ماژول دوم آمار و احتمال

بخش سوم - ترکیبیات

المپیاد هوش مصنوعی

اصل ضرب (قضیه اصلی شمارش)

بیان نظری

اگر یک فرآیند در r مرحله انجام شود و در هر مرحله i، دقیقاً n_i حالت ممکن وجود داشته باشد، آنگاه تعداد کل حالات انجام این فرآیند برابر حاصل‌ضرب این مقادیر است:

$$\text{تعداد کل حالات} = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$$

اصل ضرب (قضیه اصلی شمارش)

بیان نظری

اگر یک فرآیند در r مرحله انجام شود و در هر مرحله i، دقیقاً n_i حالت ممکن وجود داشته باشد، آنگاه تعداد کل حالات انجام این فرآیند برابر حاصل‌ضرب این مقادیر است:

$$\text{تعداد کل حالات} = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$$

توضیح: این اصل زمانی کاربرد دارد که کاری را در چند مرحله متوالی انجام می‌دهیم و هر مرحله مستقل از مراحل دیگر است.

مثال‌های اصل ضرب

مثال ۱ : انتخاب لباس

- ۳ پیراهن (قرمز، آبی، سفید)
- ۲ شلوار (مشکی، خاکستری)
- تعداد ترکیب‌ها: $۶ = ۲ \times ۳$ حالت

مثال‌های اصل ضرب

مثال ۱: انتخاب لباس

- ۳ پیراهن (قرمز، آبی، سفید)
- ۲ شلوار (مشکی، خاکستری)
- تعداد ترکیب‌ها: $۳ \times ۲ = ۶$ حالت

مثال ۲: طراحی رمزعبور شامل:

- دو حرف کوچک (۲۶ حالت برای هر حرف)
- یک حرف بزرگ (۲۶ حالت)
- چهار رقم عددی (۱۰ حالت برای هر رقم)

تعداد کل رمزها: $۲۶^{۲} \times ۲۶ \times ۱۰^{۴} = ۱۷۵،۷۶۰،۰۰۰$

جایگشت بدون تکرار

تعریف

انتخاب و مرتب‌سازی k عنصر از میان n عنصر متمایز (بدون تکرار):

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اگر $k = n$، برابر با $n!$ می‌شود.

جایگشت بدون تکرار

تعریف

انتخاب و مرتب‌سازی k عنصر از میان n عنصر متمایز (بدون تکرار):

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اگر $n = k$، برابر با $n!$ می‌شود.

توضیح: جایگشت به معنی چیدمان عناصر است که در آن ترتیب اهمیت دارد. مثلاً چیدمان عکس‌ها در آلبوم یا مرتب‌سازی کتاب‌ها روی قفسه.

مثال جایگشت بدون تکرار

درک مفهومی:

- برای اولین جایگاه: n گزینه داریم.
- برای دومین جایگاه: $n-1$ گزینه داریم.
- برای سومین جایگاه: $n-2$ گزینه داریم.
- و...

مثال جایگشت بدون تکرار

درک مفهومی:

- برای اولین جایگاه: n گزینه داریم.
- برای دومین جایگاه: $n-1$ گزینه داریم.
- برای سومین جایگاه: $n-2$ گزینه داریم.
- و...

مثال: مرتب‌سازی ۳ کتاب از میان ۵ کتاب روی قفسه

$$P(۵،۳) = \frac{۵!}{۲!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲!}{۲!} = ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$$

جایگشت با تکرار

تعریف

انتخاب k بار از n عنصر با امکان تکرار و با در نظر گرفتن ترتیب:

$$n^k$$

جایگشت با تکرار

تعریف

انتخاب k بار از n عنصر با امکان تکرار و با در نظر گرفتن ترتیب:

$$n^k$$

توضیح: جایگشت با تکرار زمانی رخ می‌دهد که هر عنصر می‌تواند چندین بار انتخاب شود و پس از انتخاب همان عنصر برای انتخاب‌های بعدی در دسترس باقی می‌ماند.

