac{1}{n-2}}} = \frac{\hat{Y}_0 - \mu_0}{\sqrt{s_n^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}} = \frac{\hat{Y}_0 - \mu_0}{\hat{\sigma}^2(\hat{Y}_0)} \sim t(n-2).$$

Vyjádřením získáme $100(1-\alpha)\%$ IS pro μ_0 ve tvaru

$$\hat{Y}_0 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \hat{\sigma}^2(\hat{Y}_0).$$

POZNÁMKA 2.35. Z tvaru IS je vidět, že bude nejkratší pro $x_0 = \bar{x}$ a s rostoucí vzdáleností $|x_0 - \bar{x}|$ se prodlužuje.

- Speciálně potom čím dále jsme od oblasti, kde jsou naše data x , tím méně spolehlivé jsou naše predikce.
- Je třeba opatrnosti při predikci hodnot Y mimo interval $(\min x_i, \max x_i)$.

2 Jednorozměrná lineární regrese

Ad 2

Intervalové odhady pro Y_0 nejsou IS, protože Y_0 není parametr. Říká se jim **intervaly predikce**. Potřebujeme rozptyl $Y_0 - \hat{Y}_0$, pokud je nené pozorování Y_0 nezávislé na $Y_i, i \in \hat{n}$, potom

$$D(Y_0 - \hat{Y}_0) = \underbrace{DY_0}_{\sigma^2} + D\hat{Y}_0 + 0 = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right].$$

Odhad tohto rozptylu bude s_p^2 , kde

$$s_p = s_n \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}.$$

Za předpokladu normality chyb pak

$$T = \frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{s_n \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}} = \frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{s_p} \sim t(n-2).$$

Vyjádřením získáme $100(1-\alpha)\%$ interval predikce pro Y_0 ve tvaru

$$\hat{Y}_0 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)s_p.$$

POZNÁMKA 2.36. Přesnost predikce

- a) roste s rostoucím n a rostoucím rozsahem x naměřeným pomocí S_{xx} ,
- b) klesá s rostoucím $|x_0 - \bar{x}|$.

Pokud můžeme předem zvolit x_1, \dots, x_n , lze přesnost predikce zvýšit volbou dostatečně rozptýlených hodnot x . To ale může zvyšovat R^2 a někdy vést k horšímu modelu.

To je **základní rozpor v regresní analýze**:

- dobrý model nemusí poskytovat dobré predikce,
- dobré predikce mohou vycházet z méně přesných modelů.

POZNÁMKA 2.37. Odvozené výsledky platí za předpokladu normality chyb. Protože jsou ale za podmínek regularity odhady $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ asymptoticky normální, IS pro $E[Y_0]$ budou fungovat (jsou použitelné i pro velká n). IP pro Y_0 ale závisí na normalitě chyb i pro velká n , mohou tedy být nepřesné pro nenormální chyby.

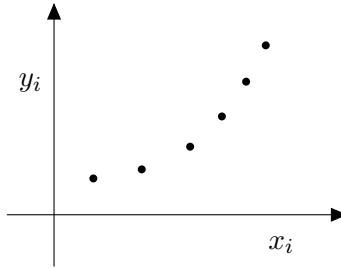
PŘÍKLAD 2.38 (Ověření adekvátnosti modelu). Ověření adekvátnosti modelu je důležitá součást analýzy. Měla by být provedena dříve, než budeme interpretovat parametry modelu nebo přijímat nějaké závěry založené na modelu.

Všechny výsledky týkající se β_0, β_1 byly odvozeny za předpokladu **linearity modelu** a některé za předpokladu **normality chyb**.

Bylo by tedy dobré mít testy ověřující linearitu.

Základní procedury jsou následující:

2 Jednorozměrná lineární regrese



Obrázek 2.1: Scatter plot naměřených dat.

- 1) Prozkoumání **scatter plotu** dvojic (x_i, y_i) . Příklad lze vidět na obrázku 2.1. Takový scatter plot může indikovat, že lepší model bude

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + e_i.$$

Scatter plot ale může být zavádějící, pokud je odklon od linearity způsoben spíše chybějící proměnnou než polynomální závislostí na x .

2) **Analýza hodnot testovacích statistik.**

- Např. malá hodnota R^2 společně s významem hodnot??? t -statistiky pro parametry β_1 obecně naznačuje, že skutečný model obsahuje i jiné proměnné x ,
- velká hodnota R^2 a významná t -statistika ale samo o sobě neznamená, že je model lineární.

- 3) **Obrázky reziduí.** Je to efektivní diagnostický nástroj. Rezidua odhadují, kolik variability v datech zůstne po odstranění lineární části v x . Dá se také očekávat, že jejich hodnoty budou užitečné pro detekci odchylek od normality.

PŘÍKLAD 2.39. Analýza scatter plotů a obrázků reziduí je dost subjektivní. Bylo by dobré mít nějaký objektivní analytický nástroj pro ověření linearity modelu. Bohužel nejsou k dispozici skoro žádné takové nástroje. Pro většinu dat jsou v praxi nejvíce využívány metody 1) - 3).

Jinak je tomu u navržených experimentů typu industriálních nebo klinických studií, kde existuje doporučený analytický test, tzv. *lack of fit* test (LOFT). Ten předpokládá, že máme více pozorování pro jednu x_i .

Ad 3 - Analýza reziduí

Intuitivně, pokud je náš model správný, měla by se rezidua chovat jako náhodný výběr z $N(0, \sigma^2)$. Pokud se bude zdát, že se tak nechovají, bude to znamenat neadekvátnost modelu. Později ukážeme grafický nástroj. Nejprve ale začneme vlastnostmi reziduí.

Věta 2.40. Nechť \hat{e}_i jsou rezidua modelu (*) odhadnutého metodou nejmenších čtverců. Potom platí:

1. $\mathbb{E}\hat{e}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$
2. $D\hat{e}_i = \sigma^2 = \sigma^2 \left[1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right) \right] \approx \sigma^2 \text{ pro velká } n$

2 Jednorozměrná lineární regrese

$$3. \text{ } \text{Cov}(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = -\sigma^2 \left[1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}-x_i)(\bar{x}-x_j)}{S_{xx}} \right) \right]$$

$$4. \text{ } \text{Cov}(\hat{e}_i, \hat{Y}_i) = 0 = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

5. Pokud jsou e_1, \dots, e_n iid $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, potom platí:

$$\hat{Z}_i = \frac{\hat{e}_i}{\sigma_{\hat{e}_i}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Důkaz. 1. $\hat{e}_i = Y_i - \hat{Y}_i$, takže $\mathbb{E}(\hat{e}_i) = \mathbb{E}Y_i - \mathbb{E}\hat{Y}_i$, ale $\mathbb{E}\hat{Y}_i = \mathbb{E}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i = \mathbb{E}Y_i$

2.

$$\text{D}\hat{e}_i = \text{D}(Y_i - \hat{Y}_i) = \text{D}Y_i + \underbrace{\text{D}\hat{Y}_i}_{\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]} - 2 \underbrace{\text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_i)}_{\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]} = \sigma^2 \left[1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right) \right]$$

3.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{e}_i, \hat{e}_j) &= \text{Cov}(Y_i - \hat{Y}_i, Y_j - \hat{Y}_j) = \underbrace{\text{Cov}(Y_i, Y_j)}_{=0} - \text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_j) - \text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_j) + \text{Cov}(\hat{Y}_i, \hat{Y}_j) \\ \text{Cov}(\hat{Y}_i, \hat{Y}_j) &= \text{Cov}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i, \hat{\beta}_0 + x_j \hat{\beta}_1) = \underbrace{\text{D}(\hat{\beta}_0)}_{\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right]} + (x_i + x_j) \underbrace{\text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}_{-\frac{\sigma^2 \bar{x}}{S_{xx}}} + x_i x_j \underbrace{\text{D}(\hat{\beta}_1)}_{\frac{\sigma^2}{S_{xx}}} = \\ &= \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} - \frac{(x_i + x_j)\bar{x}}{S_{xx}} + \frac{x_i x_j}{S_{xx}} \right] = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{S_{xx}} \right] \end{aligned}$$

Podobně bychom dostali

$$\text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_j) + \text{Cov}(\hat{Y}_i, Y_j) = 2\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{S_{xx}} \right]$$

$$\text{takže } \text{Cov}(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = -\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{S_{xx}} \right].$$

4.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{e}_i, \hat{Y}_i) &= \text{Cov}(Y_i - \hat{Y}_i, \hat{Y}_i) = \underbrace{\text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_i)}_{=\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]} - \underbrace{\text{D}(\hat{Y}_i)}_{=\text{Cov}(\hat{Y}_i, \hat{Y}_i) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]} = 0 \end{aligned}$$

5. $e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \implies \hat{e}_i \sim \mathcal{N}(\cdot, \cdot)$, protože \hat{e}_i je LK Y_1, \dots, Y_n

- 1) $\implies \mathbb{E}\hat{e}_i = 0$
- 2) $\implies \text{D}\hat{e}_i = \sigma_{\hat{e}_i}^2$
 $\implies \frac{\hat{e}_i}{\sigma_{\hat{e}_i}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

□

2 Jednorozměrná lineární regrese

POZNÁMKA 2.41. Z bodu 3) věty plyne, že $\text{Cov}(\hat{e}_i, \hat{e}_j) \approx 0$ pro velké n . Pokud jsou testy e_i iid $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, měla by se standardizovaná rezidua $\hat{Z}_i = \frac{\hat{e}_i}{\sigma_{\hat{e}_i}}$ chovat pro velké n jako náhodný výběr z $\mathcal{N}(0, 1)$ rozdělení. V praxi ale budeme potřebovat odhad σ^2 pro výpočet \hat{Z}_i .

Nejznámější procedura: odhadnout σ^2 pomocí s_n^2 , potom

$$\hat{z}_i = \frac{\hat{e}_i}{s_n \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}} \quad \text{standardizovaná rezidua}$$

by se opět pro velká n měla chovat jako NV z $\mathcal{N}(0, 1)$.

POZNÁMKA 2.42. \hat{e}_i se užívají pro grafickou analýzu.

Jiná třída reziduí – PRESS rezidua (? metody zkoumání reziduí):

ozn. $\hat{\beta}_{0(-i)}, \hat{\beta}_{1(-i)}$ odhad parametrů β_0, β_1 , pokud je vynecháno i-té pozorování. Pak i-té PRESS reziduum je definováno jako

$$\hat{e}_{(-i)} = \hat{Y}_i - \hat{Y}_{(-i)}, \quad \text{kde } \hat{Y}_{(-i)} = \hat{\beta}_{0(-i)} + x_i \hat{\beta}_{1(-i)}.$$

Podrobněji se jim budeme věnovat později.

2.6 Grafy reziduí

- Histogram reziduí (náhled normality reziduí).
- Kvantilový graf (QQ plot) standardizovaných reziduí – seřadíme dle velikosti: $\hat{r}_{(1)} \leq \hat{r}_{(2)} \leq \dots \leq \hat{r}_n$ a vyneseme oproti $\Phi^{-1}\left((i - \frac{1}{2})\frac{1}{n}\right)$, $i = 1, \dots, n$. Body by měly ležet přibližně na přímce $(\mathbb{E}(e_i) \approx \Phi^{-1}\left((i - \frac{1}{2})\frac{1}{n}\right)$ pro normální chyby).
- Použití: ověření normality, detekce odlehlých pozorování (obr. 3.6 str. 1077 GLM).
- Standardizovaná rezidua \times jednotlivým vysvětlujícím proměnným $x - \hat{r}_i$ nezávisí na σ , graf $\hat{r}_i \times x_i$ lze použít pro detekci nelinearity nebo nekonstantního rozptylu.
- Standardizovaná rezidua $\hat{r}_i \times$ predikovaným hodnotám $\hat{y}_i - \text{Cov}(\hat{e}_i, \hat{Y}_i) = 0$, tedy $\hat{e}_i(\hat{r}_i)$ a \hat{Y}_i by měly být nekorelované, pokud platí model (*). Tzn. graf $\hat{r}_i \times \hat{y}_i$ by měl být náhodně rozptýlený kolem osy x , navíc \hat{r}_i by měla ležet v $(-3, 3)$ ($\hat{r}_i \approx \mathcal{N}(0, 1)$).

Obrázky....

- Standardizovaná rezidua \times pořadí pozorování – možná detekce řadové korelace mezi pozorováními.

Obrázek....

3 Vícerozměrná lineární regrese

Předpokládejme, že kromě y_i máme pro každé $i \in \hat{n}$ k dispozici také m nezávislých proměnných $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}$. Pak získáme model

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_{ij} + e_i, \quad i \in \hat{n},$$

kde e_1, \dots, e_n jsou **nezávislé (nekorelované)** chyby a $e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Na základě pozorování $(x_{i1}, \dots, x_{im}, y_i)$, $i \in \hat{n}$ chceme odhadnout parametr $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)^T$ (proložení dat $m+1$ dimenzionální nadrovinou). Předpokládejme, že $n > m+1$, tj. že máme více dat než parametrů. Maticově můžeme tento stav zapsat jako

$$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T, \quad \mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)^T, \quad \mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)^T.$$

Označme

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2m} \\ 1 & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

jako **matici modelu** (regresní matici, !!něco matrix, nepřečtu to???). Dostaneme tak model ve tvaru (důležitému)

$$\mathbf{Y}_{n \times 1} = \mathbf{X}_{n \times (m+1)} \boldsymbol{\beta}_{(m+1) \times 1} + \mathbf{e}_{bn \times 1}. \quad (3.1)$$

Nyní budeme předpokládat, že e_1, \dots, e_n jsou nezávislé a $e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, tzn. $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$ a $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 I_n)$.

Věrohodnostní funkce je potom ve tvaru

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = f_\pi(\mathbf{Y}) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \mu_i)^2} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_i)^2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^T(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}, \end{aligned}$$

kde $\mu_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_{ij}$ a $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$.

Pro pevné σ^2 je

$$\max_{\boldsymbol{\beta}} L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \Leftrightarrow \min_{\boldsymbol{\beta}} \underbrace{(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}_{g(\boldsymbol{\beta})}$$

je opět pomocí derivací, ukážeme algebraický přístup.

Věta 3.1. Uvažujme model 3.1 a nechť $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$. Potom $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ je MLE $\boldsymbol{\beta}$ právě tehdy, když $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ je řešením soustavy rovnic

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (\text{soustava normálních rovnic}).$$

3 Vícerozměrná lineární regrese

Je-li matice $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ singulární, má tato soustava jednoznačné řešení ve tvaru

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}.$$

Důkaz. \Leftarrow Ukážeme, že každé řešení $\hat{\beta}$ soustavy $\mathbf{X}^T \mathbf{X} \beta = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ minimalizuje $g(\beta)$ a pro každé β platí, že

$$g(\beta) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2 \underbrace{\mathbf{Y}^T \mathbf{X}\beta}_{\hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\beta} + \beta^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\beta = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\beta + \beta^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\beta$$

má platit i pro $\hat{\beta}$:

$$g(\hat{\beta}) = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\beta} + \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\beta}$$

a tedy

$$g(\beta) - g(\hat{\beta}) = \beta^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\beta - 2\hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\beta + \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\beta} = (\mathbf{X}\beta - \mathbf{X}\hat{\beta})^T (\mathbf{X}\beta - \mathbf{X}\hat{\beta}) = \quad (3.2)$$

$$= (\mathbf{X}(\beta - \hat{\beta}))^T (\mathbf{X}(\beta - \hat{\beta})) = \langle \mathbf{X}(\beta - \hat{\beta}), \mathbf{X}(\beta - \hat{\beta}) \rangle \geq 0, \quad \forall \beta, \quad (3.3)$$

tedy $\hat{\beta}$ minimalizuje $g(\beta)$ a je tedy MLE parametru β .

\Rightarrow Předpokládejme, že $\hat{\beta}_1$ minimalizuje $g(\beta)$ (je tedy MLE). To potom znamená, že $g(\hat{\beta}_1) \leq g(\beta)$, $\forall \beta$, speciálně $g(\hat{\beta}_1) \leq g(\hat{\beta})$, kde $\hat{\beta}$ je řešení soustavy $\mathbf{X}^T \mathbf{X}\beta = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$. Z rovnice 3.3 vyplývá, že $g(\hat{\beta}_1) \geq g(\hat{\beta})$. Celkem tedy $g(\hat{\beta}_1) = g(\hat{\beta})$. Dosazením do 3.3 dostaneme, že

$$0 = g(\hat{\beta}_1) - g(\hat{\beta}) = \langle \mathbf{X}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}), \mathbf{X}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}) \rangle$$

a tedy $\mathbf{X}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}) = \mathbf{0}$ Potom ale vynásobením \mathbf{X}^T zleva dostaneme, že

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\beta}_1 \underbrace{\mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\beta}}_{\mathbf{X}^T \mathbf{Y}} = 0 \Rightarrow \mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\beta}_1 = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

a $\hat{\beta}_1$ splňuje soustavu $\mathbf{X}^T \mathbf{X}\beta = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$.

Aby byl důkaz korektní, je třeba ukázat, že soustava $\mathbf{X}^T \mathbf{X}\beta = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ má vždy alespoň 1 řešení. Pokud existuje $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$, není co dokazovat, řešení máme přímo. Co když je ale $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ singulární?

□

Lemma 3.2. *Soustava lineárních rovnic $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ má řešení právě tehdy, když $\langle \mathbf{Y}, \mathbf{z} \rangle = 0$ pro všechna \mathbf{z} splňující $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}$.*

Věta 3.3. *Soustava normálních rovnic $\mathbf{X}^T \mathbf{X}\beta = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ má vždy alespoň jedno řešení.*

Důkaz. Musíme ukázat, že $\langle \mathbf{X}^T \mathbf{Y}, \mathbf{z} \rangle = 0$, $\forall \mathbf{z}$ splňující $\mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Potom $\mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{z} = \mathbf{0} \Rightarrow \langle \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{X}\mathbf{z}, \mathbf{X}\mathbf{z} \rangle = 0$ a tedy $\mathbf{X}\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Celkem tedy $\langle \mathbf{X}^T \mathbf{Y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X}\mathbf{z} \rangle = 0$. Obecně totiž platí, že $\langle \mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{A}^T \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$. □

3 Vícerozměrná lineární regrese

Poznámka 3.4. Z vět vyplývá, že MLE β může být nalezeno řešením $m + 1$ lineárních rovnic o $m + 1$ neznámých. Málokdy existuje analytické řešení, je třeba použít numerické metody. Matice $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ může být v praktických aplikacích špatně podmíněná, což ovlivňuje numerickou přesnost $\hat{\beta}$. Proto se často užívají metody jako Choleského rozklad, QR rozklad, singulární rozklad (SVD).

Odvodili jsme to pro normální chyby. Minimalizace $g(\beta)$ lze ale použít i pro jiné druhy chyb, potom se $\hat{\beta}$ nazývá **ordinary least squares estimate (OLS)** (obyčejné nejmenší čtverce). Asi nejužívanější metoda pro oblast β .

Jak poznat, že mají normální rovnice jednoznačné řešení bez nutnosti výpočtu $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$?

