Vícerozměrná regrese

předp., že kromě y_i máme pro každé $i \in \hat{n}$

k dispozici také m nez. proměnných $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}$

model:

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{ij} + e_i \,, \qquad i = 1, \dots, n$$

kde $e_1, \dots, e_n$ jsou nezávislé (nekorelované) chyby a $e_i \sim (0, \sigma^2)$.

na základě pozorování $(x_{i1}, \dots, x_{im}, y_i)$, $i = 1, \dots, n$

chceme odhadnout par. $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)^T$ (proložení dat $m+1$ dim. nadrovinou)

předp. $n > m+1$ (více dat než parametrů)

maticový zápis:

$$\mathbb{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T, \qquad \mathbb{y} = (y_1, \dots, y_n)^T, \qquad \mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)^T$$

ozn.

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & & x_{nm} \end{bmatrix}$$

design matrix
matice modelu
regresní matice

model:

$$\mathbb{Y}_{n\times 1} = \mathbb{X}_{n\times(m+1)}\, \beta_{(m+1)\times 1} + \mathbb{e}_{n\times 1} \qquad (**)$$

- nyní budeme předp. $e_1,\dots,e_n$ nez., $e_i \sim N(0,\sigma^2)$,

tzn. $e \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$ a $Y \sim N_n(X\beta, \sigma^2 I_n)$

věrohodnostní funkce: $L(\beta,\sigma^2) = f_Y(y) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i-\mu_i)^2}$

$\mu_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij}$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_i)^2} =$$

$\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n)^T = X\beta$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^T(y-\mu)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-X\beta)^T(y-X\beta)}$$

pro pevné σ^2 je

$$\max_{\beta} L(\beta,\sigma^2) \iff \min_{\beta} \underbrace{(y-X\beta)^T(y-X\beta)}_{g(\beta)}$$

lze opět pomocí derivací, ukážeme algebraický přístup

Věta: Uvažujme model (**) a nechť $e \sim N(0,\sigma^2 I_n)$.

Potom $\hat\beta$ je MLE β $\iff$ $\hat\beta$ je řešením soustavy rovnic

$$X^T X \beta = X^T y \qquad \text{(soustava normálních rovnic)} \quad (A)$$

je-li matice $X^T X$ nesingulární, má tato soustava jednoznačné řešení ve tvaru

$$\hat\beta = (X^T X)^{-1} X^T y.$$

Dk: $\Leftarrow$: ukážeme, že každé řešení $\hat{\beta}$ soustavy (A) minimalizuje $g(\beta)$

pro každé β platí:

$$\underline{g(\beta)} = (y - X\beta)^T (y - X\beta) = y^T y - 2\underbrace{y^T X}_{\hat{\beta}^T X^T X}\beta + \beta^T X^T X \beta =$$

$$= \underline{y^T y - 2\hat{\beta}^T X^T X \beta + \beta^T X^T X \beta}$$

musí platit i pro $\hat{\beta}$: $\quad \underline{g(\hat{\beta})} = y^T y - 2\hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta} + \hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta} =$

$$= \underline{y^T y - \hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta}}$$

a tedy $\quad \underline{g(\beta) - g(\hat{\beta})} = \beta^T X^T X \beta - 2\hat{\beta}^T X^T X \beta + \hat{\beta} X^T X \hat{\beta} =$

$$= (X\beta - X\hat{\beta})^T (X\beta - X\hat{\beta}) = (X(\beta - \hat{\beta}))^T (X(\beta - \hat{\beta}))$$

$$=: \langle X(\beta - \hat{\beta}) ; X(\beta - \hat{\beta}) \rangle \ \underline{\geq 0} \quad \underline{\forall \beta} \qquad (\#)$$

