آشنایی با بردار ها و عملیات برداری

المپیاد هوش مصنوعی

فهرست مطالب

فهرست مطالب

بردار چیست؟

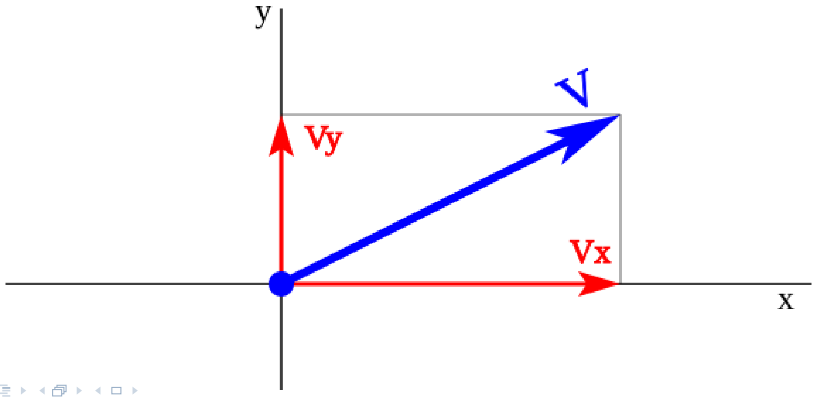
تعریف: بردار پاره خطی جهت‌دار (دارای راستا و سو) است.

هر بردار اندازه(طول) و جهت مشخصی دارد

- **پرسش:** چطور یک بردار را نمایش میدهیم؟
- **پرسش:** آیا نقطه شروع و پایان بردار اهمیت دارد؟
- **پرسش:** اندازه (طول) بردار را چطور محاسبه کنیم؟

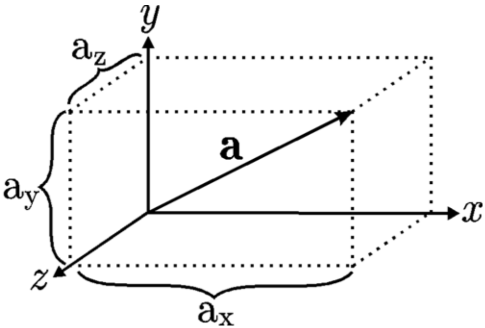
بردار های دو بعدی

تعریف: به هر پاره خط جهت دار در فضای مختصات دو بعدی (x،y) یک بردار دو بعدی میگویند.



بردار های سه بعدی

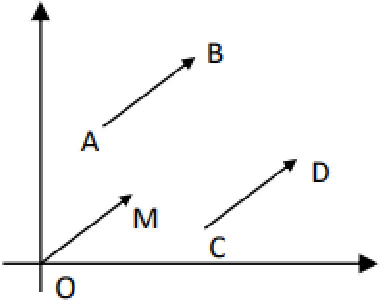
تعریف: به هر پاره خط جهت دار در فضای مختصات سه بعدی (x،y،z) یک بردار سه بعدی میگویند.



شکل ۲: بردار های سه بعدی

نمایش بردارها

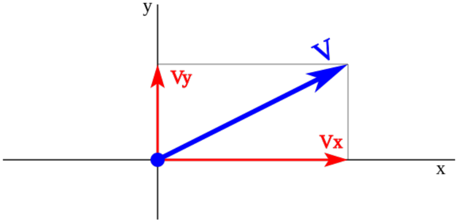
تعریف: دو بردار که هم اندازه و هم جهت باشند را دو بردار هم‌ارز می‌گوییم



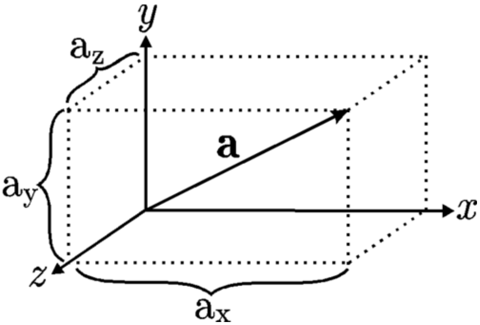
شکل ۳: بردار های هم‌ارز

نمایش بردارها

نقطه شروع تمام بردار ها را مبدا مختصات فرض میکنیم و آنها را با مختصات مقصد آنها نمایش می‌دهیم



