

# 第九章集合

马汝辉 副研究员、博导 上海交通大学 2024 年 12 月



#### 集合

第 9 章到第 12 章介绍集合论。主要介绍集合论的基本概念和结论,这包含集合、运算、关系、函数和基数。对概念和定理的介绍将以数理逻辑的谓词逻辑为工具来描述,体现了这两个数学分支之间的联系,且可使集合论的研究既简练又严格,还将简要介绍集合论公理系统。这个公理系统又称公理集合论,是数理逻辑的一个分支。这个构造过程是无止境的,因此 G 的元素有无限多个。

- 9.1 集合的概念和表示方法
- 9.2 集合间的关系和特殊集合
- 9.3 集合的运算
- 4 9.4 集合的图形表示法
- 5 9.5 集合运算的性质和证明
- 6 9.6 有限集合的基数

◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ · 臺 · り९○ 3/108

9.1.1 集合的概念

### 集合的概念



- 集合是集合论中最基本的概念,但很难给出精确的定义。集合是集合论中唯一不 给出定义的概念,但它是容易理解和掌握的。
- 集合是一些确定的、可以区分的事物汇聚在一起组成的一个整体,组成一个集合的每个事物称为该集合的一个元素,或简称一个元。
- 如果 a 是集合 A 的一个元素,就说 a 属于 A,或者说 a 在 A 中,记作  $a \in A$ 。
- 如果 b 不是集合 A 的一个元素,就说 b 不属于 A。或者说 b 不在 A 中,记作  $b \notin A$ 。
- 集合概念是很简单的,但准确理解其含义却是十分重要的。

9.1.1 集合的概念

### 集合的概念



#### , 特别应注意下列几点:

- 集合的元素可以是任何事物,也可以是另外的集合(以后将说明,集合的元素不能是该集合自身)。
- 一个集合的各个元素是可以互相区分开的。这意味着,在一个集合中不会重复出现相同的元素。
- 组成一个集合的各个元素在该集合中是无次序的。
- 任一事物是否属于一个集合,回答是确定的,也就是说。对一个集合来说,任一事物或者是它的元素或者不是它的元素,二者必居其一而不可兼而有之,且结论是确定的。

(ロ▶ 4回▶ 4厘▶ 4厘▶ 厘 からぐ 5/108

9.1.2 集合的表示方法

### 集合的表示方法



- 我们一般用不同的大写字母表示不同的集合,并用不同的小写字母表示集合中不同的元素,但是因为某个集合的一个元素可能是另一个集合的元素,所以这种约定不是绝对的。
- 本书中规定,用几个特定的字母表示几个常用的集合。约定:
  - № 表示全体自然数组成的集合,
  - ℤ 表示全体整数组成的集合,
  - ② 表示全体有理数组成的集合,
  - ℝ 表示全体实数组成的集合,
  - C 表示全体复数组成的集合。
- 本书中,规定 0 是自然数,即 0 ∈ №。但在另一些书中,规定 0 不是自然数。

9.1.2 集合的表示方法

### 集合的表示方法



通常表示集合的方法有两种。

一种方法是外延表示法。这种方法一一列举出集合的全体元素。例如

$$A = \{7, 8, 9\},$$

$$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

表示集合 A 有三个元素 7, 8, 9。集合 N 的元素是 0, 1, 2, 3, ..., 集合 N 就是自然数的集合,N 的表示式中使用了省略符号,这表示 N 中有无限多个元素 4, 5, 6, 7 等。有限集合中也可以使用省略符号,例如

$$\{a,b,c,\ldots,y,z\}$$

表示由 26 个小写英文字母组成的集合。

(ロト 4回 ト 4 至 ト 4 至 ト 至 り 9 ○ 7/108

9.1.2 集合的表示方法

### 集合的表示方法



另一种方法是内涵表示法,这种方法是用谓词来描述集合中元素的性质。上述的集合 A 和 N 可以分别表示为

$$A = \{x \mid x$$
是整数且 $6 < x < 10\},$   
 $N = \{x \mid x$ 是自然数 $\}.$ 

一般情况,如果 P(x) 表示一个谓词,那么就可以用  $\{x \mid P(x)\}$  或  $\{x : P(x)\}$  表示一个集合。 $\{x \mid P(x)\}$  是使 P(x) 为真的所有元素组成的集合。也就是说,若 P(a) 为真,则 a 属于该集合;若 P(a) 为假,则 a 不属于该集合。在表示式中的" $\|$ "和":"是一个分隔符号。在它前面的 × 是集合中元素的形式名称(如集合 A 中元素的形式名称是 ×,但实际名称是 7, 8, 9。常用 x, y, z 表示形式名称)。在分隔符号后面的 P(x) 是仅含自由变元 × 的谓词公式。

9.1.3 集合的实例

#### **例 1** $B = \{9, 8, 8, 7\}$

集合 B 中的两个 8 应看作 B 中的同一个元素,所以 B 中只有三个元素。集合 B 就是  $\{9,8,7\}$ 。它与上述的集合 A 是同样的集合,因为元素之间没有次序。

### 例 2 $D = \{x \mid x \notin B\}$

集合 D 是用集合 B 来定义的。若  $x \in B$ ,则  $x \in D$ ;若  $x \notin B$ ,则  $x \notin D$ 。集合 D 中的元素是除 7, 8, 9 外的一切事物。

#### **例 3** $F = \{7, \{8, \{9\}\}\}$

集合 F 和集合 B 不同。 $7 \in F$ ,但  $8 \notin F$ , $9 \notin F$ 。只有  $8 \in \{8, \{9\}\}$  和  $9 \in \{9\}$ 。 集合 F 仅含有两个元素 7 和  $\{8, \{9\}\}$ ,这两个元素由表示 F 的最外层花括号包围,并由逗号分隔开。对于以集合为元素的集合(即有多层花括号的集合),应注意集合的层次。

□▶ ◀♬▶ ◀臺▶ ◀臺▶ 臺 釣६♡ 9/108

9.1.3 集合的实例

### 例 4 $G = \{x \mid x = 1 \lor (\exists y)(y \in G \land x = \{y\})\}.$

集合 G 是用递归方法定义的。这个定义是构造性的,可以由该定义求 G 的每个元素,从而构造出 G。构造 G 的过程是:

- 由  $1 \in G$ ,有  $\{1\} \in G$ ,
- 由  $\{1\} \in G$ ,有  $\{\{1\}\} \in G$ ,
- ...