$\Downarrow$

$\hat{\beta}$ minimalizuje $g(\beta)$

a je tedy MLE par. β

$\Rightarrow$: předp., že $\hat{\beta}_1$ min. $g(\beta)$ (je tedy MLE)

tzn. $g(\hat{\beta}_1) \leq g(\beta) \ \forall \beta$, spec. $g(\hat{\beta}_1) \leq g(\hat{\beta})$ kde $\hat{\beta}$ je řešení (A)

z (#) $\Rightarrow$ $g(\hat{\beta}_1) \geq g(\hat{\beta})$, celkem tedy $\underline{g(\hat{\beta}_1) = g(\hat{\beta})}$

dosazení do (#) $\quad 0 = g(\hat{\beta}_1) - g(\hat{\beta}) = \langle X(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}) ; X(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}) \rangle$

a tedy $X(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}) = 0 \quad | \ X^T$ zleva

$$X^T X \hat{\beta}_1 - \underbrace{X^T X \hat{\beta}}_{X^T y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{X^T X \hat{\beta}_1 = X^T y}$$

a $\hat{\beta}_1$ splňuje soustavu (A)

Aby byl důkaz korektní, je třeba ukázat, že soustava (A) má vždy alespoň 1 řešení

pokud ex. $(X^T X)^{-1}$ není co dokazovat, řešení přímo máme

co když je $X^T X$ singulární?

<u>Lemma:</u> Soustava lin. rovnic $Ax = y$ má řešení $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle y; z \rangle = 0$ pro všechna z splňující $A^T z = 0$.

<u>Věta:</u> Soustava normálních rovnic (A) má vždy alespoň jedno řešení.

<u>Dk:</u> $X^T X \beta = X^T y$

musíme ukázat, že $\langle X^T y, z \rangle = 0 \quad \forall z$ splňující $X^T X z = 0$

$X^T X z = 0 \Rightarrow \langle X^T X z, z \rangle = \langle X z, X z \rangle = 0$ a tedy $Xz = 0$

obecně platí

celkem $\langle X^T y, z \rangle = \langle y, X z \rangle = 0$. $\quad \langle x, A y \rangle = \langle A^T x, y \rangle$

<u>POZN:</u> Z vět vyplývá, že MLE β může být nalezeno řešením $m+1$ lin. rovnic o $m+1$ neznámých.
Málokdy ex. analytické řešení, je třeba použít numerické metody.
Matice $X^T X$ může být v prakt. aplikacích špatně podmíněná, což ovlivňuje numerickou přesnost $\hat{\beta}$. Proto se často užívají metody zpětné jako Choleského rozklad, QR rozklad, singulární rozklad (SVD).

zmínit možnost ověření bodů

str. 188

Odvodili jsme pro normální chyby. Minimalizace $g(\beta)$ lze ale použít i pro jiné druhy chyb, potom se $\hat{\beta}$ nazývá

ordinary least squares estimate (OLS)

obyčejný nejmenší čtverce

asi nejpoužívanější metoda pro odhad β.

Jak poznat, že mají normální rovnice jednoznačné řešení bez nutnosti výpočtu $X^T X$?

Věta: Matice $X^T X$ je nesingulární $\Leftrightarrow$ jsou sloupce matice X LN

Dk. $\Leftarrow$: sporem nechť jsou sloupce X LN a matice $X^T X$ sing.

tzn. $\exists c \neq 0$ tak, že $X^T X c = 0$

$0 = \langle c, X^T X c \rangle = \langle Xc, Xc \rangle \Rightarrow Xc = 0, \quad \sum c_i x_i^c = 0,$

kde $c = (c_1, \dots, c_m)^T$ a x_i^c je i-tý sloupec matice X

$\Rightarrow$ sloupce X jsou LZ spor

$\Rightarrow$: sporem předp. $X^T X$ regulární a sloupce X LZ

tz. ex. $c \neq 0$ takové, že $Xc = 0 \quad | \cdot X^T$

$X^T X c = 0 \Rightarrow X^T X$ je singulární, spor

POZN: $X_{n \times (m+1)}, \quad n > m+1, \quad h(X) = m+1, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$

$\Rightarrow$ ex. jedn. řešení normálních rovnic $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$.

