ماژول دوم آمار و احتمال

بخش اول – حسابان

المپیاد هوش مصنوعی

۱ محور اعداد حقیقی

۲ توابع

۳ حد

۴ پیوستگی

۵ مشتق

۶ نقاط اکسترمم

۷ انتگرال

1. محور اعداد حقیقی
2. توابع
3. حد
4. پیوستگی
5. مشتق
6. نقاط اکسترمم
7. انتگرال

محور اعداد حقیقی

تعریف

محور اعداد حقیقی، یک خط افقی بی‌پایان است که روی آن همه‌ی عددهایی که می‌توانیم تصور کنیم، یک جایگاهی دارند. این عددها شامل:

- اعداد طبیعی: $1, 2, 3, \dots$
- اعداد حسابی: $0, 1, 2, 3, \dots$
- اعداد صحیح: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$
- اعداد کسری یا گویا: $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$
- اعداد گنگ: مثل $2\sqrt{2}$، π
- اعداد اعشاری: 3.14 یا -2.718

و خلاصه هر عددی که بتوانیم روی محور مشخص کنیم.

چگالی

تعریف

یکی از عجیب‌ترین ویژگی‌های محور اعداد حقیقی این است که بین هر دو عدد دلخواه، بی‌نهایت عدد دیگر وجود دارد.

مثال

- بین 1 و 2، عدد 1.5 هست. بین 1 و 1.5، عدد 1.25 هست. و این بازی تا بی‌نهایت ادامه دارد!

این ویژگی را در ریاضی، چگال بودن می‌نامیم.

چگالی

نمودار

برای درک بهتر، یک محور اعداد رسم می‌کنیم. نقطه صفر را در وسط، عددهای مثبت به سمت راست و عددهای منفی به سمت چپ هستند.

اما اگر بخواهیم دقیق‌تر باشیم، حتی بین 0 و 1 هم بی‌نهایت عدد داریم:

فاصله دو عدد

تعریف

روی محور حقیقی، فاصله‌ی بین دو عدد را می‌توانیم با تفاضل مطلق‌شان بسنجیم:

$$|a-b|$$

مثال

فاصله بین 3 و -2:

$$|3-(-2)|=|5|=5$$

ترتیب‌پذیری

روی این محور همیشه می‌توانیم بگوییم کدام عدد بزرگ‌تر است. چون هر چه به سمت راست حرکت کنیم، عددها بزرگتر و هرچه به چپ برویم، کوچکتر می‌شوند.

توابع

تعریف

تابع در ریاضیات مثل یک ماشین خاص است که وقتی یک ورودی به آن بدهیم، همیشه یک خروجی مشخص تولید می‌کند.
به زبان رسمی‌تر:
تابع رابطه‌ای است که به ازای هر ورودی، دقیقا یک خروجی مشخص می‌دهد.

مثال

فرض کنید دستگاهی داریم که هر عدد را دو برابر می‌کند.
اگر 3 وارد کنیم، 6 می‌دهد. اگر 5 وارد کنیم، 10.

نمایش‌های تابع

توابع را به چند روش می‌توانیم نشان دهیم:

- نموداری: رسم گراف در صفحه مختصات
- قضیه‌ای: با یک جمله یا قانون مثال:

$$f(x) = 2x + 3$$

دامنه، هم‌دامنه و برد

تعریف – دامنه (Domain)

تمام عددهایی که می‌توانیم به عنوان ورودی به تابع بدهیم. با نماد D یا X نشان داده می‌شود.

تعریف – هم‌دامنه (Codomain)

مجموعه‌ای که ما **تعریف** می‌کنیم و می‌گوییم خروجی‌های تابع باید در آن جای بگیرند (اما نه لزوماً تمام اعضای هم‌دامنه باید خروجی باشند). با نماد Y یا Z نشان داده می‌شود.

تعریف – برد (Range)

تمام عددهایی که واقعاً به عنوان خروجی تولید می‌شوند. برد همیشه زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه است:

$$\text{Range}(f) \subseteq \text{Codomain}(f)$$

رابطه دامنه، هم‌دامنه و برد

مثال – اهمیت تفاوت

تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید:

- دامنه: $\mathbb{R}$ (تمام اعداد حقیقی)
- هم‌دامنه: می‌توانیم $\mathbb{R}$ یا $[0, +\infty)$ انتخاب کنیم
- برد: $[0, +\infty)$ (فقط اعداد غیرمنفی که واقعاً خروجی‌اند)

تابع یک به یک

تعریف

تابعی که هر خروجی آن فقط و فقط از یک ورودی خاص تولید شده باشد. یعنی:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

یعنی اگر دو ورودی برابر نباشند، خروجی‌هایشان هم هرگز برابر نخواهد بود.