这个构造过程是无止境的, 因此 G 的元素有无限多个。

### 例 5 $H = \{x \mid x$ 是一个集合且 $x \notin x\}$ .

可用反证法证明集合 H 是不存在的。假设存在这样的集合 H,下面将证明,对某一具体事物 y,无法确定 y 是否属于 H。我们以 H 本身作为这个具体事物 y,证明中 y 就是 H。对于集合 H,必有  $y \in H$  或  $y \notin H$ ,下面分别考虑之。

- 若  $y \in H$ 。由于  $y \in H$  的元素, y 就具有 H 中元素的性质  $y \notin y$ 。考虑到 y 就是 H, 所以  $y \notin H$ 。这与  $y \in H$  矛盾。
- 若  $y \notin H$ 。由于 y 不是 H 的元素,y 就没有 H 中元素的性质,因此  $y \in y$ 。又 因 y 就是 H,则  $y \in H$ 。这与  $y \notin H$  矛盾。

两种情况都存在矛盾,所以  $y \in H$  和  $y \notin H$  都不成立,集合 H 不存在。问题的根源在于,集合论不能研究"所有集合组成的集合"。这是集合论中的一个悖论,称为 Russell 悖论。

- 1
- 9.1 集合的概念和表示方法

- 2
- 9.2 集合间的关系和特殊集合

- 3
- 9.3 集合的运算
- 4
- 9.4 集合的图形表示法

- 5
- 9.5 集合运算的性质和证明

- 6
- 9.6 有限集合的基数

◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ 臺 りQで 12/108

## 集合间的关系



在实数之间可以定义关系 = 、 < 、 ≤ 、 > 、 ≥ 。类似地,在集合之间可以定义关系 = 、 ⊆ 、 ⊂ 、 ⊇ 、 ⊃ 。

◆ロト ◆母ト ◆豆ト ◆豆ト 豆 からで 13/108

#### 定义 9.2.1

两个集合是相等的,当且仅当它们有相同的元素。若两个集合 A 和 B 相等,则记作 A = B; 若 A 和 B 不相等,则记作  $A \neq B$ ,这个定义也可以写成

- $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$
- $A \neq B \Leftrightarrow (\exists x) \neg (x \in A \Leftrightarrow x \in B) = \neg (\forall x) (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

这个定义就是集合论中的外延公理,也叫外延原理。它实质上是说"一个集合是由它的元素完全决定的"。因此,可以用不同的表示方法(外延的或内涵的),用不同的性质、条件和内涵表示同一个集合。例如

$$\{7,8,9\}, \{x \mid x$$
是整数且 $6 < x < 10\}, \{x \mid (x-7)(x-8)(x-9) = 0\},$ 

表示同一个集合,即三个集合相等。

<□▶ <□▶ < ≣▶ < ≣▶ < ≣▶ 990° 14/108

#### 定义 9.2.2

对任意两个集合 A 和 B,若 A 的每个元素都是 B 的元素,就称 A 为 B 的子集合,或称 B 包含 A,或称 B 是 A 的超集合,记作  $A\subseteq B$  或  $B\supseteq A$ 。这个定义也可以写成  $A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A\to x\in B)$ . 当 A 不是 B 的子集合时,即  $A\subseteq B$  不成立时,记作  $A\nsubseteq B$ 。

注意区分 ⊂ 和 ∈。例如

$$\{a\} \nsubseteq \{\{a\},b\}$$
 但  $\{a\} \in \{\{a\},b\},$   $\{a,b\} \subseteq \{a,b,\{a\}\}$  但  $\{a,b\} \notin \{a,b,\{a\}\}.$ 

 $A \in B$  表示 A 是 B 的一个元素, $A \subseteq B$  表示 A 的每个元素都是 B 的元素。此外,  $\in$  是集合论的原始符号,这是一个基本概念;但是  $\subseteq$  是由  $\in$  定义出来的概念。

下面给出有关 = 的两个主要结论。

#### 定理 9.2.1

两个集合相等的充要条件是它们互为子集,即

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \land B \subseteq A).$$

证明:

$$A = B$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \to x \in B) \land (x \in B \to x \in A))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B) \land (\forall x)(x \in B \to x \in A)$$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A.$$

这个定理很重要,以后证明两个集合相等时,主要使用这个定理,判定两个集合互为子集。

#### 定理 9.2.2

对任意的集合 A, B 和 C:

- $\mathbf{0}$   $A \subseteq A_{\circ}$
- $(A \subseteq B \land B \subseteq A) \Rightarrow A = B_{\circ}$
- $(A \subseteq B \land B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C_{\circ}$

在这个定理中,(1) 是自反性,(2) 是反对称性(这是定理 9.2.1 的一部分),(3) 是传递性。定理 9.2.2 说明包含关系  $\subseteq$  具有这 3 个性质(实数间的  $\le$  关系也有这 3 个性质)。

应该指出, ∈ 没有这 3 个性质。

- 以后将证明,对任意的集合 A,  $A \notin A$ .
- 以后将证明,对任意的集合 A 和 B,  $\neg (A \in B \land B \in A)$ .
- 对任意的集合 A、B 和 C,当  $A \in B$  和  $B \in C$  时,不一定有  $A \in C$ 。以后将指出,C 为传递集合时才能推出  $A \in C$ 。

◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ 臺 ∽Q♡ 17/108

#### 定义 9.2.3

对任意两个集合 A 和 B,若  $A \subseteq B$  且  $A \ne B$ ,就称 A 为 B 的真子集,或称 B 真 包含 A,或称 B 是 A 的真超集合,记作

$$A \subset B$$
 或 $B \supset A$ ,

#### 定义也可以写成

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \land A \neq B) = (\forall x)(x \in A \to x \in B) \land (\exists x) \neg (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

#### 定义 9.2.4

若两个集合 A 和 B 没有公共元素,就称 A 和 B 是不相交的。这个定义也可以写成

A 和 B 不相交  $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \land x \in B)$ .

若 A 和 B 不是不相交的, 就称 A 和 B 是相交的。例如

- $\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$
- $\{1,2\} \subseteq \{1,2\}$
- {1,2}和{3,4,5}不相交
- {1,2}和{2,3,4}相交

9.2.2 特殊集合

## 特殊集合



空集和全集是两个特殊集合。它们的概念相简单,但在集合论中的地位却很重要。 下面介绍这两个集合。

#### 定义 9.2.5

不含任何元素的集合称为空集,记作  $\Phi$ 。空集的定义也可以写成

$$\Phi = \{x \mid x \neq x\}.$$

显然,  $(\forall x)(x \notin \Phi)$  为真。

 $A = \Phi$  当且仅当

$$\{x \mid x \neq x\}.$$

 $A \neq \Phi$  当且仅当

$${x \mid (\exists y)(y \in x)}.$$

9.2.2 特殊集合

### 特殊集合



下面介绍有关空集的两个重要结论。

#### 定理 9.2.3

对任意的集合 A,  $\Phi \subseteq A$ 。

证明假设存在集合 A,使得  $\Phi \nsubseteq A$ 。则存在 x,使得  $x \in \Phi$  且  $x \notin A$ 。这与空集中的定义矛盾,因为空集不包含任何元素,所以不存在这样的 x。因此,假设不成立,定理得证。

#### 推论 9.2.1

空集是唯一的。

证明留作思考题(只要假设有两个空集  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$ , 证明  $\Phi_1 = \Phi_2$  即可)。

◆□▶ ◆□▶ ◆■▶ ◆■▶ ■ りゅ○ 21/108

9.2.2 特殊集合

### 特殊集合



#### 定义 9.2.6

在给定的问题中,所考虑的所有事物的集合称为全集,记作 E。全集的定义也可以写成

$$E = \{x \mid x = x\}.$$

全集的概念相当于谓词逻辑的论域。对不同的问题,往往使用不同的论域,例如在研究有关实数的问题时,就以  $\mathbb R$  为全集。

- 9.1 集合的概念和表示方法
- 9.2 集合间的关系和特殊集合
- 9.3 集合的运算
- 4 9.4 集合的图形表示法
- 9.5 集合运算的性质和证明
- 6 9.6 有限集合的基数

◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ 臺 釣९♡ 23/108

### 集合的运算



#### 集合的运算

运算是数学上常用的手段。两个实数进行加法运算可以得到一个新的实数。类似地,两个集合也可以进行运算,得到交集、并集等新的集合。集合的运算是由已知集合构造新集合的一种方法。我们经常从若干简单集合出发,用运算构造大量新集合,这类似于用逻辑联结词构造出大量合式公式。集合的运算式子也是表示这些新集合的一种方法,而且往往是更简捷的表示方法。所以,集合的运算式子是表示集合的第三种方法。这种表示方法不仅简捷,而且可利用运算的性质简化一些证明问题。

**◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ 臺 ∽**♀○ 24/108

9.3.1 集合的基本运算

### 集合的基本运算



下面介绍的 5 种运算是集合论中的基本运算。

#### 定义 9.3.1

对集合 A 和 B,

① 并集  $A \cup B$ 

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}.$$

② 交集 A ∩ B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}.$$

③ 差集 (又称 B 对 A 的相对补集, 补集)

$$A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\} = \{x \mid x \in A \land \neg(x \in B)\} = \{x \mid x \in A \land x \in -B\}$$
$$= A \cap -B = A - (A \cap B).$$

### 集合的基本运算



#### 定义 9.3.1

对集合 A 和 B,

4 余集(又称 A 的绝对补集)-A 定义为

$$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\} = \{x \mid \neg(x \in A)\}.$$

其中 E 为全集。A 的余集就是 A 对 E 的相对补集。

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x | x \in A \overline{\vee} x \in B\}.$$

◆ロ → ◆母 ▶ ◆ 星 ▶ ◆ 星 ▶ □ りゅで 26/108

9.3.1 集合的基本运算

### 集合的基本运算



#### 例 1

#### 已知集合 A, B 和全集 E 为

$$A = \{a, b, c, d\}, B = \{e, f, a, d\},$$
 
$$E = \{a, b, c, d, e, f, g\},$$

#### 则有

9.3.2 广义并和广义交

### 广义并和广义交



广义并和广义交是一元运算,是对一个集合的集合 A 进行的运算。它们分别求 A 中所有元素的并和交,A 中可以有任意多个元素,它们就可以求任意个元素的并和交。A 中若有无限多个元素,它们就可以求无限多个元素的并和交。广义并和广义交是并集和交集的推广。

#### 定义 9.3.2

若集合 A 的元素都是集合,则把 A 的所有元素的元素组成的集合称为 A 的广义并,记作  $\cup A$ ; 把 A 的所有元素的公共元素组成的集合称为 A 的广义交,记作  $\cap A$ 。这个定义也可以写成(A 的元素是集合):

此外,规定  $\cup \Phi = \Phi$ ,规定  $\cap \Phi$  无意义。

◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ · 臺 · 의익○ 28/108

9.3.2 广义并和广义交

### 广义并和广义交



#### 例 2

#### 已知集合 A 为

$$A = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\},\$$

### 则有

$$\cup A = \{a, b, c, d\},$$
$$\cap A = \{b\}.$$

#### 可以用广义并和广义交分别定义并集和交集

$$A \cup B = \cup \{A, B\},\$$

$$A\cap B=\cap\{A,B\}.$$

9.2.3 某集

### 幂集



集合的幂集是该集合所有子集组成的集合,幂集是由一个集合构造的新集合,它也是集合的一元运算,但是幂集与原集合的层次有所不同。

#### 定义 9.3.3

若 A 是集合,则把 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集,记作 P(A) (有  $2^n$  个元素)。

这个定义也可以写成

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$
 (幂集的元素是集合)

9.1 集合的概念和表示方法

### 幂集



#### 例 3

$$P(\varnothing) = \{\varnothing\},$$

$$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},$$

$$P(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$$

对任意的集合 A, 有  $\varnothing \subseteq A$  和  $A \subseteq A$ , 因此有  $\varnothing \in P(A)$  和  $A \in P(A)$ 。

◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ 臺 りゅ○ 31/108

### 笛卡尔积



- 笛卡尔积也是一种集合二元运算,两个集合的笛卡儿积是它们的元素组成的有序对的集合,笛卡儿积是与原集合层次不同的集合。笛卡儿积是下一章介绍关系概念的基础。下面先介绍有序对,再介绍笛卡儿积。
- 两个元素 x 和 y (允许 x = y) 按给定次序排列组成的二元组合称为一个有序对,记作  $\langle x, y \rangle$ 。其中 x 是它的第一元素,y 是它的第二元素。
- 有序对 〈x,y〉 应具有下列性质:
  - $x \neq y \Longrightarrow \langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$
  - $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \Longleftrightarrow x = u \land y = v$
- 在平面直角坐标系上一个点的坐标就是一个有序对。

下面用集合定义有序对,使之具有上述的性质,

#### 定义 9.3.4

有序对  $\langle x, y \rangle$  定义为  $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ 

- ◆□▶ ◆御▶ ◆臺▶ ◆臺▶ - 臺 - 釣۹♡ - 32/108

### 笛卡尔积



#### 定理 9.3.1

- $2 x \neq y \Leftarrow \langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$

证明 (1) 设  $x = u \land y = v$ ,则显然有  $\{\{x\}, \{x,y\}\} = \{\{u\}, \{u,v\}\}$ 。于是  $\langle x,y \rangle = \langle u,v \rangle$ 。

设  $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ ,则有  $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ 。

分别考虑 x = y 和  $x \neq y$  两种情况。

- 当 x = y 时, $\langle x, y \rangle = \{\{x\}\}$ ,于是  $\{x\} = \{u\} = \{u, v\}$ ,则 x = u = v = y。
- 当  $x \neq y$  时,显然  $\{u\} \neq \{x,y\}$ 。于是  $\{u\} \neq \{x\}$  且  $\{x,y\} = \{u,v\}$ 。则 x = u。显然  $y \neq u$ ,于是 y = v。两种情况都可得到  $x = u \land y = v$ 。

### 笛卡尔积



可以推广有序对的概念,定义由有序的 n 个元素组成的 n 元组。n 元组是用递归方法定义的。

#### 定义 9.3.5

若  $n \in \mathbb{N}$  且 n > 1,  $x_1, x_2, \ldots, x_n$  是 n 个元素, 则 n 元组  $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$  定义为

- 当n=2 时,二元组是有序对 $\langle x_1,x_2\rangle$
- $\exists n \neq 2 \text{ pd}, \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$

#### 例 4

$$\langle a, b, c, d \rangle = \langle \langle a, b \rangle, c \rangle, d \rangle.$$

按照这个定义, 有序对就是二元组, n 元组就是多重有序对。

### 笛卡尔积



#### 定义 9.3.6

集合  $A \cap B$  的笛卡儿积(又称卡氏积、乘积、直积) $A \times B$  定义为

$$A \times B = \{z \mid \exists x \in A \land \exists y \in B \land z = \langle x, y \rangle \}$$
 或简写为

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \land y \in B \}$$

#### 例 5

已知集合 A 和 B 为  $A = \{a,b\}, B = \{0,1,2\}$ 。

- $A \times B = \{\langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}$
- $B \times A = \{\langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle\}$
- $A \times A = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$

◆□ ▶ ◆□ ▶ ◆ 臺 ▶ ◆ 臺 ▶ ■ りゅ○ 35/108

### 笛卡尔积



在 A = B 时,可把  $A \times A$  简写为  $A^2$ 。

上面用有序对定义了笛卡儿积。 A 和 B 的笛卡儿积,就是由  $x\in A$  和  $y\in B$  构成的有序对  $\langle x,y\rangle$  的全体组成的集合。可以推广这个概念,用 n 元组定义 n 阶笛卡儿积。

