ماژول اول آمار و احتمال

بخش سوم - احتمال - ۲

المپیاد هوش مصنوعی

۱. احتمال شرطی
۲. قانون زنجیری
۳. استقلال
۴. قانون احتمال کل
۵. قانون بیز
۶. استقلال شرطی

تعریف احتمال شرطی

احتمال شرطی یک رویداد B، احتمال وقوع آن رویداد است با توجه به دانشی که از وقوع رویداد A داریم. این احتمال به صورت $P(B|A)$ نوشته می‌شود که نماد احتمال B با توجه به A است. به عبارت دیگر احتمال رخ دادن رویداد B به شرطی که بدانیم رویداد A رخ داده است را با $P(A|B)$ نشان می‌دهیم.

مثال

یک تاس منصفانه می‌ریزیم. فرض کنید A رویدادی باشد که نتیجه یک عدد فرد باشد، یعنی $A = \{1, 3, 5\}$. همچنین فرض کنید B رویدادی باشد که نتیجه کمتر یا مساوی ۳ باشد، یعنی $B = \{1, 2, 3\}$. احتمال A چیست، یعنی $P(A)$؟ احتمال A با توجه به B، یعنی $P(A|B)$ چیست؟

حل

این یک فضای نمونه محدود است، بنابراین:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{|\{1,3,5\}|}{6} = \frac{1}{2}.$$

حالا احتمال شرطی $P(A|B)$ را پیدا می‌کنیم. اگر بدانیم B رخ داده است، نتیجه باید بین $\{1,2,3\}$ باشد. برای اینکه A نیز رخ دهد، نتیجه باید در $\{A \cap B = \{1,3\}\}$ باشد. از آنجا که همه حالت‌های پرتاب تاس به‌طور مساوی محتمل هستند، داریم:

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{2}{3}.$$

رابطه کلی

حالا ببینیم چگونه می‌توانیم مثال بالا را تعمیم دهیم. می‌توانیم محاسبه را با تقسیم صورت و مخرج بر $|S|$ به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|S|}}{\frac{|B|}{|S|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

اگرچه محاسبه بالا برای یک فضای نمونه محدود با نتایج به طور مساوی محتمل انجام شده است، اما نشان داده می‌شود که فرمول حاصل کاملاً کلی است و می‌توان آن را در هر شرایطی اعمال کرد. در ادامه، فرمول را به صورت رسمی ارائه می‌کنیم و سپس شهود پشت آن را توضیح می‌دهیم.

رابطه کلی

اگر A و B دو رویداد در یک فضای نمونه S باشند، احتمال شرطی A با توجه به B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

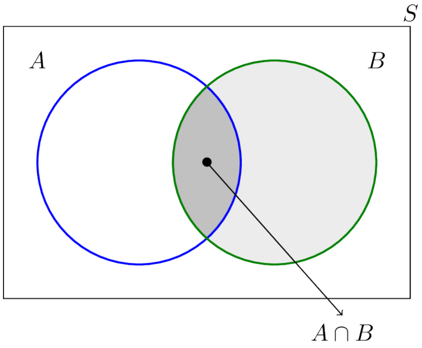
به شرطی که $P(B) > 0$.

شهود احتمال شرطی

در اینجا شهود پشت فرمول آمده است. وقتی می‌دانیم B رخ داده است، هر نتیجه‌ای که خارج از B باشد باید کنار گذاشته شود. بنابراین، فضای نمونه ما به مجموعه B کاهش می‌یابد (شکل ۱). حالا تنها راهی که A می‌تواند رخ دهد این است که نتیجه متعلق به مجموعه $A \cap B$ باشد. ما $P(A \cap B)$ را بر $P(B)$ تقسیم می‌کنیم.

توجه کنید که احتمال شرطی $P(A|B)$ زمانی که $P(B) = 0$ باشد تعریف نشده است. این موضوع طبیعی است، زیرا اگر $P(B) = 0$ باشد، به این معنا است که رویداد B هرگز رخ نمی‌دهد، بنابراین صحبت کردن درباره احتمال A با توجه به B منطقی نیست.

