第十一章 函数

马汝辉 副研究员、博导
上海交通大学
2024 年 12 月

函数

上一章研究了关系的自反、传递、对称等性质，并针对这些性质研究了一些特殊的关系，如等价关系、偏序关系。这一章研究的各类函数是另外一些特殊的关系，这是从它们的单值性、定义域和值域的性质来讨论的。函数是一个基本的数学概念。通常的实函数是在实数集合上讨论的。这里推广了实函数概念，讨论在任意集合上的函数。

11.1.1 函数定义

定义 11.1.1

对集合 A 到集合 B 的关系 f，若满足下列条件：

1. 对任意的 $x \in \mathrm{dom}(f)$，存在唯一的 $y \in \mathrm{ran}(f)$，使 xfy 成立；
2. $\mathrm{dom}(f) = A$

则称 f 为从 A 到 B 的函数，或称 f 把 A 映射到 B（有的书称 f 为全函数、映射、变换）。

- 一个从 A 到 B 的函数 f，可以写成 $f: A \to B$。这时若 xfy，则可记作 $f: x \mapsto y$ 或 $f(x) = y$。
- 若 A 到 B 的关系 f 只满足条件 (1)，且有 $\mathrm{dom}(f) \subset A$，则称 f 为从 A 到 B 的部分函数（有的书上称 f 为函数）。

- 函数的两个条件可以写成

$$\begin{aligned}&(1)\quad (\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)((xfy_1 \wedge xfy_2) \to y_1 = y_2),\\&(2)\quad (\forall x)(x \in A \to (\exists y)(y \in B \wedge xfy)).\end{aligned}$$

- 函数的第一个条件是单值性，定义域中任一 x 与 B 中唯一的 y 有关系。因此可以用 $f(x)$ 表示这唯一的 y。第二个条件是 A 为定义域，A 中任一 x 都与 B 中某个 y 有关系。注意不能把单值性倒过来。对 A 到 B 的函数 f，当 x_1fy 且 x_2fy 成立时，不一定 $x_1 = x_2$。因此，函数的逆关系不一定是函数。
- 如果一个关系是函数，则它的关系矩阵中每行恰好有一个 1，其余为 0，它的关系图中每个 A 中的顶点恰好发出一条有向边。

例 1

对实数集 $\mathbb{R}$，$\mathbb{R}$ 上的关系 f 为

$$f = \{\langle x, y\rangle \mid y = x^3\}$$

f 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数，记作 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，并记作 $f : x \mapsto x^3$ 或 $f(x) = x^3$.

例 2

集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的两个关系

$$g=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$$

和

$$h=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$$

都不是从 A 到 A 的函数.
因为 g 没有单值性，即 $\langle 3,1\rangle\in g$ 且有 $\langle 3,2\rangle\in g$，而对关系 h，$\mathrm{dom}(h)=\{1,2\}\neq A$。但是，$h$ 是从 $\{1,2\}$ 到 A 的函数。

定义 11.1.2

对集合 A 和 B，从 A 到 B 的所有函数的集合记为 A_B（有的书记为 B^A）。于是，$A_B = \{f \mid f : A \to B\}$。

例 3

对 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$。从 A 到 B 的函数有 8 个：

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, a\rangle\}, \\
f_2 &= \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}, \\
f_3 &= \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle\}, \\
f_4 &= \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, b\rangle\}, \\
f_5 &= \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, a\rangle\},
\end{aligned}
$$

$$f_6 = \{\langle 1,b\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 3,b\rangle\},$$
$$f_7 = \{\langle 1,b\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,a\rangle\},$$
$$f_8 = \{\langle 1,b\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,b\rangle\}.$$

于是

$$A_B = \{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_8\}.$$

- 若 A 和 B 是有限集合，且 $|A| = m$，$|B| = n$，则 $|A_B| = n^m$。从 $\varnothing$ 到 $\varnothing$ 的函数只有 $f = \varnothing$，从 $\varnothing$ 到 B 的函数只有 $f = \varnothing$。若 $A \neq \varnothing$，从 A 到 $\varnothing$ 的函数不存在。因此，$\varnothing_\varnothing = \varnothing_B = \{\varnothing\}$，$A_\varnothing = \varnothing$（对 $A \neq \varnothing$）。

定义 11.1.3

设 $f: A \to B$，$A_1 \subseteq A$，定义 A_1 在 f 下的象 $f[A_1]$ 为

$$f[A_1] = \{y \mid (\exists x)(x \in A_1 \wedge y = f(x))\}.$$

把 $f[A]$ 称为函数的象。
设 $B_1 \subseteq B$，定义 B_1 在 f 下的完全原象 $f^{-1}[B_1]$ 为

$$f^{-1}[B_1] = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}.$$

注意，在上一章中 f^{-1} 表示 f 的逆关系。这个定义中的 $f^{-1}[B_1]$ 表示完全原象，可以认为其中的 f^{-1} 是 f 的逆关系。因为函数的逆关系不一定是函数，所以 f^{-1} 一般只表示逆关系，不是逆函数（除非特别说明）。