جایگشت با تکرار

تعریف

انتخاب k بار از n عنصر با امکان تکرار و با در نظر گرفتن ترتیب:

$$n^k$$

توضیح: جایگشت با تکرار زمانی رخ می‌دهد که هر عنصر می‌تواند چندین بار انتخاب شود و پس از انتخاب همان عنصر برای انتخاب‌های بعدی در دسترس باقی می‌ماند.
مثال: تشکیل رمز چهاررقمی از ارقام ۰ تا ۹:

$$۱۰^{۴} = ۱۰{،}۰۰۰ \text{ حالت}$$

انتخاب بدون ترتیب و بدون تکرار

تعریف

انتخاب k عنصر از میان n عنصر بدون توجه به ترتیب و بدون تکرار:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

انتخاب بدون ترتیب و بدون تکرار

تعریف

انتخاب k عنصر از میان n عنصر بدون توجه به ترتیب و بدون تکرار:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

توضیح: ترکیب زمانی استفاده می‌شود که ترتیب انتخاب اهمیت ندارد و هر عنصر حداکثر یک بار انتخاب می‌شود. مثلاً انتخاب ۴ کتاب از ۸ کتاب برای مطالعه.

انتخاب بدون ترتیب و بدون تکرار

تعریف

انتخاب k عنصر از میان n عنصر بدون توجه به ترتیب و بدون تکرار:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

توضیح: ترکیب زمانی استفاده می‌شود که ترتیب انتخاب اهمیت ندارد و هر عنصر حداکثر یک بار انتخاب می‌شود. مثلاً انتخاب ۴ کتاب از ۸ کتاب برای مطالعه.
خاصیت مهم: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ چرا؟ انتخاب k عنصر معادل حذف $n-k$ عنصر است!

مثال ترکیب بدون تکرار

چرا این فرمول؟

1. ابتدا همه جایگشت‌های ممکن را حساب می‌کنیم: $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$
2. اما ترتیب مهم نیست، پس هر $k!$ جایگشت یکسان را یکی حساب می‌کنیم
3. نتیجه: $\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

مثال ترکیب بدون تکرار

چرا این فرمول؟

1. ابتدا همه جایگشت‌های ممکن را حساب می‌کنیم: $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$
2. اما ترتیب مهم نیست، پس هر $k!$ جایگشت یکسان را یکی حساب می‌کنیم
3. نتیجه: $\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

مثال: انتخاب ۳ کارت از دسته ۵۲ تایی:

$$\binom{۵۲}{۳} = \frac{۵۲!}{۴۹!۳!} = \frac{۵۲ \times ۵۱ \times ۵۰}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۲۲،۱۰۰$$

انتخاب بدون ترتیب با تکرار

تعریف

انتخاب k عنصر از میان n عنصر بدون توجه به ترتیب ولی با امکان تکرار:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

انتخاب بدون ترتیب با تکرار

تعریف

انتخاب k عنصر از میان n عنصر بدون توجه به ترتیب ولی با امکان تکرار:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

توضیح: این مسئله معادل توزیع k شیء یکسان در n گروه مختلف است (با امکان خالی بودن برخی گروه‌ها).

انتخاب بدون ترتیب با تکرار

تعریف

انتخاب k عنصر از میان n عنصر بدون توجه به ترتیب ولی با امکان تکرار:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

توضیح: این مسئله معادل توزیع k شیء یکسان در n گروه مختلف است (با امکان خالی بودن برخی گروه‌ها).
روش ستاره و میله: k ستاره (*) نمایانگر اشیاء یکسان و $(n-1)$ میله (|) برای جدا کردن n گروه.

مثال ستاره و میله

مثال: توزیع ۴ سیب یکسان بین ۳ بچه:

$* | * | * *$ (بچه اول: ۲، بچه دوم: ۱، بچه سوم: ۱)

کل: $۶ = (۳ - ۱) + ۴$ موقعیت، باید ۴ موقعیت برای ستاره‌ها انتخاب کنیم

مثال ستاره و میله

مثال: توزیع ۴ سیب یکسان بین ۳ بچه:

$* | * | * *$ (بچه اول: ۲، بچه دوم: ۱، بچه سوم: ۱)

کل: $۶ = (۳ - ۱) + ۴$ موقعیت، باید ۴ موقعیت برای ستاره‌ها انتخاب کنیم
تعداد کل روش‌ها: $۱۵ = \binom{۶}{۴} = \binom{۴+۳-۱}{۴}$

