ماژول اول آمار و احتمال

بخش دوم - مجموعه

المپیاد هوش مصنوعی

۱ مجموعه‌ها

۲ زیرمجموعه

۳ ویژگی‌های مجموعه‌ها

۴ ضرب دکارتی

تعریف مجموعه

مجموعه ریاضی، به گروهی از اشیاء یا اعداد گفته می‌شود که گرد هم آمده‌اند. این اشیاء می‌توانند هر چیزی باشند؛ اعداد، حروف، میوه‌ها، حیوانات و ... . همچنین اشیای یک مجموعه را درون آکولادها ($\{\}$) قرار دهیم.

مثال

- مجموعه A = {سیب، پرتقال، موز}
- مجموعه B = {۱، ۲، ۳، ۴}
- مجموعه C = $\{\mathrm{a}\}$

اعضای مجموعه

به هر یک از اشیاء داخل مجموعه، عضو مجموعه گفته می‌شود و عضویت را با نماد $\in$ نمایش می‌دهیم.

مثال

- $A \in$ سیب
- $B \in$ ۴
- $C \in a$

نمایش مجموعه‌ها

- روش شمارشی: در این روش همه اعضای مجموعه را بین دو آکولاد می‌نویسیم و با کاما از هم جدا می‌کنیم.
- روش توصیفی: در این روش ویژگی مشترک اعضای مجموعه را با کلمات توصیف می‌کنیم. به مثال‌های زیر توجه فرمایید:

مثال

- مجموعه حروف الفبای فارسی: {الف، ب، پ، ت، ...، ی}
- مجموعه ماه‌های سال: {فروردین، اردیبهشت، خرداد، ...، اسفند}
- مجموعه اعداد زوج بین ۱ تا ۱۰: {۲، ۴، ۶، ۸}

زیرمجموعه چیست؟

زیرمجموعه‌ی یک مجموعه، خود مجموعه‌ای است که همه اعضای آن در مجموعه اصلی وجود دارند. به عبارت دیگر، اگر همه اعضای یک مجموعه A در مجموعه B باشند، می‌گوییمA زیر مجموعه B است.

مثال

مجموعه $\{۱، ۲\}$ زیرمجموعه مجموعه $\{۱، ۲، ۳\}$ است، چون هر عضو از مجموعه‌ی اول در مجموعه‌ی دوم نیز می‌باشد.

نمایش زیرمجموعه

برای نشان دادن اینکه A زیر مجموعه B است، از نماد $\subseteq$ استفاده میکنیم.

$$A \subseteq B$$

به این معنی که:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$$
$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x : (x \in A \wedge x \notin B)$$

مثال

- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

مجموعه تهی

مجموعه تهی، مجموعه‌ای است که **هیچ** عضوی ندارد.
این مجموعه را با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.
تعداد اعضای مجموعه تهی صفر است: $|\emptyset| = 0$.

مجموعه تهی

مجموعه تهی، زیرمجموعه‌ی **هر** مجموعه‌ای (مانند A) است: $\emptyset \subseteq A$.

- طبق تعریف، X زیرمجموعه Y است اگر هر عضوی که در X وجود دارد، در Y نیز وجود داشته باشد.
- برای اینکه نشان دهیم $\emptyset$ زیرمجموعه A نیست، باید بتوانیم عضوی در $\emptyset$ پیدا کنیم که در A نباشد.
- اما چون $\emptyset$ هیچ عضوی ندارد، پیدا کردن چنین عضوی غیرممکن است.
- بنابراین، شرطِ «هر عضو $\emptyset$ در A است» به طور پیش‌فرض (vacuously true) برقرار است و $\emptyset$ زیرمجموعه A محسوب می‌شود.

مثال مجموعه تهی

مثال‌هایی از مجموعه‌هایی که برابر با مجموعه تهی هستند:

- مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۱: $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 1\} = \emptyset$
- مجموعه اعداد اول زوج و بزرگتر از ۲: $\{p \in \mathbb{P} \mid p > 2 \wedge p$ زوج است $\} = \emptyset$
- مجموعه انسان‌هایی که بال دارند: $\emptyset$

نکته مهم

توجه کنید که $\emptyset$ (مجموعه بدون عضو) با $\{\emptyset\}$ (مجموعه‌ای که یک عضو دارد و آن عضو، خود مجموعه تهی است) متفاوت است: $|\{\emptyset\}| = 1$.