Věta 3.5. *Matrice $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ je nesingulární právě tehdy, když jsou sloupce matice \mathbf{X} LN.*

Důkaz. \Leftarrow Sporem. Nechť jsou sloupce \mathbf{X} LN a matice $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ singulární, tzn. $\exists c \neq 0$ tak, že $\mathbf{X}^T \mathbf{X} c = 0$. Potom

$$0 = \langle c, \mathbf{X}^T \mathbf{X} c \rangle = \langle \mathbf{X} c, \mathbf{X} c \rangle \Rightarrow \mathbf{X} c = 0, \quad \sum c_i \mathbf{X}_i^c = 0,$$

kde $c = (c_1, \dots, c_m)^T$ a \mathbf{X}_i^c je i -tý sloupec matice \mathbf{X} . Potom sloupce \mathbf{X} jsou LZ. Spor.

\Rightarrow Sporem. Předpokládejme, že $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ je regulární a sloupce \mathbf{X} LZ. Potom existuje $c \neq 0$ takové, že $\mathbf{X} c = 0$, $\mathbf{X}^T \mathbf{X} c = 0$. Z toho vyplývá, že $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ je singulární. Spor.

□

Poznámka 3.6. Pokud $\mathbf{X}_{nx(m-1)}$, $n > m + 1$, $h(\mathbf{X}) = m + 1$, $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_m)$. Potom existuje jednoznačné řešení normálních rovnic $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$.

Poznámka 3.7. Pokud jsou sloupce \mathbf{X} LZ, je $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ singulární, což je většinou detekováno numerickou metodou výpočtu $\hat{\beta}$.

Poznámka 3.8. • pokud jsou sloupce \mathbf{X} LZ, je $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ singulární, což je většinou detekováno numerickou metodou výpočtu $\hat{\beta}$

- horší situace je, pokud jsou sloupce \mathbf{X} "témař" LZ \rightarrow tzv. **multikolinearita** – způsobuje problémy při výpočtu $\hat{\beta}$, protože je $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ "témař" singulární, jak ji detekovat probereme na konci přednášky

3.1 Odhad parametrů

3.1.1 Odhad parametru σ^2

Pro normální chyby získáme MLE σ^2 derivací $\ln L(\beta, \sigma^2)$, z čehož plyne:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} SSE = \frac{1}{n} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\beta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

$$\text{kde } \hat{y}_i = (\mathbf{X} \hat{\beta})_i = \mathbf{x}_i^T \hat{\beta}, \quad i = 1, \dots, n$$

3 Vícerozměrná lineární regrese

a \mathbf{x}_i^T značí i-tý řádek matice \mathbf{X} . Protože se jedná o vychýlený odhad, používá se obecně odhad

$$s_n^2 = \frac{1}{n - (m + 1)} SSE = \frac{1}{n - m - 1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

a $s_n = \sqrt{s_n^2}$ jako odhad σ (už není nestranný).

Pro $e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ se také používají statistiky s_n^2, s_n .

Př. Ex. 5.13, str. 158 (nebo 138? jinak?)

Ex. 5.15, str. 203

3.1.2 Vlastnosti odhadů $\hat{\beta}, s_n^2$

Věta 3.9. Nechť $\hat{\beta}$ je OLS odhad parametru β v modelu (**), kde $h(\mathbf{X}) = m - 1$ a e_1, \dots, e_n nezávislé, $e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Potom platí:

1. $\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta$ (tj. $\hat{\beta}$ je nestranný)

2. $\text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$

3. $\mathbb{E}(s_n^2) = \sigma^2$

4. Pokud navíc $e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), i = 1, \dots, n$, potom $\hat{\beta} \sim \mathcal{N}_{m-1}(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1})$. Speciálne $\hat{\beta}_i \sim \mathcal{N}(\beta_i, \sigma^2 \nu_i)$, kde ν_i je i-tý diagonální prvek matice $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$.

Důkaz. 1.

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}) = m - 1 &\implies \hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \\ \mathbb{E}\hat{\beta} &= \mathbb{E}[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}] = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbb{E}\mathbf{Y} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \beta = \beta \end{aligned}$$

2. Značení: \mathbf{Y} velikosti $(n \times 1)$ nádoný vektor, $\text{Cov}(\mathbf{Y}) = \Sigma, \mathbb{A}_{m,n}$ matice, potom $\text{Cov}(\mathbb{A}\mathbf{X}) = \mathbb{A}\Sigma\mathbb{A}^T$.

Protože $\hat{\beta} = \mathbb{A}\mathbf{Y}$, kde $\mathbb{A} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$, $\hat{\beta}$ je LK Y_1, Y_m a $\text{Cov}(\mathbf{Y}) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$

$$\text{Cov}\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \sigma^2 \mathbf{I}_n \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}.$$

3. Nejdříve přepíšeme vektor reziduů $\hat{e} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$ a $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \mathbb{H}\mathbf{Y}$, kde $\mathbb{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ je tzv. **projekční maticí**. Pak $\hat{e} = \mathbf{Y} - \mathbb{H}\mathbf{Y} = (\mathbf{I}_n - \mathbb{H})\mathbf{Y}$.

Dále platí $(\mathbf{I}_n - \mathbb{H})\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X} = \mathbf{0}$, takže

$$\hat{e} = (\mathbf{I}_n - \mathbb{H})\mathbf{Y} = (\mathbf{I}_n - \mathbb{H})(\mathbf{Y}\beta + \mathbf{e}) = \underbrace{(\mathbf{I}_n - \mathbb{H})\mathbf{X}\beta}_{=0} + (\mathbf{I}_n - \mathbb{H})\mathbf{e} = (\mathbf{I}_n - \mathbb{H})\mathbf{e}$$

Zřejmě $\mathbb{H}^T = \mathbb{H}$ a $\mathbb{H}^2 = [\mathbf{X} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T] [\mathbf{X} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T] = \mathbf{X} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T = \mathbb{H}$ a $(\mathbf{I}_n - \mathbb{H})^2 = \mathbf{I}_n - \mathbb{H}$ (neboli \mathbb{H} je symetrická a idempotentní?).

$$SSE = (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})^T (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) = \hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}^T (\mathbf{I}_n - \mathbb{H})(\mathbf{I}_n - \mathbb{H})\mathbf{e} = \mathbf{e}^T (\mathbf{I}_n - \mathbb{H})\mathbf{e} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} e_i e_j,$$

3 Vícerozměrná lineární regrese

kde g_{ij} je (i,j) -prvek matice $(I_n - \mathbb{H})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(SSE) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} \underbrace{\mathbb{E}(e_i e_j)}_{\text{Cov}(e_i, e_j)} = [\text{nekorelované: } \mathbb{E}e_i = 0] = \sum_{i=1}^n g_{ii} \mathbb{D}e_i = \sigma^2 \sum_{i=1}^n g_{ii} \\ \sum_{i=1}^n g_{ii} &= \text{tr}(I_n - \mathbb{H}) = \text{tr}(I_n) - \text{tr}(\mathbb{H}) = n - \text{tr}(\mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) = \\ &= n - \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}) = n - \text{tr}(\mathbb{I}_{m+1}) = n - (m+1)\end{aligned}$$

Celkem pak dostáváme $\mathbb{E}s_n^2 = \frac{1}{n-(m+1)} \mathbb{E}(SSE) = \frac{1}{n-(m+1)} \sigma^2(n - (m+1)) = \sigma^2$.

4. $\hat{\beta}$ a $LK Y_1, \dots, Y_n$, nezávislé, normálně rozdelené $\rightarrow \hat{\beta} \sim \mathcal{N}_{m+1}(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1})$. \square

POZNÁMKA 3.10. Vlastnosti projekční matice:

- $\mathbb{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$, $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbb{H} \mathbf{Y}$, $\mathbb{H}^T = \mathbb{H}$, $(\mathbb{I}_n - \mathbb{H})^T = (\mathbb{I}_n - \mathbb{H})$ – symetrie
- $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}$, $(\mathbb{I}_n - \mathbb{H})^2 = \mathbb{I}_n - \mathbb{H}$ – idempotentnost
- $\mathbb{H} \mathbf{X} = \mathbf{X}$, $\text{tr}(\mathbb{H}) = \sum_{i=1}^n h_{ii} = m+1$
- $\mathbb{H}(\mathbb{I}_n - \mathbb{H}) = (\mathbb{I}_n - \mathbb{H})\mathbb{H} = \mathbf{0}$.

Věta 3.11. Nechť $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{e}$ je LM (**), kde $h(\mathbf{X}) = m+1$ a $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbb{I}_n)$. Potom

1. $\hat{\beta}$ a s_n^2 jsou nezávislé náhodné veličiny,
2. $(n-m-1) \frac{s_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-m-1)$.
3. Jestliže $v_i = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{ii}^{-1}$, potom $T_i = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s_n \sqrt{v_i}} \sim t(n-m-1)$.
4. Nechť $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^{r,m+1}$ takové, že $h(\mathbf{e}) = r$. Potom kvadratická forma

$$\frac{q}{\sigma^2} = \frac{(\hat{\beta} - \beta)^T \mathbb{C}^T [C(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbb{C}^T]^{-1} \mathbb{C}(\hat{\beta} - \beta)}{\sigma^2} \sim \chi^2(r).$$

Důkaz. 1. $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{X}\beta + \mathbf{e}) = \beta + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{e}$
a tedy $\hat{\beta} - \beta = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{e}$
dále víme, že $\hat{\mathbf{e}} = (I_n - \mathbb{H})\mathbf{e}$ a vektor $(\hat{\beta} - \beta, \hat{\mathbf{e}})^T$ lze zapsat jako

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \hat{\beta} - \beta \\ \hat{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \\ I_n - \mathbb{H} \end{pmatrix} \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \mathbf{e},$$

kde \mathbf{Z} je funkcií pouze $(e_1, \dots, e_n) = \mathbf{e} \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2 I_n) \Rightarrow \mathbf{Z}$ má vícerozměrné normální rozdělení (i když degenerované, protože $\text{Cov}(\mathbf{Z})$ je singulární) abychom ukázali, že $\hat{\beta}$ a $\hat{\mathbf{e}}$ jsou nezávislé.

$(s_n^2 = \frac{1}{n-m-1} \hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}} \text{, tedy i } \hat{\beta} \text{ a } s_n^2 \text{ jsou nezávislé })$

3 Vícerozměrná lineární regrese

Poznámka 3.12. $\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{I}_n - \mathbf{H}$ je singulární, protože $(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{X} = 0$

Stačí nám tedy ukázat, že $\text{Cov}(\hat{\beta}_i, \hat{e}_j) = 0$ pro $i = 0, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$
spočtěme $\text{Cov}(\mathbf{Z})$:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\mathbf{Z}) &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \text{Cov}(\mathbf{e}) (\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T) = \sigma^2 \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T) = \sigma^2 \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{A}^T & \mathbf{A}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\mathbf{A}^T & \mathbf{B}\mathbf{B}^T \end{pmatrix} \\ &\left(\text{Cov}(\hat{\beta}_i, \hat{e}_j) \right)_{\substack{i=0, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = \mathbf{A}\mathbf{B}^T = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) = \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T - (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T = 0\end{aligned}$$

2. Výsledky z LA:

- $\mathbf{A}_{n \times n}$ symetrická matice \Rightarrow existuje ortogonální matice \mathbf{Q} a diagonální matice Λ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T$, sloupce \mathbf{Q} jsou ON vlastní vektory matice \mathbf{A} a diagonální prvky matice Λ jsou ??? odpovídající vlastní čísla.
- $\mathbf{A}_{n \times n}$ idempotentní matice \Rightarrow vlastní čísla jsou pouze 0 nebo 1 $\Rightarrow h(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$

V důkazu předchozí věty $(n-m-1)\frac{s_n^2}{\sigma^2} = \frac{\text{SSE}}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{e}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{e}$
protože je $\mathbf{I}_n - \mathbf{H}$ symetrické a idempotentní

$$\mathbf{I}_n - \mathbf{H} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T \quad \text{kde} \quad \begin{array}{l} \mathbf{Q} \dots \text{ortogonální matice} \\ \Lambda \dots \text{diagonální matice s vlastními čísly } \mathbf{I}_n - \mathbf{H} \end{array}$$

protože vlastní čísla $\mathbf{I}_n - \mathbf{H}$ jsou 0 nebo 1 a $\text{tr}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) = h(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) = n-m-1$
 Λ může být zapsána ve tvaru:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-m-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

takže

$$\mathbf{e}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \Lambda \mathbf{Q}^T \mathbf{e} = \mathbf{q}^T \Lambda \mathbf{q} \quad \text{kde} \quad \mathbf{q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{e}$$

Věta 3.13. $\mathbf{V} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ a \mathbf{Q} je ortogonální matice, potom $\mathbf{Q}\mathbf{V} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$.

Tzn. \mathbf{q} je vektor nezávislých $N(0, \sigma^2)$ veličin ($\mathbf{q} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$) a

$$\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{e}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{e} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{q}^T \Lambda \mathbf{q} = \sum_{i=1}^{n-m-1} \frac{q_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-m-1)$$

je suma druhých mocnin $n-m-1$ nezávislých $N(0, 1)$ veličin.

3. Z předchozí věty:

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma \sqrt{v_i}} \sim N(0, 1) \quad \text{a} \quad \frac{s_n}{\sigma} = \sqrt{\frac{(n-m-1)s_n^2}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{\chi^2(n-m-1)}{n-m-1}}$$

3 Vícerozměrná lineární regrese

a z bodu 1) nezávislost

$$T_i = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\frac{s_n \sqrt{v_i}}{\sigma}} = \frac{\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma \sqrt{v_i}}}{\frac{s_n}{\sigma}} \sim t(n-m-1)$$

4. $\mathbf{C}\hat{\beta} \sim \mathbf{N}_r(\mathbf{C}\beta, \sigma^2 \mathbf{C}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{C}^T)$ a tedy

$$\mathbf{C}(\hat{\beta} - \beta) = \mathbf{C}\hat{\beta} - \mathbf{C}\beta \sim \mathbf{N}_r(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{C}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{C}^T).$$

Stačí tedy ukázat, že pokud $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}_r(\mathbf{0}, \Sigma)$, potom $\mathbf{Z}^T \Sigma \mathbf{Z} \sim \chi^2(r)$.

Protože Σ je pozitivně definitní, existuje regulární matice \mathbf{R} taková, že $\Sigma = \mathbf{R}\mathbf{R}^T$. Protože $\mathbf{U} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}$, potom $\mathbb{E}\mathbf{U} = \mathbf{R}^{-1}\mathbb{E}[\mathbf{Z}] = \mathbf{0}$.

Dále $\text{Cov}(\mathbf{U}) = \mathbf{R}^{-1}\Sigma(\mathbf{R}^{-1})^T = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{R}^T(\mathbf{R}^T)^{-1} = \mathbf{I}_r$ tedy $\mathbf{U} \sim \mathbf{N}_r(\mathbf{0}, \mathbf{I}_r)$, takže složky \mathbf{U} jsou nezávislé $\mathcal{N}(0, 1)$ rozdělené náhodné veličiny. Pak

$$\mathbf{R}^T \Sigma^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T (\mathbf{R}^T)^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \sum_i^r U_i^2 \sim \chi^2(r)$$

za $\mathbf{R} = \mathbf{C}(\hat{\beta} - \beta)$ a $\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} [\mathbf{C}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{C}^T]^{-1}$.

□

3.1.3 Vlastnosti vektoru reziduí $\hat{\mathbf{e}}$

Věta 3.14. Uvažujeme model $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{e}$, kde e_1, \dots, e_n jsou nekorelované a $e_i \sim (0, \sigma^2)$. Nechť $\hat{\beta}$ je OLS β a $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$ je vektor reziduí. Potom platí:

1. $\mathbb{E}[\hat{\mathbf{e}}] = \mathbf{0}$
2. $\text{Cov}(\hat{\mathbf{e}}) = \sigma^2(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})$
3. pokud navíc $\mathbf{e} \sim \mathbf{N}_n(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$, potom $\hat{\mathbf{e}} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}))$
4. jestliže má model intercept, tj. $\beta_0 \neq 0$, potom $\sum_{i=1}^n \hat{e}_i = 0$
5. $\sum_{i=1}^n \hat{e}_i \hat{y}_i = 0$

Důkaz. Ukázali jsme, že $\hat{\mathbf{e}} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{e}$

1. $\mathbb{E}[\hat{\mathbf{e}}] = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \cdot \mathbb{E}[\mathbf{e}] = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
2. $\text{Cov}(\hat{\mathbf{e}}) = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\text{Cov}(\mathbf{e})(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})^T = \sigma^2(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})$
3. $\hat{\mathbf{e}}$ je LK složek $\mathbf{e} \Rightarrow \hat{\mathbf{e}} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}))$

3 Vícerozměrná lineární regrese

4. Soustava normálních rovnic $\mathbf{X}^T \mathbf{X} \beta = \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ lze zapsat $\mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{X} \beta) = 0$

První rovnice:

$$\sum_{i=1}^n x_{i1} \cdot (y_i - \mathbf{x}_i^T \beta) = 0$$

pro $\hat{\beta}$ tedy platí

$$0 = \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\beta}) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i$$

5. Z předchozího bodu platí pro OLS $\hat{\beta}$

$$\mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\beta}) = 0 \quad \text{přenásobením zleva } \hat{\beta}^T$$

$$0 = \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\beta}) = \hat{y}^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \hat{\mathbf{y}}^T \hat{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \hat{e}_i$$

□

Použitím bodů 4. a 5. dostaneme (stejně jako u jednorozměrné regrese)

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

tedy

$$\text{SST} = \text{SSR} + \text{SSE}$$

3.2 Gauss - Markov theorem

e_i i.i.d. $N(0, \sigma^2) \Rightarrow$ OLS $\hat{\beta}$ je MLE, tzn. je eficientní MVVE parametr β

Chybějí nenormální:

- ukážeme, že OLS $\hat{\beta}$ je BLUE (best linear unbiased estimation) parametru β (za jistých podmínek)
- mohou ale existovat lepší lineární vychýlené odhadování nebo nelineární odhadování.

Definice 3.15. Nechť β je vektor regresních parametrů v lineárním modelu (LM). Řekněme, že $\hat{\beta}$ je lineární odhad β , jestliže každý β_i je LK pozorování Y_i , $i = 1, \dots, n$, tedy

$$\hat{\beta}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} Y_j \quad i = 0, \dots, m$$

V maticovém zápisu

$$\beta = \mathbf{A} \mathbf{Y} \quad \text{kde} \quad \mathbf{A} = (a_{ij})$$

pro $i = 0, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$

Poznámka 3.16. Pokud v modelu $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{e}$ platí $h(\mathbf{X}) = m+1$, potom OLS $\hat{\beta}$ je lineární, neboť $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$, kde $\mathbf{A} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$

3 Vícerozměrná lineární regrese

Věta 3.17 (Gauss-Markov). *Uvažujeme model $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{e}$, kde matice \mathbf{X} má plnou hodnost, $e_i, i = 1, \dots, n$ jsou nekorelované a $e_i \sim (0, \sigma^2)$. Potom OLS odhad $\hat{\beta}$ je BLUE parametru β (best linear unbiased estimation)*

Důkaz. Nechť $\hat{\beta} = \mathbf{AY}$ je lineární odhad β . Aby byl nestranný musí platit $\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \beta$, tzn.

$$\mathbb{E}[\mathbf{AY}] = \mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{Y}] = \mathbf{AX}\beta = \beta,$$

tedy $(\mathbf{AX} - \mathbf{I}_{m+1})\beta = 0$. Protože to musí platit $\forall \beta \in \mathbb{R}^{m+1}$, dostáváme $\mathbf{AX} - \mathbf{I}_{m+1} = 0$, nebo ekvivalentně $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_{m+1}$.

