

بردار

المپیاد هوش مصنوعی

فهرست مطالب

۱ مقدمه

۲ اندازه بردار

۳ جمع و تفریق بردارها

۴ ضرب عدد در بردار

۵ ترانهاده بردار

۶ ضرب داخلی

۷ ضرب خارجی

۸ ضرب هادامارد

۹ محاسبات برداری در کامپیوتر

فهرست مطالب

۱ مقدمه

۲ اندازه بردار

۳ جمع و تفریق بردارها

۴ ضرب عدد در بردار

۵ ترانهاده بردار

۶ ضرب داخلی

۷ ضرب خارجی

۸ ضرب هادامارد

۹ محاسبات برداری در کامپیوتر

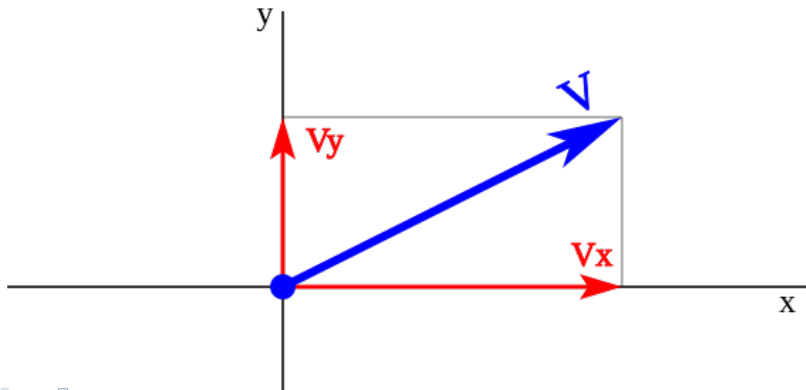
بردار چیست؟

تعریف: بردار پاره خطی جهت دار (دارای راستا و سو) است.
هر بردار اندازه (طول) و جهت مشخصی دارد

- پرسش: چطور یک بردار را نمایش میدهیم؟
- پرسش: آیا نقطه شروع و پایان بردار اهمیت دارد؟
- پرسش: اندازه (طول) بردار را چطور محاسبه کنیم؟

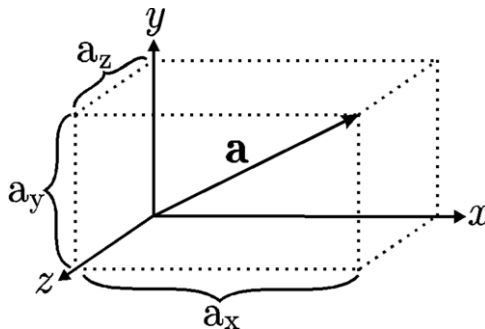
بردارهای دو بعدی

تعریف: به هر پاره خط جهت دار در فضای مختصات دو بعدی (x, y) یک بردار دو بعدی میگویند.



بردارهای سه بعدی

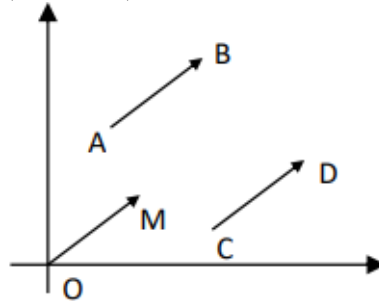
تعریف: به هر پاره خط جهت دار در فضای مختصات سه بعدی (x, y, z) یک بردار سه بعدی میگویند.



شکل ۲: بردارهای سه بعدی

نمایش بردارها

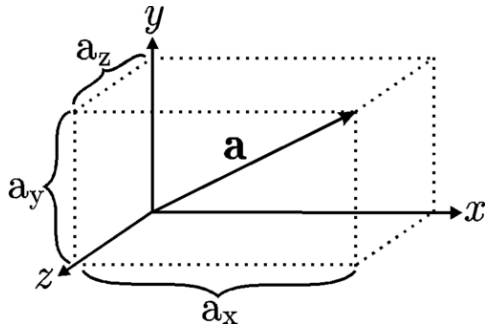
تعریف: دو بردار که هم اندازه و هم جهت باشند را دو بردار هم‌ارز می‌گوییم