مثال

$$f(x) = 2x + 3$$

این تابع چون شیب خطی دارد، همیشه ورودی‌های متفاوت خروجی‌های متفاوت تولید می‌کند.

تابع یک به یک

روش تشخیص

- آزمون خط افقی:
  اگر در نمودار تابع، هیچ خط افقی نمودار را بیشتر از یک بار قطع نکند، آن تابع یک به یک است .

تابع چند به یک

تعریف

تابعی که در آن چند ورودی مختلف می‌توانند به یک خروجی منجر شوند.

مثال

$$f(x) = x^2$$

این یک تابع چند به یک است چراکه:

$$f(-2) = 4, f(2) = 4$$

یعنی 2 و -2 هر دو یک خروجی دارند.

تابع چند به یک

نمودار

در نمودار تابع x^2، اگر خط افقی رسم کنیم، مثلا در ارتفاع 4، خط افقی نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند.

وارون‌پذیری تابع

تعریف

اگر تابعی یک به یک و پیوسته باشد، می‌توانیم برای آن تابع معکوس یا وارون (Inverse) تعریف کنیم.
یعنی اگر:

$$f(x) = y$$

تابع وارون پیدا می‌کند که:

$$f^{-1}(y) = x$$

به طوری که:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

وارون‌پذیری تابع

روش یافتن وارون

- ابتدا معادله تابع را به شکل $y = f(x)$ بنویس.
- جای x و y را عوض کن.
- سپس معادله را برای y حل کن.

عدد نهایی تابع وارون است.

وارون‌پذیری تابع

مثال

$$f(x) = 3x + 2$$

$$y = 3x + 2$$

جایگزینی:

$$x = 3y + 2$$

$$x - 2 = 3y \Rightarrow y = \frac{x-2}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

وارون پذیری تابع

شرایط وارون‌پذیری

- تنها توابع یک به یک وارون دارند.
- اگر تابعی چند به یک باشد (مثل x^2) نمی‌توان وارون سراسری داشت، مگر دامنه را محدود کنیم.

تابع صعودی و نزولی

تابع صعودی

تابعی که اگر ورودی افزایش یابد، خروجی هم افزایش می‌یابد. یعنی:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

در این تعریف، امکان برابر شدن نیز وجود دارد؛ اما اگر همواره نابرابری به صورت «بزرگ‌ترِ اکید» برقرار باشد، می‌گوییم تابع اکیداً صعودی است.

مثال

$$f(x) = x + 1$$

تابع صعودی و نزولی

تابع نزولی

تابعی که با افزایش ورودی، خروجی کاهش می‌یابد.
یعنی:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

مشابه حالت قبل، در این تعریف نیز امکان برابری وجود دارد؛ اما اگر همواره نابرابری به صورت «کوچک‌ترِ اکید» برقرار باشد، می‌گوییم تابع اکیداً نزولی است.

مثال

$$f(x) = -2x$$

حد

تعریف

وقتی x به عددی نزدیک می‌شود، خروجی تابع به چه عددی نزدیک می‌شود.

به زبان ساده، حد یعنی «سرنوشت خروجی تابع وقتی به یک نقطه نزدیک می‌شویم»، بدون اینکه الزاماً در آن نقطه مقدار تابع وجود داشته باشد.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

یعنی هر چه x به عدد a نزدیک‌تر شود، مقدار تابع $f(x)$ به عدد L نزدیک‌تر می‌شود.

حد

مثال

$$f(x) = 2x + 1$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 7$$

چون:

$$2(3) + 1 = 7$$

اما حد همیشه به این سادگی نیست. گاهی تابع در یک نقطه تعریف نشده ولی حد دارد.

حد

رفع ابهام تابع بدون مقدار دارای حد

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

در $x = 1$ تعریف نشده چون مخرج صفر می‌شود، اما ببینیم حد آن چقدر است. ابتدا تجزیه:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

پس برای $x \neq 1$:

$$f(x) = x + 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

با اینکه $f(1)$ وجود ندارد، حد آن 2 است.

