ماژول اول آمار و احتمال

بخش سوم - احتمال - ۱

المپیاد هوش مصنوعی

۱ احتمال چیست؟

۲ تعاریف اولیه

۳ اصول احتمال

۴ محاسبه‌ی احتمال

۱ احتمال چیست؟

۲ تعاریف اولیه

۳ اصول احتمال

۴ محاسبه‌ی احتمال

آمار و احتمال چیست؟

- احتمالا نام آمار و احتمال را تا به حال شنیده اید،عملی که امروزه در طراحی بسیاری از الگوریتم های هوش مصنوعی از آن استفاده می شود.
- علم آمار و احتمال یکی از شاخه های ریاضیات است که به مطالعه ،تحلیل ، پیش پینی نتایج آینده براساس عدم قطعیت و جمع آوری داده می پردازد.
- برای مثال فرض کنید قصد انجام بازی شیر و خط با یک سکه را دارید و میخواهید بدانید آیا این سکه رفتار عادلانه ای دارد یا خیر؟
یکی از راه های فهمیدن آن این است که سکه را به تعداد زیاد بیاندازید و هربار نتیجه آن را یادداشت کنید و براساس تعداد شیر و خط عادلانه بود سکه را بررسی کنید(چگونه؟)
- یا برای مثال فرض کنید در حال سرمایه گذاری در بازار سرمایه هستید و قیمت سهام در روز های گذشته را دارید و میخواهید پیش بینی کنید که در روز آینده تغییر قیمت سهام چگونه خواهد بود.

آمار و احتمال چیست؟

- علم آمار و احتمال پیشینه ی طولانی دارد و بدلیل اهمیت آن همواره در حال مطالعه بوده است.در پیش برد علم آمار و احتمال دانشمندان زیادی تاثیر گذار بوده اند از جمله آندری کولموگروف، کارل فریدریش گاوس ،توماس بیز و....

شکل: کارل فریدریش گاوس

شکل: توماس بیز

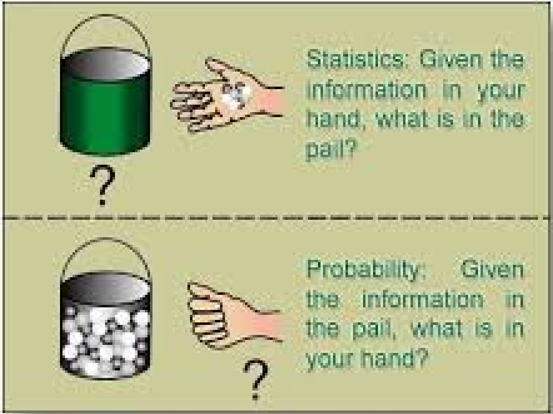
شکل: آندری کولموگروف

تفاوت آمار و احتمال

برای درک بهتر تفاوت آمار و احتمال این مثال ها را در نظر بگیرید :
مثال ۱:

- فرض کنید یک کیسه از گوی های سفید و سیاه دارید و می دانید که $\frac{2}{3}$ گوی ها در کیسه سفید رنگ هستند . شما دستتان را در کیسه می کنید و یک گوی به صورت تصادفی بیرون می آورید .حال می خواهید بگویید چقدر احتمال دارد که گویی که در درست دارید سیاه رنگ است .
این نمونه ای از علم احتمال می باشد
- حال مثال دیگری را در نظر بگیرید . فرض کنید یک کیسه از گوه های سفید و سیاه دارید.شما دستتان را در کیسه می کنید و تعدادی گوی به طور تصادفی بر می دارید ،مشاهده می کنید که $\frac{2}{3}$ از گوی هایی که در دست دارید سفید رنگ می باشند .حال می خواهید با توجه به نمونه ای که برداشته اید درباره نسبت تعداد گوی های سفید به کل مهره ها در کیسه صحبت کنید .
این نمونه از علم آمار می باشد.