تعداد کل زیرمجموعه‌ها

برای پیدا کردن تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه، یک فرمول ساده وجود دارد: اگر یک مجموعه n عضو داشته باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲ به توان n خواهد بود.

مثال

در نظر بگیرید مجموعه $A = \{1, 2\}$ باشد. این مجموعه ۲ عضو دارد. پس تعداد زیرمجموعه‌های آن $2^2 = 4$ تا است. این زیرمجموعه‌ها عبارتند از:

- $\emptyset$ (مجموعه تهی)
- $\{1\}$
- $\{2\}$
- $\{1, 2\}$

چرا از این فرمول استفاده میکنیم؟

این فرمول به این دلیل جواب می‌دهد که هر عضو یک مجموعه می‌تواند در یک زیرمجموعه وجود داشته باشد یا نداشته باشد. یعنی برای هر عضو دو حالت وجود دارد: یا در زیرمجموعه است یا نیست. پس برای یک مجموعه n عضوی، ما ۲ حالت برای عضو اول، ۲ حالت برای عضو دوم، و به همین ترتیب ۲ حالت برای عضو n ام داریم.
در نتیجه تعداد کل حالات ممکن برابر با ۲ به توان n می‌باشد.

روش‌های اثبات زیرمجموعه بودن

برای اثبات اینکه A زیرمجموعه B است، معمولاً از دو روش استفاده می‌شود:

۱. **روش مستقیم:**

- **فرض:** فرض می‌کنیم که x یک عضو دلخواه از مجموعه A است.
- **اثبات:** نشان می‌دهیم که x حتماً باید عضو مجموعه B نیز باشد.

۲. **روش برهان خلف (متناقض):**

- **فرض:** فرض می‌کنیم که A زیرمجموعه B نیست؛ یعنی حداقل یک عضو در A وجود دارد که در B وجود ندارد.
- **اثبات:** با استفاده از این فرض، به یک تناقض می‌رسیم؛ یعنی به نتیجه‌ای می‌رسیم که با اطلاعات اولیه ما مغایرت دارد. بنابراین فرض اولیه ما (یعنی A زیرمجموعه B نیست) اشتباه بوده و نتیجه می‌گیریم که A زیرمجموعه B است.

روش‌های اثبات زیر مجموعه بودن

مثال

ثابت کنید که مجموعه

$$A = \{1, 2, 3\}$$

زیرمجموعه، مجموعه

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

است.

- فرض: فرض می‌کنیم x یک عضو دلخواه از A است. پس x می‌تواند 1، 2 یا 3 باشد.
- اثبات: اگر x برابر 1، 2 یا 3 باشد، به وضوح می‌بینیم که x در B نیز وجود دارد. پس هر عضوی از A، عضو B نیز است، بنابراین A زیر مجموعه B است.

روش‌های اثبات زیر مجموعه بودن

مثال

ثابت کنید که مجموعه اعداد زوج زیرمجموعه مجموعه اعداد صحیح است.

- فرض متناقض: فرض می‌کنیم که یک عدد زوج وجود دارد که عدد صحیح نیست.
- اثبات: این فرض تناقض است، زیرا هر عدد زوج به طور تعریف یک عدد صحیح است. پس فرض ما اشتباه بوده و نتیجه می‌گیریم که مجموعه اعداد زوج زیرمجموعه مجموعه اعداد صحیح است.

چه زمانی A زیرمجموعه B نیست؟

اگر بتوانیم حتی یک عضو در A پیدا کنیم که در B وجود نداشته باشد، می‌توانیم بگوییم که A زیر مجموعه B نیست.

قضیه

فرض کنید A، B و C سه مجموعه باشند که همگی زیرمجموعه یک مجموعه مرجع U هستند. اگر A زیرمجموعه B و B زیرمجموعه C باشد، آنگاه A نیز زیرمجموعه C خواهد بود. به عبارت ریاضی:

$$A \subseteq B \text{ و } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

مثال

$$A = \{1, 2\}$$
$$B = \{1, 2, 3\}$$
$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

می‌بینیم که همه اعضای A در B هستند (پس $A \subseteq B$ است) و همه اعضای B در C هستند (پس $B \subseteq C$ است). حالا اگر کمی دقت کنیم، متوجه می‌شویم که همه اعضای A (یعنی ۱ و ۲) در C هم وجود دارند. پس $A \subseteq C$ هم هست.