شکل ۴: $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$



شکل ۵: $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$

اصطلاحات مربوط به بردار

- به هر کدام از اعداد بردار درایه یا مؤلفه گفته می‌شود. درایه‌ها از بالا به پایین از 1 تا n شماره گذاری می‌شوند.
- برای نمایش بردار های n بعدی به n مولفه احتیاج داریم.
- به بردار های به طول یک بردار یکه میگویند.
- دو بردار هم‌ارزند اگر و تنها اگر هم اندازه و هم‌جهت باشند.

بردار بلوکی

فرض کنید $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ بردارهایی از ابعاد $n_1, n_2, \ldots, n_k$ باشند. بردار $\vec{v}$ که از روی هم قرار دادن این k بردار به وجود می‌آید، برداری بلوکی از بعد $\sum_{i=1}^{k} n_i$ می‌باشد.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_k \end{bmatrix}$$

بردارهای معروف

- بردار تمام یک

$$\vec{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- بردار تمام صفر

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

بردار های معروف

- بردار یکه استاندارد

$$\vec{e}_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \; s.t. \forall j \; x_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- بردار پراکنده یا تُنُک

بردای که غالب درایه‌های آن صفر باشد.

زیر بردار

اگر $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ برداری nـ بعدی باشد و بازه‌ی $[a,b]$ به گونه‌ای که $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ و $a \leq b$ را در نظر بگیریم، آنگاه بردار

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_{a+1} \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$

زیر برداری به طول $b - a + 1$ از بردار $\vec{v}$ محسوب می‌شود. این زیر بردار را با نماد $\vec{v}_{a:b}$ نیز نشان می‌دهند.

فهرست مطالب

اندازه بردار

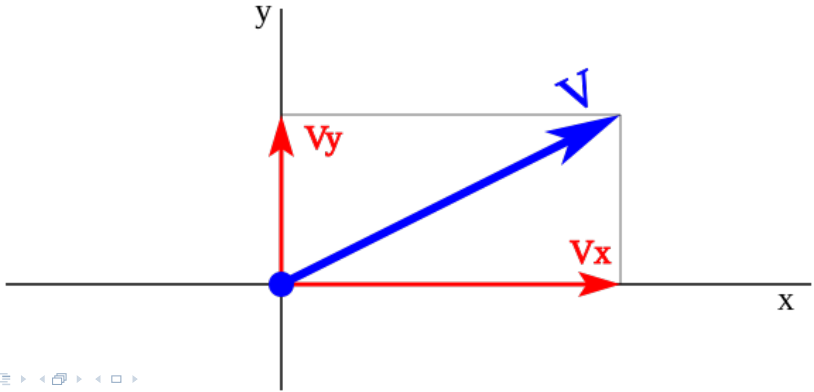
تعریف: اندازه بردار که به آن «طول» بردار نیز گفته می‌شود، طول پاره‌خطی است که بردار با آن نمایش داده می‌شود و همیشه یک عدد حقیقی و مثبت است. به بیان دیگر طول یک بردار فاصله نقطه انتهایی آن از مبدا مختصات است (گفتیم که همیشه فرض میکنیم نقطه شروع بردار ها مبدا مختصات است)

اندازه بردار با نماد $\|\vec{v}\|_2$ (بخوانید اندازه یا نرم بردار $\vec{v}$) نمایش داده میشود.

اندازه بردار

اندازه بردار های دو بعدی:

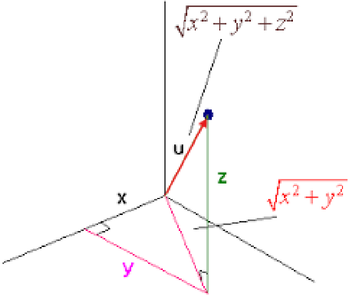
با استفاده از فرمول فیثاغورس میتوان طول بردار های دوبعدی را به دست آورد.