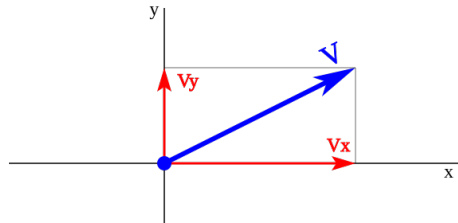
شکل ۳: بردارهای هم‌ارز

نمایش بردارها

نقطه شروع تمام بردارها را مبدا مختصات فرض میکنیم و آنها را با مختصات مقصد آنها نمایش می دهیم



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad \text{شکل ۵:}$$



$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad \text{شکل ۴:}$$

اصطلاحات مربوط به بردار

- به هر کدام از اعداد بردار درایه یا مؤلفه گفته می‌شود. درایه‌ها از بالا به پایین از 1 تا n شماره گذاری می‌شوند.
- برای نمایش بردارهای n بعدی به n مؤلفه احتیاج داریم.
- به بردارهای به طول یک بردار یکه می‌گویند.
- دو بردار هم‌ارزند اگر و تنها اگر هم اندازه و هم جهت باشند.

بردار بلوکی

فرض کنید $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ بردارهایی از ابعاد n_1, n_2, \dots, n_k باشند. بردار \vec{v} که از روی هم قرار دادن این k بردار به وجود می‌آید، برداری بلوکی از بعد $\sum_{i=1}^k n_i$ می‌باشد.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_k \end{bmatrix}$$

بردارهای معروف

- بردار تمام یک

$$\vec{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- بردار تمام صفر

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

بردارهای معروف

- بردار یکه استاندارد

$$\vec{e}_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \forall j \ x_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- بردار پراکنده یا تُنگ

برداري که غالب درایه‌های آن صفر باشد.

زیر بردار

اگر $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ برداری n -بعدی باشد و بازه‌ی $[a, b]$ به گونه‌ای که $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ و $a \leq b$ را در نظر بگیریم، آنگاه بردار

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_{a+1} \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$

زیر برداری به طول $b - a + 1$ از بردار \vec{v} محسوب می‌شود. این زیر بردار را با نماد $\vec{v}_{a:b}$ نیز نشان می‌دهند.

فهرست مطالب

۱ مقدمه

۲ اندازه بردار

۳ جمع و تفریق بردارها

۴ ضرب عدد در بردار

۵ ترانهاده بردار

۶ ضرب داخلی

۷ ضرب خارجی

۸ ضرب هادامارد

۹ محاسبات برداری در کامپیوتر

اندازه بردار

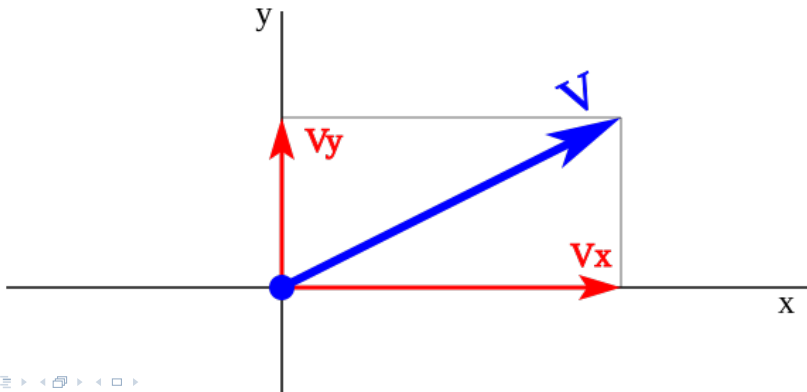
تعریف: اندازه بردار که به آن «طول» بردار نیز گفته می‌شود، طول پاره‌خطی است که بردار با آن نمایش داده می‌شود و همیشه یک عدد حقیقی و مثبت است. به بیان دیگر طول یک بردار فاصله نقطه انتهایی آن از مبدا مختصات است (گفتیم که همیشه فرض میکنیم نقطه شروع بردار ها مبدا مختصات است)

اندازه بردار با نماد $\|\vec{v}\|_2$ (بخوانید اندازه یا نرم بردار \vec{v}) نمایش داده میشود.