اثبات قضیه

برای اثبات این قضیه، باید نشان دهیم که هر عضوی از مجموعه A عضوی از مجموعه C نیز هست. به عبارت دیگر، اگر x عضوی از A باشد، آنگاه x حتماً عضوی از C نیز خواهد بود.
گام اول: از تعریف زیرمجموعه بودن به یاد داشته باشیم که A زیرمجموعه B بودن به این معنی است که هر عضوی از A عضوی از B نیز هست. به طور مشابه، B زیرمجموعه C بودن به این معنی است که هر عضوی از B عضوی از C نیز هست.
گام دوم (استفاده از فرضیه‌ها): از فرضیه‌های $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ استفاده می‌کنیم. این فرضیه‌ها به ما می‌گویند که:

- اگر x عضوی از A باشد، آنگاه x حتماً عضوی از B است.
- اگر x عضوی از B باشد، آنگاه x حتماً عضوی از C است.

اثبات قضیه:

گام سوم (ترکیب فرضیه‌ها): اکنون، فرض کنید x عضوی دلخواه از A باشد. از فرضیه اول می‌دانیم که x عضوی از B است. و از فرضیه دوم می‌دانیم که اگر x عضوی از B باشد، آنگاه x حتماً عضوی از C است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که اگر x عضوی از A باشد، آنگاه x حتماً عضوی از C نیز هست.
گام چهارم (نتیجه‌گیری): از آنجایی که برای هر عضو دلخواه x از A نشان دادیم که x حتماً عضوی از C نیز هست، می‌توانیم نتیجه بگیریم که A زیرمجموعه C است.

$$\begin{aligned} &\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall x : (x \in B \Rightarrow x \in C) \\ &\quad \Rightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in C) \end{aligned}$$

مجموعه توانی

فرض کنید یک مجموعه داریم، مثلاً مجموعه میوه‌ها. مجموعه توانی این مجموعه، مجموعه‌ای است که همه زیرمجموعه‌های ممکن آن مجموعه را در خودش جای می‌دهد. به عبارت ساده‌تر، اگر بخواهیم همه گروه‌های مختلفی که می‌توانیم از اعضای یک مجموعه تشکیل دهیم را در یک مجموعه جدید جمع کنیم، آن مجموعه جدید را مجموعه توانی می‌نامیم.

مثال

در نظر بگیرید مجموعه $A = \{a, b\}$ باشد. زیرمجموعه‌های A عبارتند از: مجموعه توانی A برابر است با:
$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

چرا به آن مجموعه توانی می‌گویند؟

به این مجموعه، مجموعه توانی گفته می‌شود چون تعداد اعضای آن برابر با ۲ به توان تعداد اعضای مجموعه اصلی است. در مثال بالا، مجموعه A دو عضو دارد، پس تعداد اعضای مجموعه توانی آن ۲ به توان ۲ برابر ۴ است.

مثال

در نظر بگیرید مجموعه $B = \{1, 2, 3\}$ باشد. زیرمجموعه‌های B عبارتند از:
$\emptyset$ (مجموعه تهی) $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{1, 2\}$ $\{1, 3\}$ $\{2, 3\}$ $\{1, 2, 3\}$
پس مجموعه توانی B برابر است با: $P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

نکته مهم

- هر مجموعه، یک زیرمجموعه از مجموعه توانی خودش است.
- مجموعه تهی، زیر مجموعه همه مجموعه‌ها، از جمله مجموعه توانی است.

زیرمجموعه محض

میدانیم که اگر همه اعضای یک مجموعه A در مجموعه دیگری به نام B وجود داشته باشند، می‌گوییم A زیر مجموعه B است. اما
زیرمجموعه محض به زیرمجموعه‌ای گفته می‌شود که همه اعضای آن در مجموعه بزرگ‌تر وجود داشته باشد، اما این دو مجموعه دقیقاً یکسان نباشند. به عبارت دیگر، زیر مجموعه محض، زیرمجموعه‌ای است که حداقل یک عضو کمتر از مجموعه بزرگ‌تر دارد.

مثال

$A = \{1, 2\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$
مجموعه A زیرمجموعهٔ محض مجموعه B است، زیرا همهٔ اعضای A در B وجود دارند اما عضو ۳ در A وجود ندارد.