شهود احتمال شرطی



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

شکل ۱: احتمال شرطی

برقراری اصول احتمال

توجه به این نکته مهم است که احتمال شرطی خود یک اندازه‌گیری احتمال است، بنابراین از اصول احتمال پیروی می‌کند. به طور خاص:

- اصل ۱: برای هر رویداد A، داریم $P(A|B) \geq 0$.
- اصل ۲: احتمال شرطی B با توجه به B، برابر ۱ است، یعنی $P(B|B) = 1$.
- اصل ۳: اگر $A_1, A_2, A_3, \ldots$ رویدادهای ناسازگار باشند، آنگاه:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots |B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + P(A_3|B) + \cdots .$$

روابط بیشتر

در واقع، همه قوانینی که تاکنون یاد گرفته‌ایم می‌توانند به احتمال شرطی گسترش یابند. به عنوان مثال: برای سه رویداد A، B و C که $P(C) > 0$ داریم:

- $P(A^c|C) = 1 - P(A|C)$؛
- $P(\emptyset|C) = 0$؛
- $P(A|C) \leq 1$؛
- $P(A - B|C) = P(A|C) - P(A \cap B|C)$؛
- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$؛
- اگر $B \subset A$ باشد، آنگاه $P(B|C) \leq P(A|C)$.

قانون زنجیری در احتمال شرطی

بیایید فرمول احتمال شرطی را به صورت زیر بنویسیم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \quad (۱)$$

این فرمت به‌ویژه در شرایطی مفید است که احتمال شرطی را می‌دانیم اما به دنبال احتمال اشتراک هستیم.

حالت کلی قانون زنجیری

حالا می‌توانیم این فرمول را به سه یا بیشتر از سه رویداد گسترش دهیم:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap (B \cap C)) = P(A)P(B \cap C|A) \tag{۲}$$

از **معادله ۱**، داریم:

$$P(B \cap C) = P(B)P(C|B)$$

حالت کلی قانون زنجیری

حالا می‌توانیم این فرمول را به سه یا بیشتر از سه رویداد گسترش دهیم:
با شرطبندی دو طرف بر A، به دست می‌آوریم:

$$P(B \cap C|A) = P(B|A)P(C|A, B) \tag{۳}$$

با ترکیب **معادله ۲** و **معادله ۳**، قانون زنجیره‌ای زیر را به دست می‌آوریم:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A, B)$$

نکته اینجا فهمیدن چگونگی استخراج این فرمول‌ها و تلاش برای داشتن شهود درباره آن‌ها است، نه فقط حفظ کردن آن‌ها.

حالت کلی قانون زنجیری

بیان کلی قانون زنجیره‌ای برای n رویداد به صورت زیر است:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2, A_1) \cdots P(A_n|A_{n-1}A_{n-2} \cdots A_1)$$

مثال

در یک کارخانه، ۱۰۰ واحد از یک محصول وجود دارد که ۵ واحد آن معیوب است. ما به صورت تصادفی سه واحد از این ۱۰۰ واحد انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه هیچ‌کدام از آن‌ها معیوب نباشند چقدر است؟

حل

بیایید A_i را به عنوان رویدادی تعریف کنیم که iـمین واحد انتخاب شده معیوب نیست، برای $i = 1, 2, 3$. ما به محاسبه $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ علاقه‌مند هستیم. توجه کنید که:

$$P(A_1) = \frac{95}{100}.$$

با توجه به اینکه اولین واحد انتخاب‌شده سالم بود، واحد دوم از ۹۴ واحد سالم و ۵ واحد معیوب انتخاب خواهد شد، بنابراین:

$$P(A_2|A_1) = \frac{94}{99}.$$

با توجه به اینکه اولین و دومین واحدهای انتخاب‌شده سالم بودند، واحد سوم از ۹۳ واحد سالم و ۵ واحد معیوب انتخاب خواهد شد، بنابراین:

$$P(A_3|A_2, A_1) = \frac{93}{98}.$$

حل

بنابراین، داریم:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2, A_1) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} = 0.8560.$$

یک روش دیگر برای حل این مسئله استفاده از استدلال شمارش است.

