

ماژول اول آمار و احتمال

بخش اول - منطق

المپیاد هوش مصنوعی

۱ گزاره

۲ ترکیب گزاره‌ها

۳ سور

۱ گزاره

۲ ترکیب گزاره‌ها

۳ سور

گزاره چیست؟

تعریف گزاره

- گزاره جمله‌ای خبری است که می‌تواند درست یا نادرست باشد، اما نه هر دو.
- جملات سوالی، امری و تعجبی گزاره محسوب نمی‌شوند.

نمادها

- گزاره‌ها معمولاً با حروف p, q, r, \dots نمایش داده می‌شوند.

مثال‌ها

- عدد ۲ زوج است. (درست)
- خورشید از غرب طلوع می‌کند. (نادرست)

ارزش و نقیض گزاره

ارزش گزاره (Truth Value)

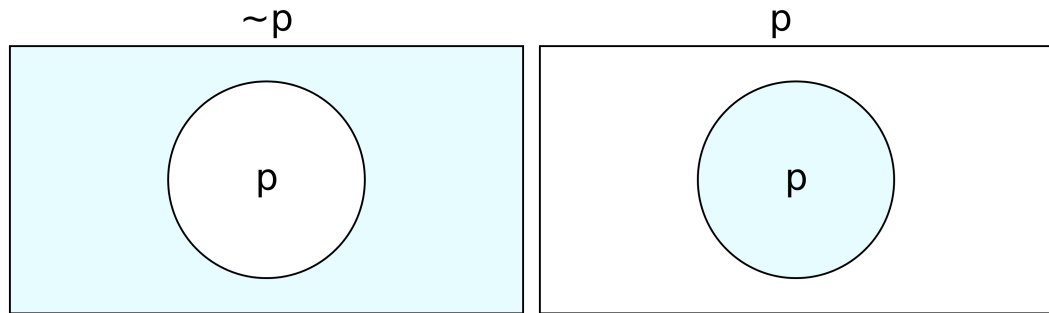
- هر گزاره می‌تواند دارای یکی از دو ارزش منطقی زیر باشد:
 - درست (T)
 - نادرست (F)
- ارزش گزاره نشان‌دهنده میزان درستی یا نادرستی آن است.

نقیض گزاره

- نقیض یک گزاره به معنای وارونه کردن ارزش منطقی آن است.
- اگر گزاره p درست باشد، نقیض آن ($\sim p$) نادرست است و بالعکس.
- نماد نقیض: $\sim p$

ارزش و نقیض گزاره

نمودار ون گزاره

شکل ۲: گزاره $\neg p$ Vennشکل ۱: گزاره p Venn

ارزش و نقیض گزاره

جدول ارزش گزاره و نقیض آن

p	$\sim p$
T	F
F	T

جدول ۱: جدول ارزش p و $\sim p$

مثال‌ها

- گزاره: عدد ۲ زوج است. (T) نقیض: عدد ۲ زوج نیست. (F)
- گزاره: خورشید از غرب طلوع می‌کند. (F) نقیض: خورشید از غرب طلوع نمی‌کند. (T)

تعداد سطرهای جدول ارزش

فرمول کلی

- تعداد سطرهای جدول ارزش برای n متغیر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{تعداد سطرها} = 2^n$$

- n : تعداد متغیرهای منطقی (p, q, r, \dots) .

مثال‌ها

- اگر $n = 1$ ، جدول ۲ سطر دارد: $p : T, F$
- اگر $n = 2$ ، جدول ۴ سطر دارد: $p, q : TT, TF, FT, FF$
- اگر $n = 3$ ، جدول ۸ سطر دارد:
 $p, q, r : TTT, TTF, TFT, TFF, FTT, FTF, FFT, FFF$

تعداد سطرهای جدول ارزش

جدول نمونه برای $n = 3$

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

جدول ۲: جدول ارزش برای $n = 3$

تعریف گزاره‌نما

- گزاره‌نما جمله‌ای خبری است که شامل یک یا چند متغیر باشد.
- با جایگذاری مقادیر مشخص برای متغیرها، گزاره‌نما به یک گزاره (درست یا نادرست) تبدیل می‌شود.

دامنه متغیر و مجموعه جواب

- دامنه متغیر: مجموعه‌ای از مقادیر ممکن که متغیر می‌تواند به خود بگیرد. نماد: D
- مجموعه جواب: زیرمجموعه‌ای از دامنه که گزاره‌نما را به یک گزاره درست تبدیل می‌کند. نماد: S

$$S \subseteq D$$

گزاره‌نما

مثال‌ها

- x عددی زوج است. ($P(x)$)
دامنه: مجموعه اعداد صحیح ($D = \mathbb{Z}$)
مجموعه جواب: اعداد زوج ($S = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$)
- x و y اعدادی هستند که $x + y = 5$. ($Q(x, y)$)
دامنه: اعداد حقیقی ($D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)
مجموعه جواب: $S = \{(x, y) | x + y = 5\}$ به عنوان مثال: $(2, 3)$ ، $(1.5, 3.5)$.