چه زمانی A زیر مجموعه محض B نیست؟

- اگر A و B دقیقاً اعضای یکسانی داشته باشند. در این حالت، A زیر مجموعه B است، اما زیرمجموعه محض نیست، چون هر دو مجموعه برابرند.
- اگر حتی یک عضو از A در B وجود نداشته باشد. در این حالت، A اصلاً زیرمجموعه B نیست.

نماد زیر مجموعه محض

برای نشان دادن اینکه A زیرمجموعهٔ محض B است، از نماد $\subset$ استفاده می‌کنیم. پس $A \subset B$ به این معنی است که A زیرمجموعهٔ محض B است.

دو مجموعه مساوی

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد. یعنی A زیرمجموعه B و B زیرمجموعه A است. در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم: $A = B$. به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت:

$$A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

متمم یک مجموعه

تصور کنید یک کلاس درس داریم. همه دانش‌آموزان این کلاس، یک مجموعه را تشکیل می‌دهند. حالا اگر بخواهیم دانش‌آموزانی را که در این کلاس نیستند، در یک مجموعه جداگانه قرار دهیم، این مجموعه جدید را متمم مجموعه دانش‌آموزان کلاس می‌نامیم. به عبارت ساده‌تر، متمم یک مجموعه، شامل همه چیزهایی است که در آن مجموعه نیست اما در یک مجموعه مرجع مشخص وجود دارد. این مجموعه مرجع، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای است که همه مجموعه‌های مورد نظر ما زیرمجموعه آن هستند.

مثال

فرض کنید مجموعه مرجع ما، مجموعه همه حروف الفبای فارسی باشد. اگر مجموعه A شامل حروف الف، ب، پ باشد، متمم A شامل همه حروف الفبای فارسی به جز الف، ب و پ خواهد بود.

نماد متمم

برای نشان دادن متمم یک مجموعه، از علامت $(')$ استفاده می‌کنیم. مثلاً متمم مجموعه A را با A' نشان می‌دهیم.

$$A' = \{x \in U \,|\, x \notin A\}$$

نکات مهم :

- متمم یک مجموعه نسبت به مجموعه مرجع تعریف می‌شود. اگر مجموعه مرجع تغییر کند، متمم مجموعه نیز تغییر می‌کند
- اجتماع یک مجموعه و متمم آن، برابر با مجموعه مرجع است.
- اشتراک یک مجموعه و متمم آن، مجموعه تهی است.

قضیه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند که هر دو زیرمجموعه مجموعه مرجع U هستند. اگر A زیرمجموعه B باشد، آنگاه متمم B نیز زیرمجموعه متمم A خواهد بود. به عبارت دیگر: اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه $B' \subseteq A'$.

مثال

- مجموعه مرجع: همه حروف الفبای فارسی
- $A = \{$الف، ب، پ$\}$
- $B = \{$الف، ب، پ، ت$\}$

در اینجا A زیرمجموعه B است.

- متمم A: همه حروف الفبای فارسی به جز الف، ب و پ
- متمم B: همه حروف الفبای فارسی به جز الف، ب، پ و ت

می‌بینیم که هر عضوی از متمم B (یعنی حروف ث، ج، د، ...) حتماً در متمم A هم وجود دارد. پس متمم B زیرمجموعه متمم A است.

اثبات قضیه

فرض می‌کنیم $A \subseteq B$. این به این معنی است که هر عضوی از A، عضوی از B نیز هست.

قضیه

اگر $A \subseteq B$، آنگاه $B' \subseteq A'$.

اثبات به روش خلف:
فرض کنیم که $B' \nsubseteq A'$. یعنی عنصری مانند x وجود دارد که $x \in B'$ و $x \notin A'$.

- از طرفی، چون $x \in B'$، پس $x \notin B$. (طبق تعریف متمم)
- از طرفی، چون $x \notin A'$، پس $x \in A$. (طبق تعریف متمم)
- اما از طرف دیگر، چون $A \subseteq B$، پس هر عنصری که در A است، در B نیز است. بنابراین، اگر $x \in A$ باشد، پس $x \in B$.