رویدادهای مستقل

فرض کنید A رویدادی باشد که فردا باران ببارد و فرض کنید $P(A) = \frac{1}{3}$. همچنین فرض کنید که یک سکه منصفانه پرتاب کنم؛ B رویدادی باشد که نتیجه پرتاب خط بیاید. داریم $P(B) = \frac{1}{2}$.
حالا از شما می‌پرسم، $P(A|B)$ چیست؟ حدس شما چیست؟

رویدادهای مستقل

احتمالاً حدس زده‌اید که:

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{3}.$$

درست حدس زدید! نتیجه پرتاب سکه من هیچ ارتباطی با وضعیت آب‌وهوای فردا ندارد. بنابراین، مهم نیست که B رخ دهد یا خیر، احتمال A نباید تغییر کند. این یک مثال از دو رویداد **مستقل** است. دو رویداد مستقل هستند اگر یکی از آن‌ها هیچ اطلاعاتی درباره دیگری ارائه ندهد.

تعریف استقلال

حالا تعریف رسمی استقلال را ارائه می‌دهیم.

دو رویداد A و B مستقل هستند اگر و تنها اگر:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

و آن را با $B \perp\!\!\!\perp A$ نشان می‌دهیم.

ارتباط با احتمال شرطی

حال، ابتدا این تعریف را با آنچه قبلاً ذکر کردیم هماهنگ می‌کنیم، یعنی $P(A|B) = P(A)$. اگر دو رویداد مستقل باشند، آنگاه $P(A \cap B) = P(A)P(B)$، بنابراین:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

بنابراین، اگر دو رویداد A و B مستقل باشند و $P(B) \neq 0$، آنگاه $P(A|B) = P(A)$. به طور خلاصه، می‌توان گفت "استقلال به این معنا است که می‌توانیم احتمال رویدادها را ضرب کنیم تا احتمال اشتراک آن‌ها را به دست آوریم" یا به عبارت دیگر، "استقلال به این معنا است که احتمال شرطی یک رویداد با توجه به دیگری همان احتمال اصلی (پیشین) است."

شهود استقلال

گاهی اوقات استقلال دو رویداد کاملاً واضح است، زیرا به نظر می‌رسد که دو رویداد هیچ تعامل فیزیکی با یکدیگر ندارند (مانند دو رویدادی که در بالا بحث شد). در مواقع دیگر، این موضوع به این وضوح نیست و باید بررسی کنیم که آیا آن‌ها شرط استقلال را برآورده می‌کنند یا خیر. بیایید به یک مثال نگاه کنیم.

مثال

من یک عدد تصادفی از مجموعه $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ انتخاب می‌کنم و آن را N می‌نامم. فرض کنید همه خروجی‌ها به طور مساوی محتمل هستند. فرض کنید A رویدادی باشد که N کمتر از ۷ باشد و B رویدادی باشد که N یک عدد زوج باشد. آیا A و B مستقل هستند؟

حل

داریم $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$، و $A \cap B = \{2, 4, 6\}$. بنابراین:

$$P(A) = 0.6,$$
$$P(B) = 0.5,$$
$$P(A \cap B) = 0.3.$$

ازاین‌رو، $P(A \cap B) = P(A)P(B)$، پس A و B مستقل هستند. این بدان معنا است که دانستن اینکه B رخ داده است باور ما درباره احتمال A را تغییر نمی‌دهد. در این مسئله، دو رویداد مربوط به یک عدد تصادفی هستند، اما همچنان مستقل‌اند زیرا تعریف استقلال را برآورده می‌کنند.