POZN: • pokud jsou sloupce X LZ je $X^T X$ singulární, což je většinou detekováno numerickou metodou výpočtu $\hat{\beta}$

- horší situace je, pokud jsou sloupce X „téměř" LZ

tzv. <u>multikolinearita</u>

způsobuje problémy při výpočtu $\hat{\beta}$ protože je $X^T X$ „téměř" singulární

jak ji detekovat probereme na konci přednášky.

Odhad parametru σ^2

- pro normální chyby získáme MLE σ^2 derivací $\ln L(\beta, \sigma^2)$

z čehož plyne

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} SSE = \frac{1}{n} (y - X\hat{\beta})^T (y - X\hat{\beta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

kde $\hat{y}_i = (X\hat{\beta})_i = x_i^T \hat{\beta}$ $\quad i = 1, \dots, n$

kde x_i^T značí i-tý řádek matice X.

protože se jedná o vychýlený odhad, používá se obecně odhad

$$s_n^2 = \frac{1}{n-(m+1)} SSE = \frac{1}{n-m-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

a $\quad s_n = \sqrt{s_n^2}$ jako odhad σ (už není nestranný)

- pro $e_i \sim (0, \sigma^2)$ se také používají statistiky s_n^2, s_n

Př. (Ex. 5.13, str. 138)

Př. (Ex. 5.15, str. 203)

Vlastnosti odhadů $\hat{\beta}$, s_n^2

Věta: Nechť $\hat{\beta}$ je OLS odhad par. β v modelu $(**)$, kde $h(\mathbb{X}) = m-1$ a $e_1, \dots, e_n$ nezávislé, $e_i \sim (0, \sigma^2)$.

Potom platí:

1) $E(\hat{\beta}) = \beta$ ($\hat{\beta}$ je nestranný!)

2) $Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2 (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}$

3) $E(s_n^2) = \sigma^2$ (s_n^2 je nestranný!)

4) pokud navíc $e_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$, potom

$$\hat{\beta} \sim N_{m-1}(\beta, \sigma^2 (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1})$$

~~sp~~ speciálně $\hat{\beta}_i \sim N(\beta_i, \sigma^2 v_i)$, kde v_i je i-tý diag. prvek matice $(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}$

$v_i = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}_{ii}$

Dk: 1) $h(\mathbb{X}) = m-1 \Rightarrow \hat{\beta} = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbb{Y}$

$$E\hat{\beta} = E[(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbb{Y}] = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \underbrace{E(\mathbb{Y})}_{= \mathbb{X}\beta} = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbb{X} \beta = \beta$$

2) ($\underset{n \times 1}{\mathbb{Y}}$ náh. vektor, $Cov(\mathbb{Y}) = \Sigma$, $A_{m,n}$ matice, potom

$Cov(A\mathbb{Y}) = A \Sigma A^T$)

protože $\hat{\beta} = A\mathbb{Y}$, kde $A = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T$, $\hat{\beta}$ je LK $Y_1, \dots, Y_n$ a $Cov(\mathbb{Y}) = \sigma^2 I_n$

$$Cov\, \hat{\beta} = (\mathbb{X}^T \mathbb{X}^{-1}) \mathbb{X}^T \sigma^2 I_n \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} =$$

$$= \sigma^2 (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}.$$

3) nejdříve přepíšeme vektor residuí $\hat{e} = Y - X\hat{\beta} = Y - \hat{Y}$

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} = X(X^TX)^{-1}X^TY = \mathbb{H}Y,$$ kde $\mathbb{H} = X(X^TX)^{-1}X^T$ je projekční matice

$$\hat{e} = Y - \mathbb{H}Y = (I_n - \mathbb{H})Y$$

dále platí

$$(I_n - \mathbb{H})X = X - X(X^TX)^{-1}X^TX = X - X = 0,$$ takže

$$\hat{e} = (I_n - \mathbb{H})Y = (I_n - \mathbb{H})(X\beta + e) = \underbrace{(I_n - \mathbb{H})X}_{=0}\beta + (I_n - \mathbb{H})e = (I_n - \mathbb{H})e$$