اندازه بردار

اندازه بردار های سه بعدی:

در بردار های سه بعدی با دوبار استفاده کردن از فرمول فیثاغورس میتوان طول یک بردار را به دست آورد



شکل ۷: $\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

محاسبهٔ اندازهٔ بردار

- به‌طور کلی اندازهٔ هر بردار nـ بعدی

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

را می‌توان با استفاده از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}.$$

فهرست مطالب

تعریف جمع و تفریق برداری

برای دو بردار که از یک بعد هستند (تعداد مولفه های دو بردار باهم برابر باشد) جمع و تفریق به صورت زیر تعریف میشود:

$$\vec{v} \pm \vec{u} = \vec{w} \;\; iff \;\; \forall i \; u_i \pm v_i = w_i$$

هر مولفه یا درایه بردار اول با مولفه متناظر در بردار دوم جمع یا تفریق میشود و یک مولفه در بردار حاصل را تشکیل میدهد.

ویژگی‌های جمع برداری

- خاصیت جابجایی (تعویض‌پذیری):

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- خاصیت شرکت‌پذیری:

- توجه: قانون شرکت‌پذیری بیان می‌کند که می‌توان پرانتزها را جابجا کرد، در اینجا یعنی:

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$$

- توجه: جمع کردن عدد با بردار عملیاتی بی معنی است. تنها بردار های با ابعاد برابر را میتوان با هم جمع یا تفریق کرد

- جمع بردار صفر با هر بردار، تاثیری ندارد:

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$$

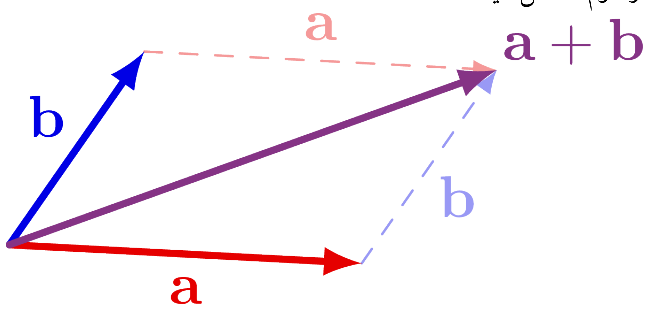
- تفریق یک بردار از خودش، بردار صفر را نتیجه می‌دهد:

$$\vec{u}-\vec{u}=\vec{0}$$

- تفریق همواره معادل است با جمع کردن عنصر اول با قرینه عنصر دوم حال پرسش این است که آیا برای بردار ها هم چیزی به اسم قرینه تعریف میشود؟

جمع و تفریق بردار ها از دید هندسی

نتیجه جمع دو بردار همانطور که با شهود اولیه سازگار است به معنای برداری است که نقطه ابتدایی بردار اول را به نقطه انتهایی بردار دوم متصل میکند:



شکل ۸: در انجام عملیات های برداری تصور فضایی و انتقال بردار ها از نقطه ای در صفحه به نقطه‌ای دیگر اهمیت بالایی دارد

فهرست مطالب

ضرب اسکالر_بردار

- **ضرب اسکالر یا ضرب اسکالر_بردار:** عملیاتی که در آن یک اسکالر(عدد) در یک بردار ضرب می‌شود، به این صورت که آن عدد در تمام مولفه ها یا درایه های بردار ضرب میشود.