#### 定义 9.3.7

若  $n \in \mathbb{N}$  且 n > 1,而  $A_1, A_2, \ldots, A_n$  是 n 个集合,它们的 n 阶笛卡儿积记作  $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ,并定义为

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n \}$$

当  $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$  时,它们的 n 阶笛卡儿积可以简写为  $A^n$ 。

◆ロ ト ◆ 母 ト ◆ 達 ト ◆ 達 ト 章 り へ ○ 36/108

## 优先权



- 集合可以由集合运算符连接构成新集合,如  $A\cap B$  和 -A。两个集合可以由集合关系符连接,构成一个命题,如  $A\cap B\subseteq A$  和  $A\neq B$ 。这种命题可以由逻辑联结词连接,构成复合命题,如  $(A\subseteq B\wedge A\neq B)$ 。两个命题可以由逻辑关系符连接,如  $A=B\Longrightarrow A\subseteq B$ 。
- 在集合论中,当描述问题和证明问题时,往往在一个式子中同时使用上述四类连接符号。为了简单、确定地表示各类连接符号的优先次序,下面规定各类连接符号的优先次序,

- 一元运算符  $(-A, P(A), \cap A, \cup A)$  优先于
- 二元运算符 (-, ∩, ∪, ⊕, ×) 优先于
- 集合关系符 (=, ⊆, ∈, ∈) 优先于
- 一元联结词(¬)优先于
- 二元联结词 (∧, ∨, →, ↔) 优先于
- 逻辑关系符 (⇔,⇒)。
- 此外,还使用数学上惯用的括号表示优先权方法、从左到右的优先次序。规定
  - 1 括号内的优先于括号外的;
  - 2 同一层括号内,按上述优先权,
  - **③** 同一层括号内,同一优先级的,按从左到右的优先次序。

9.3.5 优先权

#### 例 6

$$-A \oplus B \subseteq C \cup \cap D$$

#### 表示

$$((-A) \oplus B) \subseteq (C \cup (\cap D))$$
$$\neg A \cap B \in C \to D \subseteq E$$

### 表示

$$(\neg((A \cap B) \in C) \to (D \subseteq (\cap E))$$
$$A \subseteq B \land A \neq B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

### 表示

$$((A \subseteq B) \land (A \neq B)) \Leftrightarrow (A \subset B)$$

- 9.1 集合的概念和表示方法
- 9.2 集合间的关系和特殊集合
- 9.3 集合的运算
- 4 9.4 集合的图形表示法
- 5 9.5 集合运算的性质和证明
- 6 9.6 有限集合的基数

### 集合的图形表示法



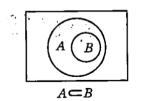
- 前面已介绍了表示集合的三种方法: 外延表示法,内涵表示法和使用运算的表示法,图形表示法是第四种表示法。图形表示法是数学上常用的方法,它的优点是形象直观、易于理解,缺点是理论基础不够严谨,因此只能用于说明,不能用于证明。
- 下述的三种图形表示法分别适于表示不同类型的集合运算。不仅可以表示集合运算的概念,而且可以表示一些性质和结论。

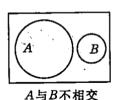
9.4.1 文氏图

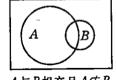
### 文氏图



- 在文氏图中,矩形内部的点表示全集的所有元素。在矩形内画不同的圆表示不同的集合,用圆内部的点表示相应集合的元素。文氏图可以表示集合间的关系和集合的 5 种基本运算。
- 图 9.4.1 中各图表示集合的关系,各图中的 A 和 B 间具有相应的关系,图 9.4.2 中各图表示 5 种基本运算,各图中斜线区表示经相应运算得到的集合。







A与B相交且A⊄B

图 9.4.1 文氏图 ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

9.4.1 文氏图

## 文氏图



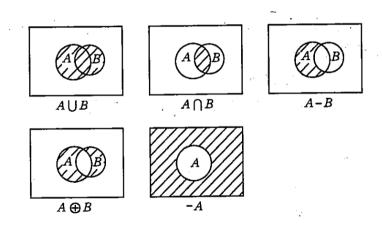


图 9.4.2 文氏图 (ロ) (型) (量) (量) (量) (重) かく()

43/108

9.4.2 幂集的图示法

### 幂集的图示法



• 可以用一个网络图中的各结点表示幂集的各元素。设  $A = \{0,1,2\}$ ,则 P(A) 的各元素在图 9.4.3 中表示。图中结点间的连线表示二者之间有包含关系。这种图就是下一章介绍的哈斯图。

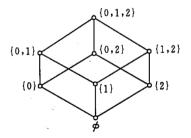


图 9.4.3 幂集

**◆□▶◆□▶◆臺▶◆臺▶ 臺 か**९○ 44/108

9.4.3 笛卡尔积的图示法

### 笛卡尔积的图示法



• 在平面直角坐标系上,如果用 x 轴上的线段表示集合 A,并用 y 轴上的线段表示集合 B,则由两个线段画出的矩形就可以表示笛卡儿积  $A \times B$ ,如图 9.4.4 所示。

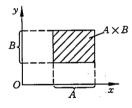


图 9.4.4 笛卡儿积

- 9.1 集合的概念和表示方法
- 9.2 集合间的关系和特殊集合
- 9.3 集合的运算
- 4 9.4 集合的图形表示法
- 5 9.5 集合运算的性质和证明
- 6 9.6 有限集合的基数

### 基本运算的性质



集合的三种运算  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $\neg A$  分别是用逻辑连接词  $\lor$ ,  $\land$ ,  $\neg$  定义的,因此它们具有和  $\lor$ ,  $\land$ ,  $\neg$  类似的性质。下面给出它们满足的一些基本规律,

### 定理 9.5.1 对任何的集合 A, B 和 C, 有

① 交换律

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

2 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

### 定理 9.5.1 对任何的集合 A, B 和 C, 有

3 分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4 幂等律

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

5 吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

### 定理 9.5.1 对任何的集合 A, B 和 C, 有

6 摩根律

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$
$$-(B \cup C) = -B \cap -C$$
$$-(B \cap C) = -B \cup -C$$

7 同一律

$$A \cup \emptyset = A$$
,  $A \cap E = A$ 

### 定理 9.5.1 对任何的集合 A, B 和 C, 有

8 零律

$$A \cup E = E$$
,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ 

9 补余律

$$A \cup -A = E$$
,  $A \cap -A = \emptyset$ 

10

$$-\varnothing = E$$
,  $-E = \varnothing$ 

① 双补律

$$-(-A) = A$$

## 谓词法



下面仅证 (3) 和 (5) 求证 (3)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 证明 对于任意的 x 可得

$$\begin{aligned} x &\in A \cup (B \cap C) \\ \Leftrightarrow x &\in A \vee x \in (B \cap C) \\ \Leftrightarrow x &\in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ \Leftrightarrow x &\in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \\ \Leftrightarrow x &\in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

于是结论得证。

∢□▶ ∢□▶ ∢臺▶ ∢臺▶ 臺 ∽9
№ 51/10

# 集合法

求证 (5) 
$$A\cap (A\cup B)=A$$
.  
证明 
$$A\cap (A\cup B)=(A\cup\varnothing)\cap (A\cup B)\\ =A\cup(\varnothing\cap B)\\ =A\cup\varnothing\\ =A$$