حد

حد چپ و راست

- حد چپ

$$\lim_{x\to a^-} f(x)$$

- حد راست

$$\lim_{x\to a^+} f(x)$$

اگر حد چپ و راست برابر باشند، می‌گوییم حد در آن نقطه وجود دارد.

حد

مثال

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x > 1, \\ x+2, & x < 1. \end{cases}$$

حد چپ وقتی $x \to 1^-$:

$$1 + 2 = 3$$

حد راست وقتی $x \to 1^+$:

$$3$$

در نتیجه حد در ۱ وجود دارد:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

حد

حالت‌هایی که حد وجود ندارد

- حد چپ و راست با هم مساوی نباشند.
- تابع به سمت بی‌نهایت میل کند.
- تابع نوسان شدید داشته باشد.

حد

مثال

$$f(x) = 1/x$$

در $x \to 0$ حد وجود ندارد چون:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

پس حد در صفر تعریف نشده.

حد

قوانین

- حد جمع:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

- حد ضرب:

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = (\lim_{x\to a} f(x))\,(\lim_{x\to a} g(x))$$

- حد تقسیم اگر $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ آنگاه:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

- حد توان:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$$

حد

حد در بی‌نهایت

اگر $x \to \infty$، بررسی می‌کنیم خروجی تابع به چه عددی نزدیک می‌شود.

مثال:

$$f(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

چون هرچه x بزرگ‌تر شود، $1/x$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک می‌شود.

حد در توابع قدرمطلق و جزء صحیح

در توابعی مثل $|x|$ یا $\lfloor x \rfloor$، بررسی حد نیاز به تحلیل چپ و راست دارد. مثال:

$$\lim_{x\to 0}|x| = 0$$

چون از هر دو طرف به صفر می‌رسد. ولی:

$$\lim_{x\to 1^-}\lfloor x\rfloor = 0 \neq \lim_{x\to 1^+}\lfloor x\rfloor = 1$$

پس حد در $x = 1$ وجود ندارد چون چپ و راست برابر نیست.

۱ محور اعداد حقیقی

۲ توابع

۳ حد

۴ پیوستگی

۵ مشتق

۶ نقاط اکسترمم

۷ انتگرال

پیوستگی

تعریف

تابع پیوسته تابعی است که نمودار آن بدون برداشتن مداد کشیده شود.
یعنی در هیچ نقطه‌ای پرش یا شکاف وجود ندارد.
تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ پیوسته است اگر:

- $f(a)$ وجود داشته باشد.
- حد چپ و حد راست در a موجود و برابر باشند.
- حد در a برابر با مقدار تابع در a باشد. یعنی:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

پیوستگی

مثال تابع پیوسته

$$f(x) = x^2$$

این تابع در تمام اعداد حقیقی پیوسته است چون نمودارش بدون شکاف رسم می‌شود.

مثال تابع ناپیوسته

تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 2, \\ 2, & x > 2. \end{cases}$$

در نقطه $x = 2$، تابع دچار پرش است پس ناپیوسته است.

پیوستگی

دلایل ناپیوستگی

- شکاف: مقدار تابع وجود ندارد یا حد در آن نقطه نیست.
- پرش: حد چپ و راست برابر نیست.
- نابهنجاری: وقتی حد به سمت بی‌نهایت میل کند.

نکته

توابعی مثل توان، چندجمله‌ای‌ها، سینوس، کسینوس و نمایی همیشه پیوسته‌اند. اما توابعی مثل قدرمطلق، جزء صحیح یا بعضی کسرها می‌توانند ناپیوسته باشند.

مشتق

تعریف

مشتق نشان‌دهنده نرخ تغییر تابع است. یعنی وقتی x تغییر کوچکی کند، خروجی تابع $f(x)$ چقدر تغییر می‌کند.
مشتق در یک نقطه فقط زمانی وجود دارد که:

- حد چپ و راست مشتق برابر باشد.
- تابع در آن نقطه پیوسته باشد.

یعنی اگر در نقطه‌ای مشتق وجود دارد، حتماً تابع در آن نقطه پیوسته است. ولی برعکسش درست نیست. ممکن است تابعی پیوسته باشد اما مشتق نداشته باشد (مثل قدرمطلق در صفر).
مشتق تابع $f(x)$ در نقطه a برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

یعنی شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه.