- **اسکالر در سمت چپ یا راست:**

$$(-2)\begin{bmatrix}1\\9\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-18\\-12\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix}1\\9\\6\end{bmatrix}(1.5)=\begin{bmatrix}1.5\\13.5\\9\end{bmatrix}$$

برخی نمادگذاری‌ها:

- توجه کنید که ضرب عدد در بردار صرفا با نوشتن عدد پشت بردار نمایش داده میشود (نیازی به نوشتن علامت ضرب یا قرار دادن نقطه نیست)
- $$\frac{\vec{u}}{2} = \frac{1}{2}\vec{u}$$
- $-\vec{u}$ به معنی $(-1)\vec{u}$ است (بخوانید قرینه بردار $\vec{u}$)
- $0\vec{u} = \vec{0}$

ویژگی‌های ضرب اسکالر ـ بردار

- خاصیت جابجایی:

$$\beta\vec{u} = \vec{u}\beta$$

- خاصیت شرکت‌پذیری:

$$(\beta\gamma)\vec{u} = \beta(\gamma\vec{u}) = (\beta\vec{u})\gamma = \beta\vec{u}\gamma = \beta\gamma\vec{u}$$

- **خاصیت پخشی چپ:**

$$(\beta + \gamma)\vec{u} = \beta\vec{u} + \gamma\vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})\beta = \beta\vec{u} + \beta\vec{v}$$

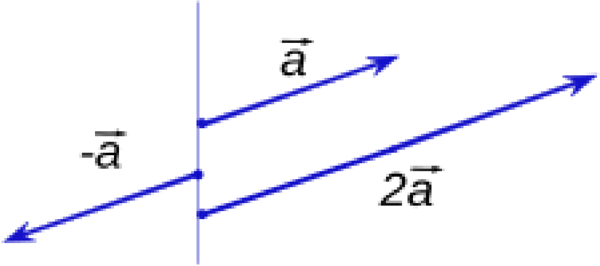
- **خاصیت پخشی راست:**

$$\vec{u}(\beta + \gamma) = \vec{u}\beta + \vec{u}\gamma$$

$$\beta(\vec{u} + \vec{v}) = \beta\vec{u} + \beta\vec{v}$$

ضرب اسکالر از دید هندسی

ضرب عدد در بردار همیشه به معنای تغییر اندازه بردار (scale) متناسب با ضریب است. ضرب عدد در بردار راستای بردار را تغییر نمیدهد. (اگر ضریب اسکالر منفی باشد جهت بردار برعکس میشود):



شکل ۹: با ضرب اسکالر در بردار اندازه بردار در راستای خودش تغییر میکند

ترکیب خطی

- ترکیب خطی m بردار $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ که هر کدام دارای بعد n هستند به صورت زیر تعریف می‌شوند و نتیجه یک بردار nـ بعدی خواهد بود:

$$\vec{v} = \beta_1 \vec{u}_1 + \beta_2 \vec{u}_2 + \cdots + \beta_m \vec{u}_m$$

- در اینجا $\beta_1, \dots, \beta_m$ اسکالرها هستند که به آنها ضرایب ترکیب خطی گفته می‌شود.
- هر بردار nـ بعدی $\vec{v}$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای واحد استاندارد نمایش داد:

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \cdots + v_n \vec{e}_n$$

تجزیه بردار ها

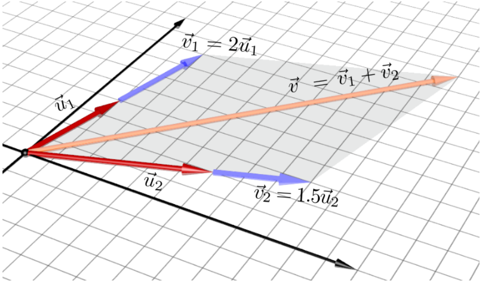
- به آنچه که در خط آخر اسلاید قبل دیدید میگویند تجزیه بردار v بر حسب بردار های یکه استاندارد
- به این بردار ها در فضای سه بعدی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ میگویند.
- به هرکدام از اعداد v_1 تا v_n طول بردار مولفه $\vec{e_i}$ بردار $\vec{v}$ میگویند.
- **تمرین:** طول بردار مولفه x و طول بردار مولفه y بردار به طول a را برحسب زاویه بردار با سمت مثبت محور x بیان کنید.