تفاوت آمار و احتمال



شکل: تفاوت آمار و احتمال

تفاوت آمار و احتمال

مثال ۲:

- فرض کنید میخواهید بازی شیرخط را با یک سکه انجام دهید .این سکه عادلانه است. حال این سکه را n بار پرتاب می کنید،انتظار دارید چند بار رو بیاید؟
- حال فرض کنید یک سکه ناشناخته در دست دارید و می خواهید عادلانه بودن یا نبودن آن را مشخص کنید، برای این کار این سکه را ۳۰ بار پرتاب می کنید و مشاهده می کنید که ۱۰ بار شیر می آید ،آیا سکه مورد نظر عادلانه است؟

تفاوت آمار و احتمال

حال با توجه به این دو مثال می توانیم بگوییم:

- آ نگاه که با جامع های ناشناخته سر و کار داریم، شناختن جامعه با استفاده از نمونه ها و داده ها یک کار آماری است، ولی اگر جامعه را با جزئیات مورد نیاز بشناسیم و بخواهیم بدانیم نمونه هایی از آن جامعه چگونه خواهند بود، علم احتمال به کمک ما می آید.

تعاریف در آزمایش های تصادفی

آزمایش های تصادفی به آزمایش هایی می گوییم که نتیجه آن ها به طور قطعی مشخص نباشد و تحت تاثیر عدم قطعیت باشد مثل پرتاب تاس ، بارش باران در روز شنبه دو هفته ی آینده و ...
حال با چند تعریف در آزمایش های تصادفی آشنا می شویم

تعاریف در آزمایش های تصادفی

- فضای نمونه: به مجموعه همه ی نتایج(برآمد) ممکن از یک آزمایش تصادفی ،فضای نمونه می گوییم و آن را با S یا Ω نشان می دهیم.
  - اولین قدم در حل مسائل آمار و احتمال شناختن فضای نمونه مسئله می باشد.
- برآمد: به نتیجه ی آزمایش تصادفی گفته می شود.
- پیشامد: به هر زیر مجموعه از این مجموعه یک پیشامد می گوییم.و در صورتی می گوییم یک پیشامد رخ داده است که حداقل یکی از اعضای این پیشماد رخ داده باشد.

تعاریف در آزمایش های تصادفی

- در پرتاب تصادفی یک تاس نتایج ممکن می تواند 6 , ... $1, 2$ باشد .بنابراین فضای نمونه برابر است با :

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- در پرتاب تصادفی دو تاس متمایز نتایج می تواند به صورت

$$(1,1),(1,2),(1,3)\dots(1,6)$$
$$\vdots$$
$$(2,1),(2,2),(2,3)\dots(2,6)$$
$$(6,1),(6,2),(6,3)\dots(6,6)$$

بنابراین فضای نمونه برابر است با :

$$S = \{(1,1),(1,2),(1,3)\dots(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

- در پرتاب تصادفی یک سکه نتیجه مورد نظر می تواند شیر یا خط باشد بنابراین فضای نمونه برابر است با:

$$S = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$$

اشتراک و اجتماع پیشامدها

- اگر A و B رویدادهایی باشند، آنگاه $A \cup B$ و $A \cap B$ نیز رویدادهایی هستند.با توجه به تعریف اشتراک و اجتماع مشاهده می کنیم که $A \cup B$ زمانی رخ می دهد که A یا B رخ دهد. به همین ترتیب رویداد $A \cap B$ زمانی روی می دهد که هر دوی A و B رخ دهند.
- به طور مشابه اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعه ای از رویداد ها باشند رویداد $A_1 \cup A_2, \dots, A_n$ زمانی رخ می دهد که حداقل یکی از $A_1, A_2, \dots A_n$ رخ دهد و از سوی دیگر $A_1 \cap A_2, \dots A_n$ زمانی رخ می دهد که همه ی $A_1, A_2, \dots, A_n$ رخ دهند.

