آشنایی با ماتریس

المپیاد هوش مصنوعی

1. ماتریس‌های پایه
2. عملیات‌های ماتریسی
3. ماتریس متعامد
4. ماتریس بلوکی

ماتریس چیست؟

ماتریس یک آرایش مستطیلی شکل از اعداد است که از سطرها و ستون‌ها تشکیل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0.9 & 0.9 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 \\ 0.6 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 \\ 0.2 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0.9 & 0.9 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس چیست؟

اعدادی که روی یک خط افقی هستند، سطرها را مشخص می‌کنند و اعداد که روی خطوط عمودی هستند ستون‌ها را مشخص می‌کنند. برای مثال در این ماتریس سطر دوم با رنگ بنفش و ستون پنجم با رنگ صورتی مشخص شده اند.

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0.2 & 0.6 & pink!300.9 & 0.9 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\
blue!200 & 0.2 & 0.6 & 0.9 & pink!301.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 & 0.2 & 0 \\
0.2 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & pink!301.0 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 & 0.2 \\
0.6 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & pink!301.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 \\
0.6 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & pink!301.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 \\
0.2 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & pink!301.0 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 & 0.2 \\
0 & 0.2 & 0.6 & 0.9 & pink!301.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 & 0.2 & 0 \\
0 & 0 & 0.2 & 0.6 & pink!300.9 & 0.9 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

بعد ماتریس را با "تعداد سطر × تعداد ستون" مشخص می‌کنیم. برای مثال، این ماتریس 8×10 بعدی است.

ماتریس چیست؟

ماتریس ها را با حروف بزرگ انگلیسی نمایش می‌دهیم. به هر عدد در ماتریس یک درایه می‌گوییم و هر درایه را با شماره سطر و ستونش مشخص می‌کنیم.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0.9 & 0.9 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 \\ 0.6 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 \\ 0.2 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & red!300.9 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0.9 & 0.9 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای مثال:

$$h_{6,8} = 0.9$$

ماتریس سطری

به ماتریسی که فقط یک سطر دارد، ماتریس سطری می‌گوییم، مانند:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

تعداد ستون‌ها در ماتریس سطری مهم نیست، برای مثال این ماتریس 4×1 بعدی است.

ماتریس ستونی

به ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد، ماتریس ستونی می‌گوییم، مانند:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

تعداد سطرها در ماتریس ستونی مهم نیست، برای مثال این ماتریس 4×1 بعدی است.

ماتریس مربعی

به ماتریسی که در آن تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر باشد، ماتریس مربعی می‌گوییم، مانند:

$$A = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 & 0.21 & 0.21 \\ 0.23 & 0.23 & 0.24 & 1.00 \\ 0.26 & 0.26 & 1.00 & 0.27 \\ 0.29 & 0.29 & 1.00 & 0.30 \end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی

هر ماتریس مربعی یک قطر اصلی و یک قطر فرعی دارد.
قطر اصلی شامل درایه‌هایی از ماتریس است که شماره سطر و ستون آن‌ها برابر است. قطر اصلی ماتریس از گوشه بالا سمت چپ به گوشه پایین سمت راست کشیده می‌شود!

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{0.20} & 0.20 & 0.21 & 0.21 \\ 0.23 & \color{red}{0.23} & 0.24 & 1.00 \\ 0.26 & 0.26 & \color{red}{1.00} & 0.27 \\ 0.29 & 0.29 & 1.00 & \color{red}{0.30} \end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی

قطر فرعی شامل درایه‌هایی از ماتریس است که اگر شماره‌ی سطر و ستون آن را با هم جمع کنیم، برابر با تعداد سطرهای ماتریس بعلاوه ۱ شود.
قطر فرعی ماتریس از گوشه بالا سمت راست به گوشه پایین چپ راست کشیده می‌شود!

$$A = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 & 0.21 & 0.21 & 0.21 \\ 0.23 & 0.23 & 0.24 & 1.00 & 0.50 \\ 0.26 & 0.26 & 1.00 & 0.27 & 0.33 \\ 0.29 & 0.29 & 1.00 & 0.30 & 0.55 \\ 0.29 & 0.11 & 0.81 & 0.56 & 0.72 \end{bmatrix}$$

اثر ماتریس مربعی

به مجموع درایه‌های روی قطر اصلی هر ماتریس مربعی، اثرماتریس می‌گوییم و با $tr(.)$ نمایش می‌دهیم.
برای مثال اثر ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 & 0.21 & 0.21 \\ 0.23 & 0.23 & 0.24 & 1.00 \\ 0.26 & 0.26 & 1.00 & 0.27 \\ 0.29 & 0.29 & 1.00 & 0.30 \end{bmatrix}$$

برابر است با

$$tr(A) = 0.20 + 0.23 + 1.00 + 0.30 = 1.73$$

ماتریس همانی

ماتریس همانی یا یکه، یک ماتریس مربعی است که در آن همه‌ی درایه‌ها صفر هستند و تنها درایه‌های روی قطر اصلی مقدار ۱ دارند.

$$I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

این ماتریس را با I_n نشان می‌دهیم که در آن n نشانگر تعداد سطرها یا تعداد ستون‌های ماتریس است.