بنابراین، هم $x \in B$ و هم $x \notin B$ که این یک تناقض است.
پس فرض اولیه ما مبنی بر اینکه $B' \nsubseteq A'$ برقرار نیست، اشتباه بوده است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه $B' \subseteq A'$.

چرا مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌هاست؟

اگر به تعریف مجموعه تهی دقت کنیم، می‌بینیم که مجموعه تهی هیچ عضوی ندارد. پس وقتی می‌گوییم مجموعه تهی زیرمجموعه مجموعه B است، در واقع داریم می‌گوییم که "همه اعضای مجموعه تهی (که هیچ عضوی ندارد!) در B وجود دارند". از آنجایی که این جمله همیشه درست است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.

قضیه

فرض کنید A یک مجموعه دلخواه باشد و U مجموعه مرجع باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که مجموعه تهی زیرمجموعه A است. برای هر مجموعه دلخواه A داریم:

$$\emptyset \subseteq A$$

اثبات.

برای اثبات این قضیه، از روش اثبات خلف استفاده می‌کنیم. این روش به این صورت است که ابتدا فرض می‌کنیم قضیه درست نباشد و سپس نشان می‌دهیم که این فرض به یک تناقض منجر می‌شود.
فرض خلف: فرض می‌کنیم $\emptyset \not\subseteq A$ درست نباشد. این به این معنی است که عنصری مانند x وجود دارد که $x \in \emptyset$ و $x \notin A$.
تناقض: اما طبق تعریف مجموعه تهی، هیچ عنصری در مجموعه تهی وجود ندارد. بنابراین، عبارت $x \in \emptyset$ یک تناقض است.
نتیجه‌گیری: از آنجا که فرض خلف ما (یعنی $\emptyset \not\subseteq A$) درست نیست) به یک تناقض منجر شد، پس فرض اولیه ما اشتباه بوده است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $\emptyset \subseteq A$.

خاصیت جا به جایی در مجموعه ها

وقتی می‌خواهیم دو مجموعه را با هم ترکیب کنیم، مهم نیست کدام مجموعه را اول بنویسیم، نتیجه همیشه یکسان خواهد بود. این خاصیت را خاصیت جابه‌جایی می‌نامیم.

- خاصیت جابه‌جایی در اجتماع: وقتی دو مجموعه را با هم اجتماع می‌کنیم، در واقع همه اعضای هر دو مجموعه را در یک مجموعه جدید جمع می‌کنیم. فرقی نمی‌کند که کدام مجموعه را اول بنویسیم. مثلاً اگر مجموعه A و B را داشته باشیم، اجتماع A و B همان اجتماع B و A خواهد بود. به صورت ریاضی این‌طور می‌نویسیم:

$$A \cup B = B \cup A$$

- خاصیت جابه‌جایی در اشتراک: وقتی دو مجموعه را با هم اشتراک می‌کنیم، در واقع اعضای مشترک بین دو مجموعه را پیدا می‌کنیم. اینجا هم فرقی نمی‌کند که کدام مجموعه را اول بنویسیم. به صورت ریاضی این‌طور می‌نویسیم:

$$A \cap B = B \cap A$$

مثال خاصیت جا به جایی در اجتماع

مثال

مجموعه

$$A = \{1, 2, 3\}$$

مجموعه

$$B = \{3, 4, 5\}$$

اجتماع مجموعه‌ها:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

و همچنین:

$$B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

همانطور که می‌بینید، نتیجه در هر دو حالت یکسان است.

مثال خاصیت جا به جایی در اشتراک

مثال

مجموعه A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

و مجموعه B را به صورت زیر مشخص می‌کنیم:

$$B = \{3, 4, 5\}$$

اشتراک مجموعه A و B:

$$A \cap B = \{3\}$$

و نیز

$$B \cap A = \{3\}$$

سپس، نتیجه در هر دو حالت یکسان است.

خاصیت شرکت‌پذیری در مجموعه‌ها

وقتی می‌خواهیم بیش از دو مجموعه را با هم ترکیب کنیم (مثلاً با عملیات اجتماع یا اشتراک)، ترتیبی که پرانتزها را قرار می‌دهیم، تاثیری در نتیجه نهایی ندارد. این خاصیت را خاصیت شرکت‌پذیری می‌نامیم.