فضای نمونه چند آزمایش

در صورتی که یک آزمایش تصادفی از دو تا چند آزمایش با فضاهای نمونه $S_1 S_2$ تشکیل شده باشد آنگاه فضای نمونه آنها برابر است با :

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$$

که منظور از $\times$ ضرب دکارتی می باشد.

یادآوری

ضرب دکارتی دو مجموعه A و B مجموعه ای از همه زوج مرتب های به صورت (a, b) است که a عنصری از A و b عنصری از B می باشد.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

فضای نمونه چند آزمایش

◀ فرض کنید یک تاس و یک سکه را می اندازیم در این صورت فضای نمونه برابر است با :

$$S = \{H, T\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$= \{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}$$

توصیف یک آزمایش تصادفی

فرض کنید فضای نمونه یک رویداد تصادفی به شما داده شده است.آیا به نظر شما تنها شناختن فضای نمونه نمونه برای توصیف یک رویداد تصادفی کافی است؟

- سکه ای را در نظر بگیرید .آیا صرفا دانستن فضای نمونه آن که برابر با $\{H, T\}$ است برای تشخیص عادلانه یا عادلانه نبودن این سکه کافی است؟

بنابراین لازم است که بدانیم احتمال رخ دادن پیشامدهای مختلف که زیرمجموعه های فضای نمونه اند، چقدر است.

- در یک فضای نمونه برآمد های مختلف ممکن است احتمال برابر نداشته باشند .برای مثال در صورتی که فضای نمونه وضعیت هوای فردا شامل آفتابی و بارانی باشد لزوما احتمال هریک یکسان نخواهد بود.

بنابراین لازم است تا برای شناخت بهتر یک رویداد تصادفی به پیش آمد های آن احتمال وقوع نسبت دهیم.

اصول احتمال

احتمال هایی که به پیشامد های مختلف نسبت می دهیم باید ویژگی های داشته باشند که به آن هااصول احتمال می گویند.

- ما یک اندازه احتمال $P(A)$ به یک پیشامد A اختصاص می دهیم که این مقدار بین ۰ و ۱ می باشد. و نشان دهنده احتمال وقوع آن رویداد است.
اگر$P(A)$ به صفر نزدیک باشد وقوع رویداد A بسیار بعید است و از سوی دیگر اگر به یک نزدیک باشد وقوع رویداد A بسیار محتمل است.
- موضوع اصلی نظریه احتمال، توسعه ابزارها و تکنیک‌هایی برای محاسبه احتمال وقوع رویدادهای مختلف است. نظریه احتمال بر اساس مجموعه‌ای از اصول و قوانین اولیه بنا شده است که به‌عنوان پایه‌های این نظریه عمل می‌کنند. در ادامه، این اصول را بیان و توضیح می‌دهیم.

اصول احتمال

اصول احتمال

- برای هر پیشامد دلخواه A احتمال رخ دادن آن $P(A)$ عددی بین صفر و یک است.
- $P(S) = 1$
- برای دو پیشامد A و B که $A \cap B = \{\}$ داریم:

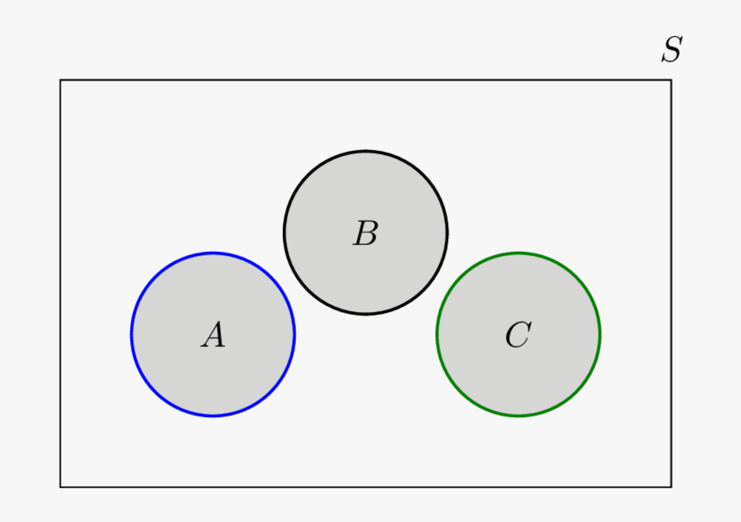
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

به این خاصیت که برای دو پیشامد A و B فرض کرده ایم ناسازگاری دو پیشامد گفته می شود و به این معنا می باشد که آن دو با یکدیگر رخ نمی دهند .