- 这里采用了两种证明方法。一种是利用谓词演算的方法,另一种是利用已知的集合恒等式。一部分基本规则只能用谓词逻辑来证明。其他规律和集合恒等式可能用两种方法来证。
- 可以用文氏图说明集合恒等式。图 9.5.1 用文氏图说明  $A (B \cap C) = (A B) \cup (A C)$ 。从图中看出,等式两边对应图中同一个区域,因此应该相等。这种图形表示法只能说明问题,不能证明问题。

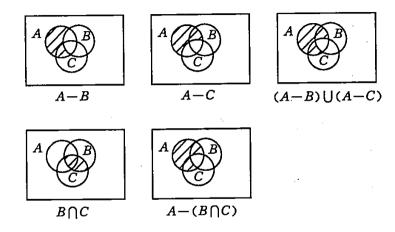


图 9.5.1

### 基本运算的性质



下面给出差集的性质。

#### 定理 9.5.2

对任意的集合 A, B 和 C, 有

**1** 
$$A - B = A - (A \cap B)$$

**2** 
$$A - B = A \cap -B$$

**3** 
$$A \cup (B - A) = A \cup B$$

**4** 
$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$$

# 证明: (1) 添项谓词法 (2) 不属于谓词法



### (1) 对任意的 x

$$x \in A - (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \land \neg (x \in A \cap B)$$
  

$$\Leftrightarrow x \in A \land \neg (x \in A \land x \in B)$$
  

$$\Leftrightarrow x \in A \land (x \notin A \lor x \notin B)$$
  

$$\Leftrightarrow (x \in A \land x \notin A) \lor (x \in A \land x \notin B)$$
  

$$\Leftrightarrow F \lor (x \in A - B) \Leftrightarrow x \in A - B$$

### (2) 对任意的 x

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \land x \notin B$$
$$\Leftrightarrow x \in A \land x \in -B \Leftrightarrow x \in A \cap -B$$

# (3) 分配集合法(4) 差/结合



(3)

$$A \cup (B-A) = A \cup (B \cap -A)$$
$$= (A \cup B) \cap (A \cup -A) = (A \cup B) \cap E$$
$$= A \cup B$$

**(4)** 

$$A \cap (B - C) = A \cap (B \cap -C)$$
$$= (A \cap B) \cap -C = (A \cap B) - C$$

定理中的 (2) 是很有用的结论,它可以用  $A \cap B$  代入式中的 A - B,从而消去差集算符,利用定理 9.5.1 的规律。这类似于命题逻辑中消去联结词  $\rightarrow$ 。

◆ロト ◆部ト ◆注ト ◆注ト 注 りなで 57/10

## 基本运算的性质



对称差的性质类似于并集,下面给出一些基本性质。

### 定理 9.5.3

对任意的集合 A, B 和 C, 有

- ① 交換律  $A \oplus B = B \oplus A$ .
- ② 结合律  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ .
- **3** 分配律  $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ .
- 4 同一律  $A \oplus \emptyset = A$ .
- **5** 零律  $A \oplus A = \emptyset$ .

# 添项法



### 证明 (3) 如下

$$\begin{split} A \cap (B \oplus C) \\ &= A \cap ((B - C) \cup (C - B)) \\ &= A \cap ((B \cap -C) \cup (C \cap -B)) \\ &= (A \cap B \cap -C) \cup (A \cap C \cap -B) \\ &= ((A \cap B \cap -C) \cup (A \cap B \cap -A)) \cup ((A \cap C \cap -B) \cup (A \cap C \cap -A)) \\ &= ((A \cap B) \cap (-C \cup -A)) \cup ((A \cap C) \cap (-B \cup -A)) \\ &= ((A \cap B) \cap -(A \cap C)) \cup ((A \cap C) \cap -(A \cap B)) \\ &= (A \cap B) \oplus (A \cap C) \end{split}$$

## 基本运算的性质



集合间的 ○ 关系类似于实数间的 < 关系, 性质如下

### 定理 9.5.4

对任意的集合 A, B, C 和 D, 有

- $2 A \subseteq B \Longrightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$
- $(A \subseteq B) \land (C \subseteq D) \Longrightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$
- $(A \subseteq B) \land (C \subseteq D) \Longrightarrow (A D) \subseteq (B C)$
- **6**  $C \subseteq D \Longrightarrow (A D) \subseteq (A C)$

# 例 1 对任意的集合 A 和 B,有 $(A \cup B = B) \Longleftrightarrow (A \subseteq B) \Longleftrightarrow (A \cap B = A) \Longleftrightarrow (A - B = \emptyset)$ 。

- 证明本例要求证明 4 个命题互相等价。设命题 (1) 是  $A \cup B = B$ , 命题 (2) 是  $A \subseteq B$ , 命题 (3) 是  $A \cap B = A$ , 命题 (4) 是  $A B = \emptyset$ 。只要证明 (1)  $\Rightarrow$  (2), (2)  $\Rightarrow$  (3), (3)  $\Rightarrow$  (4), (4)  $\Rightarrow$  (1) 即可。
- $(1) \Rightarrow (2)$ : 已知  $A \cup B = B$ . 对任意的 x, 得  $x \in A \Rightarrow x \in A \lor x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B$ . 因此  $A \subseteq B$ .
- $(2) \Rightarrow (3)$ : 已知  $A \subseteq B$ . 对任意的 x, 得  $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A, x \in A \Rightarrow x \in A \cap x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$ . 因此  $A \cap B = A$ .

- $(3)\Rightarrow (4)$ : 已知  $A\cap B=A$ ,故  $A-B=A\cap -B=(A\cap B)\cap -B=A\cap (B\cap -B)=\varnothing$ 。
- $(4) \Rightarrow (1)$ :
  - 已知  $A B = \emptyset$ , 故

$$A \cup B$$
  
=  $B \cup A$   
=  $B \cup (A - B)$   
(由定理 9.5.2) =  $B \cup \emptyset = B$ 

#### 例 2

对任意的集合 A, B 和 C, 有  $A \cup B = A \cup C$ ,  $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$ 。 证明 方法 1:

$$B = B \cap (A \cup B)$$
 (吸收律)  
 $= B \cap (A \cup C)$   
 $= (B \cap A) \cup (B \cap C)$   
 $= (A \cap C) \cup (B \cap C)$   
 $= (A \cup B) \cap C$   
 $= (A \cup C) \cap C = C$ .

