ماژول دوم آمار و احتمال

نظریه مجموعه‌ها

المپیاد هوش مصنوعی

مفاهیم بنیادین نظریه مجموعه‌ها

تعریف

مجموعه (Set): مفهوم اولیه‌ای در ریاضیات که عبارت است از گردآوری اشیاء مشخص و متمایز که به آن‌ها **عناصر** (Elements) یا **اعضا** (Members) گفته می‌شود.

مفاهیم بنیادین نظریه مجموعه‌ها

تعریف

مجموعه (Set): مفهوم اولیه‌ای در ریاضیات که عبارت است از گردآوری اشیاء مشخص و متمایز که به آن‌ها **عناصر** (Elements) یا **اعضا** (Members) گفته می‌شود.

نحوه نمایش مجموعه‌ها:

- **روش فهرستی** (Roster Method): $A = \{۱، ۲، ۳، ۴\}$
- **روش توصیفی** (Set-Builder Notation): $B = \{x \mid$ عدد زوج x و $۰ < x < ۱۰\}$
- **عضویت** (Membership): $a \in A$ یعنی عنصر a عضو مجموعه A است.

مجموعه‌های مهم در ریاضیات

مجموعه‌های استاندارد:

- $\emptyset$ یا $\{\}$ – مجموعه تهی (Empty Set)
- $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ – اعداد طبیعی (Natural Numbers)
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \ldots\}$ – اعداد صحیح (Integers)
- $\mathbb{Q}$ – اعداد گویا (Rational Numbers)
- $\mathbb{R}$ – اعداد حقیقی (Real Numbers)

روابط بین مجموعه‌ها

تعریف

زیرمجموعه (Subset): مجموعه A زیرمجموعه‌ی مجموعه B است، اگر و تنها اگر هر عنصر A عضو B نیز باشد. زیرمجموعه بودن را با نماد $A \subseteq B$ نشان می‌دهیم.

$$A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

روابط بین مجموعه‌ها

تعریف

زیرمجموعه (Subset): مجموعه A زیرمجموعه‌ی مجموعه B است، اگر و تنها اگر هر عنصر A عضو B نیز باشد. زیرمجموعه بودن را با نماد $A \subseteq B$ نشان می‌دهیم.

$$A \subseteq B \iff \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

انواع زیرمجموعه:

- **زیرمجموعه سره (Proper Subset):** $A \subset B$ یعنی $A \subseteq B$ و $A \neq B$
- **برابری مجموعه‌ها:** $B \subseteq A$ و $A \subseteq B \iff A = B$

مجموعه توانی (Power Set)

تعریف

مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ممکن از A:

$$\mathcal{P}(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$$

قضیه مهم: اگر تعداد اعضای مجموعه A را با $|A|$ نشان دهیم و داشته باشیم $|A| = n$، آنگاه $|\mathcal{P}(A)| = ۲^n$.

مجموعه توانی (Power Set)

تعریف

مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ممکن از A:

$$\mathcal{P}(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$$

قضیه مهم: اگر تعداد اعضای مجموعه A را با $|A|$ نشان دهیم و داشته باشیم $|A| = n$، آنگاه $|\mathcal{P}(A)| = ۲^n$.

مثال: اگر $A = \{۱،۲\}$، آنگاه:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{۱\}, \{۲\}, \{۱،۲\}\}$$

که شامل $۴ = ۲^۲$ عضو است.

۱ نظریه مجموعه‌ها

۲ جبر مجموعه‌ها

۳ کاربرد نظریه مجموعه‌ها در نظریه احتمال

عملیات اساسی روی مجموعه‌ها

تعریف

اجتماع (Union): $A \cup B = \{x \mid x \in A$ یا $x \in B\}$
اشتراک (Intersection): $A \cap B = \{x \mid x \in A$ و $x \in B\}$
تفاضل (Difference): $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ و $x \notin B\}$
متمم (Complement): $A^c = \{x \mid x \in U$ و $x \notin A\}$ نسبت به مجموعه مرجع U

ویژگی‌های عملیات مجموعه‌ها

ویژگی‌های مهم:

- **مجموعه‌های مجزا (Disjoint Sets):** $A \cap B = \emptyset$
- **قوانین جابه‌جایی (Commutative Laws):** $A \cup B = B \cup A$
- **قوانین شرکت‌پذیری (Associative Laws):** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

ویژگی‌های عملیات مجموعه‌ها

ویژگی‌های مهم:

- **مجموعه‌های مجزا (Disjoint Sets):** $A \cap B = \emptyset$
- **قوانین جابه‌جایی (Commutative Laws):** $A \cup B = B \cup A$
- **قوانین شرکت‌پذیری (Associative Laws):** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

قوانین دومورگان (De Morgan's Laws):

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (۱)$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \qquad (۲)$$

مثال عملیات مجموعه‌ها

مثال: اگر $A = \{۱،۲،۳\}$ و $B = \{۲،۳،۴\}$:

- $A \cup B = \{۱،۲،۳،۴\}$ - تمام عناصر هر دو مجموعه
- $A \cap B = \{۲،۳\}$ - عناصر مشترک
- $A \setminus B = \{۱\}$ - عناصری که فقط در A هستند.

ضرب دکارتی (Cartesian Product)

تعریف

ضرب دکارتی:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ و } b \in B\}$$

نکته مهم: اگر $|A| = m$ و $|B| = n$ باشد، آنگاه $|A \times B| = m \times n$.

ضرب دکارتی (Cartesian Product)

تعریف

ضرب دکارتی:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ و } b \in B\}$$

نکته مهم: اگر $|A| = m$ و $|B| = n$ باشد، آنگاه $|A \times B| = m \times n$.