حالت عمومی

تعریف استقلال را می‌توان به حالت سه یا بیشتر از سه رویداد گسترش داد.
سه رویداد A، B و C مستقل هستند اگر **تمام** شرایط زیر برقرار باشد:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C),$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

توجه داشته باشید که هر چهار شرط بیان‌شده باید برای سه رویداد مستقل برقرار باشند. به‌طور خاص، ممکن است موقعیت‌هایی وجود داشته باشد که سه شرط برقرار باشند، اما شرط چهارم برقرار نباشد.

حالت عمومی

به‌طور کلی، برای n رویداد $A_1, A_2, \cdots, A_n$ برای مستقل بودن، باید داشته باشیم:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j),$$

برای همه i, j متمایز و $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$؛

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k),$$

برای همه i, j, k متمایز و $i, j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$؛

$$\cdots$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \cdots P(A_n).$$

حالت عمومی

این ممکن است به‌عنوان یک تعریف دشوار به نظر برسد، اما معمولاً می‌توان به روشی بسیار ساده‌تر استدلال کرد که رویدادها مستقل هستند . برای مثال، ممکن است بتوانیم استقلال را با توجه به نحوه انجام آزمایش تصادفی توجیه کنیم. یک مثال ساده از رویداد مستقل زمانی است که شما سکه‌ای را به‌طور مکرر پرتاب می‌کنید. در چنین آزمایشی، نتایج هر زیرمجموعه از پرتاب‌های سکه تأثیری بر نتایج دیگر ندارند.

مثال

من یک سکه را به طور مکرر پرتاب می‌کنم تا زمانی که اولین شیر مشاهده شود و سپس متوقف می‌شوم. فرض کنید X تعداد کل پرتاب‌های سکه باشد. $P(X = 5)$ را بیابید.

حل

در اینجا، نتیجه آزمایش تصادفی یک عدد X است. هدف یافتن $P(A) = P(5)$ است. اما $X = 5$ چه معنایی دارد؟ این به این معنا است که چهار پرتاب اول سکه نتیجه شیر می‌دهند و پرتاب پنجم نتیجه خط می‌دهد. بنابراین مسئله یافتن احتمال توالی $HHHHT$ در زمانی است که سکه را پنج بار پرتاب می‌کنیم. توجه کنید که $HHHHT$ به صورت خلاصه نماد رویداد "(پرتاب اول سکه نتیجه شیر می‌دهد) و (پرتاب دوم سکه نتیجه شیر می‌دهد) و (پرتاب سوم سکه نتیجه شیر می‌دهد) و (پرتاب چهارم سکه نتیجه شیر می‌دهد) و (پرتاب پنجم سکه نتیجه خط می‌دهد)" است. از آنجا که تمام پرتاب‌های سکه مستقل هستند، می‌توانیم بنویسیم:

$$P(HHHHT) = P(H)P(H)P(H)P(H)P(T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}.$$

بحث

درک این مسئله برای برخی افراد بصورت روبرو قابل فهم تر است: من هرگز پرتاب سکه را متوقف نمی‌کنم. بنابراین نتیجه این آزمایش همیشه یک دنباله بی‌نهایت از شیر یا خط است. مقدار X (که ما به آن علاقه‌مندیم) فقط یک تابع از بخش ابتدایی این دنباله تا زمانی است که یک خط مشاهده کنید. اگر به این شکل به مسئله فکر کنید، نباید نگران زمان توقف باشید. برای این مسئله ممکن است تفاوت زیادی به‌صورت مفهومی ایجاد نکند، اما برای برخی مسائل مشابه این شیوه تفکر ممکن است مفید باشد.

اکنون ما دیده‌ایم که دو رویداد A و B مستقل هستند ($A \perp\!\!\!\perp B$) اگر $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. در دو نتیجه بعدی، بررسی می‌کنیم که استقلال چه چیزی می‌تواند درباره سایر عملیات مجموعه‌ای مانند مکمل‌ها و اجتماع‌ها به ما بگوید.

لم ۱

اگر $A \perp\!\!\!\perp B$، آنگاه:

- $A \perp\!\!\!\perp B^c$،
- $A^c \perp\!\!\!\perp B$،
- $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$.