اندازه بردار

اندازه بردارهای دو بعدی:

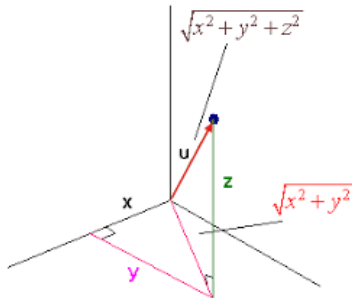
با استفاده از فرمول فیثاغورس میتوان طول بردارهای دوبعدی را به دست آورد.



اندازه بردار

اندازه بردارهای سه بعدی:

در بردارهای سه بعدی با دوبار استفاده کردن از فرمول فیثاغورس میتوان طول یک بردار را به دست آورد



شکل ۷: $\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

محاسبه اندازه بردار

- به طور کلی اندازه هر بردار n - بعدی

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

را میتوان با استفاده از فرمول زیر محاسبه کرد.

$$\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

فهرست مطالب

۱ مقدمه

۲ اندازه بردار

۳ جمع و تفریق بردارها

۴ ضرب عدد در بردار

۵ ترانهاده بردار

۶ ضرب داخلی

۷ ضرب خارجی

۸ ضرب هادامارد

۹ محاسبات برداری در کامپیوتر

تعریف جمع و تفریق برداری

برای دو بردار که از یک بعد هستند (تعداد مولفه های دو بردار باهم برابر باشد) جمع و تفریق به صورت زیر تعریف میشود:

$$\vec{v} \pm \vec{u} = \vec{w} \iff \forall i \ u_i \pm v_i = w_i$$

هر مولفه یا درایه بردار اول با مولفه متناظر در بردار دوم جمع یا تفریق میشود و یک مولفه در بردار حاصل را تشکیل میدهد.

ویژگی‌های جمع برداری

- خاصیت جابجایی (تعویض پذیری):

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- خاصیت شرکت پذیری:

- توجه: قانون شرکت پذیری بیان می کند که می توان پرانتزها را جابجا کرد، در اینجا یعنی:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

- توجه: جمع کردن عدد با بردار عملیاتی بی معنی است. تنها بردارهای با ابعاد برابر را میتوان با هم جمع یا تفریق کرد

- جمع بردار صفر با هر بردار، تاثیری ندارد:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

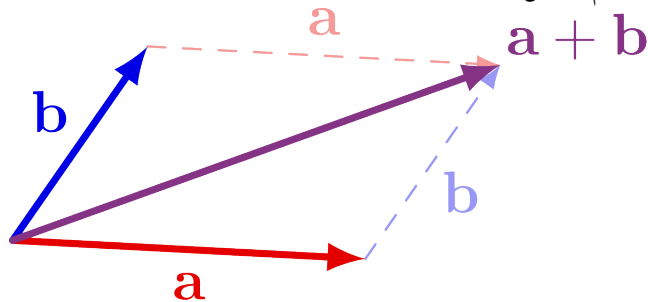
- تفریق یک بردار از خودش، بردار صفر را نتیجه می دهد:

$$\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$$

- تفریق همواره معادل است با جمع کردن عنصر اول با قرینه عنصر دوم حال پرسش این است که آیا برای بردار ها هم چیزی به اسم قرینه تعریف میشود؟

جمع و تفریق بردارها از دید هندسی

نتیجه جمع دو بردار همانطور که با شهود اولیه سازگار است به معنای برداری است که نقطه ابتدایی بردار اول را به نقطه انتهایی بردار دوم متصل میکند:



شکل ۸: در انجام عملیات های برداری تصور فضایی و انتقال بردارها از نقطه ای در صفحه به نقطه ای دیگر اهمیت بالایی دارد