تجزیه بردار ها

- به آنچه که در خط آخر اسلاید قبل دیدید میگویند تجزیه بردار v بر حسب بردار های یکه استاندارد
- به این بردار ها در فضای سه بعدی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ میگویند.
- به هرکدام از اعداد v_1 تا v_n طول بردار مولفه $\vec{e_i}$ بردار $\vec{v}$ میگویند.
- **تمرین:** طول بردار مولفه x و طول بردار مولفه y بردار به طول a را برحسب زاویه بردار با سمت مثبت محور x بیان کنید.

بردار های حاصل از ترکیب خطی دو بردار

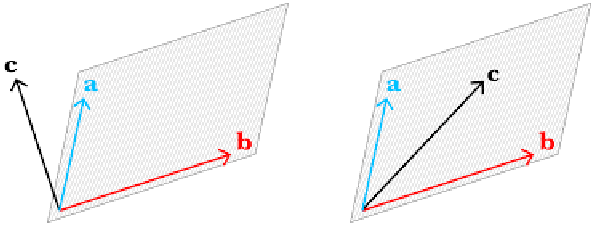
دو بردار غیر هم راستا را در صفحه تصور کنید. آیا میتوانید برداری در صفحه معرفی کنید که از ترکیب خطی این دو بردار قابل ساخته شدن نباشد؟



شکل ۱۰: بردار های حاصل از ترکیب خطی دو بردار

بردار های حاصل از ترکیب خطی سه بردار

سه بردار غیر هم راستا را در فضا تصور کنید. آیا میتوانید برداری در فضا معرفی کنید که از ترکیب خطی این سه بردار قابل ساخته شدن نباشد؟ در چه حالتی قابل تصور است در چه حالتی نیست؟



شکل ۱۱: بردار های حاصل از ترکیب خطی سه بردار

فهرست مطالب

ترانهاده

برای بیان صریح این عملگر، می‌توانیم از ترانهادهٔ برداری استفاده کنیم که با نماد (^{T}) نشان داده میشود و یک بردار ستونی را به بردار سطری تبدیل می‌کند یا برعکس:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}^T = [u_1, u_2, \dots, u_k], \quad [u_1, u_2, \dots, u_k]^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}.$$

عملگر ترانهاده:

- این تنها یک قرارداد نمادین است و اندازه یا جهت بردار را تغییر نمی‌دهد.
- از این عملگر در تعاریف پیش‌رو استفاده خواهیم کرد.
- در عملیات ماتریسی بسیار اهمیت دارد.

فهرست مطالب

ضرب داخلی دو بردار

اگر دو بردار $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیریم، ضرب داخلی این دو بردار این‌گونه تعریف می‌شود: (ضرب مولفه های متناظر در یکدیگر و جمع همه اینها باهم)

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \vec{v}^T \vec{u} = \begin{bmatrix} v_1, v_2, \dots, v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i \times u_i \in \mathbb{R}$$

نکته قابل توجه این است که نتیجه ضرب داخلی دو بردار با درایه های حقیقی یک **عدد حقیقی** خواهد بود.

ضرب داخلی دو بردار

توجه: ضرب داخلی یک تابع است که دو بردار را در ورودی دریافت میکند و یک اسکالر را خروجی میدهد و معمولا به صورت یک دوتایی ($\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$) یا با نقطه ($\vec{u} \cdot \vec{v}$) نمایش داده میشود

مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + 5 \times (-1) + (-2) \times 0 = 3 - 5 + 0 = -2$$

ویژگی های ضرب داخلی

- **جابجایی**

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = 3 \times 1 + 4(-1) + 2(-4) = -9$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + (-1)4 + (-4)2 = -9$$

ویژگی های ضرب داخلی

- پخشی روی جمع:

$$\langle \vec{u}, \vec{v}+\vec{w}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{u}|, \vec{w}\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+2 \\ -1+4 \\ 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

- ضریب ثابت در ضرب داخلی:

$$\langle \lambda\vec{u}, \vec{v}\rangle = \lambda\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$$

ویژگی های ضرب داخلی

نکاتی که می‌توان از خواص گفته شده و تعاریف نتیجه گرفت:

- $\langle \vec{1}, \vec{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i$
- $\langle \vec{0}, \vec{u} \rangle = 0$
- ارتباط ضرب داخلی و اندازه(نرم) بردار:

  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \|\vec{u}\|_2^2$

تعبیر هندسی ضرب داخلی

همانطور که در بخش جمع و تفریق برداری دیدیم بردار های $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ یک مثلث تشکیل میدهند.
قضیه ای در هندسه وجود دارد به نام قضیه کسینوس ها که بیان میکند :

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|_2^2 = \|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2 - 2\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 \cos\theta$$

تعبیر هندسی ضرب داخلی

از طرفی، با توجه به رابطهٔ بین نرم و ضرب داخلی دیدیم که:

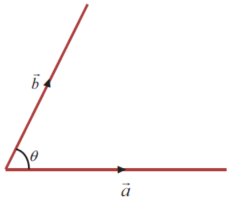
$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}-\vec{v}\|_2^2 &= \langle \vec{u}-\vec{v},\, \vec{u}-\vec{v}\rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \\
&= \|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle \\
&= \|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2 - 2\|\vec{u}\|_2\,\|\vec{v}\|_2 \cos\theta
\end{aligned}
$$

تعبیر هندسی ضرب داخلی

پس اثبات میشود:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2 \cos\theta$$

که θ زاویه بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ است



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,|\,|\vec{b}\,|\cos\theta$$

شکل ۱۲:

ضرب داخلی به ما چه میگوید؟

با توجه به آنچه که دیدیم ضرب داخلی دو بردار تابعی از زاویه بین آنها است اما این تابع چه ویژگی هایی دارد؟

- اگر $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 0$ یعنی $\cos\theta = 0$ یعنی $\theta = 90^\circ$ یعنی دو بردار بر هم عمودند.
- اگر $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2$ یعنی $\cos\theta = 1$ یعنی $\theta = 0^\circ$ یعنی دو بردار هم راستا و هم جهت هستند.
- اگر $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = -\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2$ یعنی $\cos\theta = -1$ یعنی $\theta = 180^\circ$ یعنی دو بردار هم راستا و در جهت مخالف هم هستند.
- در واقع اگر در نظر بگیریم نزدیکی راستای بردار ها معیاری از شباهت دو بردار است **اندازه** ضرب داخلی به خوبی میتواند شباهت را به ما نشان دهد.

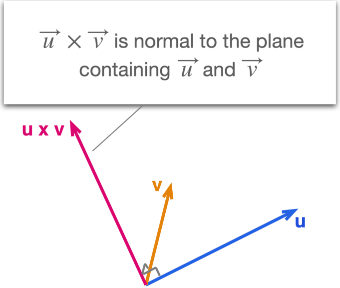
فهرست مطالب

ضرب خارجی بردارها

- **تعریف:** ضرب خارجی یک عملگر است که دو بردار با بعد یکسان را در ورودی دریافت میکند و یک بردار یکتا و عمود بر هر دو بردارِ ورودی خروجی میدهد.
  ضرب خارجی با نماد $\times$ نمایش داده میشود.
- **پرسش:** چطور این کار انجام میشود؟
- **پرسش:** اگر بردار یکتایی وجود نداشته باشد که برهر دو بردار ورودی عمود باشد (مثل حالتی که دو بردار هم راستا هستند) خروجی ضرب خارجی چیست؟

شهود هندسی ضرب خارجی بردار ها

بر هر دو بردار غیر هم راستا در فضا، یک راستای عمود وجود دارد. پس راستای بردار ضرب خارجی مشخص است اما اندازه(طول) و جهت آن چگونه مشخص میشود؟



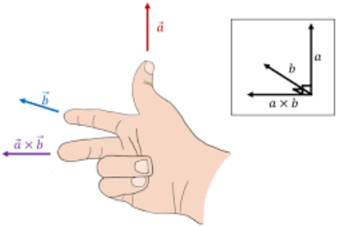
شکل ۱۳: پرسش: جهت بردار ضرب خرجی چگونه مشخص میشود؟