اثبات لم ۱

اولین مورد را اثبات می‌کنیم، زیرا سایر موارد می‌توانند به راحتی از مورد اول نتیجه گرفته شوند. داریم:

$$P(A \cap B^c) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \quad \text{چون} A \perp\!\!\!\perp B.$$

$$= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c).$$

بنابراین، $A \perp\!\!\!\perp B^c$.

اجتماع رویدادهای مستقل

گاهی اوقات ما به احتمال اجتماع چندین رویداد مستقل $A_1, A_2, \cdots, A_n$ علاقه‌مند هستیم. برای رویدادهای مستقل، می‌دانیم که چگونه احتمال اشتراک را پیدا کنیم، اما احتمال اجتماع به این سادگی نیست. در این موارد استفاده از قانون دمورگان مفید است:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = (A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c)^c.$$

اجتماع رویدادهای مستقل

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c) = 1 - P(A_1^c)P(A_2^c)\cdots P(A_n^c) \\
&= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))\cdots(1 - P(A_n)).
\end{aligned}
$$

پس اگر $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مستقل باشند، آنگاه:

$$
P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))\cdots(1 - P(A_n)).
$$

اشتباه متداول

یک اشتباه رایج این است که استقلال و مجزا بودن (disjoint بودن) را با یکدیگر اشتباه بگیریم. این‌ها مفاهیمی کاملاً متفاوت هستند. وقتی دو رویداد A و B مجزا هستند، به این معنا است که اگر یکی از آن‌ها رخ دهد، دیگری نمی‌تواند رخ دهد، یعنی $A \cap B = \emptyset$. بنابراین، رویداد A معمولاً اطلاعات زیادی درباره رویداد B می‌دهد، که به این معنا است که آن‌ها نمی‌توانند مستقل باشند. بیایید این موضوع را دقیق‌تر کنیم.

لم ۲

دو رویداد A و B را در نظر بگیرید که $P(A) \neq 0$ و $P(B) \neq 0$. اگر A و B مجزا باشند، آنگاه آن‌ها مستقل نیستند.

اثبات

از آنجا که A و B مجزا هستند، داریم:

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B).$$

بنابراین، A و B مستقل نیستند.

نتیجه

جدول زیر دو مفهوم مجزا بودن و استقلال را خلاصه می‌کند.

مفهوم	معنا	فرمول‌ها
مجزا (Disjoint)	A و B نمی‌توانند همزمان رخ دهند	$A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
مستقل (Independent)	A هیچ اطلاعاتی درباره B نمی‌دهد	$P(A\|B) = P(A)$, $P(B\|A) = P(B)$, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

قانون احتمال کل چیست؟

بیایید این بخش را با پرسیدن یک سوال بسیار ساده شروع کنیم: در یک کشور خاص سه استان وجود دارد، آنها را B_1، B_2 و B_3 می‌نامیم (یعنی کشور به سه مجموعه غیر تقاطع تقسیم می‌شود B_1، B_2 و B_3). ما به مساحت کل جنگل در کشور علاقه‌مند هستیم. فرض کنید که می‌دانیم مساحت جنگل در B_1، B_2 و B_3 به ترتیب ۱۰۰ کیلومتر مربع، ۵۰ کیلومتر مربع و ۱۵۰ کیلومتر مربع است. مساحت کل جنگل در کشور چقدر است؟ اگر پاسخ شما

$$100\ \mathrm{km}^2 + 50\ \mathrm{km}^2 + 150\ \mathrm{km}^2 = 300\ \mathrm{km}^2$$

باشد، درست است. یعنی شما می‌توانید مساحت جنگل در هر استان (تقسیم‌بندی) را به‌سادگی اضافه کنید تا مساحت جنگل در کل کشور به‌دست آید.