Spočteme kovarianční matici $\hat{\beta}$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}) = \text{Cov}(\mathbf{AY}) = \mathbf{ACov}[\mathbf{Y}]\mathbf{A}^T = \sigma^2 \mathbf{AA}^T = \sigma^2 \mathbf{I}_n.$$

Zapišme \mathbf{A} ve tvaru $\mathbf{A} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{D}$, kde \mathbf{D} je rozdíl mezi \mathbf{A} a maticí pro OLS odhad. Pokud ukážeme, že pro nestranný lineární odhad $\hat{\beta} = \mathbf{AY}$, který minimalizuje rozptyl, musí platit $\mathbf{D} = 0$, bude věta dokázána.

Dosazením dostaneme:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\beta}) &= \sigma^2((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{D})((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{D}) = \\ &= \sigma^2 [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + \mathbf{DX}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{D}^T + \mathbf{DD}^T] \end{aligned}$$

a z podmínek nerovnosti

$$\mathbf{AX} = [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{D}]\mathbf{X} = \mathbf{I}_{m+1} + \mathbf{DX} = \mathbf{I}_{m+1} \Rightarrow \mathbf{DX} = 0 \text{ a tedy i } \mathbf{D}^T \mathbf{X}^T = \mathbf{0}.$$

Tzn.

$$\text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + \mathbf{DD}^T]$$

a pro diagonální prvky platí

$$\text{D}[\hat{\beta}_i] = \sigma^2 [v_i + \sum_{j=1}^n d_{ij}^2] \quad i = 0, \dots, m.$$

Protože $v_i \geq 0$ a $\sum_{j=1}^n d_{ij}^2 \geq 0 \Rightarrow \text{D}[\hat{\beta}_i]$ je minimalizován volbou $\sum_{j=1}^n d_{ij}^2 = 0$, tj. $d_{ij} = 0 \quad j = 1, \dots, n$ platí $\forall i = 0, \dots, m \Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0}$ tzn. lineárně nestranný odhad $\hat{\beta}$, který minimalizuje $\text{D}[\hat{\beta}_i]$, $i = 0, \dots, m$ je $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$. \square

3.3 Testování modelu - tabulka ANOVA

3.3.1 Celkový F-test (overall F-test)

- Zajímá nás, zda je model statisticky signifikantní, tj. zda alespoň jeden z koeficientů β_1, \dots, β_m je nulový.
- Mohli bychom testovat jednotlivé koeficienty $H_0 : \beta_j = 0$ pomocí alternativy t-testu.
- Celková chyba I. druhu by takto ale mohla být velká, pokud máme hodně proměnných. Museli bychom hodně snížit α pro jednotlivé testy, což zvýší pravděpodobnost chyby II. druhu (tzn. riziko akceptování nenulových koeficientů jako nulových a tedy vynechání významných proměnných z modelu)

3 Vícerozměrná lineární regrese

- Navíc je zde problém multikolinearity (viz později) jejíž jedním efektem jsou velké stand. chyby dohadů. To může vést k akceptování všech koeficientů jeho 0, i když je model celkově významný (uvidíme na příkladu).

Bylo by dobré mít jednu statistiku pro test

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0 \quad \times \quad H_1 : (\exists i \in \hat{m}, \beta_i \neq 0).$$

ANOVA přístup pro jedn. regresi naznačuje, že statistika

$$F = \frac{\frac{SSR}{m}}{s_m^2}$$

by mohla být užitečná (vyplýne i z obecnějších přístupů k testování později).

Označení:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} - \text{průměr } j\text{-tého sloupce matice } \mathbf{X},$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_0 & \bar{x}_1 & \cdots & \bar{x}_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{x}_0 & \bar{x}_1 & \cdots & \bar{x}_m \end{pmatrix}_{n \times m+1} \quad \underbrace{(\mathbf{X}_c)_{ij}}_{\text{centrované matice regresorů}} = x_{ij} - \bar{x}_j, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

Věta 3.18. V modelu $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$, kde e_i jsou nekorelované a $e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ pro $i = 1, \dots, n$ platí

$$\mathbb{E} \left[\frac{SSR}{n} \right] = \sigma^2 + \frac{\boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) \boldsymbol{\beta}}{m} = \sigma^2 + \frac{\boldsymbol{\beta}_s^T \mathbf{X}_c^T \mathbf{X}_c \boldsymbol{\beta}_s}{m},$$

kde $\boldsymbol{\beta}_s = (\beta_1, \dots, \beta_m)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \hat{y}_i &= \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^m x_{ij} \hat{\beta}_j \\ \frac{\partial SSE}{\partial \beta_0} &= \sum_{i=1}^n \left(y_i - (\beta_0 + \sum_{j=1}^m x_{ij} \hat{\beta}_j) \right) = 0 \implies \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \sum_{j=1}^m \bar{x}_j \hat{\beta}_j \end{aligned}$$

Celkem pak $\hat{y}_i - \bar{x} = \sum_{j=1}^m (x_{ij} - \bar{x}_j) \hat{\beta}_j$, $i = 1, \dots, n$ a zapsáno maticově:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{Y}} = (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) \hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad \text{kde } \bar{\mathbf{Y}} = (\bar{y}, \bar{y}, \dots, \bar{y})_{1 \times n}^T,$$

protože první sloupec matice $\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}$ je nulový. Potom

$$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = (\hat{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{Y}})^T (\hat{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{Y}}) = \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \underbrace{(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})}_{\mathbb{A}} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbb{A} \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

□

3 Vícerozměrná lineární regrese

Věta 3.19. Nechť $Z = \mathbf{Y}^T \mathbb{A} \mathbf{Y}$ je kvadratická forma a nechť $\mathbb{E} \mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu}$ a $\text{Cov } \mathbf{Y} = \Sigma$. Potom platí:

$$\mathbb{E} Z = \text{tr}(\mathbb{A} \Sigma) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbb{A} \boldsymbol{\mu}.$$

Důkaz. Nejdříve zjednodušíme matici \mathbb{A} :

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{X}} &= \frac{1}{n} \mathbb{B}, \text{ kde } \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a tedy} \\ \mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}} &= \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) \mathbf{X} \quad \text{a} \quad (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}})^T = \mathbf{X}^T \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) \\ \mathbb{A} &= (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}})^T (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}) = \mathbf{X}^T \underbrace{\left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right)^2}_{\mathbb{I}_n - \frac{2}{n} \mathbb{B} + \frac{\mathbb{B}^2}{n^2}} \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) \mathbf{X}\end{aligned}$$

Dále rozepíšeme $\underbrace{\mathbb{A} \Sigma}_{=\mathbb{A} \text{Cov} \hat{\boldsymbol{\beta}}} = \sigma^2 \mathbf{X}^T \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ a spočítáme $\text{tr}(\mathbb{A} \Sigma)$:

$$\begin{aligned}\text{tr}(\mathbb{A} \Sigma) &= \sigma^2 \text{tr} \left[\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) \right] = \sigma^2 \text{tr} \left[\mathbb{H} - \frac{1}{n} \mathbb{H} \mathbb{B} \right] = \\ &= \sigma^2 \left[\text{tr} \mathbb{H} - \frac{1}{n} \text{tr}(\mathbb{H} \mathbb{B}) \right] = \sigma^2 \left[\underbrace{\text{tr} \mathbb{H}}_{=m+1} \frac{1}{n} \underbrace{\text{tr} \mathbb{B}}_{=n} \right] = \sigma^2 m,\end{aligned}$$

jelikož víme, že $\mathbb{H} \mathbf{X} = \mathbf{X}$ a $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ je první sloupec \mathbf{X} , takže $\mathbb{H} \mathbf{1} = \mathbf{1}$ a tedy $\mathbb{H} \mathbb{B} = \mathbb{B}$. Celkem tak dostáváme

$$\mathbb{E} \left(\frac{SSR}{m} \right) = \frac{1}{m} (\sigma^2 m + \boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}})^T (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}) \boldsymbol{\beta}) = \sigma^2 + \frac{1}{m} \boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}})^T (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}) \boldsymbol{\beta}$$

Navíc platí $(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}) \boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}_c \boldsymbol{\beta}_s$, protože první sloupec matice $\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}$ je nulový vektor. \square

Poznámka 3.20. Pokud $\boldsymbol{\beta}_s = 0$, potom $\mathbb{E} \left(\frac{SSR}{m} \right) = \sigma^2 = \mathbb{E} s_n^2$, takže $\boldsymbol{\beta}_s \neq 0$ implikuje, že $\mathbb{E} \left(\frac{SSR}{m} \right) > \sigma^2$, tedy velké hodnoty $F = \frac{SSR/m}{s_n^2}$ budou znamenat zamítnutí $H_0 : \boldsymbol{\beta}_s = 0$. Budeme proto potřebovat rozdělení F za platnosti H_0 .

Věta 3.21. Nechť v modelu $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$ (***) jsou e_1, \dots, e_n iid $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Pokud $\boldsymbol{\beta}_s = 0$, tj. $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$, potom

$$F \sim F(m, n - m - 1).$$

Důkaz. V důkazu minulé věty jsme ukázali

$$SSR = \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\mathbf{Y}}^T \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) \hat{\mathbf{Y}}$$

a potřebujeme rozepsat $\hat{\mathbf{Y}}$:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbb{H} \mathbf{Y} = \mathbb{H}(\mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}) = \mathbb{H}(\mathbf{1} \beta_0 + \mathbf{X}_v \boldsymbol{\beta}_s) + \mathbf{e} = \beta_0 \underbrace{\mathbb{H} \mathbf{1}}_{=1} + \mathbb{H} \mathbf{X}_v \underbrace{\boldsymbol{\beta}_s}_{=0} + \mathbb{H} \mathbf{e} = \beta_0 \mathbf{1} + \mathbb{H} \mathbf{e}$$

3 Vícerozměrná lineární regrese

$$SSR = (\beta_0 \mathbf{1}^T + \mathbf{e}^T \mathbb{H}) \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) (\beta_0 \mathbf{1} + \mathbb{H} \mathbf{e}) = \mathbf{e}^T \mathbb{H} \underbrace{\left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right)}_{\text{ozn. } \mathbb{C}} \mathbb{H} \mathbf{e},$$

protože $(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B}) \mathbf{1} = 0$ a $(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B})$ je symetrická.

Dále platí $\mathbb{H} = \mathbb{H}^T$, $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}$ a $\mathbb{H}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{H} = \mathbb{B}$ (protože $\mathbb{H}\mathbf{1} = \mathbf{1}$) a celkem tedy dostáváme

$$SSR = \mathbf{e}^T \underbrace{\left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right)}_{\text{ozn. } \mathbb{C}} \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \mathbb{C} \mathbf{e}.$$

Pro matici \mathbb{C} platí

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^T &= \left(\mathbb{I}_n^T - \frac{1}{n} \mathbb{B}^T \right) = \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) = \mathbb{C} \\ \mathbb{C}^2 &= \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) = \mathbb{H}^2 - \frac{1}{n} \mathbb{H}\mathbb{B} - \frac{1}{n} \mathbb{B}\mathbb{H} + \frac{1}{n^2} \mathbb{B}^2 = \mathbb{H} - \frac{2}{n} \mathbb{B} + \frac{1}{n} \mathbb{B} = \mathbb{H} - \frac{1}{n} \mathbb{B} = \mathbb{C}, \end{aligned}$$

tedy \mathbb{C} je symetrická a idempotentní, a proto

$$h(\mathbb{C}) = \text{tr}(\mathbb{C}) = \text{tr} \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) = m + 1 - 1 = m.$$

Z věty o spektrálním rozkladu plyne existence Q OG a ?? Λ tak, že

$$\mathbb{C} = \mathbf{Q}^T \Lambda \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{Q},$$

která má vlastní čísla 0 a 1, protože se jedná o idempotentní matici. Dále potom

$$SSR = \mathbf{e}^T \mathbf{Q}^T \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \underbrace{\mathbf{Q}\mathbf{e}}_{\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_m)} = \mathbf{Z}^T \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^n Z_i^2,$$

kde $Z_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ jsou nezávislé. Z toho vyplývá, že

$$\frac{Z_i}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{a} \quad \frac{SSR}{\sigma^2} \sim \chi^2(m).$$

To znamená, že

$$\frac{\frac{SSR}{\sigma^2 m}}{\frac{(n-m-1)s_n^2}{\sigma^2} \frac{1}{n-m-1}} = \frac{\frac{SSR}{\sigma^2 m}}{s_m^2} = F \sim F(m, n-m-1),$$

pokud ukážeme, že SSR a s_n^2 jsou nezávislé. K tomu ale stačí dokázat, že SSR je nezávislé na reziduích \hat{e}_i , $i \in \hat{n}$.

$$SSR = \mathbf{e}^T \mathbf{H} \left(I_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) \mathbf{H} \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \mathbf{H} \underbrace{\left(I_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) \left(I_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right)}_{= I_n - \frac{1}{n} \mathbb{B}} \mathbf{H} \mathbf{e} = \frac{T}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}},$$

kde $\mathbf{w} = \left(I_n - \frac{1}{n} \mathbb{B} \right) \mathbf{H} \mathbf{e} \equiv \mathbf{K} \mathbf{e}$, $\hat{\mathbf{e}} = (I_n - \mathbf{H}) \mathbf{e} \equiv \mathbf{L} \mathbf{e}$. Stačí tedy ukázat, že \mathbf{w} a $\hat{\mathbf{e}}$ jsou nezávislé vektory. Víme, že

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \hat{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{L} \end{pmatrix} \mathbf{e},$$

3 Vícerozměrná lineární regrese

tzn. má vícerozměrné normální rozdělení. Pokud je výraz \mathbf{KL}^T z rovnice 3.4 roven nule, pak jsou \mathbf{w} a $\hat{\mathbf{e}}$ nezávislé.

$$\text{Cov} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \hat{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{L} \end{pmatrix} \text{Cov } \mathbf{e}(\mathbf{K}^T, \mathbf{L}^T) = \sim^2 \begin{pmatrix} \mathbf{K}\mathbf{K}^T & \mathbf{K}\mathbf{L}^T \\ \mathbf{L}\mathbf{K}^T & \mathbf{L}\mathbf{L}^T \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Pro \mathbf{KL}^T platí, že

$$\mathbf{KL}^T = \left(I_n - \frac{1}{n} \mathbf{B} \right) \underbrace{\mathbf{H}(I_n - \mathbf{H})}_{\mathbf{H}-\mathbf{H}^2=\mathbf{0}} = 0.$$

□

TEST: H_0 zamítáme, pokud $F > F_{1-\alpha}(m, n-m-1)$.

POZNÁMKA 3.22. Odvozeno pro $e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, obecně se používá, i když to nevíme, pro velké n může být často zdůvodněno pomocí CLV.

Tabulka ANOVA

Source	df	SS	MS	F
Regression	m	SSR	$\text{MSR} = \frac{\text{SSR}}{m}$	$\frac{\text{MSR}}{\text{MSE}}$
Residual	$n - (m + 1)$	SSE	$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n-m-1} = s_n^2$	
Total	$n - 1$	SST		
		\mathcal{R}^2	$\bar{\mathcal{R}}^2$	

Koefficient (vícenásobné) determinace \mathcal{R}^2

Podobně jako u jednorozměrné regrese, lze F-test chápat jako test významnosti \mathcal{R}^2 , definovaného jako

$$\mathcal{R}^2 \equiv \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}},$$

protože

$$F = \frac{\frac{\text{SSR}}{m}}{\frac{\text{SSE}}{n-m-1}} = \frac{n-m-1}{m} \left(\frac{\frac{\text{SSR}}{\text{SST}}}{\frac{\text{SSE}}{\text{SST}}} \right) = \frac{n-m-1}{m} \frac{\mathcal{R}^2}{1-\mathcal{R}^2},$$

což je rostoucí funkce \mathcal{R}^2 (opět $\mathcal{R}^2 \in [0, 1]$).

POZNÁMKA 3.23. \mathcal{R}^2 je možno zvětšovat přidáváním nových proměnných x , i když jsou statisticky nevýznamné. (Pro n LN proměnných x a n pozorování dostaneme "perfect fit", tedy přeúčtení.) Vysvětlení:

$$\mathcal{R}^2 = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}},$$

kde SST je pevně dáno daty y , ale SSE může být snížena přidáním proměnných x . Minimizujeme totiž $(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)$ přes větší množinu β . To znamená, že $\frac{\text{SSE}}{\text{SST}}$ je nerostoucí funkce počtu proměnných, a tedy \mathcal{R}^2 je neklesající funkce počtu proměnných. Z tohoto důvodu se někdy definuje **upravený koefficient determinace** (adjusted coefficient of determination)

$$\bar{\mathcal{R}}^2 = \mathcal{R}_{adj}^2 = 1 - \frac{\frac{\text{SSE}}{n-m-1}}{\frac{\text{SST}}{n-1}} = 1 - \frac{n-1}{n-m-1} \frac{\text{SSE}}{\text{SST}}.$$

(S rostoucím m klesá SSE, ale i $n - m - 1$.)

3.4 IS a t-testy pro parametry

- Pokud se model ukáže jako významný, bude nás zajímat, které koeficienty přispívají.
- Lze použít IS a TH stejně, jako u jednorozměrné regrese.
- Výsledky jsou odvozeny pro normální chyby.
- V praxi se používají i pro jiné typy chyb (za jistých předpokladů budou platit asymptoticky, lze je použít pro velká n).

Pro konstrukci použijeme dokázanou vlastnost

$$T_j = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s_n \sqrt{v_j}} \sim t(n - m - 1), \quad \text{kde} \quad v_j = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{jj}^{-1}.$$

Standardním postupem získáme $100(1 - \alpha)\%$. IS pro β_j ve tvaru

$$(\hat{\beta}_j - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n - m - 1)s_n \sqrt{v_j}, \hat{\beta}_j + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n - m - 1)s_n \sqrt{v_j})$$

s jejich pomocí lze odvodit kritický obor pro test

$$H_0 : \beta_j = b_j \text{ vs. } H_1 : \beta_j \neq b_j$$

ve tvaru

$$\frac{|\hat{\beta}_j - b_j|}{s_n \sqrt{v_j}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n - m - 1).$$

Pro $b_j = 0$ dostaneme test významnosti β_j , tzn. $H_0 : \beta_j = 0$ zamítneme, pokud

$$\frac{|\hat{\beta}_j|}{s_n \sqrt{v_j}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n - m - 1).$$

Poznámka 3.24. • Pokud nejsou porušeny předpoklady modelu nebo není přítomna kolinearita, lze zvážit odstranění všech nevýznamných proměnných (dle t-testu).