اصول احتمال

- اصل اول بیان می‌کند که احتمال نمی‌تواند منفی باشد. کوچک‌ترین مقدار برای $P(A)$ برابر با صفر است.اگر $P(A) = 0$ باشد آنگاه می توان پیشامد A را برای اهداف عملی غیرممکن در نظر بگیریم.
- اصل دوم بیان می‌کند که احتمال کل فضای نمونه برابر با یک است. دلیل آن این است که فضای نمونه S شامل تمام نتایج ممکن آزمایش تصادفی ما است بنابراین نتیجه هر آزمایش همیشه به S تعلق دارد به عبارت دیگر پیشامد S همواره رخ می دهد و $P(S) = 1$
- اصل سوم احتمالاً جالب‌ترین اصل است. ایده اصلی این است که اگر برخی رویدادها ناسازگار باشند (یعنی هیچ هم‌پوشانی بین آن‌ها وجود نداشته باشد)، آنگاه احتمال اجتماع آن‌ها برابر با مجموع احتمالاتشان است.
  راه دیگری برای درک این موضوع این است که احتمال یک مجموعه را به‌عنوان مساحت آن مجموعه در نمودار وِن تصور کنید. اگر چند مجموعه ناپیوسته باشند، مانند آنچه در شکل زیر نشان داده شده است، مساحت کل اجتماع آن‌ها برابر با مجموع مساحت‌های جداگانه آن‌ها است.

پیشامد های ناسازگار



پیشامد های ناسازگار

- به طور خلاصه اگر A_1 و A_2 پیشامدهای ناسازگار باشند آنگاه

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

- به طور مشابه می توان برای n پیشامد $A_1, A_2, \dots, A_n$ که ناسازگار هستند گفت:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3, \dots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_n)$$

اصول احتمال

مثال: یک سکه را در نظر بگیرید که با احتمال $\frac{3}{4}$ شیر می آید و با احتمال $\frac{1}{4}$ خط می آید :

- $$0 \leq P(H) = \frac{3}{4}, P(T) = \frac{1}{4} \leq 1$$

- فضای نمونه آزمایش به صورت زیر می باشد:

$$S = \{H, T\}$$

و در نتیجه :

$$P(S) = P(H) + P(T) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

- حال پیشامد A را در نظر بگیرید احتمال اینکه سکه خط بیاید و پیشامد B را در نظر بگیرید که سکه شیر بیاید ،این دو پیشامد با یکدیگر ناسازگار هستند و در نتیجه احتمال اینکه سکه شیر بیاید یا خط بیاید برابر است با :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

اصول احتمال

مثال:آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس و یک سکه را در نظر بگیرید و فرض کنید همه ی حالات این آزمایش تصادفی با احتمال یکسانی رخ دهند بنابراین ۱۲ حالت داریم و هریک به احتمال $\frac{1}{12}$ رخ می دهد:

- فضای نمونه آزمایش برابر با $S = \{H, T\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و احتمال هر حالت برابر با $\frac{1}{12}$ می باشد بنابراین

$$P(S) = 12 \times \frac{1}{12} = 1$$

- پیشامد زوج آمدن عدد تاس و شیر بودن سکه و پیشامد ۳ بودن عدد تاس و خط بودن سکه را در نظر بگیرید در این صورت این پیشامد با یکدیگر ناسازگار هستند(چرا؟) و احتمال رخ دادن پیشامد اول یا دوم برابر است با :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{12} + 3 \times \frac{1}{12}$$

محاسبه ی احتمال

فرض کنید یک آزمایش تصادفی با فضای نمونه S به ما داده شده است. برای یافتن احتمال یک رویداد، معمولاً دو مرحله وجود دارد:

- ابتدا از اطلاعات خاصی که درباره آزمایش تصادفی داریم استفاده می‌کنیم.
- سپس از اصول احتمال استفاده می‌کنیم.