قانون احتمال کل چیست؟

این ایده پشت قانون احتمال کل است، که در آن مساحت جنگل با احتمال یک رویداد A جایگزین می‌شود. به‌ویژه، اگر می‌خواهید $P(A)$ را بیابید، می‌توانید به یک تقسیم‌بندی از S نگاه کنید و مقدار احتمال A که در هر تقسیم‌بندی قرار دارد را اضافه کنید. ما قبلاً مورد خاصی را که در آن تقسیم‌بندی B و B^c باشد مشاهده کرده‌ایم: ما دیدیم که برای هر دو رویداد A و B

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

و با استفاده از تعریف احتمال شرطی، $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$، می‌توانیم بنویسیم

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

حالت عمومی

ما می‌توانیم نسخه‌ای کلی‌تر از این فرمول را بیان کنیم که به تقسیم‌بندی عمومی از فضای نمونه S اعمال می‌شود.

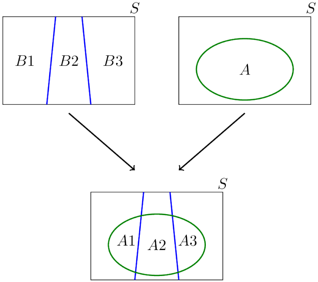
قانون احتمال کل: اگر $B_1, B_2, B_3, \ldots$ تقسیم‌بندی از فضای نمونه S باشد، آنگاه برای هر رویداد A داریم:

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

شهود قانون احتمال کل

همانطور که از شکل دیده می‌شود، A_1، A_2 و A_3 یک تقسیم‌بندی از مجموعه A را تشکیل می‌دهند و بنابراین بر اساس سومین اصل احتمال داریم

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$



شکل ۲: نمودار ون قانون احتمال کل

اثبات قانون احتمال کل

چون $B_1, B_2, B_3, \ldots$ یک تقسیم‌بندی از فضای نمونه S هستند، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} S &= \bigcup_i B_i \\ A &= A \cap S \\ &= A \cap \left(\bigcup_i B_i \right) \\ &= \bigcup_i (A \cap B_i) \end{aligned}$$

اثبات قانون احتمال کل

حال توجه کنید که مجموعه‌های $A \cap B_i$ غیر متقاطع هستند (چرا که مجموعه‌های B_i غیر متقاطع هستند).
بنابراین طبق اصل سوم احتمال داریم

$$P(A) = P\left(\bigcup_i (A \cap B_i)\right) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

نکته

یک سناریو معمولی است که در آن از قانون احتمال کل استفاده می‌کنیم به این صورت است:
ما به‌دنبال یافتن احتمال یک رویداد A هستیم، اما نمی‌دانیم چگونه مستقیماً $P(A)$ را پیدا کنیم. به‌جای آن، احتمال شرطی A را به‌شرط برخی رویدادهای B_i می‌دانیم، جایی که مجموعه‌های B_i یک تقسیم‌بندی از فضای نمونه تشکیل می‌دهند. بنابراین، می‌توانیم $P(A)$ را با استفاده از قانون احتمال کل بیابیم:

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

مثال

سه کیف دارم که هرکدام شامل ۱۰۰ توپ هستند:

- کیف ۱ شامل ۷۵ توپ قرمز و ۲۵ توپ آبی است؛
- کیف ۲ شامل ۶۰ توپ قرمز و ۴۰ توپ آبی است؛
- کیف ۳ شامل ۴۵ توپ قرمز و ۵۵ توپ آبی است.

من یکی از کیف‌ها را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنم و سپس یک توپ را نیز به‌طور تصادفی از کیف انتخاب‌شده برمی‌دارم. احتمال اینکه توپ انتخاب‌شده قرمز باشد چقدر است؟

