ماژول اول آمار و احتمال

بخش چهارم - مقدمات احتمال

المپیاد هوش مصنوعی

مقدمه

به طور کلی، برای تحلیل آزمایش‌های تصادفی، معمولاً بر جنبه‌های عددی خاصی از آزمایش تمرکز می‌کنیم. برای مثال، در یک مسابقه فوتبال ممکن است به تعداد گل‌ها، شوت‌ها، شوت‌های در چارچوب، ضربات کرنر، خطاها و غیره علاقه‌مند باشیم. اگر کل مسابقه فوتبال را به عنوان یک آزمایش تصادفی در نظر بگیریم، هر یک از این نتایج عددی اطلاعاتی درباره‌ی نتیجه‌ی این آزمایش تصادفی به ما می‌دهد. این‌ها نمونه‌هایی از متغیرهای تصادفی هستند. به طور خلاصه، یک متغیر تصادفی، متغیری با مقدار حقیقی است که مقدار آن توسط یک آزمایش تصادفی زیربنایی تعیین می‌شود.

مقدمه

- مثال:
من یک سکه را پنج بار پرتاب می‌کنم. این یک آزمایش تصادفی است و فضای نمونه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S = \{TTTTT, TTTTH, \dots, HHHHH\}$$

توجه داشته باشید که فضای نمونه S دارای $2^5 = 32$ عنصر است. فرض کنید که در این آزمایش، ما به تعداد شیرها علاقه‌مند هستیم. می‌توانیم یک متغیر تصادفی X تعریف کنیم که مقدار آن برابر است با تعداد شیرهای مشاهده‌شده. مقدار X یکی از مقادیر $0, 1, 2, 3, 4$ یا 5 خواهد بود، بسته به نتیجه آزمایش تصادفی.

متغیر تصادفی

در اصل، یک متغیر تصادفی تابعی با مقادیر حقیقی است که به هر نتیجه ممکن از آزمایش تصادفی یک مقدار عددی اختصاص می‌دهد. به عنوان مثال، متغیر تصادفی X که در بالا تعریف شد، مقدار 0 را به نتیجه $TTTTT$، مقدار 2 را به نتیجه $THTHT$ و به همین ترتیب اختصاص می‌دهد. بنابراین، متغیر تصادفی X تابعی از فضای نمونه

$$S = \{TTTTT, TTTTH, \cdots, HHHHH\}$$

به مجموعه اعداد حقیقی است (برای این متغیر تصادفی خاص، مقادیر همیشه اعداد صحیح بین ۰ تا ۵ هستند).

متغیر تصادفی

متغیر تصادفی

یک متغیر تصادفی X تابعی است از فضای نمونه به اعداد حقیقی:

$$X : S \to \mathbb{R}$$

متغیر تصادفی

معمولاً متغیرهای تصادفی را با حروف بزرگ مانند X، Y، و Z نمایش می‌دهیم. از آنجا که یک متغیر تصادفی یک تابع است، می‌توانیم درباره‌ی دامنه‌ی آن صحبت کنیم. دامنه‌ی یک متغیر تصادفی X، که با $\text{Range}(X)$ یا R_X نشان داده می‌شود، مجموعه‌ای از مقادیر ممکن برای X است. در مثال بالا، داریم:

$$\text{Range}(X) = R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

دامنه متغیر تصادفی

دامنه‌ی یک متغیر تصادفی X که با $\text{Range}(X)$ یا R_X نشان داده می‌شود، مجموعه‌ای از مقادیر ممکن برای X است.

متغیر تصادفی

مثال :دامنه هر یک از متغیرهای تصادفی زیر را بیابید:

1. من ۱۰۰ بار یک سکه را پرتاب می‌کنم. بگذارید X تعداد شیرهایی باشد که مشاهده می‌کنم.
2. من سکه‌ای را آن‌قدر پرتاب می‌کنم تا اولین شیر ظاهر شود. بگذارید Y تعداد کل پرتاب‌ها باشد.
3. متغیر تصادفی T به عنوان زمان (بر حسب ساعت) از اکنون تا وقوع زلزله بعدی در یک شهر مشخص تعریف می‌شود.