zřejmě $\mathbb{H}^T = \mathbb{H}$ a $\mathbb{H}^2 = [X(X^TX)^{-1}X^T][X(X^TX)^{-1}X^T] = X(X^TX)^{-1}X^T = \mathbb{H}$

a $(I_n - \mathbb{H})^2 = I_n - \mathbb{H}$ ($\mathbb{H}$ je symetrické a idempotentní)

$$SSE = (Y - \hat{Y})^T(Y - \hat{Y}) = \hat{e}^T\hat{e} = e^T(I_n - \mathbb{H})(I_n - \mathbb{H})e = e^T(I_n - \mathbb{H})e$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, e_i e_j$$ kde g_{ij} je (i,j)-prvek matice $I_n - \mathbb{H}$

$$E(SSE) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, \underbrace{E(e_i e_j)}_{\substack{\| \\ \operatorname{Cov}(e_i, e_j)}} \overset{\text{nekorel.}}{=} \sum_{i=1}^{n} g_{ii} \operatorname{Var} e_i = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} g_{ii}$$

$E e_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ii} = \operatorname{tr}(I_n - \mathbb{H}) = \operatorname{tr}(I_n) - \operatorname{tr}(\mathbb{H}) = n - \operatorname{tr}(X(X^TX)^{-1}X^T)$$

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$

$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr} BA$

$$= n - \operatorname{tr}(X^TX(X^TX)^{-1}) = n - \operatorname{tr}(I_{m+1})$$

$$= n - (m+1)$$

celkem $$E s_n^2 = \frac{1}{n-(m+1)} E(SSE) = \frac{1}{n-(m+1)} \cdot \sigma^2(n-(m+1)) = \sigma^2$$

4) $\hat{\beta}$ je LK $Y_1, \dots, Y_n$, nezávislé, normálně rozdělené

Q.E.D.

$$\hat{\beta} \sim N_{m+1}(\beta, \sigma^2 (X^T X)^{-1})$$

POZN: Vlastnosti projekční matice:

$\mathbb{H} = X(X^T X)^{-1} X^T$ $\quad \hat{Y} = \mathbb{H} Y \quad$ $\mathbb{H}^T = \mathbb{H}$, $(I_n - \mathbb{H})^T = (I_n - \mathbb{H})$ symetrie

$\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}$, $(I_n - \mathbb{H})^2 = I_n - \mathbb{H}$ (idempotentnost)

$\mathbb{H} X = X \quad tr(\mathbb{H}) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii} = m+1$

$\mathbb{H}(I_n - \mathbb{H}) = (I_n - \mathbb{H})\mathbb{H} = 0$

Věta: nechť $Y = X\beta + e$ je LM$^{(**)}$, kde $h(X) = m+1$ a $e \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$.

Potom

1) $\hat{\beta}$ a s_n^2 jsou nezávislé náh. vel.

2) $(n-m-1)\dfrac{s_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-m-1)$

3) jestliže $v_i = (X^T X)^{-1}_{ii}$, potom $T_i = \dfrac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s_n \sqrt{v_i}} \sim t(n-m-1)$

4) nechť $C \in \mathbb{R}^{r, m+1}$ takové, že $h(C) = r$. Potom kvadratická forma

$$\frac{q}{\sigma^2} = \frac{(\hat{\beta}-\beta)^T C^T \left[C(X^T X)^{-1} C^T\right]^{-1} C(\hat{\beta}-\beta)}{\sigma^2} \sim \chi^2(r)$$

Dk:

1) $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = (X^T X)^{-1} X^T (X\beta + e) = \beta + (X^T X)^{-1} X^T e$

a tedy $\hat{\beta} - \beta = (X^T X)^{-1} X^T e$

dále víme, že $\hat{e} = (I_n - \mathbb{H}) e$ a vektor $(\hat{\beta} - \beta, \hat{e})^T$ lze zapsat jelikož $Z = \begin{pmatrix} \hat{\beta} - \beta \\ \hat{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X^TX)^{-1}X^T \\ I_n - H \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e$, kde Z je lineární

je pouze $(e_1, \dots, e_n) = e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ $\Rightarrow$ Z má vícerozměrné

normální rozdělení (i když degenerované, protože $Cov(Z)$ je singulární)