جهت بردار ضرب خارجی (قاعده دست راست)

- بردار حاصل از ضرب خارجی بر هر دو بردار اصلی عمود است و در جهت قاعده معروف به "قاعده دست راست" قرار دارد.
- **نکته:** همانطور که از اسم این قاعده مشخص است این قاعده **باید** با دست راست انجام شود (:
- **پرسش:** قاعده دست راست چیست؟

جهت بردار ضرب خارجی (قاعده دست راست)

برای فهمیدن جهت بردار حاصل ضرب خارجی، اگر مانند شکل زیر انگشت شصت دست راست خود را در جهت بردار اول و انگشت اشاره خود را در جهت بردار دوم بگیرید، انگشت وسط شما جهت بردار حاصل را نشان می‌دهد:



شکل ۱۴: قاعدهٔ دست راست

اندازه بردار ضرب خارجی

اندازه بردار ضرب خارجی با استفاده از فرمول زیر محاسبه میشود

- $$\|\vec{u} \times \vec{v}\|_2 = \|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2 \sin(\theta_{ab})$$
- θ زاویه بین دو بردار $\vec{v}$ و $\vec{u}$ است.
- **پرسش:** اندازه و جهت بردار حاصل ضرب خارجی را فهمیدیم اما چگونه آن را به صورت مختصاتی نمایش دهیم؟
- در این جزوه نمایش مختصاتی بردار ضرب خارجی فقط مختص بردار های سه بعدی است

نمایش بردار ضرب خارجی

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$

نمایش بردار ضرب خارجی

به طور کلی نمایش بردار ضرب خارجی برای بردار های سه در سه حاصل دترمینان ماتریس زیر است که در فصل های بعد به ماتریس و دترمینان پرداخته خواهد شد.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\ u_3v_1-u_1v_3\\ u_1v_2-u_2v_1\end{bmatrix}$$

توجه کنید که بر دو بردار دو بعدی در صفحه مختصات $x-y$ هیچ عمودی وجود ندارد پس معرفی بردار حاصل ضرب خارجی برای بردار های کمتر از سه بعدی بی معنی است.

ویژگی های ضرب خارجی

- با توجه به آنچه فراگرفتیم در رابطه با وجود یا عدم وجود ویژگی های زیر در ضرب خارجی تامل کنید:
  - **خاصیت جابجایی:** $\vec{u} \times \vec{v} \stackrel{?}{=} \vec{v} \times \vec{u}$
  - **خاصیت توزیع‌پذیری:** $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) \stackrel{?}{=} (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

ویژگی های ضرب خارجی

- برای بردارهای $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$، خواص ضرب خارجی به صورت زیر بیان می‌شود:

خواص رسمی ضرب خارجی در جبر برداری

- **خاصیت جابجایی:** $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- **خاصیت شرکت‌پذیری:** $s(\vec{u} \times \vec{v}) = (s\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (s\vec{v})$
- **خاصیت توزیع‌پذیری:** $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
- **عضو صفر:** $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$
- **خاصیت خود ـ متعامدی:** $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

مثال

با بازگشت به مثال عددی ساده از قبل، اکنون ضرب خارجی را به جای ضرب داخلی محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{u} \times \vec{v} = [3,3,3]^T \times [1,2,3]^T$$

$$= [(3)(3)-(3)(2),(3)(1)-(3)(3),(3)(2)-(3)(1)]^T = [3,-6,3]^T.$$

می‌توانیم متعامد بودن را نیز بررسی کنیم:

$$[3,3,3]^T \cdot [3,-6,3]^T = 0$$

$$[1,2,3]^T \cdot [3,-6,3]^T = 0.$$

فهرست مطالب

ضرب هادامارد برداری

نوع سومی از ضرب برداری که به آن ضرب درایه به درایه یا ضرب هادامارد میگویند.