متغیر تصادفی

جواب:

1. متغیر تصادفی X می‌تواند هر عدد صحیحی از ۰ تا ۱۰۰ بگیرد، پس:

$$R_X = \{0, 1, 2, \dots, 100\}$$

2. متغیر تصادفی Y می‌تواند هر عدد صحیح مثبت را بگیرد، بنابراین:

$$R_Y = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$$

3. متغیر تصادفی T می‌تواند در نظریه هر عدد حقیقی نامنفی را بگیرد، پس:

$$R_T = [0, \infty)$$

متغیر تصادفی گسسته

دو دسته مهم از متغیرهای تصادفی وجود دارد که در ادامه بررسی می‌کنیم:

- متغیرهای تصادفی گسسته
- متغیرهای تصادفی پیوسته

به یاد داشته باشید که یک مجموعه A شمارا است اگر:

- A یک مجموعه متناهی باشد مانند $\{1, 2, 3, 4\}$، یا
- بتوان آن را با اعداد طبیعی در تناظر یک‌به‌یک قرار داد .

مجموعه‌هایی مانند $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ و زیرمجموعه‌های آن‌ها شمارا هستند، درحالی‌که مجموعه‌هایی مانند بازه‌های غیرتهی $[a, b]$ در $\mathbb{R}$ ناشمارا هستند. یک متغیر تصادفی زمانی گسسته است که دامنه آن مجموعه‌ای شمارا باشد. در مثال قبل، متغیرهای تصادفی X و Y گسسته هستند، درحالی‌که متغیر T گسسته نیست.

متغیر تصادفی گسسته

متغیر تصادفی گسسته

اگر دامنه متغیر تصادفی X شمارا باشد، آن را یک متغیر تصادفی گسسته می‌نامیم.

PMF

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، دامنه‌ی آن یعنی R_X یک مجموعه شمارا است. بنابراین می‌توانیم عناصر آن را فهرست کنیم. به عبارت دیگر، می‌توان نوشت:

$$R_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

توجه کنید که $x_1, x_2, x_3, \ldots$ مقادیر ممکن برای متغیر تصادفی X هستند. در حالی که متغیرهای تصادفی معمولاً با حروف بزرگ مانند X نشان داده می‌شوند، برای نمایش مقادیر دامنه معمولاً از حروف کوچک مانند x, x_1, y, z و ... استفاده می‌کنیم.

برای متغیر تصادفی گسسته X، ما به دانستن احتمال رخدادهایی به فرم $X = x_k$ علاقه‌مند هستیم. توجه کنید که در اینجا، رخداد $A = \{X = x_k\}$ به‌صورت مجموعه‌ای از خروجی‌ها s در فضای نمونه S تعریف می‌شود که مقدار متناظر X در آن‌ها برابر با x_k است. به‌طور خاص:

$$A = \{s \in S \mid X(s) = x_k\}$$

احتمالات رخدادهایی به فرم $\{X = x_k\}$ به‌صورت رسمی با تابع جرم احتمال یا PMF نمایش داده می‌شوند.

PMF

PMF

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با دامنه

$$R_X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$$

(محدود یا بی‌نهایت شمارا) باشد. تابع

$$P_X(x_k) = P(X = x_k), \quad \text{برای} \, k = 1, 2, 3, ...$$

تابع جرم احتمال X یا PMF نامیده می‌شود.

PMF

بنابراین، تابع جرم احتمال (PMF) معیاری احتمالی است که احتمال مقادیر ممکن یک متغیر تصادفی را به ما می‌دهد. اگرچه نماد معرفی‌شده در بالا، نماد استاندارد برای PMF متغیر تصادفی X است، ممکن است در ابتدا کمی گیج‌کننده به نظر برسد. زیرنویس X در P_X نشان می‌دهد که این تابع جرم احتمال مربوط به متغیر تصادفی X است. برای مثال:

$$P_X(1)$$

نشان‌دهنده‌ی احتمال وقوع $X = 1$ است.

برای درک بهتر تمام مفاهیم بالا، بیایید به چند مثال نگاه کنیم.

PMF

مثال:
من یک سکهٔ منصفانه را دو بار پرتاب می‌کنم، و متغیر تصادفی X را به صورت تعداد شیرهای مشاهده‌شده تعریف می‌کنیم. دامنهٔ X، مجموعهٔ R_X، و همچنین تابع جرم احتمال P_X را بیابید.
پاسخ:
فضای نمونه به صورت زیر است:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

تعداد شیرها می‌تواند برابر با 0، 1 یا 2 باشد. بنابراین:

$$R_X = \{0, 1, 2\}$$

از آنجایی که این مجموعه محدود (و در نتیجه شمارا) است، متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی گسسته است. اکنون باید تابع جرم احتمال X را بیابیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_X(k) = P(X = k) \quad \text{برای} \quad k = 0, 1, 2$$