حل

بگذارید R رویدادی باشد که توپ انتخاب‌شده قرمز است. بگذارید B_i رویدادی باشد که من کیف i را انتخاب می‌کنم. ما قبلاً می‌دانیم که

$$P(R|B_1) = 0.75, \quad P(R|B_2) = 0.60, \quad P(R|B_3) = 0.45.$$

ما تقسیم‌بندی خود را به‌صورت B_1, B_2, B_3 انتخاب می‌کنیم. توجه کنید که این یک تقسیم‌بندی معتبر است زیرا اولاً، مجموعه‌های B_i نا متقاطع هستند (فقط یکی از آن‌ها می‌تواند اتفاق بیفتد) و دوم اینکه اتحادیه آن‌ها فضای نمونه کامل را تشکیل می‌دهد، به‌طوریکه

$$P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = 1.$$

حل

با استفاده از قانون احتمال کل، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R|B_1)P(B_1) + P(R|B_2)P(B_2) + P(R|B_3)P(B_3) \\ &= (0.75)\frac{1}{3} + (0.60)\frac{1}{3} + (0.45)\frac{1}{3} \\ &= 0.60. \end{aligned}$$

قانون Bayes' چیست؟

اکنون آماده‌ایم تا یکی از مهم ترین نتایج در احتمال شرطی را بیان کنیم: قاعده بیز.
فرض کنید که ما $P(A|B)$ را می‌دانیم، اما به‌دنبال احتمال $P(B|A)$ هستیم. با استفاده از تعریف احتمال شرطی، داریم:

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B) = P(B|A)P(A).$$

با تقسیم بر $P(A)$، به دست می‌آوریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)},$$

که قاعده معروف بیز است.

اغلب، برای یافتن $P(A)$ در فرمول بیز، نیاز داریم از قانون احتمال کل استفاده کنیم، بنابراین گاهی قاعده بیز به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)},$$

که در آن $B_1, B_2, \ldots, B_n$ یک تقسیم‌بندی از فضای نمونه را تشکیل می‌دهند.

مثال

در مثالی که در بخش قبل زده شد فرض کنید که توپ قرمز انتخاب شده باشد. چقدر احتمال دارد که این توپ از کیف ۱ انتخاب شده باشد؟

حل

در اینجا ما $P(R|B_i)$ را می‌دانیم، اما به‌دنبال $P(B_1|R)$ هستیم، بنابراین این یک سناریو است که می‌توانیم از قاعده بیز استفاده کنیم. داریم:

$$P(B_1|R) = \frac{P(R|B_1)P(B_1)}{P(R)} = \frac{0.75 \times \frac{1}{3}}{0.6} = \frac{5}{12}.$$

$P(R)$ با استفاده از قانون احتمال کل در مثال قبل به‌دست آمد، بنابراین نیازی به محاسبه دوباره آن نداریم. همچنین، توجه کنید که $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} = P(B_1|R)$. این به‌طور شهودی منطقی است زیرا کیف ۱ کیفی است که بیشترین تعداد توپ قرمز را دارد. بنابراین، اگر توپ انتخاب‌شده قرمز باشد، احتمال اینکه کیف ۱ انتخاب شده باشد بیشتر است.

۱ احتمال شرطی

۲ قانون زنجیری

۳ استقلال

۴ قانون احتمال کل

۵ قانون بیز

۶ **استقلال شرطی**

همانطور که پیش‌تر اشاره کردیم، تقریباً هر مفهومی که برای احتمال تعریف شده باشد، می‌تواند به احتمال شرطی نیز گسترش یابد. به یاد داشته باشید که دو رویداد A و B مستقل هستند اگر

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad \text{یا به‌طور معادل،} \quad P(A|B) = P(A).$$

ما می‌توانیم این مفهوم را به رویدادهای شرطی مستقل گسترش دهیم.

تعریف

دو رویداد A و B شرطی مستقل (conditionally independent) هستند به شرط یک رویداد C که $P(C) > 0$، اگر

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C) \tag{۱}$$

یادآوری می‌کنیم که از تعریف احتمال شرطی داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

اگر $P(B) > 0$. با شرطی کردن روی C، به‌دست می‌آوریم:

$$P(A|B,C) = \frac{P(A \cap B|C)}{P(B|C)},$$

اگر $P(B|C) \neq 0$ و $P(C) \neq 0$. اگر A و B شرطی مستقل باشند به شرط C، آنگاه داریم:

$$P(A|B,C) = \frac{P(A \cap B|C)}{P(B|C)} = \frac{P(A|C)P(B|C)}{P(B|C)} = P(A|C).$$

بنابراین، اگر A و B شرطی مستقل باشند به شرط C، آنگاه

$$P(A|B,C) = P(A|C). \qquad (۲)$$

بنابراین، معادلات 1 و 2 بیانی معادل از تعریف استقلال شرطی هستند.