فهرست مطالب

۱ مقدمه

۲ اندازه بردار

۳ جمع و تفریق بردارها

۴ ضرب عدد در بردار

۵ ترانهاده بردار

۶ ضرب داخلی

۷ ضرب خارجی

۸ ضرب هادامارد

۹ محاسبات برداری در کامپیوتر

ضرب اسکالر- بردار

- ضرب اسکالر یا ضرب اسکالر- بردار: عملیاتی که در آن یک اسکالر (عدد) در یک بردار ضرب می‌شود، به این صورت که آن عدد در تمام مولفه‌ها یا درایه‌های بردار ضرب می‌شود.
- اسکالر در سمت چپ یا راست:

$$(-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -18 \\ -12 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} (1.5) = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 13.5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

برخی نمادگذاری‌ها:

- توجه کنید که ضرب عدد در بردار صرفاً با نوشتن عدد پشت بردار نمایش داده میشود (نیازی به نوشتن علامت ضرب یا قرار دادن نقطه نیست)

$$\frac{\vec{u}}{2} = \frac{1}{2}\vec{u}$$

- $-\vec{u}$ به معنی $(-1)\vec{u}$ است (بخوانید قرینه بردار \vec{u})

$$0\vec{u} = \vec{0}$$

ویژگی‌های ضرب اسکالر- بردار

- خاصیت جابجایی:

$$\beta \vec{u} = \vec{u} \beta$$

- خاصیت شرکت پذیری:

$$(\beta \gamma) \vec{u} = \beta (\gamma \vec{u}) = (\beta \vec{u}) \gamma = \beta \vec{u} \gamma = \beta \gamma \vec{u}$$

- خاصیت پخشی چپ:

$$(\beta + \gamma)\vec{u} = \beta\vec{u} + \gamma\vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})\beta = \beta\vec{u} + \beta\vec{v}$$

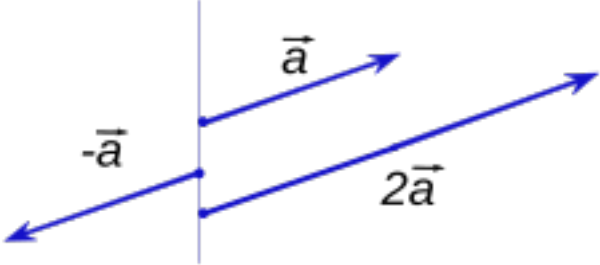
- خاصیت پخشی راست:

$$\vec{u}(\beta + \gamma) = \vec{u}\beta + \vec{u}\gamma$$

$$\beta(\vec{u} + \vec{v}) = \beta\vec{u} + \beta\vec{v}$$

ضرب اسکالر از دید هندسی

ضرب عدد در بردار همیشه به معنای تغییر اندازه بردار (scale) متناسب با ضریب است. ضرب عدد در بردار راستای بردار را تغییر نمیدهد. (اگر ضریب اسکالر منفی باشد جهت بردار برعکس میشود):



شکل ۹: با ضرب اسکالر در بردار اندازه بردار در راستای خودش تغییر میکند

ترکیب خطی

- ترکیب خطی m بردار $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ که هر کدام دارای بعد n هستند به صورت زیر تعریف می‌شوند و نتیجه یک بردار n -بعدی خواهد بود:

$$\vec{v} = \beta_1 \vec{u}_1 + \beta_2 \vec{u}_2 + \dots + \beta_m \vec{u}_m$$

- در اینجا β_1, \dots, β_m اسکالرها هستند که به آنها ضرایب ترکیب خطی گفته می‌شود.
- هر بردار n -بعدی \vec{v} را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای واحد استاندارد نمایش داد:

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n$$

تجزیه بردارها

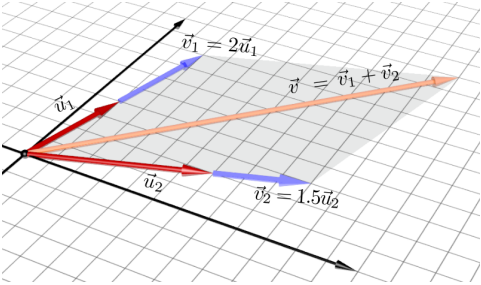
- به آنچه که در خط آخر اسلاید قبل دیدید میگویند تجزیه بردار v بر حسب بردارهای یکه استاندارد
- به این بردارها در فضای سه بعدی \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} میگویند.
- به هرکدام از اعداد v_1 تا v_n طول بردار مولفه \vec{e}_i بردار \vec{v} میگویند.
- تمرین: طول بردار مولفه x و طول بردار مولفه y بردار به طول a را برحسب زاویه بردار با سمت مثبت محور x بیان کنید.