تعریف: ضرب هادامارد نوعی عملگر است که دو بردار در ورودی دریافت میکند و یک بردار خروجی میدهد که هر درایه بردار حاصل از ضرب درایه های متناظر دو بردار ورودی ساخته میشود:

$$\vec{w} = \vec{u} \odot \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_n v_n \end{bmatrix}^T$$

ویژگی ها

- خاصیت جابجایی: $\vec{u} \odot \vec{v} = \vec{v} \odot \vec{u}$
- خاصیت شرکت‌پذیری: $\vec{u} \odot (\vec{v} \odot \vec{w}) = (\vec{u} \odot \vec{v}) \odot \vec{w}$
- خاصیت توزیع‌پذیری: $\vec{u} \odot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \odot \vec{v} + \vec{u} \odot \vec{w}$
- سازگاری با ضرب اسکالر: $(\lambda\vec{u}) \odot \vec{v} = \vec{u} \odot (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \odot \vec{v})$
- عضو صفر: $\vec{u} \odot \vec{0} = \vec{0} \odot \vec{u} = \vec{0}$

فهرست مطالب

ذخیره‌سازی برداری در کامپیوتر

- کامپیوترها اعداد حقیقی را در قالب **ممیز شناور** ذخیره می‌کنند
- هر عدد ممیز شناور: ۶۴ بیت یا ۸ بایت
  - چند دنباله بیتی متفاوت ممکن است؟
  - ذخیره یک بردار nـبعدی چند بایت نیاز دارد؟
- با حافظه‌های امروزی که ظرفیت آنها به گیگابایت (10^9 بایت) می‌رسد، به راحتی می‌توان بردارهایی با ابعاد میلیونی یا میلیاردی ذخیره کرد
- **بردارهای تنک** به روش کارآمدتری ذخیره می‌شوند که فقط اندیس‌ها و مقادیر درایه‌های غیرصفر را نگه می‌دارد

سرعت عملیات برداری در کامپیوتر

- سرعت انجام عملیات برداری در کامپیوتر به شدت به سخت‌افزار، نرم‌افزار و اندازه بردار بستگی دارد.
- عملیات پایه حسابی (جمع، ضرب، ...) با نام **عملیات ممیز شناور** (FLOP) شناخته می‌شوند.
- تخمین زمان محاسبه = شمارش تعداد کل عملیات ممیز شناور (FLOP) مورد نیاز
- **پیچیدگی محاسباتی** یک عملیات: تعداد های FLOPی مورد نیاز برای انجام آن، به عنوان تابعی از اندازه(های) ورودی

- تخمین تقریبی زمان اجرا:

$$\text{زمان اجرا} = \frac{\text{تعداد های}\mathrm{FLOP}\text{ مورد نیاز}}{\text{سرعت کامپیوتر}}$$

- کامپیوترهای امروزی حدود **۱ گیگافلاپ بر ثانیه** (10^9 فلاپ/ثانیه) سرعت دارند.

عملیات ممیز شناور (فلاپ)

- **عملیات ممیز شناور (فلاپ)**: واحد سنجش پیچیدگی هنگام مقایسه الگوریتم‌های برداری و ماتریسی
  - ۱ فلاپ = یک عملیات حسابی پایه (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، جذر، ...) در اعداد **حقیقی**
- **توضیحات:** این یک مدل بسیار ساده‌شده از پیچیدگی الگوریتم‌ها است:
  - بین انواع مختلف عملیات‌های حسابی تمایزی قائل نمی‌شویم
  - عملیات روی اعداد صحیح (اندیس‌گذاری، شمارنده‌های حلقه، ...) را نادیده می‌گیریم
  - هزینه دسترسی به حافظه را در نظر نمی‌گیریم

نمونه‌هایی از پیچیدگی عملیات برداری

- پیچیدگی عملیات برداری مطرح شده در این درس (برای بردارهای با اندازه n):
  - جمع و تفریق: n فلاپ
  - ضرب اسکالر: n فلاپ
  - ضرب مؤلفه‌به‌مؤلفه: n فلاپ
  - ضرب داخلی: $2n - 1 \approx 2n$ فلاپ
- تمام این عملیات‌ها از مرتبه n هستند.