مشتق

قوانین مشتق‌گیری

- مشتق عدد ثابت

$$f(x) = c : c' = 0$$

- توان

$$f(x) = x^n : \ f'(x) = nx^{n-1}$$

- جمع/تفاضل

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

مشتق

قوانین مشتق‌گیری

- ضرب

$$(fg)' = f'g + fg'$$

- تقسیم

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

مشتق

پیوستگی مشتق و مشتق‌پذیری

- اگر تابعی در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد، قطعاً در آن نقطه پیوسته است.
- اما اگر تابع پیوسته باشد، لزوماً مشتق‌پذیر نیست.
  مثال:
  تابع $f(x) = |x|$ پیوسته است ولی در صفر مشتق‌پذیر نیست.

مشتق

قانون زنجیره‌ای

وقتی تابعی مرکب داریم:

$$f(x) = h(g(x))$$

فرمول مشتق:

$$f'(x) = h'(g(x)) \times g'(x)$$

مثال

$$f(x) = \sin(x^2)$$

اینجا $g(x) = x^2,\ h(u) = \sin u$ پس:

$$f'(x) = \cos(x^2) \times 2x$$

مشتق

مشتق ضمنی

وقتی رابطه بین x و y به صورت صریح نیست، از مشتق ضمنی استفاده می‌کنیم.

هر بار که از y مشتق می‌گیریم، باید $\frac{dy}{dx}$ هم بنویسیم چون y تابعی از x است.

مثال

معادله دایره:

$$x^2 + y^2 = 1$$

مشتق می‌گیریم:

$$2x + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

مشتق

قضیه مقدار میانگین

اگر $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد، نقطه‌ای c وجود دارد که:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

یعنی شیب مماس در c با شیب خط وصل‌کننده a و b برابر است.

مثال

$f(x)=x^2$ در $[1,3]$:

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{9-1}{2} = 4 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$$

مشتق

تابع	مشتق	دامنه / نکته
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
$\ln x$	$1/x$	$x > 0$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$	$a > 0, a \neq 1, \; x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$x \neq n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$	$x \neq n\pi$

مشتق

استثناها

- در نقطه‌ای که تابع ناپیوسته یا گوشه‌دار باشد، مشتق وجود ندارد.
مثال: $f(x) = |x|$ در $x = 0$ مشتق ندارد.
- مشتق سمت چپ و راست باید برابر باشد.
- اگر تابع نوسانی با فرکانس بی‌نهایت باشد، مشتق ندارد.

مشتق

مشتق دوم

مشتق دوم یعنی:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

مثلا در فیزیک، مشتق دوم مسافت نسبت به زمان، شتاب است.

نمودار شیب

مثلا برای $y = x^2$، مشتق یعنی $2x$. در $x = 1$، شیب خط مماس 2 است.

مشتق

قاعده هوپیتال

وقتی حد به فرم $0/0$ یا ∞/∞ باشد:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

اگر حد سمت راست وجود داشته باشد.

نقاط اکسترمم

تعریف

اکسترمم در ریاضیات به نقاطی گفته می‌شود که تابع در آن‌ها به بیشترین یا کمترین مقدار خود در یک بازه می‌رسد. اگر این بیشترین یا کمترین مقدار در کل دامنه تابع باشد، به آن مطلق و اگر فقط در همسایگی همان نقطه باشد، به آن محلی می‌گوییم.

نقاط اکسترمم

روش یافتن اکسترمم

برای یافتن نقاط اکسترمم محلی، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

- یافتن مشتق اول تابع: ابتدا تابع را نسبت به متغیر مستقل (مثلاً x) مشتق می‌گیریم $f'(x)$.
- مساوی صفر قرار دادن مشتق اول:
  مقادیر x را که مشتق اول صفر یا تعریف نشده است پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 0$$

  این نقاط، نقاط بحرانی یا نقاط مشکوک به اکسترمم هستند.

نقاط اکسترمم

بررسی با مشتق دوم

برای یافتن نقاط اکسترمم محلی، پس از محاسبه مشتق دوم :

- اگر $f''(x) > 0$ در این نقطه، تابع مینیمم محلی دارد.
- اگر $f''(x) < 0$ در این نقطه، تابع ماکزیمم محلی دارد.
- اگر $f''(x) = 0$ تست مشتق دوم کافی نیست، باید از روش‌های دیگر (مثلاً تست تغییر علامت مشتق اول) استفاده کنیم.