PMF

مقادیر تابع جرم احتمال به صورت زیر هستند:

$$P_X(0) = P(X = 0) = P(TT) = \frac{1}{4}$$

$$P_X(1) = P(X = 1) = P(\{HT, TH\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P_X(2) = P(X = 2) = P(HH) = \frac{1}{4}$$

PMF

اگرچه تابع جرم احتمال (PMF) معمولاً فقط برای مقادیر موجود در دامنه تعریف می‌شود، گاهی اوقات مفید است که آن را برای همه‌ی اعداد حقیقی گسترش دهیم. اگر $x \notin R_X$، می‌توانیم به سادگی بنویسیم:

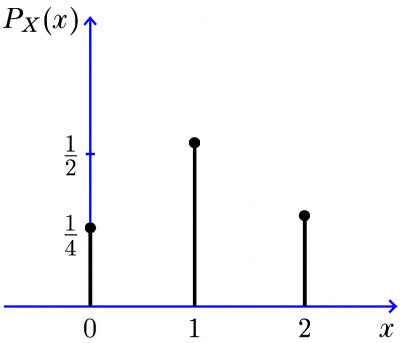
$$P_X(x) = P(X = x) = 0$$

بنابراین، به طور کلی می‌توان نوشت:

$$P_X(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{اگر } x \in R_X \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای درک بهتر تابع جرم احتمال، می‌توان آن را رسم کرد. شکل صفحه ی بعد تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X بالا را نشان می‌دهد. همان‌طور که می‌بینیم، این متغیر تصادفی می‌تواند سه مقدار 0، 1 و 2 را بگیرد. شکل همچنین نشان می‌دهد که رخداد $X = 1$ دو برابر محتمل‌تر از دو مقدار دیگر است.
می‌توان این‌گونه تفسیر کرد: اگر آزمایش تصادفی (پرتاب دو سکه) را بارها تکرار کنیم، در حدود نیمی از دفعات مقدار $X = 1$ را مشاهده می‌کنیم، در حدود یک‌چهارم دفعات $X = 0$، و حدود یک‌چهارم دفعات نیز $X = 2$ را خواهیم داشت.

PMF



PMF

برای متغیرهای تصادفی گسسته، تابع جرم احتمال (PMF) همچنین توزیع احتمال نیز نامیده می‌شود.
بنابراین، وقتی از ما خواسته می‌شود که توزیع احتمال یک متغیر تصادفی گسسته X را پیدا کنیم، می‌توانیم این کار را با یافتن PMF آن انجام دهیم.

PMF

مثال: من یک سکهٔ غیرمنصفانه دارم که احتمال شیر آمدن آن $P(H) = p$ است، به‌طوری‌که $0 < p < 1$. من سکه را آن‌قدر پرتاب می‌کنم تا برای اولین بار یک شیر ببینم. بگذارید Y تعداد کل پرتاب‌های سکه تا مشاهده اولین شیر باشد. توزیع Y را بیابید.

PMF

جواب:

ابتدا توجه کنید که متغیر تصادفی Y می‌تواند هر عدد صحیح مثبت را اختیار کند، بنابراین:

$$R_Y = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

برای یافتن توزیع Y، باید مقدار $P_Y(k) = P(Y = k)$ را برای $k = 1, 2, 3, \ldots$ بیابیم:

$$P_Y(1) = P(Y = 1) = P(H) = p,$$

$$P_Y(2) = P(Y = 2) = P(TH) = (1 - p)p,$$

$$P_Y(3) = P(Y = 3) = P(TTH) = (1 - p)^2 p,$$

$$\vdots$$

$$P_Y(k) = P(Y = k) = P(TT \ldots TH) = (1 - p)^{k-1} p$$

PMF

در نتیجه، تابع جرم احتمال Y به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P_Y(y) = \begin{cases} (1-p)^{y-1}p & \text{برای} \; y = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

PMF

یک متغیر تصادفی گسسته X را با دامنه $\mathrm{Range}(X) = R_X$ در نظر بگیرید. از آنجا که به‌طور تعریف، تابع جرم احتمال (PMF) یک معیار احتمال است، تمام خواص یک تابع احتمال را ارضا می‌کند. به طور خاص، داریم:

- برای همه مقادیر x:

$$0 \le P_X(x) \le 1$$

- جمع تمام مقادیر احتمال در دامنه برابر ۱ است:

$$\sum_{x \in R_X} P_X(x) = 1$$

همچنین توجه کنید که برای هر مجموعه $A \subset R_X$، می‌توان احتمال اینکه $X \in A$ باشد را با استفاده از PMF به صورت زیر نوشت:

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P_X(x)$$

PMF

ویژگی‌های تابع جرم احتمال (PMF):

- برای هر x $0 \leq P_X(x) \leq 1$
- $\sum_{x \in R_X} P_X(x) = 1$
- برای هر مجموعه $A \subset R_X$:

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P_X(x)$$

متغیرهای تصادفی مستقل

در زندگی واقعی، معمولاً با بیش از یک متغیر تصادفی سروکار داریم. برای مثال، اگر ویژگی‌های فیزیکی افراد در یک منطقه را بررسی کنید، ممکن است فردی را به‌طور تصادفی انتخاب کرده و وزن، قد و سایر مشخصات او را بررسی کنید. وزن فرد انتخاب‌شده یک متغیر تصادفی است، و قد او متغیر تصادفی دیگری است. ما نه‌تنها باید هر متغیر تصادفی را جداگانه مطالعه کنیم، بلکه باید بررسی کنیم که آیا بین آن‌ها وابستگی‌وجود دارد یا خیر. آیا افراد قد بلندتر احتمال بیشتری دارند که وزن بیشتری هم داشته باشند؟

مسائل مربوط به وابستگی بین چند متغیر تصادفی بعداً به‌طور مفصل بررسی خواهد شد. اما در اینجا به یک حالت خاص می‌پردازیم که در آن دو متغیر تصادفی مستقل هستند.

مفهوم استقلال متغیرهای تصادفی بسیار شبیه استقلال رویدادهاست. به یاد داشته باشید، دو رویداد A و B مستقل هستند اگر:

$$P(A, B) = P(A)P(B)$$

متغیرهای تصادفی مستقل

به طور مشابه، تعریف زیر برای متغیرهای تصادفی گسسته مستقل داریم:

متغیرهای تصادفی مستقل

دو متغیر تصادفی گسسته X و Y را در نظر بگیرید. می‌گوییم X و Y مستقل هستند اگر:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$$

به طور کلی، اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند، داریم:

$$\forall A, B \subseteq \mathbb{R} \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

متغیر های تصادفی مستقل

به طور شهودی، دو متغیر تصادفی X و Y مستقل هستند اگر دانستن مقدار یکی از آن‌ها، احتمال وقوع دیگری را تغییر ندهد. به عبارتی دیگر، اگر X و Y مستقل باشند، می‌توان نوشت:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad P(Y = y \mid X = x) = P(Y = y)$$

مشابه رویدادهای مستقل، گاهی اوقات می‌توان به راحتی استدلال کرد که دو متغیر تصادفی مستقل هستند، تنها به این دلیل که هیچ‌گونه تعامل فیزیکی با یکدیگر ندارند. در اینجا یک مثال ساده آورده شده است:

فرض کنید سکه‌ای را $2N$ بار پرتاب می‌کنیم. بگذارید X تعداد سکه‌هایی باشد که در N پرتاب اول، شیر ظاهر شده است. همچنین Y تعداد سکه‌هایی باشد که در N پرتاب دوم، شیر ظاهر شده است.

از آنجا که X و Y حاصل پرتاب‌های مستقل سکه هستند، بنابراین این دو متغیر تصادفی مستقل می‌باشند.

البته در شرایط دیگر، ممکن است نشان دادن استقلال دو متغیر تصادفی دشوارتر باشد.

متغیر های تصادفی مستقل

مثال:سکه‌ای را دوبار پرتاب می‌کنیم و X را برابر با تعداد سکه‌های "شیر" ظاهرشده تعریف می‌کنیم. سپس، همان سکه را دو بار دیگر پرتاب کرده و این بار Y را برابر با تعداد "شیر"هایی که ظاهر می‌شوند در نظر می‌گیریم.
مقدار احتمال رویداد مقابل را بیابید:

$$P\left((X<2) \text{ و } (Y>1)\right)$$

متغیرهای تصادفی مستقل

پاسخ:
از آنجایی که X و Y نتیجه‌ی پرتاب‌های مستقل و متفاوت سکه هستند، دو متغیر تصادفی X و Y مستقل از یکدیگر می‌باشند. همچنین توجه داشته باشید که هر دو متغیر تصادفی دارای توزیعی هستند که قبلا یافتیم.
می‌توانیم بنویسیم:

$$P((X<2)\wedge(Y>1)) = P(X<2)\,P(Y>1)$$

$$= (P_X(0)+P_X(1))\cdot P_Y(2)$$

$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{16}.$$

متغیرهای تصادفی مستقل

ما می‌توانیم تعریف استقلال را به n متغیر تصادفی گسترش دهیم.