方法 2:(反证法) 假设  $B \neq C$ 。不妨设存在 x,使  $x \in B \land x \notin C$ 。如果  $x \in A$ ,则  $x \in A \cap B$  且  $x \notin A \cap C$  与已知矛盾。如果  $x \notin A$ ,则  $x \in A \cup B$  且  $x \notin A \cup C$ ,也 与已知矛盾。因此 B = C。由  $A \cup B = A \cup C$  能否推出 B = C 呢?能否由  $A \cap B = A \cap C$  推出 B = C 呢?请思考。

### 例 3 对任意的集合 A, B 和 C, 给出 $(A-B)\oplus (A-C)=\varnothing$ 成立的充要条件。

$$\mathbf{ff}(A-B) \oplus (A-C) = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow ((A-B) - (A-C)) \cup ((A-C) - (A-B)) = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow ((A-B) - (A-C)) = \emptyset \wedge ((A-C) - (A-B)) = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow (A-B) \subseteq (A-C) \wedge (A-C) \subseteq (A-B)$$

$$\Leftrightarrow A-B = A-C.$$

于是, 充要条件是 A - B = A - C。

充要条件的证明,集合法用=

## 幂集合的性质和传递集合



#### 定理 9.5.5

对任意的集合 A 和 B, 有:

- $\bullet A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$
- **2** $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

#### 证明

① 先设  $A \subseteq B$  成立,对任意的 x,有

$$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A$$
 
$$\Rightarrow x \subseteq B \quad ($$
**定理** 9.2.2) 
$$\Leftrightarrow x \in P(B)$$

于是,  $P(A) \subseteq P(B)$ 。再设  $P(A) \subseteq P(B)$  成立, 对任意的 x, 有:

$$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A$$
$$\Leftrightarrow \{x\} \in P(A)$$
$$\Rightarrow \{x\} \in P(B)$$
$$\Leftrightarrow \{x\} \subseteq B$$
$$\Leftrightarrow x \in B.$$

于是  $A \subseteq B$ 。

◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ · 臺 · · · 의 へ ○ · · 67/108



$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$$
$$\Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B) \land P(B) \subseteq P(A)$$
$$\Leftrightarrow P(A) = P(B)$$

#### 定理 9.5.6

### 对任意的集合 A 和 B, 有

- $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
- $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

#### 证明

① 对任意的 x, 可得

$$x \in P(A) \cap P(B) \Leftrightarrow x \in P(A) \land x \in P(B)$$

$$\Leftrightarrow x \subseteq A \land x \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \to y \in A) \land (\forall y)(y \in x \to y \in B)$$

$$\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \to (y \in A \land y \in B))$$

$$\Leftrightarrow x \subseteq A \cap B$$

$$\Leftrightarrow x \in P(A \cap B).$$

### 2 对任意的 x, 可得

$$x \in P(A) \cup P(B) \Leftrightarrow x \in P(A) \lor x \in P(B)$$

$$\Leftrightarrow x \subseteq A \lor x \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \to y \in A) \lor (\forall y)(y \in x \to y \in B)$$

$$\Rightarrow (\forall y)((y \in x \to y \in A) \lor (y \in x \to y \in B))$$

$$\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \to (y \in A \cup B))$$

$$\Leftrightarrow x \subseteq A \cup B$$

$$\Leftrightarrow x \in P(A \cup B).$$

• 注意,结论 (2) 不能写成等式。例如,令  $A = \{a\}$ ,  $B = \{b\}$ 。则  $P(A \cup B) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}, P(A) \cup P(B) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}\}.$ 

◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ □ りへ○ 70/108

#### 定理 9.5.8

### 对任意的集合 A 和 B, 有

$$P(A - B) \subseteq (P(A) - P(B)) \cup \{\Phi\}.$$

### 证明 对任意的 x, 若 $x \neq \Phi$ , 则有

$$x \in P(A - B) \Leftrightarrow x \subseteq A - B$$

$$\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \to y \in A - B)$$

$$\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \to (y \in A \land y \notin B))$$

$$\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \to y \in A) \land (\forall y)(y \in x \to y \notin B)$$

$$\Rightarrow (\forall y)(y \in x \to y \in A) \Leftrightarrow x \subseteq A$$

### 此外

$$x \in P(A - B) \land x \neq \emptyset \Leftrightarrow x \subseteq A - B \land (\exists y)(y \in x)$$
  
 $\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow (y \in A \land y \notin B)) \land (\exists y)(y \in x)$   
 $\Rightarrow (\exists y)(y \in x \land y \notin B) \quad ($ 用推理规则 $)$   
 $\Leftrightarrow x \nsubseteq B$ 

### 于是

$$\begin{aligned} x \in P(A - B) \land x \neq \varnothing \Rightarrow x \subseteq A \land x \not\subseteq B \\ \Leftrightarrow x \in P(A) \land x \notin P(B) \\ \Rightarrow x \in (P(A) - P(B)) \\ \Rightarrow P(A - B) \in (P(A) - P(B)) \cup \{\varnothing\} \end{aligned}$$

若  $x = \emptyset$ , 有  $\emptyset \in P(A - B)$  且 $\emptyset \in (P(A) - P(B)) \cup \{\emptyset\}$ .

◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ 臺 釣۹で 72/10

### 幂集合的性质和传递集合



• 传递集合是一类特殊的集合。下面给出传递集合的定义,并讨论它和幂集的关系。

#### 定义 9.5.1

如果集合的集合 A 的任一元素的元素都是 A 的元素,就称 A 为传递集合。

• 这个定义也可以写成

$$A$$
是传递集合  $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in y \land y \in A) \rightarrow x \in A),$ 

推论  $\Rightarrow x \subseteq A, y \subseteq A$ 。

• 证明传递集合从定义角度来进行证明。

◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ □ りへ○ 73/108

### 幂集合的性质和传递集合



#### 例 4

- $A=\{\Phi,\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$  是传递集合。A 的元素的元素有  $\Phi$  和  $\{\Phi\}$ ,这些都是 A 的元素。
- $B = \{\{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}\$  不是传递集合,B 的元素的元素有  $\Phi$  和  $\{\Phi\}$ ,但是  $\{\Phi\}$  不是 B 的元素。

# 幂集合的性质和传递集合



#### 定理 9.5.9

对集合的集合 A, A 是传递集合  $\Leftrightarrow A \subseteq P(A)$ .

#### 证明:

- 先设 A 是传递集合。则对任意的  $y \in A$ ,若  $y = \Phi$ ,则  $y \in P(A)$ 。若  $y \neq \Phi$ ,对  $(\forall x)(x \in y)$ ,有  $x \in A$  (因为 A 是传递集合),则有  $y \subseteq A$ ,于是  $y \in P(A)$ 。总 之,由  $y \in A \rightarrow y \in P(A)$ ,有  $A \subseteq P(A)$ 。
- 再设  $A \subseteq P(A)$ ,则对任意的 x 和 y,有

$$x \in y \land y \in A \Rightarrow x \in y \land y \in P(A)$$
 (由已知)  
  $\Leftrightarrow x \in y \land y \subseteq A \Rightarrow x \in A$ 

因此, A 是传递集合。

#### 定理 9.5.10

对集合的集合 A, A 是传递集合  $\Leftrightarrow P(A)$  是传递集合。

• 先设 A 是传递集合。对任意的 x 和 y 有

$$x \in y \land y \in P(A) \Leftrightarrow x \in y \land y \subseteq A \Rightarrow x \in A$$
  
 $\Rightarrow x \subseteq A \quad (因为A 是传递集合)$   
 $\Rightarrow x \in P(A)$ 

所以 P(A) 是传递集合(证明中利用了传递集合的性质,它的元素一定是它的子集)。

因此, A 是传递集合。

• 再设 P(A) 是传递集合。对任意的 x 和 y, 有

$$x \in y \land y \in A \Leftrightarrow x \in y \land \{y\} \subseteq A$$
  $x \in y \land y \in \{y\} \land \{y\} \in P(A)$  (凑传递形式)  $\Rightarrow x \in y \land y \in P(A)$  (因为 $P(A)$  是传递集合)  $\Rightarrow x \in y \land y \subseteq A \Rightarrow x \in A$ 

因此,A 是传递集合。

000000**00000000000**00000000

# 广义并和广义交的性质



### 定理 9.5.11

对集合的集合 A 和 B. 有

- ②  $A \subseteq B \Rightarrow \cap B \subseteq \cap A$ , 其中 A 和 B 非空.