نکته

برای یافتن اکسترمم مطلق در بازه‌های بسته، علاوه بر نقاط بحرانی باید مقدار تابع در دو سر بازه را هم بررسی کنیم.

نقاط اکسترمم

مثال

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

- مشتق اول:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

پس $x = 0$ و $x = 2$ نقاط بحرانی هستند.

- مشتق دوم:

$$f''(x) = 6x - 6$$

- $f''(0) = -6$ پس $x = 0$، ماکزیمم محلی.
- $f''(2) = 6$ پس $x = 2$، مینیمم محلی.

نقاط اکسترمم

تحدب و تقعر

- اگر $f''(x) > 0$ تابع در آن ناحیه تحدب به بالا دارد .
- اگر $f''(x) < 0$ تابع در آن ناحیه تحدب به پایین دارد.

نقطه عطف

نقطه‌ای که در آن علامت مشتق دوم تغییر کند (از مثبت به منفی یا بالعکس)، به آن نقطه عطف $InflectionPoint$ می‌گوییم.
روش یافتن نقطه عطف:

- $f''(x) = 0$ را حل می‌کنیم.
- چک می‌کنیم که قبل و بعد از آن، علامت مشتق دوم تغییر کرده باشد.

نقاط اکسترمم

مثال

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$

پس $f''(x) = 0$ در $x = 0$

علامت مشتق دوم:

- برای $x < 0$: $f''(x) < 0$
- برای $x > 0$: $f''(x) > 0$

پس در $x = 0$ نقطه عطف داریم.

نقاط اکسترمم

رابطه مشتق و نمودار

- مشتق اول $f'(x)$:
  - اگر $f'(x) > 0$ تابع در آن بازه صعودی است.
  - اگر $f'(x) < 0$ تابع در آن بازه نزولی است.
  - اگر $f'(x) = 0$: تابع در آن نقطه افقی است یا احتمالاً اکسترمم دارد.
- مشتق دوم $f''(x)$:
  - اگر $f''(x) > 0$ تابع تحدب به بالا دارد.
  - اگر $f''(x) < 0$ تابع تحدب به پایین دارد.
  - اگر $f''(x) = 0$ احتمالاً نقطه عطف وجود دارد.

نقاط اکسترمم

مثال

$$f(x) = |x|$$

مشتق چپ در $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = -1$$

مشتق راست:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = 1$$

چون این دو برابر نیستند، مشتق در $x = 0$ وجود ندارد، اما تابع پیوسته است.

۱ محور اعداد حقیقی

۲ توابع

۳ حد

۴ پیوستگی

۵ مشتق

۶ نقاط اکسترمم

۷ انتگرال

انتگرال

تعریف

انتگرال یکی از مفاهیم اصلی در ریاضیات است که می‌توان آن را جمع کردن بی‌نهایت بخش کوچک دانست.
اگر مشتق نرخ تغییر یک کمیت را نشان می‌دهد، انتگرال برعکس آن است یعنی از نرخ تغییر به مقدار کلی می‌رسیم.
فرض کنید یک نمودار روی صفحه داریم و می‌خواهیم مساحت زیر این نمودار را حساب کنیم. روش ساده این است که شکل را به نوارهای باریک تقسیم کنیم، مساحت هر نوار را به‌دست آوریم و با هم جمع کنیم. هرچه این نوارها باریک‌تر باشند، جواب دقیق‌تر می‌شود. اگر عرض این نوارها به صفر میل کند، جمع آن‌ها دقیقاً انتگرال خواهد شد.

انتگرال

نگاه هندسی به انتگرال

در هندسه، انتگرال معمولاً به عنوان مساحت زیر منحنی بین دو نقطه روی محور x در نظر گرفته می‌شود.
اگر تابع همیشه مثبت باشد، مقدار انتگرال برابر همان مساحت است.
اگر تابع هم مثبت و هم منفی باشد، انتگرال «مساحت خالص» را حساب می‌کند (مساحت زیر محور از مساحت بالای محور کم می‌شود).

انتگرال

انواع انتگرال

- انتگرال نامعین:
هدفش پیدا کردن تابعی است که مشتق آن برابر با تابع داده‌شده باشد (به آن آنتی‌مشتق می‌گویند). همیشه یک ثابت $+C$ به جواب اضافه می‌شود چون مشتق ثابت صفر است و قابل تشخیص نیست.
- انتگرال معین:
نشان‌دهنده مجموع تجمعی یا مساحت خالص تابع در بازه $[a, b]$ است. با استفاده از «قضیه اساسی حسابان» محاسبه می‌شود:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

که F یک آنتی‌مشتق f است.