$BB^T = I_n - H$ je sing.

protože $(I_n - H)X = 0$

abychom ukázali, že $\hat{\beta}$ a $\hat{e}$ jsou

nezávislé ($\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-m-1} \hat{e}^T \hat{e}$, tedy i $\hat{\beta}$ a $\hat{\sigma}_n^2$ nez.),

stačí ukázat, že $\cancel{Cov(\hat{\beta}, \hat{e}) = 0}$ $\underline{Cov(\hat{\beta}_i, \hat{e}_j) = 0}$ $i = 0, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$

spočteme $Cov(Z)$:

$$Cov(Z) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} Cov(e) \begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} AA^T & \overset{= 0?}{AB^T} \\ \underset{= 0?}{BA^T} & BB^T \end{pmatrix}$$

$$\left(Cov(\hat{\beta}_i, \hat{e}_j)\right)_{\substack{i = 0, \dots, m \\ j = 1, \dots, n}} = AB^T = (X^TX)^{-1}X^T\left(I_n - X(X^TX)^{-1}X^T\right) =$$

$$= (X^TX)^{-1}X^T - \cancel{(X^TX)^{-1}}\cancel{X^TX}(X^TX)^{-1}X^T = 0$$

2) výsledky z LA:

- <u>spektrální rozklad matice:</u>

  $A_{n \times n}$ symetrická matice $\Rightarrow$ ex. ortogonální matice Q a diagonální matice Λ tak, že $\underline{A = Q \Lambda Q^T}$, kde sloupce Q jsou ON vlastní vektory matice A a diag. prvky matice Λ jsou jim odpovídající vlastní čísla

- $A_{n \times n}$ idempotentní $\Rightarrow$ vlastní čísla jsou pouze 0 nebo 1

  $\Rightarrow$ $h(A) = tr(A)$

z Dk. předchozí věty $(n-m-1)\frac{s_n^2}{\sigma^2} = \frac{SSE}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} e^T(I_n - H)e$

protože je $I_n - H$ symetrická a idempotentní

$I_n - H = Q \Lambda Q^T$ $\quad$ Q ortogonální matice

Λ diag. s vlastními čísly $I_n - H$

protože vl. čísla $I_n - H$ jsou 0 nebo 1 a $tr(I_n - H) = h(I_n - H) = n-m-1$

Λ může být zapsána ve tvaru

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-m-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

tedy

$e^T(I_n - H)e = e^T Q \Lambda Q^T e = q^T \Lambda q$, kde $q = Q^T e$

V: $U \sim N_n(0, I_n)$ a Q je ortogonální matice, potom $QU \sim N_n(0, I_n)$

tzn. q je vektor nez. $N(0, \sigma^2)$ veličin $\quad (q \sim N_n(0, \sigma^2 I_n))$

a $\frac{1}{\sigma^2} e^T(I_n - H)e = \frac{1}{\sigma^2} q^T \Lambda q = \sum_{i=1}^{n-m-1} \frac{q_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-m-1)$

je suma druhých mocnin $n-m-1$ nez. $N(0,1)$ veličin, tzn.