- خاصیت شرکت‌پذیری در اجتماع: وقتی سه یا چند مجموعه را با هم اجتماع می‌کنیم، می‌توانیم هر طور که خواستیم پرانتزها را قرار دهیم. مثلاً اگر سه مجموعه A، B و C داشته باشیم:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

به عبارت دیگر، ابتدا می‌توانیم A و B را با هم اجتماع کنیم و سپس نتیجه را با C اجتماع کنیم، یا ابتدا B و C را با هم اجتماع کنیم و سپس نتیجه را با A اجتماع کنیم. در هر دو حالت، نتیجه نهایی یکسان خواهد بود.

- در عملیات اشتراک نیز خاصیت شرکت‌پذیری برقرار است. یعنی:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

مثال خاصیت شرکت پذیری در اجتماع

مثال

$$A = \{1, 2\}$$
$$B = \{2, 3\}$$
$$C = \{3, 4\}$$

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

مثال خاصیت شرکت پذیری در اشتراک

مثال

$$(A \cap B) \cap C = \{2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset \quad (\text{مجموعه تهی})$$

$$A \cap (B \cap C) = \{1, 2\} \cap \{3\} = \emptyset$$

به طور خلاصه: خاصیت شرکت‌پذیری در مجموعه‌ها به ما می‌گوید که در عملیات اجتماع و اشتراک، ترتیب قرار دادن پرانتز ها تاثیری در نتیجه نهایی ندارد. این خاصیت بسیار مفید است و به ما کمک می‌کند تا محاسبات پیچیده را ساده‌تر کنیم و مفاهیم را بهتر درک کنیم.

خاصیت توزیع‌پذیری در مجموعه‌ها

این خاصیت، ارتباط بین دو عمل مهم در مجموعه‌ها یعنی اجتماع و اشتراک را نشان می‌دهد.
تصور کنید می‌خواهیم یک عدد را در جمع دو عدد دیگر ضرب کنیم. مثلاً می‌خواهیم ۲ رو در حاصل جمع ۳ و ۴ ضرب کنیم. دو راه برای این کار داریم:

- اول ۳ و ۴ رو با هم جمع می‌کنیم و بعد نتیجه رو در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2 \times (3+4) = 2 \times 7 = 14 \tag{۱}$$

- یا اول هر کدوم از اعداد ۳ و ۴ رو در ۲ ضرب می‌کنیم و بعد نتایج رو با هم جمع می‌کنیم:

$$(2 \times 3) + (2 \times 4) = 6 + 8 = 14 \tag{۲}$$

می‌بینید که در هر دو حالت، نتیجه یکسان شد. این یعنی ضرب نسبت به جمع، توزیع‌پذیر است. در مجموعه‌ها هم همینطور است. خاصیت توزیع‌پذیری به ما می‌گوید که می‌توانیم اشتراک یک مجموعه را روی اجتماع دو مجموعه دیگر پخش کنیم و برعکس.

قوانین توزیع‌پذیری در مجموعه‌ها

- اشتراک نسبت به اجتماع توزیع‌پذیر است:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (۳)$$

$$(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A) \quad (۴)$$

- اجتماع نسبت به اشتراک توزیع‌پذیر است

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (۵)$$

$$(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A) \quad (۶)$$

مثال قوانین توزیع پذیری

مثال

اشتراک نسبت به اجتماع:

$$A = \{1, 2, 3\} \tag{۷}$$
$$B = \{2, 3, 4\} \tag{۸}$$
$$C = \{3, 4, 5\} \tag{۹}$$
$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\} \tag{۱۰}$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2, 3\} \cup \{3\} = \{2, 3\} \tag{۱۱}$$

همانطور که می‌بینید، نتایج برابرند.

قوانین توزیع‌پذیری در مجموعه‌ها

مثال

اجتماع نسبت به اشتراک:
با استفاده از همان مجموعه‌های مثال قبل:

$$A \cup (B \cap C) = \{1,2,3\} \cup \{3\} = \{1,2,3\} \tag{۱۲}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,4\} \cap \{1,2,3,5\} = \{1,2,3\} \tag{۱۳}$$

نکات

- $A \cup U = U$
به عبارت ساده، اگر تمام عناصر ممکن را به یک مجموعه اضافه کنیم، نتیجه همان مجموعه جهانی خواهد بود.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
هیچ عنصری نمی‌تواند هم در یک مجموعه و هم در مجموعه تهی باشد.
- $A \cup U = U$
همانطور که در قانون اول توضیح داده شد، افزودن تمام عناصر ممکن به یک مجموعه، نتیجه را به مجموعه جهانی تبدیل می‌کند.
- $A \cap U = A$
وقتی همه عناصر ممکن را با عناصر یک مجموعه خاص مقایسه کنیم، نتیجه همان عناصر مجموعه اصلی خواهد بود.