ماتریس صفر

به ماتریسی که تمامی درایه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر می‌گوییم و آن را با O نمایش می‌دهیم.

$$\mathbf{O}_{2\times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بعد آن هر مقداری می‌تواند باشد، برای مثال این ماتریس 5×2 بعدی است.

ماتریس قطری

ماتریس قطری نوعی ماتریس مربعی است که فقط در قطر اصلی میتواند مقادیر غیرصفر داشته باشد و بقیه‌ی درایه‌هایش صفر هستند.

$$\operatorname{diag}(4,7,8) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

این ماتریس را با

$$diag(\text{مقادیر روی قطر اصلی})$$

نمایش می‌دهیم.

ماتریس بالامثلثی

ماتریس بالامثلثی نوعی ماتریس مربعی است که درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر هستند.

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

مانند:

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

ماتریس پایین مثلثی

ماتریس پایین مثلثی نوعی ماتریس مربعی است که درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر هستند.

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

مانند:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

ماتریس متقارن

ماتریس متقارن دسته‌ای دیگر از ماتریس‌های مربعی است که در آن درایه‌ها نسبت به قطر اصلی متقارن هستند.

$$S = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 3 \\ 0 & 3 & c \end{pmatrix}$$

در ماتریس‌های متقارن، درایه‌های روی قطر اصلی هر مقداری می‌توانند داشته باشند.

ترانهاده ماتریس

اگر در هر ماتریس دلخواه جای سطرها و ستون‌ها را جابه‌جا کنیم، ماتریس به‌دست آمده، ترانهاده نام دارد.
ماتریس ترانهاده را با استفاده از حرف T در بالای نام ماتریس اصلی نمایش می‌دهیم.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

اگر ماتریس اصلی $n \times m$ باشد، آنگاه ماتریس ترانهاده $m \times n$ است.

ماتریس پادمتقارن

ماتریس A پادمتقارن است اگر

$$A = -A^T.$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

در ماتریس‌های پادمتقارن، درایه‌های نسبت به قطر اصلی قرینه بوده و درایه‌های روی قطر اصلی صفر هستند.
ماتریس پادمتقارن دسته‌ای از ماتریس‌های مربعی است.

ضرب اسکالر در ماتریس

برای ضرب یک عدد (اسکالر) در یک ماتریس، کافی است هریک از درایه‌های ماتریس را در آن اسکالر ضرب کنیم. در نتیجه ابعاد ماتریس تغییری نمی‌کند.

- تعریف:

$$\lambda[A_{n\times m}]_{ij} = \lambda A_{ij}$$

ضرب اسکالر در ماتریس

- مثال:

$$2 \times \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 8 & 2 \times (-7) \\ 2 \times (-2) & 2 \times 0 \\ 2 \times 5 & 2 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -14 \\ -4 & 0 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$$

- خواص:

$$1 \times A = A$$

$$0 \times A = \mathbf{O}$$

$$-1 \times A = -A$$

$$\lambda \times A_{n\times m} = B_{n\times m}$$

جمع و تفریق ماتریس‌ها

برای جمع (یا تفریق) دو ماتریس، کافی است درایه‌های متناظر را با هم جمع (یا تفریق) کنیم. بنابراین لازم است ابعاد دو ماتریس با هم برابر باشند. تفریق دو ماتریس معادل است با جمع ماتریس اول و قرینه ماتریس دوم (ضرب آن در ۱−).