- V případě kolinearity, model může být významný (dle celkového F-testu), ale všechny nebo téměř všechny proměnné se mohou jevit jako nevýznamné (dle t-testů).
- Naopak, pokud má model velký počet možných proměnných, některé proměnné se mohou jevit významné, i když jsou náhodným šumem.
- Při použití t-testů je třeba být obezřetný.

Příklad 3.25. 5.26, str. 230 a 5.27, str. 231

Poznámka 3.26. Statistiky F , R^2 a t jsou užitečné pro rozkrytí efektů jednoduchých proměnných, nemohou být ale používány úplně automaticky.

3.5 Obecná lineární hypotéza

F-test a t-testy jsou speciálním případem **obecné lineární hypotézy**

$$H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b} \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times (m+1)}$ a $h(\mathbf{C}) = r$, tzn. $r \leq m + 1$. Rovnice $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}$ reprezentuje r lineárně nezávislých podmínek

$$\sum_{j=0}^m c_{ij}\beta_j = b_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Poznámka 3.27. a) Volba $\mathbf{b} = (0, \dots, 0)^T$ a $\mathbf{C} = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)_{m \times (m+1)}$ vede na test

$$H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0.$$

b) Volba $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{C} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ vede na test

$$H_0 : \beta_j = 0.$$

c) V modelu $Y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \beta_4x_4 + e$ chceme testovat zároveň, že $\beta_2 = 0$ a $\beta_3 = \beta_4$. To lze udělat volbou $\mathbf{C} = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$, $\mathbf{b} = (0, 0)^T$.

Pro test H_0 naladíme 2 modely:

plný model (full model) bez podmínek na $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$,

redukovaný model (reduced model) za předpokladu, že platí $H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}$.

Označme příslušné reziduální součty čtverců SSE_F a SSE_R (bude platit $SSE_F \leq SSE_R$).

- Pokud neplatí H_0 , dá se očekávat, že $\Delta SSE = SSE_R - SSE_F$ bude významně větší, než náhodná chyba σ^2 , H_0 tedy budeme zamítat, pokud $\frac{\Delta SSE}{s_n^2}$ bude velké.
- Zobecnění F-testu, tj. za platnosti H_0 ukázeme pro normální chyby vztah

$$F = \frac{\frac{\Delta SSE}{r}}{s_n^2} \sim F(r, n - m - 1).$$

Příklad 3.28. Uvažujme F-test pro $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$ v plném modelu. Redukovaný model bude $Y_i = \beta_0 + e_i$, $i = 1, \dots, n \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \bar{y}$ a $SSE_R = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = SST$, tedy

$$\Delta SSE = SST - SSE_P = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = SSR$$

a statistiku $F = \frac{\frac{SSR}{m}}{s_n^2} = F_{overall} \sim F(m, n - m - 1)$, jak jsme již ukázali.

3 Vícerozměrná lineární regrese

Věta 3.29. Nechť v modelu (**) platí, že e_1, \dots, e_n jsou nezávislé a $e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Označme SSE_F reziuální s.č. plného modelu a SSE_R reziduální s.č. modelu, kde platí $H_0 : C\beta = b$. Potom, za platnosti H_0 je splněno

$$F = \frac{\frac{\Delta SSE}{r}}{s_n^2} \sim F(r, n - m - 1).$$

Lemma 3.30. Označme $\hat{\beta}_F$ a $\hat{\beta}_R$ LSE parametru β v plném a redukovaném modelu. Potom platí

$$1. \hat{\beta}_F = \hat{\beta}_R - (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbb{C}^T \mathbb{A} (\mathbb{C} \hat{\beta}_F - b), \text{ kde } \mathbb{A} = (\mathbb{C} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbb{C}^T)^{-1}$$

$$2. \Delta SSE = SSE_R - SSE_F = (\mathbb{C} \hat{\beta}_F - b)^T \mathbb{A} (\mathbb{C} \hat{\beta}_F - b).$$

Důkaz. 1. Víme, že $\hat{\beta}_F = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ a musíme najít $\hat{\beta}_R$. Budeme proto minimalizovat

$$g(\beta) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)$$

za podmínky $C\beta = b$. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$\begin{aligned} L &= L(\beta) = g(\beta) - 2\lambda^T (\mathbb{C}\beta - b), \text{ kde } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \\ L &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{X}\beta + \beta^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\beta - 2\lambda^T \mathbb{C}\beta + 2\lambda^T b \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta} &= \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_0}, \frac{\partial L}{\partial \beta_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \beta_m} \right)^T = 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}\beta - 2\mathbf{X}^T \mathbf{y} - 2\mathbb{C}^T \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \lambda_r} \right)^T = \mathbb{C}\beta - b = 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice dostáváme

$$\hat{\beta}_R = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbb{C}^T \lambda = \hat{\beta}_F + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbb{C}^T \lambda \quad (+)$$

a dosadíme do druhé

$$\mathbb{C}\hat{\beta}_R - b = \mathbb{C}\hat{\beta}_F - b + \mathbb{C}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbb{C}^T \lambda = 0.$$

Můžeme tak spočítat $\lambda = -(\mathbb{C}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbb{C}^T)^{-1} (\mathbb{C}\hat{\beta}_F - b)$ a dosazením do rovnice (+) získáme

$$\hat{\beta}_R = \hat{\beta}_F - (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbb{C}^T (\mathbb{C}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbb{C}^T)^{-1} (\mathbb{C}\hat{\beta}_F - b) = \hat{\beta}_F - (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbb{C} \mathbb{A} (\mathbb{C}\hat{\beta}_F - b).$$

2. Z důkazu věty $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \beta$ víme, že

$$g(\beta) - g(\hat{\beta}_F) = (\beta - \hat{\beta}_F) \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\beta - \hat{\beta}_F) \quad \forall \beta.$$

Dosadíme $\beta = \hat{\beta}_R$:

$$\begin{aligned} \Delta SSE &= g(\hat{\beta}_R) - g(\hat{\beta}_F) = (\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_F) \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_F) = \\ &= (\mathbb{C}\hat{\beta}_F - b)^T \mathbb{A}^T \mathbb{C} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\mathbf{X} \mathbf{X})^{-1} \mathbb{C}^T \mathbb{A} (\mathbb{C}\hat{\beta}_F - b) = (\times) \end{aligned}$$

a protože $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$, platí $\mathbb{A}^T \underbrace{\mathbb{C} (\mathbf{X} \mathbf{X})^{-1} \mathbb{C}^T}_{=\mathbb{A}^{-1}} \mathbb{A} = \mathbb{A} \implies (\times) = (\mathbb{C}\hat{\beta} - b)^T \mathbb{A} (\mathbb{C}\hat{\beta} - b)$.

□

3 Vícerozměrná lineární regrese

Důkaz. Důkaz věty: Nejdříve ukážeme, že $\frac{\Delta SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2(r)$ za $H_0 : \mathbb{C}\beta = b$.

Za H_0 : $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{X}\beta_R, \sigma^2\mathbb{I}_n)$ a $\hat{\beta}_F = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}$, tzn.

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbb{C}\hat{\beta}_F - b \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(\hat{\mathbf{r}}), \text{Cov}(\hat{\mathbf{r}})).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\hat{\mathbf{r}} &= \mathbb{E}(\mathbb{C}\hat{\beta}_F - b) = \mathbb{E}(\mathbb{C}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}) - b = \mathbb{C}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbb{E}\mathbf{Y} - b = \\ &= \mathbb{C}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}\beta_R - b = \mathbb{C}\beta_R - b = 0 \quad \text{za platnosti } H_0 \\ \text{Cov}(\hat{\mathbf{r}}) &= \mathbb{C}\text{Cov}(\hat{\beta}_F)\mathbb{C}^T = \sigma^2\mathbb{C}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbb{C}^T = \sigma^2\mathbb{A}^{-1} \\ \implies \hat{\mathbf{r}} &= \mathbb{C}\hat{\beta}_F - b \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2\mathbb{A}^{-1}) \end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{\Delta SSE}{\sigma^2} = \frac{\hat{\mathbf{r}}^T\mathbb{A}\hat{\mathbf{r}}}{\sigma^2} \sim \chi^2(r).$$

Navíc bod 4) věty na str (55), kde $\mathbb{Z} \sim \mathcal{N}_r(0, \Sigma) \implies \mathbb{Z}^T\Sigma^{-1}\mathbb{Z} \sim \chi^2(r)$ a bod 1) $\implies \hat{\beta}_F$ a s_n^2 jsou nezávislé.

Tedy ΔSSE je funkcií pouze $\hat{\beta}_F$, tzn. nezávisí na s_n^2 , takže

$$F = \frac{\frac{\Delta SSE}{\sigma^2 r}}{\frac{(n-m-1)s_n^2}{\sigma^2(n-m-1)}} = \frac{\frac{\Delta SSE}{\sigma^2 r}}{s_n^2} \sim F(r, n-m-1).$$

□

POZNÁMKA 3.31. Použitím rozkladu $SST = SSE + SSR$ dostaneme

$$\Delta SSE = SSR_F - SSR_R.$$

Interpretace: nárůst regresního součtu čtverců díky neplatnosti H_0 . Dále

$$SSR_F = SSR_R + \Delta SSE,$$

kde ΔSSE je *extra sum of squares* přidaná k SSR díky neplatnosti H_0 .

Např. pokud $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}, 0)$, tzn. $\beta_m = 0$ a skutečný model má $\beta = \beta_F$, potom ΔSSE je extra regresní součet čtverců získaný díky přidání β_m do modelu.

umožňuje rozklad SSR plného modelu na jednotlivé části $(x_1, x_2|x_1, x_3|x_2x_1, \dots)$.

Př. analogie k Př. 5.25 str. 238

POZNÁMKA 3.32. Joint confidence region viz. Ex 5.30 str. 239

3.6 Predikce

Jakmile máme adekvátní model, můžeme ho použít pro bodové a intervalové predikce jako u jednorozměrné regrese

a) predikce $\mathbb{E}[\mathbf{Y}_x]$

Nechť $\mathbf{x}_0 = (1, x_{0,1}, \dots, x_{0,m})^T$ je nový bod proměnné x bodový odhad $\mathbb{E}[\mathbf{Y}_{\mathbf{x}_0}]$ je roven

$$\hat{y}_{\mathbf{x}_0} = \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^m x_{0,j}\hat{\beta}_j = \mathbf{x}_0^T\hat{\beta}$$

3 Vícerozměrná lineární regrese

tzn. $D[\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0}] = \mathbf{x}_0^T \cdot D[\hat{\beta}] \cdot \mathbf{x}_0 = \sigma^2 \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0$ a může být odhadnut pomocí $\hat{\sigma}^2(\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0}) = s_n^2 [\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0]$ (rozptyl predikce). Speciálně pokud $\mathbf{x}_0^T = \mathbf{x}_i^T$ (i -tý řádek matice \mathbf{X})

$$\hat{\sigma}^2(\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_i}) = s_n^2 [\mathbf{x}_i^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i] = s_n^2 h_{ii} \quad \text{kde } h_{ii} = (\mathbf{H})_{ii} \quad \text{a } \mathbf{H} = \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T.$$

Pro normální chyby lze odvodit interval spolehlivosti pro $\mathbb{E}[\mathbf{Y}_{\mathbf{x}_0}] = \gamma_{\mathbf{x}_0}$, protože $\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0}$ je LK náhodné veličiny s vícerozměrným normálním rozdělením, má normální rozdělení se $\mathbb{E}[\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0}] = \gamma_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{x}_0^T \beta$ a $D[\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0}] = \sigma^2 \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0$ tzn.

$$\frac{\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0} - \gamma_{\mathbf{x}_0}}{\sigma \sqrt{\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0}} \sim N(0, 1)$$

a díky nezávislosti $\hat{\beta}$ a s_n^2

$$\frac{\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0} - \gamma_{\mathbf{x}_0}}{s_n \sqrt{\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0}} \sim t(n-m-1) \quad \Rightarrow \quad 100(1-\alpha)\% \quad \text{IS pro } \gamma_{\mathbf{x}_0} :$$

$$(\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-m-1) \cdot s_n \sqrt{\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0})$$

b) interval predikce pro $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}_0}$

Bodový odhad je opět $\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0}$, pokud $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}_0}$ je skutečná hodnota $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ v bodě $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, potom $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}_0}$ a $\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0}$ budou nezávislé za předpokladu, že pozorování $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}_0}, Y_1, \dots, Y_n$ jsou nezávislé (což předpokládáme), potom

$$D[\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0} - \mathbf{Y}_{\mathbf{x}_0}] = D[\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0}] - D[\mathbf{Y}_{\mathbf{x}_0}] = \sigma^2 (1 + \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0),$$

takže

$$\frac{\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0} - \mathbf{Y}_{\mathbf{x}_0}}{\sigma \sqrt{1 + \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0}} \sim N(0, 1) \quad \text{a} \quad \frac{\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0} - \mathbf{Y}_{\mathbf{x}_0}}{s_n \sqrt{1 + \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0}} \sim t(n-m-1)$$

za předpokladu normality chyb.

$100(1-\alpha)\%$ IP pro $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}_0}$ tedy je

$$(\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{x}_0} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-m-1) \cdot s_n \sqrt{1 + \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0})$$

PŘÍKLAD 3.33.

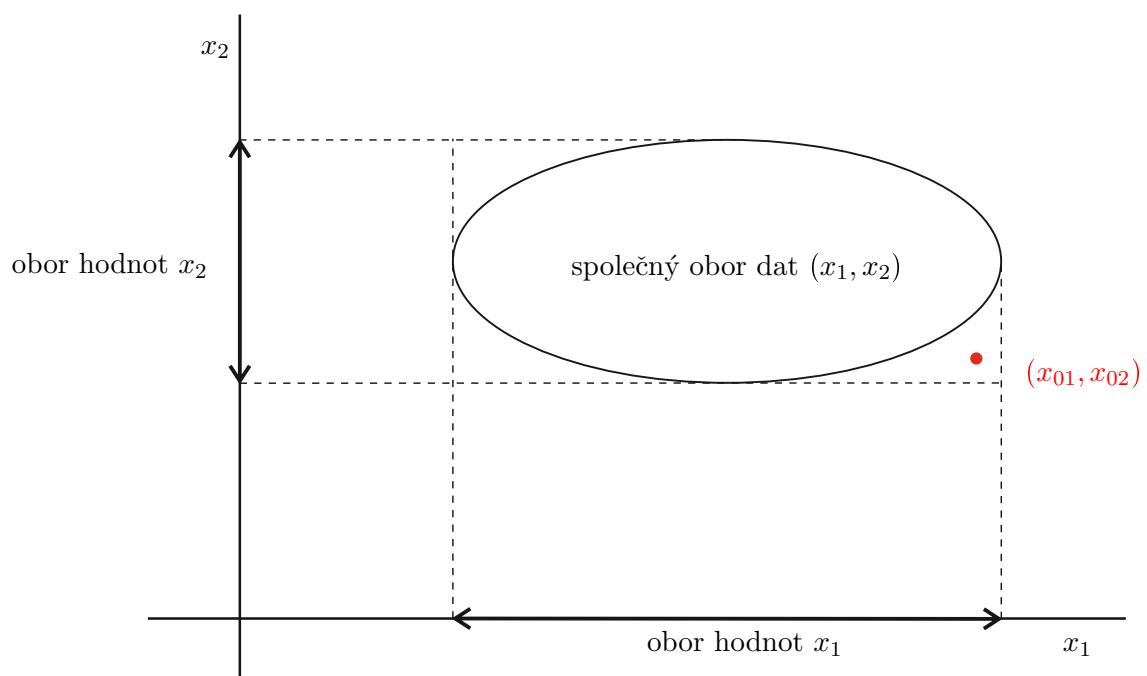
POZNÁMKA 3.34 (Extrapolace). • U jednoduché LR kvalitu predikce závisela na vzdálenosti x_0 od \bar{x} .

- Je třeba si dát pozor na predikce mimo $[x_{min}, x_{max}]$.
- Podobné závěry platí i pro vícerozměrnou LR.
- Protože rozptyl predikce je úměrný $\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0$, v bodech s velkými hodnotami této veličiny nebude predikce spolehlivá.
- Speciálně pokud \mathbf{x}_i^T jsou pozorovaná data, můžeme očekávat, že body s nejvyššími hodnotami $\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0 = h_{ii}$ budou na hranici množiny, kde je predikce spolehlivá. tzn., že vnitřek elipsoidu

$$\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0 \leq \max_{1 \leq j \leq n} h_{jj}$$

může být považován za přípustný obor predikce

3 Vícerozměrná lineární regrese



Obrázek 3.1: (x_{01}, x_{02}) leží uvnitř oboru hodnot pro obě x_1 i x_2 ale vně společného oboru původních dat.

4 Rezidua, diagnostika a transformace

- Je třeba ověřit adekvátnost modelu. Máme R^2, t, F statistiky, ty ale byly odvozeny za předpokladu linearity modelu a dalších podmínek na náhodné chyby. Pro ověření je důležitý nástroj analýza reziduí
- Je také třeba ověřit vliv jednotlivých pozorování na model - analýza odlehlych (outliers) a influenčních pozorování. (Velké reziduum pro i -té pozorování naznačuje problém s modelem, ale může to být i naopak, vlivné pozorování nemusí mít velké reziduum)
- Pokud detekujeme nějaké problémy s modelem, mohou pomoci transformace proměnných nebo metoda na korekci nekonstantního rozptylu.

4.1 Rezidua

připomenutí:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{H}\mathbf{y}, \quad \text{kde } \mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{y} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{e}$$

Dále jsme ukázali:

$$\mathbb{E}[\hat{\mathbf{e}}] = 0 \quad \text{Cov}(\hat{\mathbf{e}}) = \sigma^2(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})$$

Pokud navíc $\mathbf{e} \sim N_n(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ potom $\hat{\mathbf{e}} \sim N_n(0, \sigma^2(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}))$.

Pokud označíme $h_{ii} = \mathbf{H}_{ii}$, $\hat{\mathbf{e}}_i \sim N(0, \sigma^2(1 - h_{ii}))$, $\text{Cov}(\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j) = -\sigma^2 h_{ij}$.

Obecně bývá vhodnější pracovat se standardizovanými rezidui, protože $D[\hat{\mathbf{e}}_i] = \sigma^2(1 - h_{ii})$,

pro $r_i = \frac{\hat{\mathbf{e}}_i}{\sigma\sqrt{1-h_{ii}}}$ platí $D[r_i] = 1$. σ odhadneme pomocí $s_n = \sqrt{\frac{1}{n-m-1} \text{SSE}}$, dostaneme

$$\hat{r}_i = \frac{\hat{\mathbf{e}}_i}{s_n \sqrt{1 - h_{ii}}} \quad \text{kde } i = 1, \dots, n \quad (\text{Interně studentizované reziduum})$$

(Někdy také standardizovaná rezidua)

R : rstandard(.)

Pokud σ^2 odhadneme na základě modelu, ve kterém bylo vynecháno i -té pozorování, označíme tento odhad $\sigma_{(-i)}^2$, potom

$$\hat{t}_i = \frac{\hat{\mathbf{e}}_i}{\sigma_{(-i)}^2 \sqrt{1 - h_{ii}}} \quad \text{kde } i = 1, \dots, n \quad (\text{Externě studentizované reziduum})$$

(Někdy také studentizované rezidua)

R : rstudent(.)