متغیرهای تصادفی مستقل

فرض کنید n متغیر تصادفی گسسته به صورت $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ داریم. می‌گوییم که این متغیرهای تصادفی مستقل هستند اگر:

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \quad P\left(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2,\ \dots,\ X_n = x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

۱. متغیر های تصادفی
۲. توزیع های معروف
۳. توزیع برنولی
۴. توزیع هندسی
۵. توزیع دو جمله ای
۶. توزیع پوآسون

توزیع های معروف

همان‌طور که مشخص است، برخی توزیع‌های خاص بارها و بارها در عمل مورد استفاده قرار می‌گیرند و به همین دلیل نام‌های ویژه‌ای به آن‌ها داده شده است. در پسِ هر یک از این توزیع‌ها یک آزمایش تصادفی وجود دارد. از آن‌جا که این آزمایش‌های تصادفی بسیاری از پدیده‌های واقعی را مدل‌سازی می‌کنند، این توزیع‌های خاص در کاربردهای مختلف به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. به همین دلیل است که برای آن‌ها نام مشخصی تعیین شده و بخشی را به مطالعه‌ی آن‌ها اختصاص می‌دهیم.
در این بخش، برای همه‌ی این متغیرهای تصادفی ویژه، تابع جرم احتمالی (PMF) را ارائه خواهیم کرد. اما به جای حفظ کردن فرمول‌های PMF، باید آزمایش تصادفی پشت هر کدام را درک کنید. اگر آزمایش تصادفی را درک کنید، می‌توانید در صورت نیاز، PMF را خودتان استخراج کنید.

توزیع برنولی

ساده‌ترین متغیر تصادفی گسسته (یعنی با ساده‌ترین تابع جرم احتمالی یا PMF) که می‌توانید تصور کنید چیست؟ پاسخ این است که تابعی که تنها در یک نقطه مقدار غیرصفر دارد. برای مثال اگر تعریف کنیم:

$$P_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر}\ x = 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت، X یک متغیر تصادفی گسسته است که تنها می‌تواند یک مقدار بگیرد، یعنی $X = 1$ با احتمال یک. اما این توزیع چندان جالب نیست، چون در واقع تصادفی نیست. پس ممکن است بپرسید ساده‌ترین توزیع گسسته بعدی چیست؟ پاسخ، توزیع برنولی است.

یک متغیر تصادفی برنولی، متغیری است که فقط می‌تواند دو مقدار بگیرد، معمولاً ۰ و ۱. این متغیر تصادفی آزمایش‌هایی را مدل می‌کند که دو نتیجه ممکن دارند، که معمولاً آن‌ها را «موفقیت» و «شکست» می‌نامند.

توزیع برنولی

برخی مثال‌ها از چنین آزمایش‌هایی:

- امتحانی را می‌دهید که فقط نتیجه‌ی قبولی یا رد شدن دارد. (در صورت قبول شدن $X = 1$، در غیر این صورت $X = 0$)
- سکه‌ای را پرتاب می‌کنید. نتیجه یا شیر است یا خط.
- کودکی به دنیا می‌آید؛ جنسیت او یا پسر است یا دختر.

توزیع برنولی

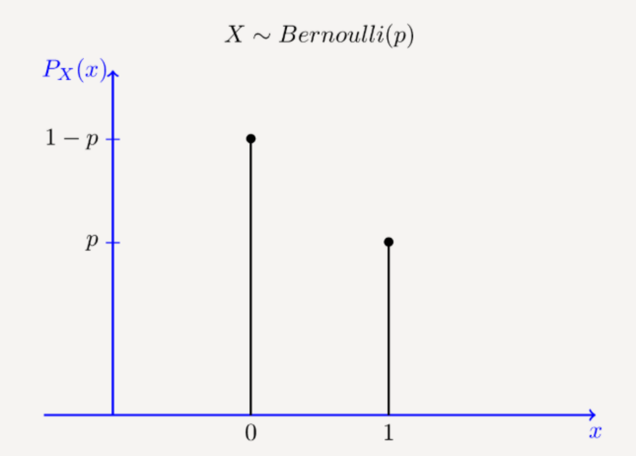
متغیر تصادفی برنولی

یک متغیر تصادفی X گفته می‌شود که یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر p باشد، که به صورت $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ نشان داده می‌شود، اگر تابع جرم احتمالی (PMF) آن به شکل زیر باشد:

$$P_X(x) = \begin{cases} p & \text{برای } x = 1 \\ 1-p & \text{برای } x = 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن $0 < p < 1$.