- **تعریف:**

$$[A_{n\times m} \pm B_{n\times m}]_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij}$$

- **مثال:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \pm 8 & 3 \pm (-7) \\ -2 \pm (-2) & 7 \pm 7 \\ 4 \pm 5 & 9 \pm (-1) \end{bmatrix}$$

جمع و تفریق ماتریس‌ها

- خواص:

$$A \pm B = B \pm A \quad \text{(جابه‌جایی)}$$

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C) \quad \text{(شرکت‌پذیری)}$$

$$\lambda(A \pm B) = \lambda A \pm \lambda B \quad \text{(توزیع‌پذیری)}$$

$$A \pm {\color{red}O} = A \quad \text{(عضو خنثی اعمال جمع و تفریق)}$$

$$A + ({\color{red}-A}) = O \quad \text{(عضو معکوس عمل جمع)}$$

$$A - {\color{red}A} = O \quad \text{(عضو معکوس عمل تفریق)}$$

ضرب ماتریس در بردار

حاصل ضرب ماتریس در بردار همواره یک بردار است. به همین علت ضرب ماتریس در بردار به عنوان اِعمال یک **تبدیل خطی** تفسیر می‌شود. ماتریس A به عنوان یک عملگر خطی، بردار ورودی x را به بردار خروجی y نگاشت می‌کند. در این فرایند، درایه‌های سطر i ام ماتریس در درایه‌های متناظر بردار ضرب شده و حاصل جمع آن‌ها درایه i ام بردار را ایجاد می‌کند. بنابراین لازم است که تعداد ستون‌های ماتریس با تعداد درایه‌های بردار برابر باشد.

- **تعریف:**

$$A_{n\times m} \times x_{m\times 1} = y_{n\times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad y_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}x_j$$

ضرب ماتریس در بردار

- **تعریف ضرب ماتریس در بردار:**

$$y_{n\times 1} = A_{n\times m}\, x_{n\times 1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$$

$$y_{n\times 1} = A_{n\times m}\, x_{m\times 1} = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_n^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} A_1^T x \\ A_2^T x \\ \vdots \\ A_n^T x \end{pmatrix}$$

ستون‌ها ماتریس A را با A_i و سطرهای آن را با A_i^T نشان می‌دهیم.
بردار حاصل ترکیب خطی از ستون‌های ماتریس A است که ضرایب آن درایه‌های بردار x اند.

ضرب بردار در ماتریس

- **تعریف ضرب بردار در ماتریس:**

$$(z_{n\times 1})^T = (x_{n\times 1})^T A_{n\times m} = x^T \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^T A_1 & x^T A_2 & \dots & x^T A_m \end{pmatrix}$$

$$(z_{n\times 1})^T = (x_{n\times 1})^T A_{n\times m} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix} x = x_1 A_1^T + x_2 A_2^T + \dots + x_m A_m^T$$

ستون‌ها ماتریس A را با A_i و سطرهای آن را با A_i^T نشان می‌دهیم.
بردار حاصل ترکیب خطی از سطرهای ماتریس A است که ضرایب آن درایه‌های بردار x اند.

ضرب ماتریس و بردار

- **مثال‌ها:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 8 + 3\times(-2) \\ -2\times 8 + 7\times(-2) \\ 4\times 8 + 9\times(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -30 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\times 1 + -2\times(-2) + 5\times 4 & 8\times 3 + -2\times 7 + 5\times 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 55 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس و بردار حالت ساده‌ای از ضرب دو ماتریس است؛ چراکه بردار را می‌توان به عنوان ماتریسی که یکی از ابعادش ۱ است، در نظر گرفت.

ضرب ماتریس‌ها

برای محاسبه درایه i, j ماتریس حاصل ضرب، سطر i ماتریس اول و ستون j ماتریس دوم را در نظر گرفته، درایه‌های متناظر آن دو را در هم ضرب کرده و سپس با هم جمع کنیم. پس تعداد درایه‌های این دو باید با هم برابر باشند. بنابراین برای ضرب دو ماتریس، لازم است تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. تعداد سطرهای ماتریس حاصل ضرب برابر است با تعداد سطرهای ماتریس اول، و تعداد ستون‌های آن برابر است با تعداد ستون‌های ماتریس دوم.

- **تعریف:**

$$[A_{n\times m}B_{m\times p}]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} \times B_{kj}$$

$$A_{n\times m}B_{m\times p} = C_{n\times p}$$

- **مثال:**

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 7 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\times 3+3\times 0 & 1\times 1+3\times 7 & 1\times 1+3\times 3\\ 3\times 3+2\times 0 & 3\times 1+2\times 7 & 3\times 1+2\times 3\\ 4\times 3+0\times 0 & 4\times 1+0\times 7 & 4\times 1+0\times 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 22 & 10\\ 9 & 17 & 9\\ 12 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها

- خواص:

$$AI = A \quad \text{(عضو خنثی عمل ضرب)}$$

$$AA^{-1} = I \quad \text{(وارون ماتریس)}$$

$$AB \neq BA \quad \text{(عدم جابه‌جایی)}$$

$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{(توزیع‌پذیری)}$$

$$(AB)C = A(BC) \quad \text{(شرکت‌پذیری)}$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) \quad \text{(شرکت‌پذیری ضرب اسکالر)}$$

توان ماتریس‌ها

توان ماتریس A به این صورت تعریف می‌شود:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ times}}$$

برای آنکه توان ماتریس‌ها تعریف شود، ماتریس حتماً باید یک ماتریس **مربعی** باشد.