قوانین دمورگان

قوانین دمورگان دو قانون اصلی هستند که به ما نشان می‌دهند چگونه می‌توانیم از روی اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها، به اجتماع و اشتراک متمم‌های آن‌ها برسیم و بالعکس. این قوانین به نام دانشمند ریاضی، آگوستوس دمورگان نامگذاری شده‌اند.

- قانون اول دمورگان: متمم اجتماع دو مجموعه برابر است با اشتراک متمم‌های آن‌ها.

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \tag{۱۴}$$

- قانون دوم دمورگان: متمم اشتراک دو مجموعه برابر است با اجتماع متمم‌های آن‌ها.

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \tag{۱۵}$$

قضیه

در این قضایا، دو رابطه بین دو مجموعه A و B ارائه شده است که هر دو در یک مجموعه مرجع U قرار دارند:

- A زیرمجموعه B است اگر و فقط اگر اجتماع A و B برابر با B باشد:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \tag{۱۶}$$

- A زیرمجموعه B است اگر و فقط اگر اشتراک A و B برابر با A باشد:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \tag{۱۷}$$

اثبات

اثبات قسمت اول:

- جهت رفت $(\Rightarrow)$: فرض کنید $B \subseteq A$ باشد، یعنی هر عضوی از A، عضوی از B نیز هست. در این صورت، وقتی اجتماع A و B را می‌گیریم، تمام عناصر B را داریم (چون همه عناصر A در B هستند) و عناصر جدیدی به مجموعه اضافه نمی‌شود. پس $A \cup B = B$.
- جهت برگشت $(\Leftarrow)$: فرض کنید $A \cup B = B$. این به این معنی است که هر عضوی از A، حتماً باید در B نیز وجود داشته باشد (چون اجتماع A و B برابر با B است). پس $A \subseteq B$.

اثبات

اثبات قسمت دوم:

- جهت رفت $(\Rightarrow)$: فرض کنید $A \subseteq B$ باشد. اشتراک A و B شامل همه عناصر مشترک بین A و B است. از آنجایی که هر عضوی از A، عضوی از B نیز هست، پس اشتراک A و B دقیقاً برابر با A خواهد بود. یعنی $A \cap B = A$.
جهت برگشت $(\Leftarrow)$: فرض کنید $A \cap B = A$. این به این معنی است که هر عضوی از A، حتماً باید در B نیز وجود داشته باشد (چون اشتراک A و B برابر با A است). پس $A \subseteq B$.

قضیه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند که هر دو زیرمجموعه یک مجموعه مرجع U هستند. در این صورت، دو تساوی زیر برقرار است:

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (۱۸)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (۱۹)$$

اثبات

اثبات قسمت اول:
برای اثبات این تساوی، باید نشان دهیم که هر عضوی از طرف چپ تساوی، عضوی از طرف راست تساوی است و بالعکس.

- جهت رفت $(\subseteq)$: فرض کنید $x \in A \cup (A \cap B)$ باشد. این به معنی است که یا $x \in A$ است یا $x \in (A \cap B)$ است. در هر دو حالت، x قطعا عضو A است. بنابراین، هر عضوی از $A \cup (A \cap B)$ عضوی از A نیز هست. پس $A \cup (A \cap B) \subseteq A$.
- جهت برگشت $(\supseteq)$: فرض کنید $x \in A$ باشد. واضح است که $x \in A \cup (A \cap B)$ نیز هست، زیرا x عضو A است. پس $A \subseteq A \cup (A \cap B)$.

از دو جهت رفت و برگشت نتیجه می‌گیریم که $A \cup (A \cap B) = A$. آنجایی که نشان دادیم هر عضوی از دو طرف تساوی در طرف دیگر نیز هست، پس تساوی برقرار است.