مثال ستاره و میله

مثال: توزیع ۴ سیب یکسان بین ۳ بچه:

$$*|*|**$$ (بچه اول: ۲، بچه دوم: ۱، بچه سوم: ۱)

کل: $۴ + (۳ - ۱) = ۶$ موقعیت، باید ۴ موقعیت برای ستاره‌ها انتخاب کنیم

تعداد کل روش‌ها: $\binom{۴+۳-۱}{۴} = \binom{۶}{۴} = ۱۵$

مثال دیگر: انتخاب ۳ توپ از ۵ رنگ با تکرار:

$$\binom{۵+۳-۱}{۳} = \binom{۷}{۳} = ۳۵ \text{حالت}$$

۱ قضیه اصلی شمارش

۲ جایگشت‌ها

۳ ترکیب‌ها

۴ راهنمای انتخاب روش

چگونه تشخیص دهیم از کدام فرمول استفاده کنیم؟

سؤالات کلیدی

۱. **ترتیب مهم است؟**
   - بله ⇐ جایگشت (Permutation)
   - خیر ⇐ ترکیب (Combination)
۲. **تکرار مجاز است؟**
   - بله ⇐ فرمول‌های «با تکرار»
   - خیر ⇐ فرمول‌های «بدون تکرار»

چگونه تشخیص دهیم از کدام فرمول استفاده کنیم؟

سؤالات کلیدی

1. **ترتیب مهم است؟**
   - بله ⇐ جایگشت (Permutation)
   - خیر ⇐ ترکیب (Combination)
2. **تکرار مجاز است؟**
   - بله ⇐ فرمول‌های «با تکرار»
   - خیر ⇐ فرمول‌های «بدون تکرار»

نکته: اگر در تشخیص مردد بودید، مثال کوچکی بزنید و تمام حالات را بشمارید.

درخت تصمیم‌گیری

ترتیب	تکرار	فرمول
مهم	مجاز	n^k
مهم	غیرمجاز	$\frac{n!}{(n-k)!}$
غیرمهم	مجاز	$\binom{n+k-1}{k}$
غیرمهم	غیرمجاز	$\binom{n}{k}$

حل چند مثال برای تشخیص روش‌ها

مثال ۱: چند طریق برای انتخاب رئیس، معاون، و منشی از ۱۰ نفر وجود دارد؟

- ترتیب مهم است؟ بله (رئیس ≠ معاون ≠ منشی)
- تکرار مجاز است؟ خیر (یک نفر نمی‌تواند دو سمت داشته باشد)
- جواب: $P(۱۰،۳) = ۱۰ \times ۹ \times ۸ = ۷۲۰$

حل چند مثال برای تشخیص روش‌ها

مثال ۱: چند طریق برای انتخاب رئیس، معاون، و منشی از ۱۰ نفر وجود دارد؟

- ترتیب مهم است؟ بله (رئیس ≠ معاون ≠ منشی)
- تکرار مجاز است؟ خیر (یک نفر نمی‌تواند دو سمت داشته باشد)
- جواب: $P(۱۰،۳) = ۱۰ \times ۹ \times ۸ = ۷۲۰$

مثال ۲: چند طریق برای انتخاب ۳ نفر از ۱۰ نفر برای کمیته وجود دارد؟

- ترتیب مهم است؟ خیر (همه اعضا مساوی هستند)
- تکرار مجاز است؟ خیر
- جواب: $\binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$

حل چند مثال برای تشخیص روش‌ها

مثال۳: چند کلمه (با معنی یا بدون معنی) از حروف کلمه "MATHEMATICS" می‌توان ساخت؟

حل: حروف: M(۲)، A(۲)، T(۲)، H(۱)، E(۱)، I(۱)، C(۱)، S(۱)

- کل حروف: ۱۱ حرف
- حروف تکراری: M، A، T هر کدام ۲ بار
- فرمول: $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots}$

$$\frac{۱۱!}{۲! \times ۲! \times ۲!} = \frac{۳۹،۹۱۶،۸۰۰}{۸} = ۴،۹۸۹،۶۰۰$$