تجزیه بردارها

- به آنچه که در خط آخر اسلاید قبل دیدید میگویند تجزیه بردار v بر حسب بردارهای یکه استاندارد
- به این بردارها در فضای سه بعدی \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} میگویند.
- به هرکدام از اعداد v_1 تا v_n طول بردار مولفه \vec{e}_i بردار \vec{v} میگویند.
- تمرین: طول بردار مولفه x و طول بردار مولفه y بردار به طول a را برحسب زاویه بردار با سمت مثبت محور x بیان کنید.

بردار های حاصل از ترکیب خطی دو بردار

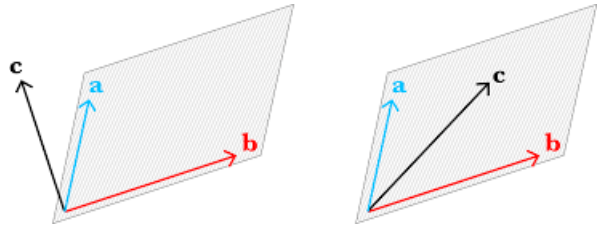
دو بردار غیر هم راستا را در صفحه تصور کنید. آیا میتوانید برداری در صفحه معرفی کنید که از ترکیب خطی این دو بردار قابل ساخته شدن نباشد؟



شکل ۱۰: بردار های حاصل از ترکیب خطی دو بردار

بردار های حاصل از ترکیب خطی سه بردار

سه بردار غیر هم راستا را در فضا تصور کنید. آیا میتوانید برداری در فضا معرفی کنید که از ترکیب خطی این سه بردار قابل ساخته شدن نباشد؟ در چه حالتی قابل تصور است در چه حالتی نیست؟



شکل ۱۱: بردار های حاصل از ترکیب خطی سه بردار

فهرست مطالب

۱ مقدمه

۲ اندازه بردار

۳ جمع و تفریق بردارها

۴ ضرب عدد در بردار

۵ ترانهاده بردار

۶ ضرب داخلی

۷ ضرب خارجی

۸ ضرب هادامارد

۹ محاسبات برداری در کامپیوتر

ترانهاده

برای بیان صریح این عملگر، می‌توانیم از ترانهاده برداری استفاده کنیم که با نماد $(^T)$ نشان داده میشود و یک بردار ستونی را به بردار سطری تبدیل می‌کند یا برعکس:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}^T = [u_1, u_2, \dots, u_k], \quad [u_1, u_2, \dots, u_k]^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}.$$

عملگر ترانهاده:

- این تنها یک قرارداد نمادین است و اندازه یا جهت بردار را تغییر نمی دهد.
- از این عملگر در تعاریف پیش رو استفاده خواهیم کرد.
- در عملیات ماتریسی بسیار اهمیت دارد.

فهرست مطالب

١ مقدمة

٥ ترانهاده بردار

۲ اندازه بردار

۶ ضرب داخلی

۳ جمع و تفریق بردارها

۷ ضرب خارجی

۴ ضرب عدد در بردار

۸ ضرب هادامارد

۹ محاسبات برداری در کامپیوتر

ضرب داخلی دو بردار

اگر دو بردار $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیریم، ضرب داخلی این دو بردار این گونه تعریف می شود: (ضرب مولفه های متناظر در یکدیگر و جمع همه اینها باهم)

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \vec{v}^T \vec{u} = [v_1, v_2, \dots, v_n] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n v_i \times u_i \in \mathbb{R}$$

نکته قابل توجه این است که نتیجه ضرب داخلی دو بردار با درایه های حقیقی یک عدد حقیقی خواهد بود.