اثبات

اثبات قسمت دوم:

- جهت رفت $(\subseteq)$: فرض کنید $x \in A \cap (A \cup B)$ باشد. این به معنی است که $x \in A$ و $x \in (A \cup B)$ است. از آنجایی که $x \in A$ است، پس x قطعا عضوی از A است. بنابراین، هر عضوی از $A \cap (A \cup B)$ عضوی از A نیز هست. پس $A \cap (A \cup B) \subseteq A$.
- جهت برگشت $(\supseteq)$: فرض کنید $x \in A$ باشد. از آنجایی که $A \subseteq A \cup B$ است، پس $x \in A \cup B$ نیز هست. بنابراین، $x \in A \cap (A \cup B)$ است. پس $A \subseteq A \cap (A \cup B)$.

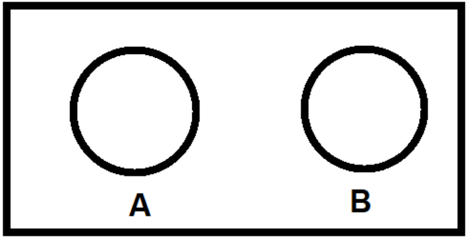
  از دو جهت رفت و برگشت نتیجه می‌گیریم که $A \cap (A \cup B) = A$.

از آنجایی که نشان دادیم هر عضوی از دو طرف تساوی در طرف دیگر نیز هست، پس تساوی برقرار است.

زیرمجموعه‌های ناسازگار

دو مجموعه A و B را ناسازگار می‌نامیم، اگر اشتراک آن‌ها تهی باشد. که به صورت زیر نمایش داده میشود:

$$A \cap B = \emptyset$$



اصل شمول و عدم شمول

اصل شمول و عدم شمول، یک روش شمارشی است که برای محاسبه تعداد عناصر اجتماع دو یا چند مجموعه استفاده می‌شود. این اصل به ویژه زمانی مفید است که مجموعه‌ها ناسازگار نباشند.

اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه:

برای دو مجموعه A و B، تعداد عناصر اجتماع آن‌ها برابر است با:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ضرب دکارتی:

فرض کنید دو مجموعه A و B داریم. ضرب دکارتی A و B که با نماد $A \times B$ نشان داده می شود، مجموعه‌ای از همه زوج‌های مرتب (a, b) است که در آن a عضوی از A و b عضوی از B است. به عبارت ساده‌تر، ما هر عضو از مجموعه A را با هر عضو از مجموعه B ترکیب می‌کنیم تا یک زوج مرتب جدید بسازیم.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ و } b \in B\} \qquad (۲۰)$$

ویژگی‌های ضرب دکارتی

- ترتیب مهم است: زوج مرتب (a, b) با زوج مرتب (b, a) متفاوت است، مگر اینکه $a = b$
- ضرب دکارتی جابجایی پذیر نیست: به طور کلی، $A \times B \neq B \times A$
- تعداد اعضای ضرب دکارتی: اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد، آنگاه ضرب دکارتی $A \times B$ دارای $m \times n$ عضو خواهد بود.

قضیه

اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه:

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \text{ یا } B = \emptyset.$$

اثبات

- مسیر رفت: اگر $A \times B = \emptyset$، آنگاه $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$. برای اثبات این قسمت از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $A \times B = \emptyset$ اما $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$. از آنجایی که $A \neq \emptyset$، پس حداقل یک عنصر $a \in A$ وجود دارد. همچنین از آنجایی که $B \neq \emptyset$، پس حداقل یک عنصر $b \in B$ وجود دارد. بنابراین، زوج مرتب $(a, b) \in A \times B$ خواهد بود که این با فرض اولیه ما مبنی بر این که $A \times B = \emptyset$، تناقض دارد. پس فرض اولیه ما مبنی بر $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ باطل است. بنابراین، اگر $A \times B = \emptyset$، آنگاه $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$.
- مسیر برگشت: اگر $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$، آنگاه $A \times B = \emptyset$.
  - حالت اول: اگر $A = \emptyset$، آنگاه به ازای هر عنصر $b \in B$، زوج مرتب (a, b) برای هیچ $a \in A$ وجود ندارد. بنابراین $A \times B = \emptyset$.
  - حالت دوم: اگر $B = \emptyset$، آنگاه به ازای هر عنصر $a \in A$، زوج مرتب (a, b) برای هیچ $b \in B$ وجود ندارد. بنابراین $A \times B = \emptyset$.