#### 证明:

① 设  $A \subseteq B$ 。对任意的 x,可得

$$x \in \bigcup A \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \land y \in A)$$

$$\Rightarrow (\exists y)(x \in y \land y \in B) \Leftrightarrow x \in \cup B$$

所以,  $\cup A \subseteq \cup B$ 

### ② 设 $A \subseteq B$ 。对任意的 x,可得

$$x \in \cap B \Leftrightarrow (\forall y)(y \in B \to x \in y)$$
  
 $\Rightarrow (\forall y)(y \in A \to x \in y) \quad (\mathbf{th} A \subseteq B)$   
 $x \in \cap A$ 

所以,  $\cap B \subseteq \cap A$ .

#### 定理 9.5.12

对集合的集合 A 和 B, 有

其中 A 和 B 非空。

#### 证明:

1 对任意的 x, 可得

$$x \in \cup (A \cup B) \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \land y \in A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \land (y \in A \lor y \in B))$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \land y \in A) \lor (\exists y)(x \in y \land y \in B)$$

$$\Leftrightarrow x \in \cup A \lor x \in \cup B$$

$$\Leftrightarrow x \in (\cup A) \cup (\cup B)$$

所以,  $\cup (A \cup B) = (\cup A) \cup (\cup B)$ 。

◆ロト ◆母ト ◆豆ト ◆豆ト 豆 からで 81/108

### 2 对任意的 x, 可得

$$x \in \cap (A \cup B) \Leftrightarrow (\forall y)(y \in A \cup B \to x \in y)$$

$$\Leftrightarrow (\forall y)((y \in A \lor y \in B) \to x \in y)$$

$$\Leftrightarrow (\forall y)(y \in A \to x \in y) \land (\forall y)(y \in B \to x \in y)$$

$$\Leftrightarrow x \in \cap A \land x \in \cap B$$

$$\Leftrightarrow x \in (\cap A) \cap (\cap B)$$

所以,
$$\cap (A \cup B) = (\cap A) \cap (\cap B)$$
。

#### 定理 9.5.13

对任意的集合 A, 有

$$\cup (P(A)) = A.$$

证明: 对任意的 x, 可得

$$x \in \cup(P(A)) \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \land y \in P(A))$$
$$\Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \land y \subseteq A) \Leftrightarrow x \in A$$

所以,  $\cup (P(A)) = A$ 。

• 定理说明,广义并是幂集的逆运算。例如,当  $A = \{a,b\}$  有  $P(A) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ ,有  $\cup (P(A)) = \{a,b\}$ ,但是次序不能颠倒,即  $P(\cup(A)) \neq A$ ,只有  $A \subseteq P(\cup(A))$ 。例如,当  $A = \{\{a\}\}$ ,有  $\cup (A) = \{a\}$ ,有  $P(\cup(A)) = \{\Phi, \{a\}\}$ .

◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ 臺 かんで 83/108

### 广义并和广义交的性质



下面讨论广义并和广义交对于传递集合的封闭性

#### 定理 9.5.14

若集合 A 是传递集合,则  $\cup A$  是传递集合。

证明: 对任意的 x 和 y, 有

 $x \in y \land y \in \bigcup A \Leftrightarrow x \in y \land (\exists z)(y \in z \land z \in A)$ 

 $\Rightarrow x \in y \land y \in A$  (因为A 是传递集合)

 $\Leftrightarrow x \in \cup A$ 

所以  $\cup A$  是传递集合。

◆□ ▶ ◆□ ▶ ◆ ■ ▶ ◆ ■ ● 9 へ ○ 84/108

# 广义并和广义交的性质



#### 定理 9.5.15

若集合 A 的元素都是传递集合,则  $\cup A$  是传递集合。

证明: 对任意的 x 和 y, 有

 $x \in y \land y \in \cup A \Leftrightarrow x \in y \land (\exists z)(y \in z \land z \in A)$ 

 $\Rightarrow (\exists z)(x \in z \land z \in A)$  (因为z 是传递集合)

 $\Leftrightarrow x \in \cup A$ 

所以  $\cup A$  是传递集合。

◆ロ → ◆母 ▶ ◆ 星 ▶ ◆ 星 ▶ ■ りゅで 85/108

### 广义并和广义交的性质



#### 定理 9.5.16

若非空集合 A 是传递集合,则  $\cap A$  是传递集合,且  $\cap A = \Phi$ 。

这个定理的证明要使用正则公理,这里不给出证明。

#### 定理 9.5.17

若非空集合 A 的元素都是传递集合,则  $\cap A$  是传递集合。

证明: 对任意的 x 和 y. 可得

$$x \in y \land y \in \cap A \Leftrightarrow x \in y \land (\forall z)(z \in A \rightarrow y \in z)$$

$$\Leftrightarrow (\forall z)(x \in y \land (z \notin A \lor y \in z))$$

$$\Leftrightarrow (\forall z)((x \in y \land z \notin A) \lor (x \in y \land y \in z))$$

$$\Leftrightarrow (\forall z)((x \in y \lor (x \in y \land y \in z)) \land (z \notin A \lor (x \in y \land y \in z)))$$

$$\Rightarrow (\forall z)(z \notin A \lor (x \in y \land y \in z))$$

$$\Leftrightarrow (\forall z)(z \in A \rightarrow (x \in y \land y \in z))$$

$$\Leftrightarrow (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z) \quad (z \text{ 是传递集合})$$

$$\Leftrightarrow x \in \cap A$$

所以  $\cap A$  是传递集合。

### 笛卡尔积的性质



- 笛卡尔积具有下列基本性质:

  - ② 若  $A \neq \Phi$ ,  $B \neq \Phi$  且  $A \neq B$ , 则  $A \times B \neq B \times A$
  - $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$
- 结论表明,笛卡尔积不满足交换律和结合律。结论(3)是因为

$$A \times (B \times C) = \{ \langle a, \langle b, c \rangle | a \in A \land b \in B \land c \in C \}$$
$$(A \times B) \times C = \{ \langle \langle a, b \rangle, c \rangle | a \in A \land b \in B \land c \in C \}$$

其中 << a, b>, c> =< a, b, c> 是三元组,但 < a, < b, c>> 不是三元组。  $<< a, b>, c> \neq < a, < b, c>>$ 

◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ 臺 ∽Q♡ 88/108

### 笛卡尔积的性质



#### 定理 9.5.18

若 A 是集合,  $x \in A, y \in A$ , 则  $\langle x, y \rangle \in PP(A)$ 。(PP(A) 表示 P(P(A))。)

证明:

$$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x\} \in P(A), \mathbf{\underline{H}}$$
$$x \in A \land y \in A \Leftrightarrow \{x,y\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x,y\} \in P(A)$$

由以上二式可得到:

$$x \in A \land y \in A \Leftrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq P(A)$$
$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \subseteq P(A) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in PP(A)$$