مثال: یک تاس عادلانه را می اندازیم. احتمال اینکه پیشامد $E = \{1, 5\}$ رخ دهد چقدر است؟

جواب: ابتدا از اطلاعات خاصی که درباره آزمایش تصادفی داریم استفاده می‌کنیم. مسئله بیان می‌کند که تاس عادلانه است، به این معنا که هر شش نتیجه ممکن به یک اندازه محتمل هستند. به عبارت دیگر:

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(6)$$

اکنون می‌توانیم از اصول احتمال استفاده کنیم. به طور خاص، از آنجا که رویدادهای $1, 2, \ldots, 6$ ناسازگار هستند می توانیم بنویسیم:

$$1 = P(S) = P(1 \cup 2 \cup \cdots \cup 6) = P(1) + P(2) + \cdots + P(6) = 6P(1)$$

محاسبه ی احتمال

بنابراین:

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = \frac{1}{6}$$

بنابراین از آنجایی که 1 و 5 ناسازگار هستند داریم:

$$P(E) = P(\{1,5\}) = P(\{1\}) + P(\{5\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

- دقت کنید که ما اغلب به‌جای $P(1)$ از $P(1)$ استفاده می کنیم تا نمادگذاری را ساده تر کنیم. اما باید تأکید کنیم که احتمال برای مجموعه‌ها (پیشامد) تعریف می‌شود، نه برای نتایج(برآمدهای) منفرد. بنابراین، وقتی می‌نویسیم $P(2) = \frac{1}{6}$ منظور واقعی ما این است که $P(\{2\}) = \frac{1}{6}$

محاسبه ی احتمال

قضیه

برای هر پیشامد A داریم:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} 1 &= P(S) \\ &= P(A \cap A^c) \\ &= P(A) + P(A^c) \end{aligned}$$

محاسبه ی احتمال

قضیه

احتمال یک مجموعه تهی برابر با صفر است یا به بیانی دیگر: $P(\emptyset) = 0$

اثبات:

از آنجایی که $\emptyset = S^c$ طبق قضیه اول می توانیم بنویسیم

$$P(\emptyset) = 1 - P(S) = 0$$

توجه داشته باشید که این نتیجه منطقی است، زیرا طبق تعریف، یک رویداد زمانی رخ می‌دهد که نتیجه آزمایش تصادفی به آن رویداد تعلق داشته باشد. از آنجایی که مجموعه تهی هیچ عنصری ندارد، نتیجه آزمایش هرگز به مجموعه تهی تعلق نخواهد داشت.

محاسبه ی احتمال

قضیه

برای هر پیشامد A داریم: $P(A) \leq 1$

اثبات:

طبق قضیه اول می دانیم $P(A) = 1 - P(A^c)$ و از آنجایی که $P(A^c) \geq 0$ می توانیم بگوییم $P(A) \leq 1$

محاسبه ی احتمال

قضیه

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B).$$

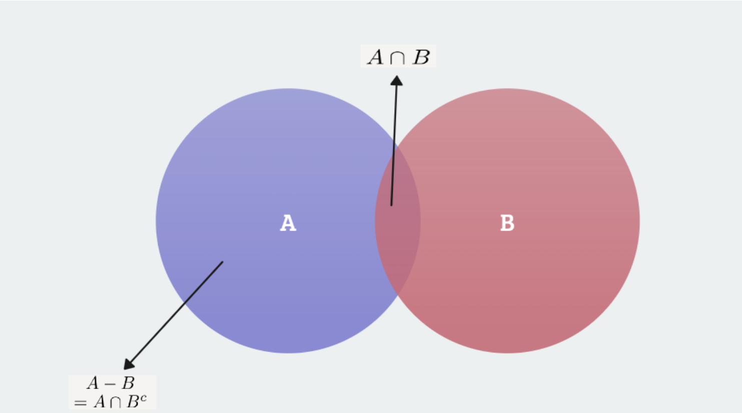
اثبات:

نشان می دهیم $P(A)=P(A\cap B)+P(A-B)$,

دقت کنید که دو مجموعه $A\cap B$ و $A-B$ ناسازگار هستند و اجتماع آن ها A می باشد. در نتیجه با استفاده از اصل سوم داریم:

$$P(A)=P((A\cap B)\cup(A-B))=P(A\cap B)+P(A-B)$$

محاسبه ی احتمال



شکل: $P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$

محاسبه ی احتمال

قضیه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اثبات: دو مجموعه ی A و $B - A$ ناسازگار هستند و اجتماع آن ها برابر است با $A \cup B$ در نتیجه :

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

محاسبه ی احتمال

یادآوری

با استفاده از اصل شمول و عدم شمول برای n پیشامد $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ داریم:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

محاسبه ی احتمال

مثال:فرض کنید ما این اطلاعات را داریم:

- احتمال اینکه امروز باران ببارد برابر با ۶۰ درصد است.
- احتمال اینکه فردا باران ببارد برابر با ۵۰ درصد است.
- احتمال اینکه در هیچ‌کدام از دو روز باران نبارد برابر با ۳۰ درصد است.

احتمالات زیر را بیابید:

- احتمال اینکه امروز یا فردا باران ببارد.
- احتمال اینکه هم امروز و هم فردا باران ببارد.
- احتمال اینکه امروز باران ببارد ولی فردا نبارد.
- احتمال اینکه فقط در یکی از دو روز (امروز یا فردا) باران ببارد.

محاسبه ی احتمال

حل: یک گام مهم در حل چنین مسائلی، تبدیل صحیح آن‌ها به زبان احتمال است. این کار به‌ویژه زمانی که مسائل پیچیده می‌شوند، بسیار مفید است. برای این مسئله، بیایید A را به‌عنوان رویدادی که امروز باران می‌بارد و B را به‌عنوان رویدادی که فردا باران می‌بارد تعریف کنیم. سپس اطلاعات داده‌شده را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

- $P(A) = 0.6$
- $P(B) = 0.5$
- $P(A^c \cap B^c) = 0.3$

حال که اطلاعات را خلاصه کرده‌ایم، می‌توانیم از این اطلاعات همراه با قوانین احتمال برای یافتن احتمالات خواسته‌شده استفاده کنیم:

- احتمال اینکه امروز یا فردا باران ببارد: $P(A \cup B)$ برای یافتن این احتمال داریم:

$$P(A \cup B) = 1 - P\Big((A \cup B)^c\Big) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - 0.3 = 0.7$$

محاسبه ی احتمال

- احتمال اینکه امروز و فردا باران ببارد

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.5 - 0.7 = 0.4$$

- احتمال اینکه امروز باران ببارد ولی فردا نبارد:

$$P(A \cap B^c) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.4 = 0.2$$

- احتمال اینکه فقط در یکی از دو روز باران ببارد را می توانیم با $P(A-B)+P(B_A)$ نشان دهیم . ما $P(A-B)=0.2$ را پیدا کرده بودیم به طور مشابه $P(B-A)$ را می یابیم.

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0.5 - 0.4 = 0.1$$

بنابراین :

$$P(A - B) + P(B - A) = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

مدل های احتمال گسسته

در این بخش، بین دو نوع مختلف از فضای نمونه تمایز قائل می‌شویم: گسسته و پیوسته. تفاوت این دو را بعداً با جزئیات بیشتری، زمانی که متغیرهای تصادفی را بررسی می‌کنیم، توضیح خواهیم داد. ایده اصلی این است که در مدل‌های احتمال گسسته می‌توانیم احتمال رویدادها را با جمع کردن تمامی نتایج متناظر محاسبه کنیم، در حالی که در مدل‌های احتمال پیوسته باید به جای جمع، از انتگرال‌گیری استفاده کنیم.