ضرب داخلی دو بردار

توجه: ضرب داخلی یک تابع است که دو بردار را در ورودی دریافت میکند و یک اسکالر را خروجی میدهد و معمولاً به صورت یک دوتایی $(\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)$ یا با نقطه $(\vec{u} \cdot \vec{v})$ نمایش داده میشود

مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + 5 \times (-1) + (-2) \times 0 = 3 - 5 + 0 = -2$$

ویژگی های ضرب داخلی

- جا به جایی

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = 3 \times 1 + 4 \times (-1) + 2 \times (-4) = 3 - 4 - 8 = -9$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + (-1) \times 4 + (-4) \times 2 = 3 - 4 - 8 = -9$$

ویژگی های ضرب داخلی

- پخش روی جمع:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+2 \\ -1+4 \\ 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

- ضریب ثابت در ضرب داخلی:

$$\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

ویژگی های ضرب داخلی

نکاتی که می توان از خواص گفته شده و تعاریف نتیجه گرفت:

$$\langle \vec{1}, \vec{u} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bullet$$

$$\langle \vec{0}, \vec{u} \rangle = 0 \bullet$$

ارتباط ضرب داخلی و اندازه (نرم) بردار: \bullet

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \|\vec{u}\|_2^2$$

تعبیر هندسی ضرب داخلی

همانطور که در بخش جمع و تفریق برداری دیدیم بردارهای \vec{u} و \vec{v} و $\vec{u} - \vec{v}$ یک مثلث تشکیل میدهند. قضیه ای در هندسه وجود دارد به نام قضیه کسینوس ها که بیان میکند (بلد بودن این قضیه جزو طرح درس المپیاد هوش مصنوعی نیست):

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|_2^2 = \|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2 - 2\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 \cos \theta$$

تعبیر هندسی ضرب داخلی

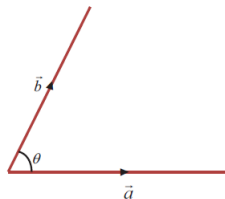
از طرفی با توجه به آنچه بالاتر در ارتباط بین نرم (اندازه) و ضرب داخلی دیدیم میتوان نوشت:

$$\begin{aligned}\|\vec{u} - \vec{v}\|_2^2 &= \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \\ &\|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2 - 2\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 \cos \theta\end{aligned}$$

تعبیر هندسی ضرب داخلی

پس اثبات میشود:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2 \cos \theta$$

که θ زاویه بین دو بردار \vec{u} و \vec{v} است

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

ضرب داخلی به ما چه میگوید؟

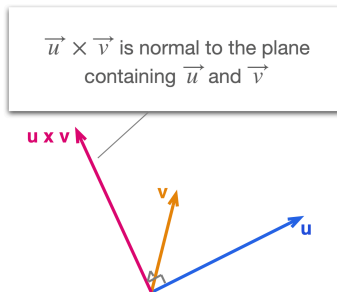
با توجه به آنچه که دیدیم ضرب داخلی دو بردار تابعی از زاویه بین آنها است اما این تابع چه ویژگی هایی دارد؟

- اگر $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ یعنی $\cos \theta = 0$ یعنی $\theta = 90^\circ$ یعنی دو بردار بر هم عمودند.
- اگر $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2$ یعنی $\cos \theta = 1$ یعنی $\theta = 0^\circ$ یعنی دو بردار هم راستا و هم جهت هستند.
- اگر $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -\|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2$ یعنی $\cos \theta = -1$ یعنی $\theta = 180^\circ$ یعنی دو بردار هم راستا و در جهت مخالف هم هستند.
- در واقع اگر در نظر بگیریم نزدیکی راستای بردار ها معیاری از شباهت دو بردار است اندازه ضرب داخلی به خوبی میتواند شباهت را به ما نشان دهد.