Například $\sigma_{(-i)}^2 = \frac{\text{SSE}_{(-i)}}{n - m - 1}$ je nestranný odhad σ^2 v modelu $(-i)$.

POZNÁMKA 4.1. Platí:

4 Rezidua, diagnostika a transformace

- Pokud h_{ii} je malé, pro velké n by se mělo $\hat{e}_i, \hat{r}_i, \hat{t}_i$ chovat přibližně stejně a $\hat{r}_i, \hat{t}_i \approx N(0, 1)$.
- Pro malé n ($n < 20$) a / nebo $h_{ii} \approx 1$ je preferováno použít \hat{r}_i nebo \hat{t}_i a aktuálně bývá častěji doporučována \hat{t}_i (i -té pozorování s velkými h_{ii} může zvyšovat odhad σ^2 a tím snižuje velikost svého rezidua).
- h_{ii} hraje zásadní roli v diagnostice modelu, probereme teď jeho základní vlastnosti.

Leverage h_{ii} - potenciál i -tého pozorování (leverage point - píkový bod / vzdálený bod)

- $D[\hat{e}_i] = \sigma^2(1 - h_{ii}) \geq 0 \Rightarrow h_{ii} \leq 1$.
- $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H} \Rightarrow h_{ii} = \sum_{j=1}^n h_{ij}h_{ji} = \sum_{j=1}^n (h_{ij})^2$ tedy $h_{ii} > 0$ (Dá se ukázat silnější tvrzení: $h_{ii} \geq \frac{1}{n}$).
- $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{A}_{i1} = \sum_{j=1}^n h_{ij}x_{j1} = \sum_{j=1}^n h_{ij} = x_{i1} = 1$ tedy

$$\sum_{j=1}^n h_{ij} = 1 \quad \forall j \in \hat{n}$$
- Význam h_{ii} vyplýne z následujících úvahy:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Hy} \Rightarrow \hat{y}_i = \sum_{j=1}^n h_{ij}y_j = h_{ii}y_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n h_{ij}y_j$$

pokud $h_{ii} \approx 1$, potom $\hat{y}_i \approx y_i$ a model je nucen proložit přímku bodem (\mathbf{x}_i, y_i) i když když tam neplatí body s "velkým h_{ii} " - body s velkým potenciálem (high leverage points). Tyto body by měly být detekovány pro další zkoumání.

- Otázka je, jaká hodnota h_{ii} je "velká".

Heuristické pravidlo: $\sum_{i=1}^n h_{ii} = \text{tr}(\mathbf{H}) = m + 1$, tzn. $\frac{m+1}{n}$ je průměrná hodnota h_{ii} . i -té pozorování má velký potenciál jestliže $h_{ii} > \frac{3(m+1)}{n}$. (Stejně postupuje i jazyk R)

4.2 Grafy reziduů

1. Ověření normality - histogramy, Q-Q plots
tyto obrázky nezávisí na počtu nezávislých proměnných x , vše stejně jako v jednoduché LR.
2. Pro ověření funkční formy pro $\mathbb{E}[Y_x]$ a / nebo konstantního rozptylu se nejčastěji používají:
 - a) Grafy \hat{e}_i, \hat{r}_i nebo \hat{t}_i oproti \mathbf{x}_j^c , $j = 1, \dots, m$, kde \mathbf{x}_j^c je j -tý sloupec \mathbf{X}

4 Rezidua, diagnostika a transformace

- b) Grafy \hat{e}_i, \hat{r}_i nebo \hat{t}_i oproti \hat{y}_i
- c) Partial residual plots

POZNÁMKA 4.2. Zdůvodnění:

1. Normální rovnice $\mathbf{X}^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) = 0$ implikují $\mathbf{X}^T(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{X}^T\hat{\mathbf{e}}$.

$$\text{Připomenutí: } Y_i = \beta_1 x_i + e_i, \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

Pokud tedy naladíme LR model bez interceptu pro $\hat{\mathbf{e}}$ v závislosti na \mathbf{x}_j^c , směrnice přímky bude

$$\hat{\beta}_j^* = \frac{(\mathbf{x}_j^c)^T \hat{\mathbf{e}}}{\|\mathbf{x}_j^c\|^2} = 0$$

Graf $\hat{e}_i, \hat{r}_i, \hat{t}_i$ oproti \mathbf{x}_j^c by měl dávat náhodně rozptýlené body kolem osy x . (bez trendů, \hat{r}_i, \hat{t}_i uvnitř ± 2) Pokud tomu tak není, může to naznačovat nelinearitu v \mathbf{x}_j nebo nekonstantní rozptyl.

2. Ukázali jsme $\sum_{i=1}^n \hat{y}_i \hat{e}_i = 0$ pro LM bez interceptu pro \hat{e}_i oproti \hat{y}_i tedy platí

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{y}}}{\|\hat{\mathbf{y}}\|^2} = 0$$

Body by opět měly být náhodně rozptýlené kolem osy x

- Trychtýřovitý tvar indikuje nekonstantní rozptyl.
- Trendy indikují nelinearitu.

4.2.1 Partial residual plot

- I když grafy \hat{e}_i oproti \mathbf{x}_j^c a $\hat{\mathbf{y}}$ mohou indukovat nedostatky modelu, nemusí být zřejmé, jaké ty nedostatky jsou.
- V SLR graf \hat{e}_i oproti x_i lze použít pro detekci nelinearity
- Ale v MLR tyto grafy, stejně jako scatterploty, mohou být zavádějící, protože $\hat{\mathbf{e}}$ závisí na všech prediktorech, nemusí být tedy izolován efekt dané proměnné při odstranění efektů ostatních.
- Pro zkoumané efekty j -té proměnné lze použít partial rezidual plots - lze je chápout jako jeho ekvivalent scatterplotu v SLR

Definice 4.3.

$$\hat{e}_j^* = \hat{\mathbf{e}} + \hat{\beta}_j \mathbf{x}_j^c,$$

kde $\hat{\mathbf{e}}$ je vektor reziduí modelu, $\hat{\beta}_j$ je LSE parametru β_j , \mathbf{x}_j^c je j -tý sloupec \mathbf{X}

4 Rezidua, diagnostika a transformace

Partial residual plot (PRP): graf $\hat{\mathbf{e}}$ oproti \mathbf{x}_j^c , $j = 1, \dots, m$ pokud je model správný, měly by být body náhodně rozmištěné kolem přímky se směrnicí $\hat{\beta}_j$.

Zdůvodnění: Vztah mezi $\hat{\mathbf{e}}_j^*$ a \mathbf{x}_j^c má formu SLR bez interceptu, pokud je model správný, $\hat{e}_i, i = 1, \dots, n$, splňují podmínu $E\hat{e}_i = 0$ a $D\hat{e}_i = \sigma^2(1 - h_{neco})$. Má tedy smysl uvažovat RM pro $\hat{\mathbf{e}}_j^*$ oproti \mathbf{x}_j^c ($\hat{e}_j^* = \gamma_j \mathbf{x}_j^c + \mathbf{e}$).

Pro odhad koeficientů platí:

$$\hat{\gamma}_j = \frac{(\hat{\mathbf{e}}_j^* \mathbf{x}_j^c)}{\|\mathbf{x}_j^c\|^2} = \frac{(\hat{\mathbf{e}} + \hat{\beta}_j \mathbf{x}_j^c)^T \mathbf{x}_j^c}{\|\mathbf{x}_j^c\|^2} = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{x}_j^c + \hat{\beta}_j \|\mathbf{x}_j^c\|^2}{\|\mathbf{x}_j^c\|^2} = \hat{\beta}_j,$$

protože $\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{x}_j^c = 0$.

(2 příklady - pdf 79-93 uprostřed str 6)

POZNÁMKA 4.4. PRPs jsou někdy kritizovány za nadhodnocování efektu \mathbf{x}_j^c .

Alternativa: **partial regression plot (added variable plot)**.

Motivace: Ptáme se, zda přidat novou proměnnou do modelu a chtěli bychom dohadnout její efekt.

Budeme tedy uvažovat rozšířený model

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \gamma \mathbf{w} + \mathbf{e},$$

kde \mathbf{w} je nový vektor regresorů. Model lze rozepsat jako

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{X}\mathbf{w}] \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \gamma \end{pmatrix} + \mathbf{e} = \mathbf{X}_w + \boldsymbol{\beta}_w + \mathbf{e}.$$

Použitím normálních rovnic pro \mathbf{X}_w lze odvodit formuli pro $\hat{\gamma}$

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T (\mathbb{I} - \mathbb{H}) \mathbf{w}}{\|(\mathbb{I} - \mathbb{H}) \mathbf{w}\|^2}. \quad (\#)$$

$\hat{\gamma}$ je směrnice RM pro $\hat{\mathbf{e}}$ v závislosti na $\mathbf{w}_{res} = (\mathbb{I} - \mathbb{H})\mathbf{w}$ (rezidua modelu pro \mathbf{w} v závislosti na \mathbf{X}).

Ted' naopak uvažujme, že \mathbf{w} je sloupec původní \mathbf{X} , řekněme \mathbf{x}_j^c a ozn. $\mathbf{X}_{(-j)}$ matici \mathbf{X} bez sloupce j . V předchozím modelu pomožme $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{(-j)}$ a $\mathbf{w} = \mathbf{x}_j^c$. Potom LSE $\hat{\beta}_j$ parametru β_j je

$$\hat{\beta}_j = \frac{\hat{\mathbf{e}}_{(-j)}^T \mathbf{x}_{j,res}^c}{\|\mathbf{x}_{j,res}^c\|^2},$$

kde $\hat{\mathbf{e}}_{(-j)}$ jsou rezidua modelu bez \mathbf{x}_j^c , $\mathbf{x}_{j,res}^c = (\mathbb{I} - \mathbb{H})\mathbf{x}_j^c$, tedy jsou to rezidua modelu pro \mathbf{x}_j^c v závislosti na ostatních proměnných, tedy $\mathbf{X}_{(-j)}$ (v $\mathbf{x}_{j,res}^c$ je tedy odstraněn efekt ostatních regresorů).

$\hat{\beta}_j$ je směrnice RM pro $\hat{\mathbf{e}}_{(-j)}$ v závislosti na $\mathbf{x}_{j,res}$ \implies

added variable plot: graf $\hat{\mathbf{e}}_{(-j)}$ proti $\mathbf{x}_{j,res}, j = 1, \dots, m$.

Pokud je model správný, body by měly být náhodně rozptýlené kolem přímky se směrnicí $\hat{\beta}_j$ procházející počátkem. Pokud závislost na \mathbf{x}_j^c není lineární, projeví se to odklonem bodů od přímky.

POZNÁMKA 4.5. Ze vztahu (#) je vidět, že MLR může být chápána jako posloupnost SLR, kde postupně vytváříme modely pro novou proměnnou s použitím reziduí modelu pro předcházející proměnné.

4.3 PRESS rezidua (PRESS residuals, deleted residuals)

- pokud budeme chtít model použít nejen k vysvětlení vztahu mezi proměnnými, ale také pro predikci, hodila by se míra vyjadřující jak dobře model predikuje (doposud jsme zkoumali jen jak dobře popisuje)
- šlo by použít IS nebo IP, to bychom ale předem museli znát body, ve kterých chceme predikovat
- nejjednodušší přístup, jak měřit prediktivní přesnost modelu by byl analýza reziduí pro predikce hodnot v nových bodech \mathbf{x} , obecně ale nemáme data y v těchto bodech
- jedna možnost je použít data, která máme k dispozici

Postup: Vynecháme jedno pozorování, naladíme model bez tohoto pozorování a porovnáme predikovanou a pozorovanou hodnotu pro vynechané pozorování.

Předpokládáme, že vynecháme i -té pozorování. Ozn. $\hat{\beta}_{(-i)}$ odhad β v modelu s vynechaným i -tým pozorováním ($M_{(-i)}$) a $\hat{y}_{(-i)}$ predikovanou hodnotu modelem $M_{(-i)}$ v bodě \mathbf{x}_i^T , tzn.
 $\hat{y}_{(-i)} = \mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_{(-i)}$.

Potom

$$\hat{\mathbf{e}}_{(-i)} = y_i - \hat{y}_{(-i)}, \quad i = 1, \dots, n$$

nazýváme i -té **PRESS reziduum**.

PRESS = $\sum_{i=1}^n \hat{e}_{-i}^2$ je užitečná míra přesnosti predikce.

Poznámka 4.6. Otázka je, jak počítat $\hat{e}_{(-i)}$, $i = 1, \dots, n$.

- pro velké n se zdá, že to bude náročný problém, protože pro každé $i \in \hat{n}$ musíme naladit nový model
- naštěstí to není nutné, ukážeme totiž, že

$$\hat{e}_{(-i)} = \frac{\hat{e}_i}{1 - h_{ii}},$$

tzn. všechna $\hat{e}_{(-i)}$ lze snadno spočítat pomocí reziduí a hodnot h_{ii} z původního (plného) modelu.

Označme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^T & - i\text{-tý řádek matice } \mathbf{X} \\ \mathbf{X}_{(-i)} & - matici \mathbf{X} \text{ bez } i\text{-tého řádku} \end{aligned}$$

Věta 4.7. Jestliže $h_{ii} \neq 1$, potom

$$[\mathbf{X}_{(-i)}^T \mathbf{X}_{(-i)}] = \mathbf{X}^T \mathbf{X}^{-1} + \frac{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}}{1 - h_{ii}},$$

kde h_{ii} je i -tý diagonální prvek matice \mathbb{H} .

4 Rezidua, diagnostika a transformace

Důkaz. Nejdříve ukážeme

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{X}_{(-i)}^T \mathbf{X}_{(-i)} + \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \quad (+)$$

Kvůli značení předpokládáme $i = n$ (toho se dá vždy dosáhnout permutací řádků \mathbf{X}). Potom

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ki} x_{kj} = \sum_{k=1}^{n-1} x_{ki} x_{kj} + x_{ni} x_{nj}.$$

i, j -tý prvek $\mathbf{X}_{(-k)}^T \mathbf{X}_{(-k)}$ je $\sum_{k=1}^{n-1} x_{ki} x_{kj}$
 i, j -tý prvek $\mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T$ je $x_{ni} x_{nj}$, tzn. (+) platí.

Věta 4.8 (Sherman-Morrison-Woodbury (z LA)). *Nechť \mathbb{A} je $n \times n$ invertibilní matice a nechť \mathbf{z} je $n \times 1$ sloupcový vektor. Jestliže $\mathbf{z}^T \mathbb{A}^{-1} \mathbf{z} \neq 1$, potom matice $\mathbb{B} = \mathbb{A} - \mathbf{z}^T \mathbf{z} \mathbb{A}^{-1}$ je invertibilní a platí*

$$\mathbb{B}^{-1} = \mathbb{A}^{-1} + \frac{\mathbb{A}^{-1} \mathbf{z}^T \mathbf{z} \mathbb{A}^{-1}}{1 - \mathbf{z}^T \mathbb{A}^{-1} \mathbf{z}}.$$

Položme $\mathbb{A} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$, $\mathbf{z} = \mathbf{x}_i$, $\mathbb{B} = \mathbf{X}_{(-i)}^T \mathbf{X}_{(-i)}$. Pak $\mathbb{B} = \mathbb{A} - \mathbf{z} \mathbf{z}^T$, \mathbb{A} je invertibilní a

$$\mathbf{z}^T \mathbb{A}^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{x}_i^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i = \left(\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \right)_{ii} = h_{ii} \neq 1.$$

Užitím věty dostaneme

$$(\mathbf{X}_{(-i)}^T \mathbf{X}_{(-i)})^{-1} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + \frac{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}}{1 - h_{ii}}.$$

□

Věta 4.9. *Nechť $\hat{e}_{(-i)}$ je i -té PRESS reziduum. Potom*

$$\hat{e}_{(-i)} = \frac{\hat{e}_i}{1 - h_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Důkaz. Nechť $\hat{\beta}_{(-i)}$ je odhad β v modelu M_{-i} , tzn.

$$\hat{\beta}_{(-i)} = (\mathbf{X}_{(-i)}^T \mathbf{X}_{(-i)})^{-1} \mathbf{X}_{(-i)}^T \mathbf{y}_{(-i)},$$

tedy $\mathbf{y}_{(-i)}$ je \mathbf{y} bez i -té složky y_i . Tzn.

$$\begin{aligned} \hat{y}_{(-i)} &= \mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_{(-i)} = \mathbf{x}_i^T (\mathbf{X}_{(-i)}^T \mathbf{X}_{(-i)})^{-1} \mathbf{X}_{(-i)}^T \mathbf{y}_{(-i)} = \\ &= \left[(\mathbf{X}_{(-i)}^T \mathbf{X}_{(-i)})^{-1} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + \frac{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}}{1 - h_{ii}}. \right] = \\ &= \mathbf{x}_i^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}_{(-i)}^T \mathbf{y}_{(-i)} + \frac{1}{1 - h_{ii}} \mathbf{x}_i^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}_{(-i)}^T \mathbf{y}_{(-i)} = \\ &= S_1 + \frac{1}{1 - h_{ii}} S_2. \end{aligned}$$

4 Rezidua, diagnostika a transformace

Protože $\mathbf{X}_{(-i)}^T \mathbf{y}_{(-i)} = \mathbf{X}^T \mathbf{y} - y_i \mathbf{x}_i$, dostaneme

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathbf{x}_i (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{y} - y_i \mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i^T \underbrace{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}}_{\hat{\beta}} - y_i \underbrace{\mathbf{x}_i^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i}_{h_{ii}} = \\ &= \mathbf{x}_i^T \hat{\beta} - h_{ii} y_i = \hat{y}_i - h_{ii} y_i. \end{aligned}$$

Podobně

$$S_2 = \underbrace{\mathbf{x}_i^T (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}_i}_{h_{ii}} \underbrace{\mathbf{x}_i^T (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x} \mathbf{y}}_{\hat{y}_i} = y_i \underbrace{\mathbf{x}_i^T (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}_i}_{h_{ii}} \underbrace{\mathbf{x}_i^T (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}_i}_{h_{ii}} = h_{ii} \hat{y}_i - y_i h_{ii}^2$$

takže

$$\hat{y}_{(-i)} = \hat{y}_i - h_{ii} y_i + \frac{1}{1 - h_{ii}} (h_{ii} \hat{y}_i - y_i h_{ii}^2).$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned} \hat{e}_{-i} &= y_i - \hat{y}_{(-i)} = y_i (1 + h_{ii}) - \hat{y}_i - \frac{1}{1 - h_{ii}} (h_{ii} \hat{y}_i - y_i h_{ii}^2) = \\ &= \frac{1}{1 - h_{ii}} (y_i (1 - h_{ii}^2) - \hat{y}_i (1 - h_{ii}) - h_{ii} \hat{y}_i + y_i h_{ii}^2) = \frac{1}{1 - h_{ii}} (y_i - \hat{y}_i) = \frac{\hat{e}_i}{1 - h_{ii}} \end{aligned}$$

□

Budeme potřebovat podobné formule pro $\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(-1)}$ a $\text{SSE}_{(-1)}$.