نمادها و دسته‌بندی

- نماد گزاره‌نما: معمولاً با حروفی مانند P ، Q نمایش داده می‌شود.

- یک متغیره: $P(x)$
- دو متغیره: $Q(x, y)$
- چندمتغیره: $R(x, y, z)$

۱ گزاره

۲ ترکیب گزاره‌ها

۳ سور

تعریف ترکیب گزاره‌ها

تعریف

- ترکیب گزاره‌ها فرآیندی است که با استفاده از عملگرهای منطقی، گزاره‌های جدیدی از دو یا چند گزاره ساخته می‌شود.
- عملگرهای اصلی:
 - عطف (\wedge): به معنای و
 - فصل (\vee): به معنای یا
 - شرطی (\Rightarrow): به معنای اگر...، آنگاه...
 - دوشروطی (\Leftrightarrow): به معنای اگر و تنها اگر

ترکیب عطفی و فصلی

عطف (∧)

- گزاره $p \wedge q$ زمانی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند.
- مثال:

- p : ۲ عددی زوج است. (T)
- q : ۵ عددی اول است. (T)
- $p \wedge q$: ۲ عددی زوج است و ۵ عددی اول است. (T)

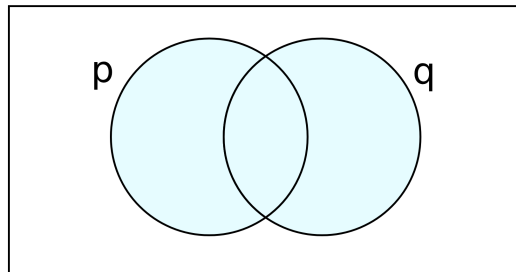
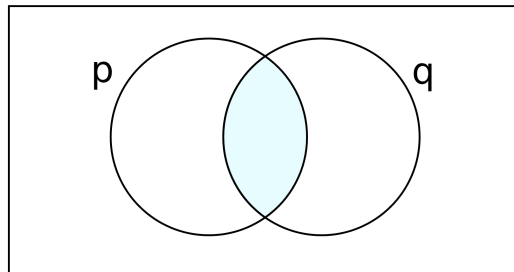
فصل (∨)

- گزاره $p \vee q$ زمانی نادرست است که هر دو گزاره p و q نادرست باشند.
- مثال:

- p : ۲ عددی اول است. (F)
- q : ۵ عددی اول نیست. (F)
- $p \vee q$: ۲ عددی اول است یا ۵ عددی اول نیست. (F)

ترکیب عطفی و فصلی

نمودار ون گزاره‌های عطفی و فصلی

 $p \vee q$ شکل ۴: گزاره Venn $p \vee q$ $p \wedge q$ شکل ۳: گزاره Venn $p \wedge q$

جدول ارزش ترکیب عطفی و فصلی

- در ترکیب عطفی و فصلی ترتیب اهمیت ندارد به عبارتی گزاره $p \vee q$ هم ارز (دارای ارزش یکسان) با گزاره $p \wedge q$ است و گزاره $p \wedge q$ هم ارز با گزاره $q \wedge p$ است.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

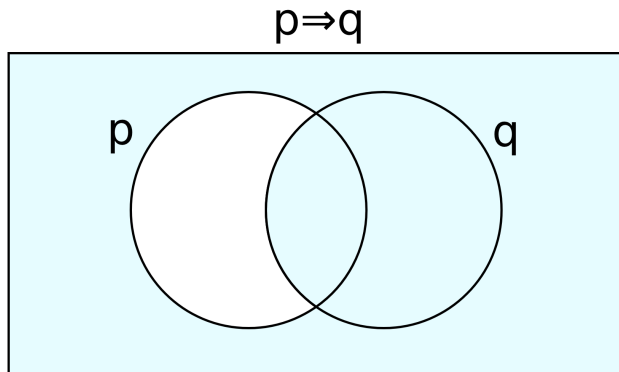
جدول ۳: جدول ارزش ترکیب عطفی و فصلی

ترکیب شرطی

شرطی (\Rightarrow)