فهرست مطالب

شهود هندسی ضرب خارجی بردارها

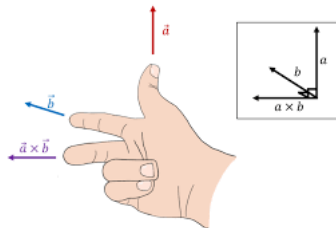
بر هر دو بردار غیر هم راستا در فضا، یک راستای عمود وجود دارد. پس راستای بردار ضرب خارجی مشخص است اما اندازه (طول) و جهت آن چگونه مشخص میشود؟



شکل ۱۳: پرسش: جهت بردار ضرب خارجی چگونه مشخص میشود؟

جهت بردار ضرب خارجی (قاعده دست راست)

برای فهمیدن جهت بردار حاصل ضرب خارجی اگر مانند شکل زیر انگشت شصت دست راست خود را در جهت بردار اول و انگشت اشاره خود را در جهت بردار دوم بگیرید، انگشت وسط شما جهت بردار حاصل را نشان میدهند:



شکل ۱۴: قاعده دست راست

اندازه بردار ضرب خارجی

اندازه بردار ضرب خارجی با استفاده از فرمول زیر محاسبه میشود

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|_2 = \|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2 \sin(\theta_{ab})$$

•

• θ زاویه بین دو بردار \vec{u} و \vec{v} است.

•

پرسش: اندازه و جهت بردار حاصل ضرب خارجی را فهمیدیم اما چگونه آن را به صورت مختصاتی نمایش دهیم؟

•

در این جزوه نمایش مختصاتی بردار ضرب خارجی فقط مختص بردارهای سه بعدی است

نمایش بردار ضرب خارجی

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

نمایش بردار ضرب خارجی

به طور کلی نمایش بردار ضرب خارجی برای بردار های سه در سه حاصل دترمینان ماتریس زیر است که در فصل های بعد به ماتریس و دترمینان پرداخته خواهد شد.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که بر دو بردار دو بعدی در صفحه مختصات $x - y$ هیچ عمودی وجود ندارد پس معرفی بردار حاصل ضرب خارجی برای بردار های کمتر از سه بعدی بی معنی است.

ویژگی های ضرب خارجی

• با توجه به آنچه فراگرفتیم در رابطه با وجود یا عدم وجود ویژگی های زیر در ضرب خارجی تأمل کنید:

• خاصیت جابجایی: $\vec{u} \times \vec{v} \stackrel{?}{=} \vec{v} \times \vec{u}$

• خاصیت توزیع پذیری: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) \stackrel{?}{=} (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

ویژگی های ضرب خارجی

- برای بردارهای $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ، خواص ضرب خارجی به صورت زیر بیان می شود:

خواص رسمی ضرب خارجی در جبر برداری

- خاصیت جابجایی: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- خاصیت شرکت پذیری: $s(\vec{u} \times \vec{v}) = (s\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (s\vec{v})$
- خاصیت توزیع پذیری: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
- عضو صفر: $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$
- خاصیت خود-متعامدی: $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

با بازگشت به مثال عددی ساده از قبل، اکنون ضرب خارجی را به جای ضرب داخلی محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= [3, 3, 3]^T \times [1, 2, 3]^T \\ &= [(3)(3) - (3)(2), (3)(1) - (3)(3), (3)(2) - (3)(1)]^T = [3, -6, 3]^T.\end{aligned}$$

می‌توانیم متعامد بودن را نیز بررسی کنیم:

$$[3, 3, 3]^T \cdot [3, -6, 3]^T = 0$$

$$[1, 2, 3]^T \cdot [3, -6, 3]^T = 0.$$

فهرست مطالب

- ۱ مقدمه
- ۲ اندازه بردار
- ۳ جمع و تفریق بردارها
- ۴ ضرب عدد در بردار
- ۵ ترانهاده بردار
- ۶ ضرب داخلی
- ۷ ضرب خارجی
- ۸ ضرب هادامارد
- ۹ محاسبات بردار

ضرب هادامارد برداری

نوع سومی از ضرب برداری که به آن ضرب درایه به درایه یا ضرب هادامارد میگویند.