ماتریس خودتوان (Idempotent): اگر حاصل تمام توان‌های یک ماتریس برابر با خودش شود، آن ماتریس را خودتوان می‌نامیم. شرط لازم و کافی خودتوانی این است که:

$$A^2 = A$$

ماتریس پوچ‌توان (Nilpotent): ماتریس پوچ‌توان به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\exists\, k \in \mathbb{N} : A^k = O$$

به کوچک‌ترین عدد طبیعی k که این رابطه به ازای آن برقرار باشد، **شاخص** (Index) یا **درجه** (Degree) این ماتریس گفته می‌شود.

تعریف ماتریس متعامد

– تعاریف زیر مربوط به ماتریس‌های حقیقی (Real) هستند. تعریف مشابه در فضای ماتریس‌های مختلط (Complex)، **یونیتاری (Unitary)** نامیده می‌شود.

تعریف: ماتریس مربعی $\mathbf{Q}$ را **ماتریس متعامد (Orthogonal)** می‌نامیم، اگر ضرب آن در ترانهاده‌اش ($\mathbf{Q}^T$) برابر با ماتریس همانی ($\mathbf{I}$) شود. به عبارت دیگر، ترانهاده آن برابر با وارون آن باشد.

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$$

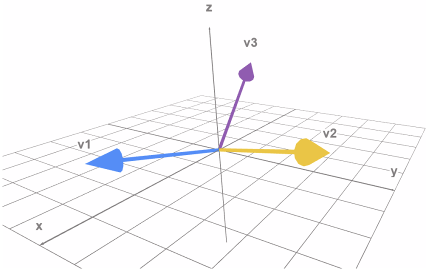
در چنین ماتریسی، ستون‌ها بر هم عمود اند (همچنین سطرها بر هم عمودند). می‌دانیم دو بردار درصورتی بر هم عمودند که حاصل ضرب داخلی آن‌ها صفر باشد. نرم تمام سطرها و ستون‌ها نیز برابر ۱ است.

مثالی از ماتریس متعامد

ماتریس زیر و همه‌ی ماتریس‌های حاصل از جابجایی ستون‌های آن متعامد هستند:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

شکل بردارهای ستون‌های این ماتریس در فضا به صورت زیر است:



زیرماتریس / بلوک

با حذف سطرها و ستون‌های مختلف یک ماتریس، می‌توان به یک ماتریس جدید رسید که به آن زیرماتریسی از ماتریس اولیه گفته می‌شود. به طور مثال:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & \cancel{0} & 4 \\ 3 & 5 & \cancel{5} & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{4} \\ 5 & 2 & \cancel{1} & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

باید دقت کنیم که با حذف تنها بخشی از یک سطر یا ستون، نتیجه یک زیرماتریس نخواهد بود. مثلا $\begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}$ یک زیرماتریس از ماتریس بالا نیست.

تعریف ماتریس بلوکی

ماتریس بلوکی، ماتریسی که از مجموعه‌ی چند بلوک ساخته شده است. بلوک‌ها لازم نیست ابعاد برابر داشته باشند، ولی باید مجموعه‌ی آن‌ها در کنار هم یک ماتریس با ابعاد معنادار را بسازد. همچنین باید بلوک‌ها با خطوط افقی و عمودی سراسری (به اندازه‌ی کل تعداد ستون‌ها یا سطرها) تفکیک‌پذیر باشند. به طور مثال:

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ \hline 7 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right]$$

گاهی برای سادگی بیشتر هنگام کار با ماتریس‌ها، آن‌ها را به صورت مجموعه‌ای از بلوک‌ها در نظر می‌گیریم.

مثال‌های عملیات ماتریسی در ماتریس‌های بلوکی

- ترانهاده :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{bmatrix}$$

- جمع و تفریق :

$$A+B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \end{bmatrix}$$

- ضرب :

$$AC = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3} A_{1j}C_{j1} \\ \sum_{j=1}^{3} A_{2j}C_{j1} \end{bmatrix}.$$