### 笛卡尔积的性质



#### 定理 9.5.19

对任意的集合 A, B 和 C, 有

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

### **证明:** 只证 (1),其余留作思考题。对任意的 $\langle x,y\rangle$ ,可得

$$\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \land y \in B \cup C$$
  
 
$$\Leftrightarrow x \in A \land (y \in B \lor y \in C)$$
  
 
$$\Leftrightarrow (x \in A \land y \in B) \lor (x \in A \land y \in C)$$
  
 
$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \lor \langle x, y \rangle \in A \times C$$
  
 
$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

所以, 
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
。

### 笛卡尔积的性质



#### 定理 9.5.20

对任意的集合 A, B 和 C, 若  $C \neq \Phi$ , 则

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B).$$

#### 证明:

• 先设  $A \subseteq B$ 。若  $y \in C$ ,则

$$\langle x, y \rangle \in A \times C \Leftrightarrow x \in A \land y \in C$$

$$\Rightarrow x \in B \land y \in C \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in B \times C.$$

所以,  $A \times C \subseteq B \times C$ 。

• 再设  $A \times C \subseteq B \times C$ 。取  $y \in C$ ,则

$$x \in A \Rightarrow x \in A \land y \in C \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C$$
$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in B \times C \Leftrightarrow x \in B \land y \in C \Rightarrow x \in B.$$

所以,  $A \subseteq B$ 。 总之,  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times C$ 。 类似可证,  $A \subseteq B \Leftrightarrow C \times A \subseteq C \times B$ 。

### 笛卡尔积的性质



#### 定理 9.5.21

对任意的非空集合 A, B, C 和 D, 有

$$(A \times B \subseteq C \times D) \Leftrightarrow (A \subseteq C \land B \subseteq D)$$

#### 证明:

• 先设  $A \times B \subseteq C \times D$ , 对任意的  $x \in A$ , 因存在  $y \in B$ , 则

$$x \in A \land y \in B \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B$$
$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in C \times D \Leftrightarrow x \in C \land y \in D \Rightarrow x \in C$$

所以, $A \subseteq C$ ,类似有  $B \subseteq D$ 。

• 再设  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq D$ 。对任意的 x 和 y,有:

$$\langle x, y \rangle \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \land y \in B$$
  
  $\Rightarrow x \in C \land y \in D \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in C \times D$ 

所以,  $A \times B \subseteq C \times D$ 。

◆ロト ◆母ト ◆夏ト ◆夏ト 夏 からで 95/108

- 9.1 集合的概念和表示方法
- 9.2 集合间的关系和特殊集合
- 9.3 集合的运算
- 4 9.4 集合的图形表示法
- 5 9.5 集合运算的性质和证明
- 6 9.6 有限集合的基数

◆ロト ◆母ト ◆夏ト ◆夏ト 夏 りゅ○ 96/108

9.6.1 有限集合的基数

# 有限集合的基数



集合的基数就是集合中元素的个数。这一节介绍有限集合的基数和一些结论。无限集合的基数将在以后介绍。

9.6.1 有限集合的基数

### 有限集合的基数



#### 定义 9.6.1

如果存在  $n \in \mathbb{N}$ ,使集合 A 与集合  $\{x \mid x \in \mathbb{N} \land x < n\} = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$  的元素个数相同,就说集合 A 的基数是 n,记作 #(A) = n 或 |A| = n 或  $\mathsf{card}(A) = n$ 。空集  $\varnothing$  的基数是 0。

### 定义 9.6.2

如果存在  $n \in \mathbb{N}$ ,使 n 是集合 A 的基数,就说 A 是有限集合。如果不存在这样的 n,就说 A 是无限集合。

9.6.2 幂集和笛卡尔积的基数

### 幂集和笛卡儿积的基数



• **定理 9.6.1** 对有限集合 A,

$$|P(A)| = 2^{|A|}.$$

• 证明设  $|A| = n \in \mathbb{N}$ 。 由 A 的 k 个元素组成的子集的数目是从 n 个元素中取 k 个的组合数

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

A 的有 0 个元素的子集只有  $\varnothing \subseteq A$ 。所以

$$|P(A)| = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = \sum_{k=0}^n C_n^k.$$

又因为

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k},$$

#### 9.6.2 幂集和笛卡尔积的基数

• 当 x = y = 1 时,得

$$2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k.$$

所以

$$|P(A)| = 2^n = 2^{|A|}.$$

• 定理 9.6.2 对有限集合 A 和 B,

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

# 基本运算的基数



- **定理 9.6.3** 对有限集合  $A_1$  和  $A_2$ , 有
  - $|A_1 \cup A_2| \le |A_1| + |A_2|$ ,
  - $|A_1 \cap A_2| \le \min(|A_1|, |A_2|)$ ,
  - $|A_1 A_2| \ge |A_1| |A_2|$ ,
  - $|A_1 \oplus A_2| = |A_1| + |A_2| 2|A_1 \cap A_2|$ .

下述定理通常称为包含排斥原理,它有更多的用途。

• 定理 9.6.4 对有限集合  $A_1$  和  $A_2$ , 有

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

- 证明
  - (1) 若  $A_1$  与  $A_2$  不相交,则  $A_1 \cap A_2 = \Phi$ ,而且  $|A_1 \cap A_2| = 0$ ,这时显然成立  $|A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2|$ 。
  - (2) 若  $A_1$  与  $A_2$  相交,则  $A_1 \cap A_2 \neq \Phi$ ,但有

$$|A_1| = |A_1 \cap -A_2| + |A_1 \cap A_2|,$$
  
 $|A_2| = |-A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|,$ 

此外

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1 \cap -A_2| + |-A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|,$$

所以

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ 臺 釣९○ 102/10

#### 例 1

在 10 名青年中有 5 名是工人,有 7 名是学生,其中有 3 名既是工人又是学生,问有几名既不是工人又不是学生?

设工人的集合是 A,学生的集合是 B。则有 |A|=5,|B|=7, $|A\cap B|=3$ ,又有  $|-A\cap -B|+|A\cup B|=10$ ,于是得

$$|-A \cap -B| = 10 - |A \cup B| = 10 - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$
  
= 1

所以有一名既不是工人又不是学生。

• 对 3 个有限集合 *A*<sub>1</sub>, *A*<sub>2</sub> 和 *A*<sub>3</sub>, 可以推广这个定理, 得到

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

◆ロ → ◆母 → ◆ き → ◆ き → り へ ○ 104/108

#### 例 2

30 位同学中,15 人加体育组,8 人参加音乐组,6 人参加美术组,其中 3 人同时参加三个组。问至少有多少人没有参加任何小组?设  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  分别表示体育组、音乐组、美术组成员的集合。则有

$$|A_1| = 15, |A_2| = 8, |A_3| = 6, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3.$$

因此

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 15 + 8 + 6 - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + 3$$

$$=32-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_3|$$

4□ > 4□ > 4□ > 4□ > 4□ > □
900 105/108

#### 例 2

 $\overline{\mathbf{m}} |A_1 \cap A_2| \ge |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3, |A_1 \cap A_3| \ge |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3, |A_2 \cap A_3| \ge |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3.$ 

所以  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \le 32 - 3 - 3 - 3 = 23$ .

至多 23 人参加小组, 所以至少 7 人不能参加任何小组。

• 这个定理可以推广到 n 个集合的情况。若  $n \in \mathbb{N}$  且 n > 1,  $A_1, A_2, \ldots, A_n$  是有 限集合,则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j| +$$

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

◆ロト ◆母 ト ◆ 差 ト ◆ 差 ト 章 り へ ○ 107/108

# 谢谢