تعریف: ضرب هادامارد نوعی عملگر است که دو بردار در ورودی دریافت میکند و یک بردار خروجی میدهد که هر درایه بردار حاصل از ضرب درایه های متناظر دو بردار ورودی ساخته میشود:

$$\vec{w} = \vec{u} \odot \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_n v_n \end{bmatrix}^T$$

ویژگی ها

- خاصیت جابجایی: $\vec{u} \odot \vec{v} = \vec{v} \odot \vec{u}$
- خاصیت شرکت پذیری: $\vec{u} \odot (\vec{v} \odot \vec{w}) = (\vec{u} \odot \vec{v}) \odot \vec{w}$
- خاصیت توزیع پذیری: $\vec{u} \odot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \odot \vec{v} + \vec{u} \odot \vec{w}$
- سازگاری با ضرب اسکالر: $(\lambda \vec{u}) \odot \vec{v} = \vec{u} \odot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \odot \vec{v})$
- عضو صفر: $\vec{u} \odot \vec{0} = \vec{0} \odot \vec{u} = \vec{0}$

فهرست مطالب

١ مقدمة

٥ ترانهاده بردار

۲ اندازه بردار

٦ ضرب داخلی

۳ جمع و تفریق بردارها

۷ ضرب خارجی

۴ ضرب عدد در بردار

ضرب هادامارد

۹ محاسبات برداری در کامپیوتر

ذخیره‌سازی برداری در کامپیوتر

- کامپیوترها اعداد حقیقی را در قالب ممیز شناور ذخیره می‌کنند
- هر عدد ممیز شناور: ۶۴ بیت یا ۸ بایت
- چند دنباله بیتی متفاوت ممکن است؟
- ذخیره یک بردار n - بعدی چند بایت نیاز دارد؟
- با حافظه‌های امروزی که ظرفیت آنها به گیگابایت (10^9 بایت) می‌رسد، به راحتی می‌توان بردارهایی با ابعاد میلیونی یا میلیاردی ذخیره کرد
- بردارهای تنک به روش کارآمدتری ذخیره می‌شوند که فقط اندیس‌ها و مقادیر درایه‌های غیرصفر را نگه می‌دارد

سرعت عملیات برداری در کامپیوتر

- سرعت انجام عملیات برداری در کامپیوتر به شدت به سخت افزار، نرم افزار و اندازه بردار بستگی دارد.
- عملیات پایه حسابی (جمع، ضرب، ...) با نام **عملیات ممیز شناور (FLOP)** شناخته می شوند.
- تخمین زمان محاسبه = شمارش تعداد کل عملیات ممیز شناور (FLOP) مورد نیاز
- پیچیدگی محاسباتی یک عملیات: تعداد های FLOP مورد نیاز برای انجام آن، به عنوان تابعی از اندازه (های) ورودی

- تخمین تقریبی زمان اجرا:

$$\text{زمان اجرا} = \frac{\text{تعداد های FLOP مورد نیاز}}{\text{سرعت کامپیوتر}}$$

- کامپیوترهای امروزی حدود ۱ گیگافلاپ بر ثانیه (10^9 فلاپ/ثانیه) سرعت دارند.

عملیات ممیز شناور (فلاپ)

- عملیات ممیز شناور (فلاپ): واحد سنجش پیچیدگی هنگام مقایسه الگوریتم‌های برداری و ماتریسی
- ۱ فلاپ = یک عملیات حسابی پایه (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، جذر، ...) در اعداد حقیقی
- توضیحات: این یک مدل بسیار ساده‌شده از پیچیدگی الگوریتم‌ها است:
- بین انواع مختلف عملیات‌های حسابی تمایزی قائل نمی‌شویم
- عملیات روی اعداد صحیح (اندیس‌گذاری، شمارنده‌های حلقه، ...) را نادیده می‌گیریم
- هزینه دسترسی به حافظه را در نظر نمی‌گیریم

نمونه‌هایی از پیچیدگی عملیات برداری

- پیچیدگی عملیات برداری مطرح شده در این درس (برای بردارهای با اندازه n):
 - جمع و تفریق: n فلاپ
 - ضرب اسکالر: n فلاپ
 - ضرب مؤلفه‌به‌مؤلفه: n فلاپ
 - ضرب داخلی: $2n - 1 \approx 2n$ فلاپ
- تمام این عملیات‌ها از مرتبه n هستند.