Věta 4.10. 1) Nechť $\hat{\beta}_{(-1)}$ značí LSE parametru $\hat{\beta}$ v modelu bez i -tého pozorování. Potom platí

$$\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(-1)} = \frac{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \hat{e}_i}{1 - h_{ii}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \hat{e}_{(-1)}.$$

2) Pro součet reziduálních čtverců $\text{SSE}_{(-1)}$ v modelu bez i -tého pozorování platí

$$\text{SSE}_{(-1)} = \sum_{j=1}^n \hat{e}_j^2 - \frac{\hat{e}_i^2}{1 - h_{ii}}.$$

Důkaz. 1) Stejně jako v důkazu předchozí věty platí, že

$$\hat{\beta}_{(-1)} = S_1 + \frac{1}{1 - h_{ii}} S_2,$$

kde $S_1 = \hat{\beta} - y_i (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i$ a $S_2 = \mathbf{X}^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}_i \hat{y}_i - y_i (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i h_{ii}$, tedy

$$\begin{aligned} \hat{\beta} - \hat{\beta}_{(-1)} &= y_i (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i - \frac{1}{1 - h_{ii}} ((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \hat{y}_i - y_i (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i h_{ii}) = \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \left(y_i - \frac{\hat{y}_i - y_i h_{ii}}{1 - h_{ii}} \right) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \left(\frac{y_i - y_i h_{ii} - \hat{y}_i + y_i h_{ii}}{1 - h_{ii}} \right) = \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{1 - h_{ii}} \right), \end{aligned}$$

kde $\left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{1 - h_{ii}} \right) = \frac{\hat{e}_i}{1 - h_{ii}} = \hat{e}_{(-1)}$.

4 Rezidua, diagnostika a transformace

2)

$$\begin{aligned} \text{SSE}_{(-1)} &= (\mathbf{y}_{(-1)} - \mathbf{x}_{(-1)}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(-1)})^T (\mathbf{y}_{(-1)} - \mathbf{x}_{(-1)}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(-1)}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (y_j - \mathbf{x}_j^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(-1)})^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n (y_j - \mathbf{x}_j^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(-1)})^2 - (y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(-1)})^2. \end{aligned}$$

Z bodu 1) víme, že $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(-1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}} - \frac{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \hat{e}_i}{1 - h_{ii}}$, tzn.

$$\text{SSE}_{(-1)} = \sum_{j=1}^n \left(y_j - \mathbf{x}_j^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \frac{\mathbf{x}_j^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \hat{e}_i}{1 - h_{ii}} \right)^2 - \left(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \frac{\mathbf{x}_i^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \hat{e}_i}{1 - h_{ii}} \right)^2.$$

Protože $\mathbf{x}_j^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i = h_{ij}$, dostaneme

$$\begin{aligned} \text{SSE}_{(-1)} &= \sum_{j=1}^n \left(\hat{e}_j + \frac{h_{ij} \hat{e}_i}{1 - h_{ii}} \right)^2 - \left(\hat{e}_i + \frac{h_{ii} \hat{e}_i}{1 - h_{ii}} \right)^2 = \underbrace{\sum_{j=1}^n \left(\hat{e}_j + \frac{h_{ij} \hat{e}_i}{1 - h_{ii}} \right)^2}_A - \frac{\hat{e}_i^2}{(1 - h_{ii})^2}, \\ A &= \sum_{j=1}^n \hat{e}_j^2 + \frac{2 \hat{e}_i}{1 - h_{ii}} \underbrace{\sum_{j=1}^n h_{ij} \hat{e}_j}_0 + \frac{\hat{e}_i^2}{(1 - h_{ii})^2} \underbrace{\sum_{j=1}^n h_{ij}^2}_{h_{ii}}. \end{aligned}$$

Protože pak $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\mathbf{y}$, tak $\mathbf{H}\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H}^2\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{y}$ a tedy $\mathbf{H}\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{H}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{H}\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{y}} = 0$ a tedy

$$\text{SSE}_{(-1)} = \sum_{j=1}^n \hat{e}_j^2 + \frac{\hat{e}_i^2}{(1 - h_{ii})^2} (h_{ii} - 1) = \sum_{j=1}^n \hat{e}_j^2 - \frac{\hat{e}_i^2}{1 - h_{ii}}.$$

□

Důsledek 4.11. V modelu (**) s $m + 1$ parametry β a bez i -tého pozorování platí, že

$$\mathbb{E} [\text{SSE}_{(-1)}] = (n - m - 2)\sigma^2,$$

takže

$$\widehat{\sigma^2}_{(-1)} = \frac{\text{SSE}_{(-1)}}{n - m - 2}$$

je nestranný odhad σ^2 . Dále pak

$$\widehat{\sigma^2}_{(-1)} = \frac{(1 - h_{ii})(n - m - 1)s_n^2 - \hat{e}_i^2}{(1 - h_{ii})(n - m - 2)} = \frac{1}{n - m - 2} \left(\text{SSE} - \frac{\hat{e}_i^2}{1 - h_{ii}} \right),$$

kde $s_n^2 = \frac{1}{n-m-1} \text{SSE}$ (pro plný model).

4 Rezidua, diagnostika a transformace

Důkaz. Protože $\mathbb{E}[\hat{e}_i^2] = D\hat{e}_i = \sigma^2(1 - h_{ii})$, dostaneme dle předchozí věty

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{SSE}_{(-1)}] &= \sum_{j=1}^n \sigma^2(1 - h_{jj}) - \sigma^2 = \sigma^2[(n-1) - \underbrace{\sum_{j=1}^n h_{jj}}_{h\mathbf{H}=\mathbf{m+1}}] = \sigma^2(n-m-2) \\ \widehat{\sigma^2}_{(-1)} &= \frac{1}{n-m-2} \text{SSE}_{(-1)} = \frac{1}{n-m-2} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^n \hat{e}_j^2}_{\text{SSE}=(n-m-1)s_n^2} - \frac{\hat{e}_i^2}{1-h_{ii}} \right) = \frac{1}{n-m-2} \frac{(1-h_{ii})\text{SSE} - \hat{e}_i^2}{1-h_{ii}}.\end{aligned}$$

□

Poznámka 4.12. Dě se ukázat, že $\text{SSE}_{(-1)}$ a \hat{e}_i jsou nezávislé náhodné veličiny. Protože $\frac{\text{SSE}_{(-1)}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-m-2)$ a $\frac{\hat{e}_i}{\sigma\sqrt{1-h_{ii}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, dostaneme $\frac{\hat{e}_i}{\widehat{\sigma^2}_{(-1)}\sqrt{1-h_{ii}}} \sim t(n-m-2)$.

Tvrzení 4.13. Uvažujme model (**), kde $h(X) = m+1$ a $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}_m(0, \sigma^2 I_m)$. Nechť pro $i \in \hat{n}$ platí, že $h_{ii} \neq 1$. Potom i -té reziduum

$$\hat{t}_i \sim t(n-m-2).$$

Poznámka 4.14. \hat{t}_i lze použít pro test hypotézy, zda je i -té pozorování odlehlé (outlier), tedy

$$H_0 : i\text{-té pozorování není odlehlé v modelu } M$$

$$H_1 : i\text{-té pozorování je odlehlé v } M,$$

kde odlehlé značí odlehlé vzhledem k M : $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_m(\mathbf{X}\beta, \sigma^2 I_m)$:

- a) střední hodnota i -tého pozorování se nerovná té dané modelem,
- b) pozorovaná hodnota Y_i je neobvyklá za platnosti M .

H_0 zamítнемe, pokud

$$|\hat{t}_i| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-m-2) \approx u_{1-\frac{\alpha}{2}} \doteq 2 \text{ pro } \alpha = 0.05 \text{ a } n \text{ velká.}$$

Pokud test použijeme na všechna pozorování, je potřeba aplikovat nějakou korekci na vícenásobné testování, např. Bonferroni.

Poznámka 4.15. Vztah $\hat{e}_{(-1)}$ a \hat{t}_i :

$$\hat{e}_{(-1)} = \frac{\hat{e}_i}{1-h_{ii}} \Rightarrow \mathbb{E}\hat{e}_{(-1)} = 0 \quad \wedge \quad D\hat{e}_{(-1)} = \frac{\sigma^2}{1-h_{ii}}.$$

Standardizované PRESS reziduum

$$\frac{\hat{e}_{(-1)}}{\sqrt{D\hat{e}_{(-1)}}} = \frac{\frac{\hat{e}_i}{1-h_{ii}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{1-h_{ii}}}} = \frac{\hat{e}_i}{\sigma\sqrt{1-h_{ii}}} = r_i.$$

Pokud použijeme $\widehat{\sigma^2}_{(-1)}$ jako odhad σ^2 , pak **studentizovaná PRESS rezidua**

$$\frac{\hat{e}_i}{\widehat{\sigma}_{(-1)}\sqrt{1-h_{ii}}} = \hat{t}_i.$$

4 Rezidua, diagnostika a transformace

POZNÁMKA 4.16. $\hat{e}_{(-1)} = \frac{\hat{e}_i}{1-h_{ii}}$, a proto pokud i -té pozorování má velký potenciál h_{ii} , bude $\hat{e}_{(-1)}$ mnohem větší, než \hat{e}_i , pozorování s velkým h_{ii} jsou dobře modelována, ale měřeno $\hat{e}_{(-1)}$ mohou špatně predikovat. To je další ukázka fit/prediction dilema.

Stejný efekt nastává také pro

$$\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{(-1)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \hat{e}_{(-1)}.$$

Rozdíl může být "malý", pokud je "fit" dobrý, ale může být také "velký", pokud je h_{ii} velké.

4.4 Míry influence

- I pro perfektní model mohou dva různé vzorky (\mathbf{x}, \mathbf{y}) a $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ vést k různým závěrům,
- většinou máme k dispozici jen originální data,
- bude nás zajímat vliv i -tého řádku \mathbf{x} na model,
- už víme, že velké h_{ii} indikuje, že i -té pozorování má velký vliv a velká rezidua naznačují možnou neadekvátnost modelu,
- míry, které zavedeme, budou kombinovat tyto dva faktory,
- použijeme přístup z PRESS residní, tzn. budeme sledovat jak velký vliv má vynechání i -tého pozorování na $\hat{\beta}$ a \hat{y} .

DFBETAS

$\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(-1)}$ měří vliv vynechání i -tého pozorování na odhad $\hat{\beta}$ (bude základem pro naši analýzu). Připomeňme nyní vztah

$$\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(-1)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \frac{\hat{e}_i}{1-h_{ii}}.$$

a) **vliv i -tého pozorování na β_j :**

$$\beta_j - \beta_{(-1)j} = \frac{r_{ji}\hat{e}_i}{1-h_{ii}}, \quad \text{kde } r_{ji} \text{ je } (j,i)\text{tý prvek matice } \mathbb{R} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^T.$$

i -té pozorování budeme považovat za influenční na β_j , pokud $\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_{(-1)j}$ bude velká. Protože $\hat{\beta}_j$ je náhodná veličina, "velké" bychom měli měřit relativně vzhledem k s.f. $(\hat{\beta}_j)$, což je $\sigma \sqrt{v_j}$, $v_j = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T$. Pokud ji odhadneme pomocí $\hat{\sigma}_{(-1)} \sqrt{v_j}$, dostaneme definici

$$\text{DFBETAS}_{j,i} = \frac{\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_{(-1)j}}{\hat{\sigma}_{(-1)} \sqrt{v_j}} = \frac{r_{ji}\hat{e}_i}{\sqrt{v_j} \hat{\sigma}_{(-1)} (1-h_{ii})} = \frac{r_{ji}}{\sqrt{v_j}} \frac{\hat{t}_i}{\sqrt{1-h_{ii}}},$$

kde \hat{t}_i je ext. studentizované reziduum. Kombinuje efekt velkého rezidua \hat{t}_i a velkého h_{ii} . Jedna možnost pro limitní hodnoty: i -té pozorování je považováno za influenční na oblasti β_j , pokud

$$|\text{DFBETAS}_{j,i}| > \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Máme $(m+1) \times n$ hodnot pro srovnání, zjednodušíme to.

b) Vliv i -tého pozorování na celý vektor $\hat{\beta}$: spočívá v použití nejaké normy na vektor $\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(-1)}$. Cook navrhnul

$$D_i = \frac{(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(-1)})^T \mathbf{M} (\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(-1)})}{(m+1)c},$$

kde \mathbf{M} je PD matici a c normalizační konstanta. Nejužívanější volba je $\mathbf{M} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ a $x = s_n^2$. Cookova vzdálenost se potom spočítá jako

$$D_i = \frac{(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(-1)})^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(-1)})}{(m+1)s_n^2}.$$

$$D_i = \frac{1}{(m+1)s_n^2} \left(\frac{\hat{e}_i}{1-h_{ii}} \right)^2 \underbrace{\mathbf{x}_i^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i}_{h_{ii}} \underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{x} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}}_I = \frac{1}{m+1} \frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \frac{\hat{e}_i^2}{s_n^2(1-h_{ii})}.$$

Výpočetní formule je potom ve tvaru

$$D_i = \frac{\hat{r}_i^2}{m+1} \left(\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \right).$$

POZNÁMKA 4.17. $100(1-\alpha)\%$ simultání IS pro β je

$$C(\alpha) = \left\{ \beta \mid \frac{(\hat{\beta} - \beta)^T \mathbf{x}^T \mathbf{x} (\hat{\beta} - \beta)}{(m+1)s_n^2} \leq F_{1-\alpha}(m+1, n-m-1) \right\},$$

tzn.

$$\beta_{(-1)} \in C(\alpha) \Leftrightarrow D_i \leq F_{1-\alpha}(m+1, n-m-1).$$

To je motivace pro **RULE OF THUMB**:

i -té pozorování je influenční, jestliže $D_i > F_{\frac{1}{2}}(m+1, n-m-1)$

(pro většinu m, n je $F_{\frac{1}{2}} \approx 1$, zjednodušení pravidla $D_i > 1$).

POZNÁMKA 4.18. Také platí, že

$$D_i = \frac{(\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_{(-1)})^T (\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_{(-1)})}{(m+1)s_n^2},$$

tzn. dá se chápat jako míra influence na celkovou predikci.

DFFITS

- vliv i -tého pozorování na \hat{y}_i

$$\text{DFFITS}_i = \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{(-1)}}{\hat{\sigma}_{(-1)} \sqrt{h_{ii}}} = \dots = \hat{t}_i \sqrt{\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}}}.$$

RULE OF THUMB: i -té pozorování je influenční, pokud $|\text{DFFITS}| > 3\sqrt{\frac{m+1}{n-m-1}}$.

4 Rezidua, diagnostika a transformace

Poznámka 4.19 (Míry influence v R). • DFBETAS – `dfbetas()`

- DFFITS – `dffits()`
- Cookova vzdálenost D_i – `cooks.distance()`
- Leverage h_{ii} – `hotvalues()`
- a vše shrnuje funkce `influence.measures()` (má navíc covariance ratio)

Používané pravidlo: i -té pozorování je influenční, pokud:

$$= |\text{DFBETAS}| > 1, \quad |\text{DFFITS}| > 3\sqrt{\frac{m+1}{n-m-1}} \\ D_i > F_{0.5}(m+1, n-m-1), \quad h_{ii} > 3\frac{m+1}{n}$$

4.5 Transformace

Pokud není splněný některý z předpokladů modelu: linearita, normalita chyb, homoskedasticita, jednou z možností je pokusit se transformovat nějaké proměnné, aby transformovaný model tyto předpoklady alespoň „přibližně“ splňoval.

4.5.1 Transformace vysvětlované proměnné y

Hledáme funkci $h(\cdot)$ tak, aby model $Y_i^* = h(Y_i) = \beta_0 + \sum_{j=1}^m x_{ij}\beta_j + e_i$ splňoval předpoklady.

3 hlavní důvody pro transformaci Y

1. Transformace škály měření tak, aby pokrývala celé \mathbb{R} , což může odstranit problémy s podmínkami na β .

Např. studie kapacity plic (FEV data, $FEV > 0$):

- Chtěli bychom, aby model nepredikoval záporné hodnoty (\implies restrikční podmínky na parametr β).
- Lze obejít modelování $y^* = \log FEV$.

Pokud y jsou počty a 0 je možná hodnota, často se používá $y^* = \log(y+1)$ nebo obecně $y^* = \log(y+c)$

2. Transformace Y , aby její rozdělení bylo „více“ normální.

Typicky to znamená pokusit se udělat rozdělení hodnot y více symetrické. Často se setkáváme s rozděleními vychýlenými vpravo (obvykle se to stává, pokud naměříme nějakou fyzikální veličinu, která může nabývat pouze kladných hodnot).

Transformace $y^* = \log y$ nebo $y^* = y^\lambda, \lambda < 1$ budou redukovat toto vychýlení.

Typický postup: Začít s hodnotou λ blízko 1, pak snižovat hodnotu λ , dokud není dosaženo „přibližně“ symetrie reziduí.

4 Rezidua, diagnostika a transformace

3. Možná nejzásadnější motivace je pokusit se dosáhnout konstantního rozptylu přes všechna pozorování.

Např. pro fyzikální veličinu s kladnými hodnotami se často stane, že rozptyl bude malý pro $\mu \approx 0$ a větší pro μ velké (už je z důvodu, že obor hodnot y je omezen na kladné hodnoty). Říkáme tomu **positive mean-variance relationship**.

Nepřesnost měření kladných veličin se také často vyjadřuje pomocí koeficientu variace

$$CV(Y) = \frac{s.d.Y}{\mathbb{E}[Y]}.$$

Často bývá více konstantní mezi případy než s.d. Variabilitu vyjadřuje relativně spíše než absolutně. Matematicky to znamená, že $D[Y] = \varphi \mathbb{E}[Y]^2 - \varphi \mu^2$ pro nějaké φ .

Pro odstranění vztahu $\mathbb{E}[Y]$ a $D[Y]$ se často používají mocninné transformace $y^* = y^\lambda$ (pro $y > 0$).

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Transformace:} & \leftarrow & \dots & y^3 & y^2 & y & \sqrt{y} & \log y & \frac{1}{\sqrt{y}} & \frac{1}{y} & \frac{1}{y^2} & \dots & \rightarrow \\ \text{Box-Cox}\lambda : & \leftarrow & \dots & 3 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -2 & \dots & \rightarrow \end{array}$$

- Pokud $D[Y]$ klesá s rostoucí $\mathbb{E}[Y]$, budeme klesat s mocninou λ .
- Pokud $D[Y]$ roste s rostoucí $\mathbb{E}[Y]$, budeme λ snižovat.

OBECNĚ: Předpokládejme vztah $D[Y] = \varphi V(\mu)$ a uvažujeme transformaci $y^* = h(y)$. Taylorův rozvoj 1. rádu funkce $h(y)$ v bodě μ

$$y^* = h(y) \approx h(\mu) + h'(\mu)(y - \mu)$$

z čehož plyne, že $D[Y^*] \simeq (h'(\mu))^2 \cdot D[Y]$. Transformace $y^* = h(y)$ tedy bude přibližně stabilizovat rozptyl, pokud $h'(y)$ je úměrné $(D[Y]^{-1/2} = V^{-1/2}(\mu))$.