توزیع برنولی



توزیع برنولی

یک متغیر تصادفی برنولی معمولاً با یک رویداد خاص A مرتبط است. اگر رویداد A رخ دهد (برای مثال، اگر در آزمون قبول شوید)، آنگاه $X = 1$ و در غیر این صورت $X = 0$. به همین دلیل است که متغیر تصادفی برنولی را گاهی متغیر تصادفی نشانگر (indicator) نیز می‌نامند.
به طور خاص، متغیر تصادفی نشانگر I_A برای رویداد A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{اگر رویداد } A \text{ رخ دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

متغیر تصادفی نشانگر برای رویداد A دارای توزیع برنولی با پارامتر $p = P(A)$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$I_A \sim \text{Bernoulli}(P(A))$$

توزیع هندسی

آزمایش تصادفی پشت توزیع هندسی به صورت زیر است: فرض کنید من یک سکه دارم با $P(H) = p$. سکه را می‌اندازم تا زمانی که اولین شیر را مشاهده کنم. ما X را به عنوان تعداد کل پرتاب‌های سکه در این آزمایش تعریف می‌کنیم. سپس گفته می‌شود که X توزیع هندسی با پارامتر p دارد. به عبارت دیگر، می‌توانید این آزمایش را به عنوان تکرار آزمایش‌های مستقل برنولی تا مشاهده اولین موفقیت در نظر بگیرید. دامنه‌ی X در اینجا $R_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ است. قبلا بدست آورده‌بودیم :

$$P_X(k) = P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad \text{برای } k = 1, 2, 3, \ldots$$

ما معمولاً $q = 1 - p$ را تعریف می‌کنیم، بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$P_X(k) = pq^{k-1}, \quad \text{برای } k = 1, 2, 3, \ldots$$

برای این که بگوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع هندسی با پارامتر p است، می‌نویسیم:

$$X \sim \text{Geometric}(p)$$

توزیع هندسی

متغیر تصادفی هندسی

یک متغیر تصادفی X گفته می‌شود که دارای توزیع هندسی با پارامتر p باشد، که با $X \sim \mathrm{Geometric}(p)$ نمایش داده می‌شود، اگر تابع جرم احتمالی آن به صورت زیر تعریف شود:

$$P_X(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & \text{برای } k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن $0 < p < 1$.

توزیع دوجمله ای

آزمایشی که منجر به توزیع دوجمله‌ای می‌شود به این صورت تعریف می‌گردد:
فرض کنید یک سکه داریم که احتمال آمدن شیر (Head) در هر پرتاب برابر با p است. این سکه را n بار و به‌صورت مستقل و یکسان پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را برابر با تعداد کل شیرهای مشاهده‌شده در این n پرتاب قرار می‌دهیم.
در این حالت، متغیر تصادفی X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p است و می‌نویسیم:

$$X \sim \mathrm{Binomial}(n, p)$$

از آنجا که در یک دنبالهٔ nـ تایی از پرتاب‌ها نمی‌توان بیش از n بار یا کمتر از صفر بار شیر مشاهده کرد، دامنهٔ این متغیر تصادفی برابر است با:

$$R_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

تابع جرم احتمالی X در اینجا با فرمول بسط دوجمله‌ای به دست می‌آید:

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{برای } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

توزیع دوجمله ای

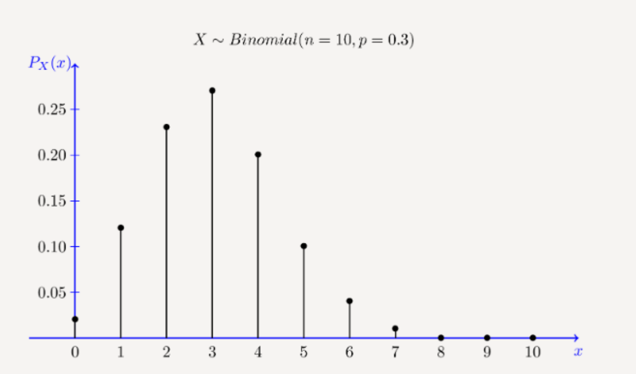
متغیر تصادفی دو جمله ای

یک متغیر تصادفی X گفته می‌شود که یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n و p باشد، که به صورت $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ نشان داده می‌شود، اگر تابع جرم احتمالی آن به صورت زیر باشد:

$$P_X(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & k = 0, 1, 2, \ldots, n \text{ برای} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن $0 < p < 1$.