کاربرد در احتمال: ضرب دکارتی برای تعریف فضای نمونه آزمایش‌های ترکیبی استفاده می‌شود.

رابطه و تابع

تعریف

رابطه (Relation): زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ است که نشان‌دهنده ارتباط بین عناصر دو مجموعه است.
تابع (Function): رابطه خاصی که برای هر $a \in A$، دقیقاً یک $b \in B$ وجود دارد به طوری که (a, b) در رابطه باشد.

رابطه و تابع

تعریف

رابطه (Relation): زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ است که نشان‌دهنده ارتباط بین عناصر دو مجموعه است.
تابع (Function): رابطه خاصی که برای هر $a \in A$، دقیقاً یک $b \in B$ وجود دارد به طوری که (a, b) در رابطه باشد.

مثال: $A = \{۱، ۲\}$، $B = \{x, y\}$

- $A \times B = \{(۱, x), (۱, y), (۲, x), (۲, y)\}$
- رابطه: $R = \{(۱, x), (۲, y)\}$ - این رابطه یک تابع نیز هست.

۱ نظریه مجموعه‌ها

۲ جبر مجموعه‌ها

۳ کاربرد نظریه مجموعه‌ها در نظریه احتمال

کاربرد در نظریه احتمال

فضای نمونه (Sample Space)

در نظریه احتمال، **فضای نمونه** Ω مجموعه تمام پیامدهای ممکن یک آزمایش تصادفی است.

کاربرد در نظریه احتمال

فضای نمونه (Sample Space)

در نظریه احتمال، **فضای نمونه** Ω مجموعه تمام پیامدهای ممکن یک آزمایش تصادفی است.

رویداد (Event): هر زیرمجموعه از فضای نمونه.

کاربرد در نظریه احتمال

فضای نمونه (Sample Space)

در نظریه احتمال، **فضای نمونه** Ω مجموعه تمام پیامدهای ممکن یک آزمایش تصادفی است.

رویداد (Event): هر زیرمجموعه از فضای نمونه.

مثال - پرتاب تاس:

- فضای نمونه: $\Omega = \{۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶\}$
- رویداد "عدد زوج": $A = \{۲، ۴، ۵\}$
- رویداد "عدد > ۴": $B = \{۵، ۶\}$

احتمال شرطی و استقلال

احتمال شرطی (Conditional Probability):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

احتمال شرطی و استقلال

احتمال شرطی (Conditional Probability):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

استقلال (Independence):

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \iff B \text{ و } A \text{ مستقل هستند.}$$

احتمال شرطی و استقلال

مثال: در پرتاب یک سکه و تاس احتمال اینکه عدد تاس بزرگتر از ۳ باشد، به شرطی که سکه ”رو“ بیاید چقدر است؟

احتمال شرطی و استقلال

مثال: در پرتاب یک سکه و تاس احتمال اینکه عدد تاس بزرگتر از ۳ باشد، به شرطی که سکه "رو" بیاید چقدر است؟
پاسخ: اگر پیشامد اینکه عدد تاس بزرگتر از ۳ بیاید را A و پیشامد اینکه سکه "رو" بیاید را B در نظر بگیریم، باتوجه به فرمول احتمال شرطی و اینکه این دو پیشامد از یکدیگر مستقل هستند داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A).P(B)}{P(B)} = P(A) = \frac{۳}{۶} = ۰.۵$$

اصل شمول‌ـعدم‌شمول (Inclusion-Exclusion)

قضیه

برای دو مجموعه:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (۳)$$

برای سه مجموعه:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| \\ - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ + |A \cap B \cap C| \end{aligned} \qquad (۴)$$

کاربرد اصل شمول_عدم‌شمول در احتمال

کاربرد در محاسبه احتمال:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

کاربرد اصل شمول ــ عدم‌شمول در احتمال

کاربرد در محاسبه احتمال:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال: در یک کلاس ۱۰۰ نفره:

- ۶۰ نفر ریاضی می‌خوانند، ۴۰ نفر فیزیک می‌خوانند.
- ۲۰ نفر هر دو درس را می‌خوانند.

کاربرد اصل شمول_عدم‌شمول در احتمال

کاربرد در محاسبه احتمال:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال: در یک کلاس ۱۰۰ نفره:

- ۶۰ نفر ریاضی می‌خوانند، ۴۰ نفر فیزیک می‌خوانند.
- ۲۰ نفر هر دو درس را می‌خوانند.

پاسخ: تعداد دانشجویان: ۸۰ = ۲۰ − ۴۰ + ۶۰.

مجموعه‌های قابل شمارش

تعریف

مجموعه متناهی (Finite Set): تعداد عناصرش عددی طبیعی است.
مجموعه شمارا (Countable Set): بتوان بین عناصرش و اعداد طبیعی تناظر یک به یک برقرار کرد.

مجموعه‌های قابل شمارش

تعریف

مجموعه متناهی (Finite Set): تعداد عناصرش عددی طبیعی است.
مجموعه شمارا (Countable Set): بتوان بین عناصرش و اعداد طبیعی تناظر یک به یک برقرار کرد.

مثال‌ها:

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ – شمارا
- $\mathbb{R}, [0, 1]$ – ناشمارا

کاربرد در احتمال

کاربرد در احتمال:

- مجموعه‌های متناهی: احتمال گسسته (Discrete)
- مجموعه‌های غیرقابل شمارش: احتمال پیوسته (Continuous)

کاربرد در احتمال

کاربرد در احتمال:

- مجموعه‌های متناهی: احتمال گسسته (Discrete)
- مجموعه‌های غیرقابل شمارش: احتمال پیوسته (Continuous)

مثال:

- پرتاب تاس: فضای نمونه متناهی
- انتخاب نقطه از $[۰,۱]$: فضای نمونه غیرقابل شمارش