- Pokud $V(\mu) = \mu^2 \Rightarrow$ stabilizující transformace je $\log(y) = h(y)$ protože $h'(\mu) = \frac{1}{\mu}$.
- Pokud $V(\mu) = \mu \Rightarrow$ stabilizující transformace je $h(y) = \sqrt{y}$ protože $h'(\mu) = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}$.

$$\left(h(\mu) = \int \frac{d\mu}{\sqrt{V(\mu)}} \right)$$

- Asi nejvíce užívanou transformací je $y^* = \log(y)$. Jedním z důvodů je i dobrá interpretabilitnost parametru β .

Interpretace parametrů LM

4 Rezidua, diagnostika a transformace

1. Klasický LM:

$$\mathbb{E}[Y] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m.$$

Jednorozměrná změna proměnné $x_j \Rightarrow$ změnu $\mathbb{E}[Y]$ o β_j jednotek (při ostatních proměnných stálých).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} = (1, x_1, \dots, x_m) & \mathbf{X}_{\text{new}} = (1, x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_m) \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{E}[Y] & \mathbb{E}[Y_{\text{new}}] \\ \mathbb{E}[Y_{\text{new}}] - \mathbb{E}[Y] = \beta_j \end{pmatrix}$$

2. LM pro $\log Y$:

$$\log Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m + e, \text{ kde } e \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Pokud je to správný model, znamená to, že $\log Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ a tedy $\mathbb{E}[Y] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$.

- Predikce pro $\mathbb{E}[\log Y]$ je $\hat{\mu} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_m x_m$.
- Predikce pro $\mathbb{E}[Y]$ bude $e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_m x_m + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}}$.

Uvazujme opět jednotkovou změnu p. x_j ($x_j \rightarrow x_j + 1$):

$$\frac{\mathbb{E}[Y_{\text{new}}]}{\mathbb{E}[Y]} = \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_j x_j + \hat{\beta}_j + \cdots + \hat{\beta}_m x_m + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}}}{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_m x_m + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}}} = e^{\hat{\beta}_j}$$

Pak jednotková změna proměnné $x_j \Rightarrow$ multiplikativní změna $\mathbb{E}[Y] e^{\hat{\beta}_j}$ -krát. Jinak zapsáno: $100(e^{\hat{\beta}_j} - 1)$ je procentní změna $\mathbb{E}[Y]$ spojená s jednotkovou změnou x_j

4.5.2 Box-Cox transformace

- Pokud chyby nemají normální rozdělení, hledáme transformaci Y , která by nejenom linearizovala model, ale také transformovala chyby, aby byly přibližně normální.
- Jako užitečná se ukazuje následující třída transformací (power family):

$$y^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda}, & \text{pokud } \lambda \neq 0 \\ \log y, & \text{pokud } \lambda = 0 \end{cases},$$

které předpokládají, že data y jsou pouze kladná. (Pokud ne, můžeme přičíst konstantu ke všem pozorováním a analyzovat takto posunutá data.)

POZNÁMKA 4.20. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda} = \log y$

- Pro nalezení vlastního λ budeme předpokládat, že transformované veličiny $Y_i^{(\lambda)}$, $i = 1, \dots, n$, splňují postačující podmínky RM, tj.

$$Y_i^{(\lambda)} = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \quad \text{kde } \mathbf{e} \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \mathbb{I}_n) \quad \left(Y_i^{(\lambda)} \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \right)$$

4 Rezidua, diagnostika a transformace

Úkol je odhadnout zároveň λ, β, σ^2 , použijeme MLE. Pomocí transformace získáme hustotu

$$f_{Y_i}(y_i) = f_{Y_i^{(\lambda)}}(y_i^{(\lambda)}) \cdot \frac{dy_i^{(\lambda)}}{dy_i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i^{(\lambda)} - \mu_i)^2} \cdot y_i^{\lambda-1}, \quad \text{kde } \mu_i = \mathbb{E}[Y_i^{(\lambda)}] = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}.$$

Věrohodnostní funkce pro pozorování y_1, \dots, y_n bude mít tvar

$$L = \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(y_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i^{(\lambda)} - \mu_i)^2} \cdot J(\lambda), \quad \text{kde } J(\lambda) = \prod_{i=1}^n y_i^{\lambda-1} = \left(\prod_{i=1}^n y_i \right)^{\lambda-1}$$

Dále vyjádříme log-likelihoood:

$$l = \ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i^{(\lambda)} - \mu_i)^2 + \ln J(\lambda).$$

Věrohodnostní rovnice nemají explicitní analytické řešení. Pro nalezení MLE si všimneme, že pro pevné λ je l proporcionální logaritmus věrohodnosti pro odhad (β, σ^2) na základě $\mathbf{y}^{(\lambda)} = (y_1^{(\lambda)}, \dots, y_n^{(\lambda)})^T$, tedy

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\lambda) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}^{(\lambda)}$$

$$\hat{\sigma}^2(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^{(\lambda)} - \hat{y}_i^{(\lambda)})^2 = \frac{1}{n} (\mathbf{y}^{(\lambda)})^T (\mathbb{I}_n - \mathbb{H}) \mathbf{y}^{(\lambda)}, \quad \text{kde } \hat{y}_i^{(\lambda)} = \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(\lambda).$$

Dosazením do l dostaneme její hodnotu maximalizovanou vzhledem k (β, σ^2) , tzv. profite log-likelihoood

$$l_p^{(\lambda)} = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \hat{\sigma}^2(\lambda) - \frac{n}{2} + \ln J(\lambda) = C - \frac{n}{2} \ln \hat{\sigma}^2(\lambda) + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \ln y_i.$$

POZNÁMKA 4.21. Kvůli komplikované závislosti l_p na λ bude třeba numerická metoda pro maximalizaci. Lze přepsat do tvaru, kde bude možné využít metody LR:

$$l_p(\lambda) = C - \frac{n}{2} \ln \hat{\sigma}^2(\lambda) - \frac{n}{2} \ln J(\lambda)^{2/n} = C - \frac{n}{2} \ln \frac{\hat{\sigma}^2(\lambda)}{(J^{\frac{1}{n}}(\lambda))^2}$$

$$J^{\frac{1}{n}}(\lambda) = \left[\left(\prod_{i=1}^n y_i \right)^{\frac{1}{n}} \right]^{\lambda-1} = (\bar{y})^{\lambda-1}, \quad \text{kde } \bar{y} \text{ je geometrický průměr.}$$

Dosazením zpátky do $l_p(\lambda)$ dostaváme

$$l_p(\lambda) = C - \frac{n}{2} \ln \frac{\hat{\sigma}^2(\lambda)}{(\bar{y})^{\lambda-1}} = C - \frac{n}{2} \ln s_\lambda^2,$$

$$\text{kde } s_\lambda^2 = \frac{\hat{\sigma}^2(\lambda)}{(\bar{y})^{\lambda-1}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i^{(\lambda)}}{(\bar{y})^{\lambda-1}} - \frac{\hat{y}_i^{(\lambda)}}{(\bar{y})^{\lambda-1}} \right)^2.$$

Tedy s_λ^2 je reziduální součet čtverců (SSE) v modelu $\frac{y_i^{(\lambda)}}{(\bar{y})^{\lambda-1}}$ v závislosti na \mathbf{x}_i^T (tzn. s_λ^2 lze snadno získat pomocí funkce $\ln()$). Celkem: $\max l_p(\lambda) \Leftrightarrow \min s_\lambda^2$.

Algoritmus pro hledání vhodného λ :

1. Zvolit oblast hodnot λ , $I = [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, a body $\lambda \in I$ (typicky $I = [-2, 2]$ a 10-20 rovnoměrně rozdělených bodů).
2. Naladit model $\frac{y^{(\lambda)}}{(y)^{\lambda-1}} \sim \chi$ a spočítat $\frac{1}{n}\text{SSE} = s_\lambda^2$.
3. Z grafu (λ, s_λ^2) vybrat $\hat{\lambda}$, které minimalizuje s_λ^2 .
4. Pro zvolené $\hat{\lambda}$ naladit model $y^{(\hat{\lambda})} \sim \chi$ a pokračovat standardní analýzou.

IS pro λ

Snadno lze odvodit LRT test pro test $H_0 : \lambda = \lambda_0$. ($H_0 : \lambda = 1$ zde je třeba transformace, pokud zamítneme $H_0 \Rightarrow$ transformace pomocí $\hat{\lambda}$).

LRT statistika: $\Lambda = -2 \ln \frac{L(\lambda_0)}{L(\hat{\lambda})} = 2(l_p(\hat{\lambda}) - l_p(\lambda_0))$. Víme, že $\Lambda \xrightarrow{L_p} \chi^2(1)$. Invertováním příslušné oblasti LRT testu, dostaneme as. $100(1 - \alpha)\%$ IS pro λ :

$$\begin{aligned} \chi_{1-\alpha}^2 &\geq \Lambda \\ \chi_{1-\alpha}^2 &\geq 2\left(\frac{n}{n} \ln s_{\lambda_0}^2 - \frac{n}{n} \ln s_{\hat{\lambda}}^2\right) \\ \chi_{1-\alpha}^2 &\geq n \ln \frac{s_{\lambda_0}^2}{s_{\hat{\lambda}}^2} \end{aligned}$$

Pokud $\hat{\lambda}$ je MLE λ , as. $100(1 - \alpha)\%$ IS pro λ je:

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid n \cdot \ln \frac{s_{\lambda_0}^2}{s_{\hat{\lambda}}^2} \leq \chi_{1-\alpha}^2(1) \right\}.$$

POZNÁMKA 4.22. Kvůli jednoduchosti interpretace se často doporučuje zaokrouhlit $\hat{\lambda}$ na nejbližší $\frac{1}{4}$ nebo $\frac{1}{3}$.

Příklad data TREES

4.5.3 Transformace vysvětlujících proměnných x

- Pokud diagnostika modelu naznačuje, že vztah mezi y a \mathbf{X} není lineární pro jeden nebo více regresorů, může být vhodné přeformovat model pomocí transformací proměnných x .
- Předpokládejme, že v modelu $Y = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j + e$ máme podezření na nelinearitu v j-té proměnné x_j .
- Jednou z možností jak postupovat je nahrazení x_j proměnnou $z_j = f(x_j)$, model tedy bude $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_j z_j + \dots + \beta_m x_m + e$.
- Pokud je f známé, jedná se o model LR a lze ho analyzovat standardně. Pokud je tato transformace vhodná, mělo by se to projevit ve zlepšení statistik R^2 , t, F a zlepšení grafu rezidií pro z_j oproti těm pro x_j .

4 Rezidua, diagnostika a transformace

- Bohužel f většinou známá není, možný přístup je parametrisovat nějak tuto funkci a pak odhadnout tyto parametry společně s β .

- Typická parametrisace:

$$z_j = x_j^\lambda, \quad \text{kde } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{vhodné.}$$

($x_j >$ potom $\lambda \in \mathbb{R}$, pokud x_j může být záporné, množina hodnot λ je omezená)

- Aproximace f pomocí polynomu vhodného stupně, tzn.

$$z_j = \sum_{k=1}^l r_k x_j^k, \quad \text{kde } r_k \text{ musí být odhadnuty,}$$

- další možností je použití trigonometrických funkcí nebo splines (piecewise polynomials).

Výsledný model ale v tomto případě nebude lineární v parametrech β_j $j = 0, \dots, m$ a r_k , $k = 1, \dots, l$.

Zaměříme se na $z_j = x_j^\lambda$:

- možnost je opět zvolit jistou množinu hodnot λ , naladit modely pro všechna λ a vybrat model s nejlepší shodou s daty, např. s nejmenší SSE nebo největší R^2 nebo F
- může být časově náročné, můžeme minout vhodnou hodnotu λ , pokud nebyla v původní množině (nevíme jak R^2, F, SSE závisí na λ)

Box-Tidwell metoda

Předpokládejme, že λ se příliš neliší od $\lambda = 1$. Taylorův rozvoj 1. řádu kolem $\lambda = 1$ dává

$$x^\lambda \approx x^1 + (\lambda - 1) \frac{dx^\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1}, \quad \frac{dx^\lambda}{d\lambda} = x^\lambda \ln x c \frac{dx^\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} = x \ln x, \quad x^\lambda \approx x + (\lambda - 1)x \ln x.$$

Dosazením do modelu

$$\begin{aligned} Y &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{j-1} x_{j-1} + \beta_j (x_j + (\lambda - 1)x_j \ln x_j) + \dots + \beta_m x_m + e \\ &= \beta_0 + \sum_{k=1}^m \beta_k x_k + \underbrace{\beta_j (\lambda - 1)}_{\beta_{m+1}(\lambda)} x_j \ln x_j + e \end{aligned}$$

máme lineární model pro parametry β_k , $0 \leq k \leq m+1$, protože $\beta_{m+1}(\lambda - 1)\beta_j$ můžeme (λ, β_j) odhadnout následovně:

- 1) naladíme původní model a spočteme LSE $\hat{\beta}_j$ parametru β_j ,
- 2) naladíme rozšířený model s $x_{m+1} = x_j \ln x_j$ a spočteme $\hat{\beta}_{m+1}$,
- 3) z rovnosti $\hat{\beta}_{m+1} = (\hat{\lambda} - 1)\hat{\beta}_j$ dostaneme $\hat{\lambda} = \frac{\hat{\beta}_{m+1}}{\hat{\beta}_j} + 1$.

4 Rezidua, diagnostika a transformace

Tento postup umožňuje testovat potřebu transformace

$$H_0 : \lambda = 1 \text{ vs. } H_1 : \lambda \neq 1$$

pomocí t-testu pro $H_0 : \beta_{m+1} = 0$.

POZNÁMKA 4.23. Pokud model s $\hat{\lambda}$ vypadá neadekvátně, lze postupovat iterativně a získat posloupnost $\hat{\lambda}(l)$, $l \geq 1$, $\hat{\lambda}(0) = \hat{\lambda}$ a rozvineme x_j^λ kolem $\hat{\lambda}(0)$, tzn.

$$x_j^\lambda \approx x_j^{\hat{\lambda}(0)} + (\lambda - \hat{\lambda}(0)) x_j^{\hat{\lambda}(0)} \ln x_j \text{ dosazením do rovnice modelu}$$

$$Y = \beta_0 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \beta_k x_k + \beta_j x_j^{\hat{\lambda}(0)} + \underbrace{\beta_j(\lambda - \hat{\lambda}(0))}_{\beta_{m+1}} x_j^{\hat{\lambda}(0)} \ln x_j + e$$

naladíme tento model s a bez přidané proměnné $x_{m+1} = x_j^{\hat{\lambda}(0)} \ln x_j$. Označíme $\hat{\beta}_j(1)$ a $\hat{\beta}_{m+1}(1)$ příslušné odhady. Potom

$$\hat{\lambda}(1) = \hat{\lambda}(0) + \frac{\hat{\beta}_{m+1}(1)}{\hat{\beta}_j(1)}.$$

Můžeme dále iterovat do konvergence nebo skončit po pevném počtu iterací.

POZNÁMKA 4.24. Další užívané transformace v \mathbf{x} , \mathbf{Y} :

a) centrované proměnné: \mathbf{X}_C tak, že $(\mathbf{X}_C)_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_j$, $i \in \hat{n}$, $j \in \hat{m}$, kde $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ je průměr j -tého sloupce matice \mathbf{X} . \mathbf{Y}_C , $(\mathbf{Y}_C)_i = y_i - \bar{y}$... nevím

b) centrované a škálované proměnné: škálování sloupců tak, aby jejich norma byla 1, tzn. každý prvek j -tého sloupce matice \mathbf{X} podělíme $s_j = \left(\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Centrované a škálované matice \mathbf{X}_{SC} pak bude

$$\mathbf{X}_{SC} = \mathbf{X}_C \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \text{diag}\left(\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_m}\right).$$

Model pak bude

$$\mathbf{Y}_C = \mathbf{X}_{SC} \boldsymbol{\beta}_s + e.$$

Lze použít i \mathbf{Y}_{SC} , tedy centrované a škálované \mathbf{Y} .

Vážené nejmenší čtverce (weight least squares WLS)

Budeme nyní předpokládat, že chyby e_i jsou normální, nezávislé, ale $D(e_i) = \sigma_i^2$ závisí na i . Konkrétně tedy $\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{w_i}$, kde $w_i > 0$, $i \in \hat{n}$ se nazývají váhy.

Uvažujeme tedy model

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}, \text{ kde } \mathbf{e} \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \mathbf{W}) \text{ a } \mathbf{W} = \text{diag}\left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n}\right). \quad (4.1)$$

Pokud jsou váhy w_i známé, lze MLE odhadu parametru $\boldsymbol{\beta}$ a σ^2 nalézt následovně:

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}\mathbf{K}^T, \text{ kde } \mathbf{K} = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{w_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{w_n}}\right).$$

4 Rezidua, diagnostika a transformace

Definujeme $\mathbf{Z} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{Y}$, $\mathbf{M} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{X}$ a $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{e}$. Potom dostaneme model

$$\mathbf{Z} = \mathbf{M}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ kde } \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n), \quad (4.2)$$

protože

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{K}^{-1}\sigma^2\mathbf{W}(\mathbf{K}^{-1})^T = \sigma^2\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{K}^T(\mathbf{K}^T)^{-1} = \sigma^2 I_n.$$

Transformační vektor je tedy ve tvaru $\mathbf{Z} = (\sqrt{w_1}Y_1, \dots, \sqrt{w_n}Y_n)^T$. To už je standardní model LR, na kterém platí

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_w &= (\mathbf{M}^T\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}^T\mathbf{z} = (\mathbf{X}^T \underbrace{(\mathbf{K}^{-1})^T\mathbf{K}^{-1}}_{=(\mathbf{K}\mathbf{K}^T)^{-1}} \mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T(\mathbf{K}^{-1})^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Y} = (\mathbf{X}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Dále pak

$$\widehat{\sigma^2}_w = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i(y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n} \text{SSE}_w,$$

kde SSE_w je vážený součet čtverců, $z_i = \sqrt{w_i}y_i$ a $\hat{z}_i = \sqrt{w_i}\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}} = \sqrt{w_i}\hat{y}_i$. Dále platí, že

a) $\mathbb{E}\hat{\boldsymbol{\beta}}_w = (\mathbf{X}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{W}^{-1}\underbrace{\mathbb{E}\mathbf{Y}}_{\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}$, kde $\hat{\boldsymbol{\beta}}_w$ je nestranný odhad $\hat{\boldsymbol{\beta}}$,

b) $\mathbb{E}\left(\frac{\text{SSE}_w}{n-m-1}\right) = \sigma^2$, tedy $s_w^2 = \frac{\text{SSE}_w}{n-m-1}$ je nestranný odhad σ^2 .