مثال

یک جعبه شامل دو سکه است: یک سکه عادی و یک سکه تقلبی با دو طرف شیر ($P(H) = 1$). من به‌طور تصادفی یک سکه انتخاب می‌کنم و آن را دوبار پرتاب می‌کنم. رویدادهای زیر را تعریف کنید:

- A: نتیجه پرتاب اول سکه H است.
- B: نتیجه پرتاب دوم سکه H است.
- C: سکه ۱ (عادی) انتخاب شده است.

محاسبه کنید $P(A|C)$، $P(B|C)$، $P(A \cap B|C)$، $P(A)$، $P(B)$ و $P(A \cap B)$. توجه داشته باشید که A و B مستقل نیستند، اما آنها شرطی مستقل هستند به شرط C.

حل

داریم $P(A|C) = P(B|C) = \frac{1}{2}$. همچنین، با توجه به اینکه سکه ۱ انتخاب شده است، داریم

$$P(A \cap B|C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

برای پیدا کردن $P(A)$، $P(B)$، و $P(A \cap B)$، از قانون احتمال کل استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|C)P(C) + P(A|C^c)P(C^c) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

به‌طور مشابه، $P(B) = \frac{3}{4}$.

حل

برای $P(A \cap B)$، داریم:

$$P(A \cap B) = P(A \cap B|C)P(C) + P(A \cap B|C^c)P(C^c)$$
$$= P(A|C)P(B|C)P(C) + P(A|C^c)P(B|C^c)P(C^c)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

حل

همانطور که می‌بینیم، $P(A\cap B)=\frac{5}{8}\neq P(A)P(B)=\frac{9}{16}$، که نشان می‌دهد A و B مستقل نیستند.
ما می‌توانیم این را به‌طور شهودی نیز توجیه کنیم. به‌عنوان مثال، اگر بدانیم که A اتفاق افتاده است (یعنی اولین پرتاب سکه نتیجه شیر بوده است)، حدس می‌زنیم که احتمال بیشتری وجود دارد که سکه ۲ را انتخاب کرده باشیم تا سکه ۱ را. این در نتیجه احتمال شرطی وقوع B را افزایش می‌دهد. این نشان می‌دهد که A و B مستقل نیستند. از طرف دیگر، با توجه به اینکه C (سکه ۱ انتخاب شده است)، A و B مستقل هستند.

یک درس مهم در اینجا این است که به‌طور کلی، استقلال شرطی نه الزاما منجر به استقلال می‌شود (و نه از آن ناشی می‌شود). بنابراین، می‌توانیم دو رویداد داشته باشیم که شرطی مستقل هستند اما به‌طور بدون شرط مستقل نیستند (مثل A و B که در بالا ذکر شد). همچنین، می‌توانیم دو رویداد داشته باشیم که مستقل هستند اما به‌طور شرطی مستقل نیستند، به شرط یک رویداد C. در اینجا یک مثال ساده در این مورد آورده شده است. فرض کنید یک تاس می‌زنیم و بگذارید:

$$A = \{1, 2\},$$

$$B = \{2, 4, 6\},$$

$$C = \{1, 4\}.$$

سپس، داریم

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{2};$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} = P(A)P(B).$$

بنابراین، A و B مستقل هستند. اما داریم:

$$P(A|C) = \frac{1}{2}, \quad P(B|C) = \frac{1}{2};$$

$$P(A \cap B|C) = P(\{2\}|C) = 0.$$

بنابراین،

$$P(A \cap B|C) \neq P(A|C)P(B|C),$$

که به این معنی است که A و B به شرط C مستقل شرطی نیستند.