توزیع دوجمله ای



توزیع دوجمله ای

یک راه بسیار مفید برای درک متغیر تصادفی دوجمله‌ای این است که آن را به عنوان مجموعی از چند متغیر تصادفی برنولی ببینیم.
فرض کنید n بار یک سکه را پرتاب می‌کنیم که احتمال آمدن شیر در هر پرتاب برابر با p است. هر پرتاب را می‌توانیم با یک متغیر تصادفی برنولی مدل کنیم:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر پرتاب } i \text{ ام شیر بیاید} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت، هر X_i یک متغیر تصادفی $\mathrm{Bernoulli}(p)$ است و متغیرهای $X_1, \ldots, X_n$ مستقل از یکدیگر هستند. لذا تعداد کل شیرهای مشاهده‌شده برابر است با مجموع زیر:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

توزیع دوجمله‌ای

از آن‌جا که X برابر است با مجموع n متغیر تصادفی مستقل برنولی با احتمال موفقیت p، در نتیجه:

$$X \sim \text{Binomial}(n, p).$$

به بیان دیگر، یک متغیر دوجمله‌ای را می‌توان جمعِ n متغیر برنولی مستقل در نظر گرفت؛ برداشتی که هم برای محاسبات و هم برای درک شهودیِ توزیع دوجمله‌ای بسیار کاربردی است.

تمرین: فرض کنید $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ و $Y \sim \text{Binomial}(m, p)$ دو متغیر تصادفی مستقل هستند. متغیر جدیدی به صورت $Z = X + Y$ تعریف می‌کنیم. تابع جرم احتمال Z را بیابید.

۱ متغیر های تصادفی

۲ توزیع های معروف

۳ توزیع برنولی

۴ توزیع هندسی

۵ توزیع دو جمله ای

۶ توزیع پواسون

توزیع پوآسون

توزیع پواسون یکی از پرکاربردترین توزیع‌های احتمال است. معمولاً در سناریوهایی استفاده می‌شود که در آن‌ها تعداد وقوع رویدادهای خاصی را در یک بازه زمانی یا فضایی می‌شماریم. در عمل، این توزیع اغلب به عنوان یک تقریب برای یک متغیر تصادفی واقعی در نظر گرفته می‌شود. در اینجا یک مثال آورده شده است که ممکن است از یک متغیر تصادفی پواسون استفاده شود. فرض کنید که تعداد مشتریانی که از ساعت ۱ بعدازظهر تا ۲ بعدازظهر به یک فروشگاه خاص می‌آیند را می‌شماریم. طبق داده‌های روزهای گذشته، می‌دانیم که به طور میانگین $\lambda = 15$ مشتری به فروشگاه می‌آید. البته در برخی روزها تعداد مشتریان بیشتر و در روزهای دیگر کمتر است. در اینجا، می‌توانیم متغیر تصادفی X که تعداد مشتریان را نشان می‌دهد، به عنوان یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda = 15$ مدل کنیم. ابتدا تابع جرم احتمالی پواسون را معرفی می‌کنیم.

توزیع پوآسون

متغیر تصادفی پوآسون

یک متغیر تصادفی X را پواسون با پارامتر λ می‌نامیم و با $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ نمایش می‌دهیم، اگر دامنه‌ی آن برابر باشد با $R_X = \{0, 1, 2, \dots\}$ و تابع جرم احتمالی آن به صورت زیر تعریف شود:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$P_X(k) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} & k \in R_X \text{ برای} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

توزیع پوآسون

پیش از آنکه ادامه دهیم، لازم است بررسی کنیم که آیا این تابع واقعاً یک PMF معتبر است یا خیر. نخست توجه می‌کنیم که برای تمام مقادیر k، داریم: $P_X(k) \geq 0$. سپس باید اطمینان حاصل کنیم که مجموع تمام مقادیر تابع جرم احتمال برابر با یک است:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) = 1.$$

برای این کار، ابتدا سری تیلور را برای e^{λ} به یاد می‌آوریم که به صورت زیر است:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda},$$

توزیع پوآسون

حالا می‌توانیم بنویسیم:

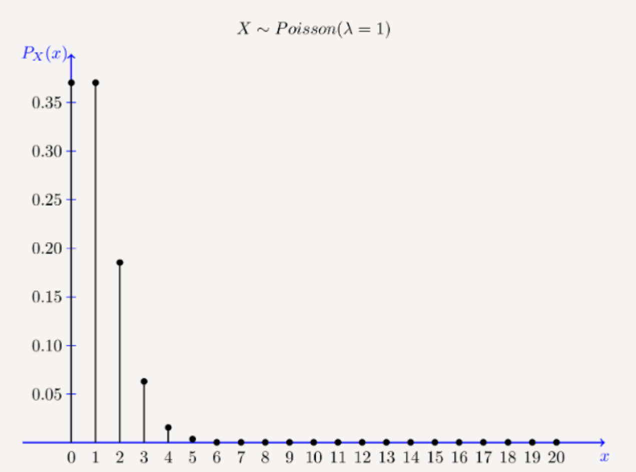
$$\sum_{k\in R_X} P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

پس در نهایت داریم:

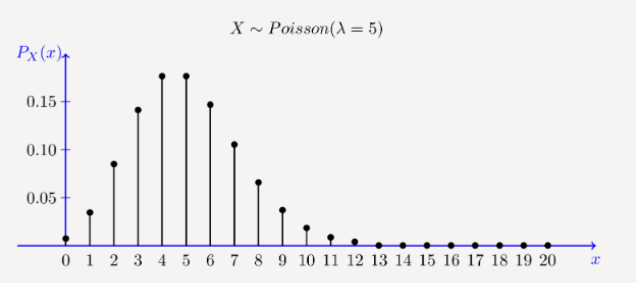
$$e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = e^{-\lambda}(e^{\lambda}) = 1.$$

نمودار های صفحات بعد تابع جرم احتمالی پواسون با پارامتر λ را برای $\lambda = 1$، $\lambda = 5$، و $\lambda = 10$ نشان می‌دهند.

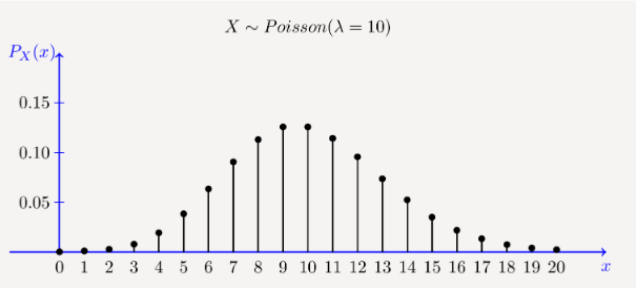
توزیع پواسون



توزیع پوآسون



توزیع پوآسون



توزیع پوآسون

سوال: تعداد ایمیل‌هایی که من در یک روز کاری دریافت می‌کنم، می‌تواند با یک توزیع پواسون مدل‌سازی شود که به طور میانگین ۰.۲ ایمیل در دقیقه دریافت می‌کنم.

۱. احتمال اینکه در یک بازه زمانی ۵ دقیقه‌ای هیچ ایمیلی دریافت نکنم چیست؟

۲. احتمال اینکه در یک بازه زمانی ۱۰ دقیقه‌ای بیشتر از ۳ ایمیل دریافت کنم چیست؟

توزیع پوآسون

پاسخ:

۱. فرض کنید X تعداد ایمیل‌هایی است که در بازه ۵ دقیقه‌ای دریافت می‌کنم. در این صورت، با توجه به فرض X یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda = 5(0.2) = 1$ است:

$$P(X=0) = P_X(0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-1}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{e} \approx 0.3679$$

۲. فرض کنید Y تعداد ایمیل‌هایی است که در بازه ۱۰ دقیقه‌ای دریافت می‌کنم. در این صورت، با توجه به فرض Y یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda = 10(0.2) = 2$ است:

$$P(Y>3) = 1 - P(Y\leq 3)$$

$$P(Y>3) = 1 - (P_Y(0) + P_Y(1) + P_Y(2) + P_Y(3))$$

$$P(Y>3) = 1 - \left(e^{-\lambda} - e^{-\lambda}\lambda^1\frac{1}{1!} - e^{-\lambda}\lambda^2\frac{1}{2!} - e^{-\lambda}\lambda^3\frac{1}{3!}\right)$$

$$P(Y>3) = 1 - e^{-2}(1+2+2+\frac{8}{6}) = 1 - \frac{19}{3e^2} \approx 0.1429$$