Věta 4.25. Nechť $\hat{\boldsymbol{\beta}}_w$ je WLS odhad $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, jestliže $\text{Cov}(\boldsymbol{e}) = \sigma^2 \mathbf{W} = \sigma^2 \text{diag}\left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n}\right)$. Potom platí, že

1) $\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_w) = \sigma^2(\mathbf{X}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$,

2) nechť δ_i je i -tý diagonální prvek $(\mathbf{X}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$. Jestliže $e_i \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{w_i}\right)$, $i \in \hat{n}$, potom

$$T_i = \frac{\hat{\beta}_{w,i} - \beta_i}{s_w \sqrt{\delta_i}} \sim t(n-m-1),$$

3) pro $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_w$ platí, že $\mathbb{E}\hat{\mathbf{Y}}_m = \mathbf{X}\mathbf{B}$ a $\text{Cov}(\hat{\mathbf{Y}}_w) = \sigma^2 \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T$,

4) nechť $\hat{e}_w = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}_m$ jsou rezidua v modelu 4.1 a $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_w = \mathbf{Z} - \hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} - \mathbf{M}\hat{\boldsymbol{\beta}}_w$ jsou rezidua v transformovaném modelu 4.2. Potom

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_w = \sqrt{\mathbf{W}^{-1}}\hat{e}_w = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\hat{e}_w \quad \text{a} \quad \mathbb{E}(he_w) = \mathbb{E}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_w) = 0,$$

5) nechť $\mathbf{H}_w = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{W}\mathbf{X}^{-1})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{W}^{-1}$ je vážená projekční matici. Potom

$$\hat{e}_w = (I - \mathbf{H}_w)\boldsymbol{e} \quad \text{a} \quad \text{Cov}(\hat{e}_w) = \sigma^2(I - \mathbf{H}_w)\mathbf{W}.$$

To znamená, že

$$\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_w) = \sigma^2 \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}(I - \mathbf{H}_w)\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}.$$

4 Rezidua, diagnostika a transformace

Důkaz. 1)

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_w) = (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \underbrace{\text{Cov} \mathbf{Y}}_{=\sigma^2 \mathbf{W}} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1},$$

2) $D\hat{\beta}_{w,i} = \sigma^2 \delta_i$, tzn. $\frac{\hat{\beta}_{w,i} - \beta_i}{\sigma \sqrt{\delta_i}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ a víme, že $\hat{\beta}_{w,i}$ a s_w^2 jsou nezávislé, $\frac{s_w^2(n-m-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-m-1)$. Z toho vyplývá, že

$$\frac{\hat{\beta}_{w,i} - \beta_i}{s_w \sqrt{\delta_i}} \sim t(n-m-1).$$

3) $\mathbb{E} \hat{\mathbf{Y}}_w = \mathbf{X} \mathbb{E} \hat{\beta}_w = \mathbf{X} \hat{\beta}$, $\text{Cov}(\hat{\mathbf{Y}}_w) = \mathbf{X} \text{Cov} \hat{\beta}_w \mathbf{X}^T = \sigma^2 \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$.

4) Protože $\mathbf{Z} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Y}$ a $\mathbf{M} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{X}$, dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_w &= \mathbf{Z} - \hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Y} - \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\beta}_w) = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \hat{\epsilon}_w, \\ \mathbb{E} \hat{\mathbf{e}}_w &= \mathbb{E}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}_w) = \mathbf{X} \beta - \mathbf{X} \beta = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E} \hat{\epsilon} = 0. \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_w &= \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}_w = \mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\beta}_w = \mathbf{X} \beta + \mathbf{e} - \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \underbrace{(\mathbf{X} \beta + \mathbf{e})}_{\mathbf{Y}} = \\ &= \mathbf{X} \beta - \mathbf{X} \beta + \mathbf{e} - \underbrace{\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1}}_{\mathbf{H}_w} \mathbf{e} = (I - \mathbf{H}_w) \mathbf{e}, \\ \text{Cov}(\hat{\mathbf{e}}_w) &= (I - \mathbf{H}_w) \text{Cov} \mathbf{e} (I - \mathbf{H}_w)^T = \\ &= \sigma^2 (I - \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1}) \mathbf{W} (I - \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) = \\ &= \sigma^2 \mathbf{W} - \sigma^2 \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T - \sigma^2 \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \sigma^2 \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T = \\ &= \sigma^2 (I - \mathbf{H}_w) \mathbf{W}. \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(\hat{\epsilon}) = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \text{Cov}(\hat{\epsilon}) \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} = \sigma^2 \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} (I - \mathbf{H}_w) \mathbf{W}^{\frac{1}{2}}.$$

□

- z dosazení vyplývá, že odhad parametru β a σ^2 lze získat použitím transformovaného modelu (2)
- Protože ale transformovaný model neobsahuje intercept (první sloupec M je $(\sqrt{w_1}, \dots, \sqrt{w_n})^T$), nefunguje klasický rozklad součtu čtverců a F statistika nelze definovat obvyklým způsobem, stejně jako R^2 (viz. regrese skrz počátek)
- nicméně princip „extra sum of squares“ funguje, ať má model intercept nebo ne: např. celkový F-test lze provést pomocí statistiky

$$F_w = \frac{\text{SSE}_R - \text{SSE}_F}{\frac{m}{s_w^2}},$$

kde SSE_F je reziduální součet čtverců s_w^2 plného modelu a SSE_R je reziduální součet čtverců redukovaného transformovaného modelu $Z = M_0 \beta_0 + e$, $M_0 = (\sqrt{w_1}, \dots, \sqrt{w_n})^T$.

Pokud mají chyby normální rozdělení, platí za $H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$, že $F_w \sim F(m, n-m-1)$ a H_0 zamítáme, pokud $F_w > F_{1-\alpha}(m, n-m)$.

- str. 110 (*)
- pro analýzu reziduí je třeba uvažovat vhodné grafy reziduí:
 - máme dva vektory reziduí:

$$\begin{aligned}\hat{e}_i &\text{ v původním modelu (1)} \\ \hat{\varepsilon}_i &\text{ v transformovaném modelu (2)}\end{aligned}$$

a tedy dvě možnosti

- pro kontrolu konstantního rozptylu lze uvažovat i standardizovaná nebo studentizovaná rezidua (pomocí bodu 4) a 5) věty lze ukázat, že jsou v obou modelech stejná)
- je třeba být opatrny oproti jakým hodnotám budeme rezidua zobrazovat
- grafy $\hat{\varepsilon}_i$ proti sloupčům \mathbb{M} a predikovaným hodnotám \hat{z} jsou OK, neboť např.

$$\sum_{i=1}^n \hat{z}_i \hat{\varepsilon}_i = 0$$

(jsou OG, měl by být vidět rozstýlený oblak kolem osy x).

- dosazením $\hat{\varepsilon}_i = \sqrt{w_i} \cdot \hat{e}_i$ a $\hat{z}_i = \sqrt{w_i} \cdot \hat{y}_i$ dostaneme $\sum_{i=1}^n w_i \hat{e}_i \hat{y}_i = 0$, tzn. graf \hat{e}_i proti \hat{y}_i bude zavádějící
- graf $\sqrt{w_i} \cdot \hat{e}_i$ proti $\sqrt{w_i} \cdot \hat{y}_i$ je ale v pořadku
- podobné závěry platí i pro grafy \hat{e}_i proti $\mathbf{x}_j^c, i = 1, \dots, m$.
- (*): přirozené je definovat $R^2 = \varrho^2(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{z})$, kde $\varrho(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{z})$ je výběrový korelační koeficient, pro $\mathbb{W} = \mathbb{I}$ dostaneme standardní R^2

Poznámka 4.26. • pokud jsou váhy neznámé, bylo by třeba je odhadnout společně s β a σ^2 z dat

- to ale není obecně možné, protože máme více parametrů než dat
- někdy to možné je, pokud máme další informace o rozdělení chyb (tvar kovarianční matice atd.)

Poznámka 4.27. Celý postup WLS lze použít i na případ $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}_m(0, \sigma^2 \mathbb{W})$, kde \mathbb{W} je známá, ale není diagonální. Protože \mathbb{W} je symetrická, ex. regulární \mathbb{K} tak, že $\mathbb{W} = \mathbb{K} \mathbb{K}^T$. Stejná transformace jako u WLS opět vede na transformovaný model, kde $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}_m(0, \sigma^2 \mathbb{I}_m)$.

4.6 Korelované chyby

- Zejména v časových nebo ekonomických datech se často objevuje korelace jednotlivých hodnot.
- potom není splněn předpoklad nezávislosti chyb
- tento stav je třeba detektovat (někdy pomohou grafy reziduí)

4 Rezidua, diagnostika a transformace

- modely pro korelovaná data: **Analýza časových řad**

Pokud je přítomna autokorelace a chyby mají konstantní rozptyl, platí:

1. OLS odhad $\hat{\beta}$ je nestranný, ale neplatí Gauss-Markovova věta, tzn. $\hat{\beta}$ nemá nejmenší rozptyl.
2. $MSE = \frac{1}{n-m-1}SSE$ (odhad σ^2) může být podstatně menší než skutečná hodnota σ^2 , což může dát falešný pocit přesnosti.
3. V důsledku bodu 2) mohou být zvětšeny hodnoty T statistik, takže testy o parametrech a IS nefungují.
4. Protože jsou chyby nezávislé, F-testy a t-testy nejsou přesně platné ani když jsou chyby normální.

4.6.1 Durbin-Watson statistika

Omezíme se na pozorování získaná v čase $t = 1, 2, \dots, n$ a případ, že chyby e_t splňují podmínky autoregresního procesu 1. řádu (AR1), tj.

$$e_t = \varrho e_{t-1} + u_t, \quad |\varrho| < 1,$$

kde ϱ je autokorelační koeficient, $u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ jsou nezávislé v $t = 1, \dots, n$ a u_t je nezávislá na $e_t, t \geq 1$. Častěji pro data časových řad platí $\varrho > 0$ (pozitivní autokorelace).

Pro test $H_0 : \varrho = 0$ vs. $H_1 : \varrho > 0$ se užívá **Durbin-Watsonova statistika**

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2},$$

kde \hat{e}_t jsou rezidua modelu LR. Pokud zamítneme H_0 , odhadne se ϱ pomocí

$$\hat{\varrho} = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=2}^n \hat{e}_t^2}.$$

Poznámka 4.28. Dá se ukázat, že $d \approx 2(1 - \hat{\varrho})$:

$$\sum_{t=2}^n (\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2 = \sum_{t=2}^n \hat{e}_t^2 + \sum_{t=2}^n \hat{e}_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=2}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} \approx 2 \left(\sum_{t=2}^n \hat{e}_t^2 - \sum_{t=2}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} \right),$$

Z Cauchy-Schwartzovy nerovnosti $\Rightarrow \frac{\sum_{t=2}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2}$ leží přibližně v $(-1, 1)$, tzn. d leží přibližně v $(0, 4)$. Dále

$$\hat{\varrho} \approx 1 \Rightarrow d \approx 0 \quad \text{a} \quad \hat{\varrho} \approx 0 \Rightarrow d \approx 2,$$

tzn. pro malé hodnoty d budeme zamítat H_0 , pro velké hodnoty nebudeme zamítat. Kritické hodnoty určené Durbinem a Watsonem jsou tabulované.

Test:

1. spočítat hodnotu d
2. nalézt kritické hodnoty (d_L, d_U) pro dané n a $m + 1$

4 Rezidua, diagnostika a transformace

3. a) zamítnout H_0 , pokud $d < d_L$
 b) nezamítnout H_0 , pokud $d > d_U$
 c) pro $d_L < d < d_U$ test nerozhodne

POZNÁMKA 4.29. Pro test $H_0 : \varrho = 0$ vs. $H_1 : \varrho < 0$ lze použít popsaný test pro $d' = 4 - d$.
 Metody pro korekci autokorelace: **Cochrane-Orcutt**.

A) Mallows C_p , AIC, BIC

Kritéria beroucí více v poraz počet použitých regresorů. Lze je použít i pro **nevnořené modely**!

- Mallows C_p

$$C_p = \frac{\text{SSE}_p}{\hat{\sigma}^2} - n + 2p, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\text{SSE}_T}{n - T}$$

Vlastnosti C_p :

- 1) Snadno se počítá, SSE_p a $\hat{\sigma}^2$ jsou implementované.
- 2) Pokud je $\hat{\sigma}^2$ konzistentní odhad σ^2 (nazávisející na p), má C_p následující interpretaci: Porovnává, co zbývá vysvětlit pomocí modelů s p a T parametry, zvýhodňuje počet dostuoných dat a penalizuje počet parametrů, které je třeba odhadnout.
- 3) Při zvyšování počtu regresorů: $q|\sigma^2$ je konst., SSE_p klesá, p roste (C_p se snaží sladit dvě protichůdná kritéria).
- 4) $C_T = T$.
- 5) Pokud je správný model s p parametry, dá se ukázat, že $C_p \approx p$ pro $n \gg T$.
- 6) V praxi se volí model s nejmenším C_p ve skupině modelů. (Obrázek)

POZNÁMKA 4.30. Pro dobrou interpretaci je třeba spočítat C_p pro všechny nebo většinu podmnožin regresorů.

- Akaikeho informační kritérium AIC

Obecná definice je

$$\text{AIC} = -2l(\hat{\theta}) + 2p^*,$$

kde $\hat{\theta}$ je MLE odhad v modelu, l je log-věrohodnostní funkce a p^* je počet parametrů, které je třeba odhadnout ($p^* = p + 1$, jelikož počítáme i σ^2).

Pro náš model LR:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right] \\ l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) &= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}{\sigma^2} \\ \text{AIC} &= -2l(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2) + 2p^* = n \ln 2\pi + \ln \hat{\sigma}^2 + \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}{\hat{\sigma}^2} + 2p^*, \end{aligned}$$

ale $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \frac{\text{SSE}}{n}$, tedy

$$\text{AIC} = \underbrace{n \ln 2\pi + n}_{C} + n \ln \frac{\text{SSE}}{n} + 2p^*$$

4 Rezidua, diagnostika a transformace

nebo alternativně $AIC = n \ln \frac{SSE}{n} + 2p^*$.

POZNÁMKA 4.31. – hledáme model s minimální hodnotou AIC

– AIC není mírou kvality modelu, je užitečná pro porovnávání modelů

AIC v R:

- `AIC()` počítá $AIC = n \ln 2\pi + n + n \ln \frac{SSE}{n} + 2p^*$, kde p^* je počet parametrů β, σ^2 (včetně interceptu)

- `extractAIC()` počítá $AIC = +n \ln \frac{SSE}{n} + 2p^*$, kde p^* je jen počet parametrů β (včetně interceptu)

- (Schwarzovo) bayesovské informační kritérium BIC

Z definice

$$BIC = -2l(\hat{\theta}) + p^* \ln n.$$

Více penalizuje počet parametrů \implies vybírá jednodušší modely s jednodušší interpretací než AIC. BIC vyžaduje významnější příspěvek proměnné, aby byla zařazena do modelu. (AIC se zanořuje za predikci, BIC je kompromis mezi interpretovatelností a predikcí.)

BIC v R:

- `BIC()` nebo `AIC()`, `extractAIC()` s volbou `k = log(nobs(fit))`.

Příklad - data HALD.

B) PRESS statistika

Pokud je pro nás důležitá kvalita predikve, lze použít pro srovnání modelů statistiku

$$PRESS = \sum_{i=1}^n \hat{e}_{(-i)}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{e}_i}{1 - h_{ii}} \right)^2.$$

Vybírá se model s minimální hodnotou této statistiky.

4.7 Metody výběru modelu

1) Vyhodnocení všech možných modelů

Pro T dostupných regresorů tzn. naladit 2^T modelů. Pak je porovnat pomocí nějakého kritéria. Náročné pro velká T (například $T = 20$ znamená 1024 modelů).

2) Zpětná eliminace (backward elimination)

Začneme s plným modelem a v každém kroku odstraníme jednu proměnnou, která nejméně přispívá modelu (měřeno F stat) nebo jejíž odstranění znamená největší zlepšení modelu (měřeno AIC).

algoritmus:

- 1) Naladíme model se všemi proměnnými.
- 2) Pro každou proměnnou spočteme částečnou F statistiku (nebo t-statistiku) jako by právě byla přidána do modelu, tzn. za předpokladu, že ostatní proměnné tam už jsou.

4 Rezidua, diagnostika a transformace

- 3) Pokud je nějaká F-statistika menší, než kritická hodnota F_{OUT} , vynecháme z modelu proměnnou s nejnižší hodnotou F. $F_{\text{OUT}} = F_{1-\alpha_{\text{OUT}}}(1, n-p)$, kde p je aktuální počet regresorů v modelu, včetně interceptu, $\alpha_{\text{OUT}} = 0.05, 0.1, \dots$
- 4) Opakujeme kroky 2) a 3), dokud všechny částečné F statistiky nejsou větší, než příslušná kritická hodnota F_{OUT} , tzn. nelze už vyřadit žádnou proměnnou.

Poznámka 4.32. místo F lze používat AIC.

3) Dopředná regrese (forward regression)

Začneme pouze s interceptem (nebo nutným minimálním modelem) a v každém kroku přidáme jednu proměnnou, která má za následek největší zlepšení modelu (největší nárůst F nebo největší pokles AIC).

Tato metoda neumožňuje odstranit proměnnou, která už do modelu byla přidána.

algoritmus:

- 1) Naladíme minimální model.
- 2) Pro každou dostupnou proměnnou spoštěme F statistiku pro test významnosti jejího přidání do modelu.
- 3) Pokud některá z těchto F statistik překračuje kritickou hodnotu F_{in} , přidáme do modelu proměnnou s nejvyšší hodnotou F statistiky.
- 4) Opakujeme kroky 2) a 3), dokud všechny F-statistiky pro zbývající proměnné nebudou menší, než F_{in} nebo dokud nezbyde žádná proměnná na přidání do modelu.

Poznámka 4.33. I když tento postup zjednodušuje výběr modelu, často bohužel vede na zařazení proměnných, které nemají významný příspěvek, jakmile jsou zařazeny další proměnné.

4) Postupná regrese (stepwise regression)

Kombinace dvou předchozích metod. V každém kroku algoritmu přidáváme jednu proměnnou a poté zkонтrolujeme, zda není možné nějakou odebrat. Budeme potřebovat dvě kritické hodnoty F_{in} , F_{OUT} (pro použití F statistiky).

algoritmus:

- 1) Naladíme minimální model.
- 2) Zjistíme, zda přidání nějaké další proměnné může zlepšit model (F nebo AIC). Pokud ano, přidáme do modelu proměnnou, která má za následek největší zlepšení modelu (nebo největší pokles AIC).
- 3) V novém modelu zjistíme, zda nelze některou proměnnou vynechat (opět pomocí AIC nebo F). Pokud ano, vynecháme proměnnou, jejíž vyřazení má za následek největší zlepšení modelu (nebo největší pokles AIC).
- 4) Opakujeme kroky 2) a 3) do té doby, až nebude možné přidat ani ubrat žádnou proměnnou.

Princip marginality:

- 1) Pokud jsou v modelu vyšší mocniny nějakého regressoru, měly by tam být obsaženy i všechny jeho nižší mocniny (i když jsou případně nevýznamné).

4 Rezidua, diagnostika a transformace

2) Pokud je v modelu obsažena interakce dvou regressorů, měly by tam být i oba individuální regresory.

3) S každou interakcí vyššího řádu by měl model obsahovat i všechny interakce řádu nižšího. ($a : b : c \rightarrow a : b, a : c, b : c$).

Poznámka 4.34. Jakmile nalezneme optimální model, je třeba řádně ověřit adekvátnost.