- فضای نمونه S را در نظر بگیرید. اگر S یک مجموعه شمارا باشد ،به آن یک مدل احتمال گسسته گفته می شود.در این حالت چون S شمارا است می توانیم تمام عناصر آن را فهرست کنیم:

$$S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$$

اگر $S \subset A$ یک پیشامد باشد آنگاه A شمارا خواهد بود و با استفاده از اصل سوم اصول احتمال می توانیم بگوییم:

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{s_j \in A} \{s_j\}\Big) = \sum_{s_j \in A} P(s_j).$$

بنابراین در یک فضای نمونه شمارا ،برای یافتن احتمال یک رویداد کافی است احتمال عناصر منفرد آن مجموعه را باهم جمع کنیم.

محاسبه ی احتمال

یادآوری

حاصل جمع یک دنباله ی هندسی با $a, x \in \mathbb{R}$ برابر است با:

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots + ax^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ax^k = a\frac{1-x^n}{1-x}$$

در صورتی که $|x| < 1$ داریم: $a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} ax^k = a\frac{1}{1-x}$

مدل احتمال گسسته

مثال: یک آزمون چند مرحله‌ای برگزار می‌شود که در آن دانش‌آموزان می‌توانند بسته به عملکردشان امتیاز کسب کنند. اگر k نشان دهنده شماره ی مرحله باشد $(k \in \mathbb{R})$ احتمال اینکه دانش آموز در مرحله k امتیاز $k-2$ را کسب کند برابر با $\frac{1}{k^2}$ است، به این صورت که :

- با احتمال $\frac{1}{2}$ دانش آموز۱ امتیاز از دست می دهد.
- با احتمال $\frac{1}{4}$ دانش آموز صفر امتیاز می گیرد.
- با احتمال $\frac{1}{8}$ دانش آموز ۱ امتیاز می گیرد.
- با احتمال $\frac{1}{16}$ دانش آموز ۲ امتیاز می گیرد.
- ...

احتمال اینکه دانش‌آموز حداقل ۱ امتیاز کسب کند اما کمتر از ۴ امتیاز باشد، چقدر است؟
احتمال اینکه دانش‌آموز بیش از ۲ امتیاز کسب کند، چقدر است؟

مدل احتمال گسسته

حل:
در این مسئله، آزمایش تصادفی آزمون چندمرحله‌ای است و نتایج، امتیازاتی هستند که دانش‌آموز کسب می‌کند یا از دست می‌دهد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$S = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}.$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، این مجموعه بی‌نهایت اما شمارا است. همچنین در صورت سوال بیان شده که

$$P(k) = P(\{k\}) = \frac{1}{2^{k+2}} \text{ for } k \in S.$$

ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا این یک توزیع احتمال معتبر است یا خیر. برای این کار باید بررسی کنیم که آیا مجموع تمام احتمالات برابر با ۱ است یا خیر. یعنی: $P(S) = 1$

$$P(S) = \sum_{k=-1}^{\infty} P(k) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1$$

پس معتبر است.

مدل احتمال گسسته

فرض کنید A پیشامدی باشد که دانش آموز حداقل ۱ امتیاز کسب کرده و کمتر از ۴ امتیاز کسب کرده باشد.و B پیشامدی که دانش آموز بیش از ۲ امتیاز کسب کند. بنابراین :

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5, \dots\}$$

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{7}{32}$$

به طور مشابه:

$$P(B) = P(3) + P(4) + P(5) + \dots$$

یا

$$= \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \cdots = \frac{1}{16} \quad \text{(Geometric sum)}$$

یا

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \Big(P(-1) + P(0) + P(1) + P(2)\Big) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{16}$$