3) z předchozí věty $\frac{\hat\beta_i - \beta_i}{\sigma\sqrt{v_{ii}}} \sim N(0,1)$

$$T_i = \frac{\hat\beta_i - \beta_i}{s_n \sqrt{v_{ii}}} = \frac{\overbrace{\frac{\hat\beta_i - \beta_i}{\sigma\sqrt{v_{ii}}}}^{\sim N(0,1)}}{\frac{s_n}{\sigma}} \sim t(n-m-1)$$

$\frac{s_n}{\sigma} = \sqrt{\frac{\frac{(n-m-1)s_n^2}{\sigma^2}}{n-m-1}} \overset{2) \Rightarrow}{=} \sqrt{\frac{\chi^2(n-m-1)}{n-m-1}}$

1) $\Rightarrow$ nezávislost

4) $C\hat{\beta} \sim N_r(C\beta, \sigma^2 C(X^TX)^{-1}C^T)$ a tedy

$$C(\hat{\beta}-\beta) = C\hat{\beta} - C\beta \sim N_r(0, \sigma^2 C(X^TX)^{-1}C^T)$$

Stačí tedy ukázat, že pokud $Z \sim N_r(0, \Sigma)$, potom

$$Z^T \Sigma^{-1} Z \sim \chi^2(r)$$

protože Σ je PD, ex. regulární matice R taková, že $\Sigma = RR^T$

položme $U = R^{-1}Z$, potom $EU = R^{-1}EZ = 0$

$$Cov(U) = R^{-1}\Sigma(R^{-1})^T = R^{-1}RR^T(R^T)^{-1} = I_r \quad \text{tedy } U \sim N_r(0, I_r)$$

tedy složky U jsou nezávislé $N(0,1)$ rozdělené náh. vel.

$$Z^T\Sigma^{-1}Z = U^TR^T(R^T)^{-1}R^{-1}RU = U^TU = \sum_{i=1}^{r} U_i^2 \sim \chi^2(r)$$

Za $Z = C(\hat{\beta}-\beta)$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\left[C(X^TX)^{-1}C^T\right]^{-1}$$

Q.E.D.

Vlastnosti vektoru reziduí $\hat{e}$

Věta: Uvažujme model $Y = X\beta + e$, kde $e_1, \dots, e_n$ jsou nekorelované a $e_i \sim (0, \sigma^2)$. Nechť $\hat{\beta}$ je OLS β a $\hat{e} = Y - \hat{Y}$ je vektor reziduí. Potom platí:

1) $E\hat{e} = 0$ 2) $Cov(\hat{e}) = \sigma^2(I_n - H)$

3) pokud navíc $e \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$, potom $\hat{e} \sim N_n(0, \sigma^2(I_n - H))$

4) jestliže má model intercept, tj. $\beta_0 \neq 0$, potom $\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i = 0$

5) $\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i \hat{y}_i = 0$.

Dk: uhořadli jsme, že $\hat{e} = (I_n - H)\,e$

1) $E\hat{e} = (I_n - H)\,\underset{0}{\underbrace{Ee}} = 0$

2) $\mathrm{Cov}(\hat{e}) = (I_n - H)\,\underset{\sigma^2 I_n}{\underbrace{\mathrm{Cov}(e)}}\,(I_n - H)^T = \sigma^2 (I_n - H)$

3) $\hat{e}$ je LK složek e $\Rightarrow$ $\hat{e} \sim N_n(0, \sigma^2(I_n - H))$

4) soustavu ~~normálních~~ normálních rovnic $X^T X \beta = X^T y$ lze zapsat

$$X^T (y - X\beta) = 0$$

první rovnice: $\sum_{i=1}^{n} \underset{1 \text{ pro model s interceptem}}{\underbrace{x_{i1}}} \cdot (y_i - x_i^T \beta) = 0$

pro $\hat{\beta}$ tedy platí $\underline{0} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i^T \hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i) = \underline{\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i}$

5) z předchozího bodu platí pro OLS $\hat{\beta}$

$X^T (y - X\hat{\beta}) = 0$ přenásobíme zleva $\hat{\beta}^T$

$\underline{0} = \hat{\beta}^T X^T (y - X\hat{\beta}) = \hat{y}^T (y - \hat{y}) = \hat{y}^T \hat{e} = \underline{\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i \hat{e}_i}$ Q.E.D.

Použitím bodů 4) a 5) dostaneme (stejně jako u jednorozměrné regrese)

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

tedy $\underline{SST = SSR + SSE}$ (v modelu s interceptem)