انتگرال

نمونه

- انتگرال نامعین:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

- انتگرال معین:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

انتگرال

مثال شهودی

اگر سرعت یک ماشین در طول زمان معلوم باشد، برای پیدا کردن مسافت طی‌شده، کافی است سرعت را نسبت به زمان انتگرال بگیریم. این کار یعنی تمام مسافت‌های کوچک طی‌شده در بازه‌های زمانی بی‌نهایت کوچک را با هم جمع کنیم.

انتگرال

کاربردهای انتگرال

- محاسبه مساحت بین دو منحنی:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

- محاسبه حجم اجسام دوار:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

- محاسبه طول منحنی:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

انتگرال

مثال

$$I = \int_0^\pi x \sin x \, dx$$

حل: برای $\int x \sin x \, dx$ از قاعدهٔ «انتگرال‌گیری جزء» استفاده می‌کنیم: فرض کنید $u = x$ و $dv = \sin x \, dx$. آنگاه $du = dx$ و $v = -\cos x$ بنابراین:

$$\int x \sin x \, dx = uv - \int v \, du = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$I = \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^\pi = \left(-\pi \cos \pi + \sin \pi \right) - \left(-0 \cdot \cos 0 + \sin 0 \right)$$

$$\cos \pi = -1, \ \sin \pi = 0, \ \sin 0 = 0 \ \Rightarrow I = -\pi(-1) + 0 - 0 = \pi$$

انتگرال

مثال

$$J = \int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx.$$

حل: در صورت‌مسئله صورت مناسبی برای جایگذاری وجود دارد. بگذارید $u = x^3 + 1$. آنگاه $du = 3x^2\,dx$، یعنی $3x^2\,dx = du$

$$J = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln\left|x^3+1\right| + C.$$

(چون $x^3 + 1 > 0$ برای اکثر مقادیر حقیقی، می‌توان بدون قدر مطلق هم نوشت؛ اما نگهداری قدر مطلق کلی‌تر است.)

انتگرال دوگانه

تعریف

انتگرال دوگانه یک روش است برای محاسبه حجم زیر سطح (یک تابع دو متغیره) روی یک ناحیه در صفحه.
اگر تابع یک متغیره $f(x)$ معادل مساحت زیر منحنی است، انتگرال دوگانه $f(x, y)$ معادل حجم زیر سطح است.
نماد انتگرال دوگانه:

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

که R ناحیه‌ای در صفحه xy و dA عنصر کوچک مساحت است.

انتگرال دوگانه

نمایش انتگرال دوگانه

اگر ناحیه R به صورت مستطیل باشد و $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$، آنگاه:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

یعنی ابتدا انتگرال را نسبت به x می‌گیریم (و y را ثابت فرض می‌کنیم)، سپس نسبت به y می‌گیریم.
به این ترتیب انتگرال گیری، **انتگرال تکراری** می‌گویند.

انتگرال دوگانه

ترتیب انتگرال گیری

می‌توانیم ترتیب انتگرال گیری را تغییر دهیم:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

این دو معادل هستند (به شرطی که ناحیه R مستطیل باشد).
اما اگر ناحیه پیچیده‌تر باشد، ممکن است ترتیب تغییر کند.

انتگرال دوگانه

مثال

$$\iint_R (x+y)\,dA$$

که R ناحیه‌ای است: $0 \leq x \leq 2$ و $0 \leq y \leq 3$.

حل:

$$\iint_R (x+y)\,dA = \int_0^3 \int_0^2 (x+y)\,dx\,dy$$

ابتدا نسبت به x:

$$\int_0^2 (x+y)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^2 = \frac{4}{2} + 2y = 2 + 2y$$

انتگرال دوگانه

کاربردهای انتگرال دوگانه

- محاسبه حجم: حجم زیر سطح $z = f(x, y)$ روی ناحیه R

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

- محاسبه مساحت: اگر $f(x, y) = 1$، نتیجه مساحت ناحیه R است

$$A = \iint_R 1\, dA$$

- محاسبه جرم: اگر $\rho(x, y)$ تراکم باشد

$$M = \iint_R \rho(x, y)\, dA$$