- گزاره $p \Rightarrow q$ زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.
- گزاره $p \Rightarrow q$ همانطور که گفته شد تنها زمانی که مقدم (p) درست و تالی (q) نادرست باشد، نادرست است چرا که ما هرگز از یک گزاره درست نمی‌توانیم به یک نتیجه نادرست برسیم.
- مثال:
 - p : عدد ۲ زوج است. (T)
 - q : عدد ۵ زوج است. (F)
 - $p \Rightarrow q$: اگر ۲ زوج باشد، آنگاه ۵ زوج است. (F)

ترکیب شرطی



شکل ۵: گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ Venn

جدول ارزش ترکیب شرطی

- گزاره $p \Rightarrow q$ هم ارز (دارای ارزش یکسان) با گزاره $\sim p \vee q$ است این هم ارزی را می‌توان با جدول درستی اثبات کرد.

p	$\sim p$	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T

جدول ۴: جدول ارزش ترکیب شرطی

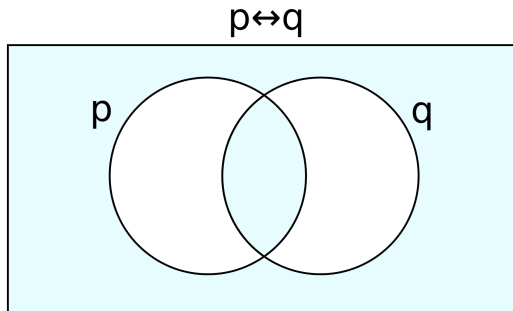
ترکیب دوشروطی

دوشروطی (\Leftrightarrow)

- گزاره $q \Leftrightarrow p$ زمانی درست است که هر دو گزاره p و q دارای ارزش یکسان باشند.
- مثال:

- p : ۲ عددی زوج است. (T)
- q : ۴ عددی زوج است. (T)
- $q \Leftrightarrow p$: اگر و تنها اگر ۲ زوج باشد، آنگاه ۴ زوج است. (T)

ترکیب دوشرطی



شکل ۶: نمودار ون ترکیب دوشرطی $p \leftrightarrow q$

جدول ارزش ترکیب دو شرطی

- گزاره $p \iff q$ هم ارز (دارای ارزش یکسان) با گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ است این هم ارزی را می‌توان با جدول درستی اثبات کرد.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \iff q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

جدول ۵: جدول ارزش ترکیب دو شرطی

۱ گزاره

۲ ترکیب گزاره‌ها

۳ سور

تعریف سورها

تعریف

- سورها عباراتی هستند که میزان کلی یا جزئی بودن یک گزاره‌نما را مشخص می‌کنند.
- دو نوع سور اصلی وجود دارد:
 - سور عمومی (Universal Quantifier): به معنای برای همه یا به ازای هر.
 - سور وجودی (Existential Quantifier): به معنای وجود دارد یا برای برخی.

سور عمومی (∀)

تعریف

- سور عمومی (∀) بیان می‌کند که یک گزاره‌نما برای تمام مقادیر ممکن درست است.
- نماد: $\forall x$
- خواندن: برای هر x یا برای تمام x .

مثال‌ها

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ (برای هر عدد حقیقی، مربع آن غیرمنفی است).
- $\forall x \in \mathbb{Z}, x + 0 = x$ (برای هر عدد صحیح، جمع آن با صفر برابر خودش است).

سور وجودی (\exists)

تعریف

- سور وجودی (\exists) بیان می‌کند که حداقل یک مقدار برای متغیر وجود دارد که گزاره‌نما را درست می‌کند.
- نماد: $\exists x$
- خواندن: وجود دارد x یا برای برخی x .

مثال‌ها

- $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 = 4$ (یک عدد طبیعی وجود دارد که مربع آن برابر ۴ است).
- $\exists x \in \mathbb{Z}, x < 0$ (یک عدد صحیح وجود دارد که کوچکتر از صفر است).

نقیض سورها

نقیض سور عمومی (\forall)

- نقیض $\forall x, P(x)$ برابر است با $\exists x, \neg P(x)$.
- یعنی: برای هر x ، $P(x)$ نادرست است اگر حداقل یک x وجود داشته باشد که $P(x)$ درست نباشد.

نقیض سور وجودی (\exists)

- نقیض $\exists x, P(x)$ برابر است با $\forall x, \neg P(x)$.
- یعنی: وجود دارد x که $P(x)$ نادرست است اگر هیچ x وجود نداشته باشد که $P(x)$ درست باشد.

مثال‌ها

نکته: \equiv یعنی هم‌ارز منطقی، یعنی دو گزاره همیشه ارزش درستی یکسان دارند.

$$\neg(\forall x \in \mathbb{N}, x > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{N}, x \leq 0$$

$$\neg(\exists x \in \mathbb{Z}, x < 0) \equiv \forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 0$$