例 4

函数 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{当} x \text{ 为偶数} \\ \frac{x-1}{2}, & \text{当} x \text{ 为奇数} \end{cases}$$

则

$$f[\mathbb{N}] = \mathbb{N},$$

$$f[\{-1,0,1\}] = \{-1,0\},$$

$$f^{-1}[\{2,3\}] = \{4,5,6,7\}.$$

特别地

$$f[\varnothing] = f^{-1}[\varnothing] = \varnothing.$$

- 等价关系和函数都是特殊的关系．同样可以定义一些特殊的函数，它们是具有某种性质的函数，

定义 11.1.4

设 $f: A \to B$。

1. 若 $\mathrm{ran}(f) = B$，则称 f 是满射的，或称 f 是 A 到 B 上的；
2. 若对任意的 $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$，都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 是单射的，或内射的，或一对一的；
3. 若 f 是满射的又是单射的，则称 f 是双射的，或一对一 A 到 B 上的，简称双射。

如果 $f: A \to B$ 是满射的，则对任意的 $y \in B$，存在 $x \in A$，使 $f(x) = y$。如果 $f: A \to B$ 是单射的，则对任意的 $y \in \mathrm{ran}(f)$，存在唯一的 $x \in A$，使 $f(x) = y$。

例 5

函数 $f:\{1,2\}\to\{0\}$，定义为 $f(1)=f(2)=0$，是满射的，不是单射的。函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，定义为 $f(x)=2x$，是单射的，不是满射的。函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，定义为 $f(x)=x+1$，是双射的。
特别地，$\varnothing:\varnothing\to B$ 是单射的，$\varnothing:\varnothing\to\varnothing$ 是双射的。

- 给定两个集合 A 和 B，是否存在从 A 到 B 的双射函数？怎样构造从 A 到 B 的双射函数？这是两个很重要的问题。第一个问题在下一章讨论。下面举例说明第二个问题。

例 6

对下列的集合 A 和 B，分别构造从 A 到 B 的双射函数：

1. $A=\mathbb{R}, B=\mathbb{R}, \mathbb{R}$ 是实数集。
2. $A=\mathbb{R}, B=\mathbb{R}_{+}=\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x>0\}$。
3. $A=[0,1), B=\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 都是实数区间。
4. $A=\mathbb{N} \times \mathbb{N}, B=\mathbb{N}$。

解

1. 令 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=x$。
2. 令 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{+}, f(x)=e^{x}$。
3. 令 $f:[0,1) \rightarrow\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], f(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}$。

4. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是由自然数构成的所有有序对的集合。这些有序对可以排列在直角坐标系一个象限中，构成一个无限的点阵。如图 11.1.1 所示。构造要求的双射函数，就是在点阵中有序对与 $\mathbb{N}$ 的元素间建立一一对应，也就是把点阵中有序对排成一列并依次编号 $0,1,2,\cdots$。

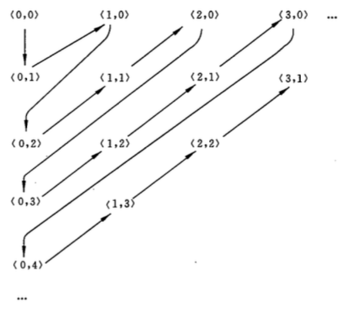

图: 11.1.1

在 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 中，元素的排列次序是：$\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 0,3\rangle,\ldots$。图中用箭头表示次序，这相当于 $f(\langle 0,0\rangle)=0$，$f(\langle 0,1\rangle)=1$，$f(\langle 1,0\rangle)=2$，$f(\langle 0,2\rangle)=3$，$\cdots$。

显然，$\langle m,n\rangle$ 所在的斜线上有 $m+n+1$ 个点。在此斜线上方，各行元素分别有 $1,2,\cdots,m+n$ 个，这些元素排在 $\langle m,n\rangle$ 以前。在此斜线上，m 个元素排在 $\langle m,n\rangle$ 以前。排在 $\langle m,n\rangle$ 以前的元素共有 $[1+2+\cdots+(m+n)]+m$ 个。于是，双射函数 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为

$$f(\langle m,n\rangle)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+m.$$

- 对无限集合 A，若存在从 A 到 $\mathbb{N}$ 的双射函数，就可仿照这种方法，把 A 中元素排成一个有序图形，按次序数遍 A 中元素。这就构造了从 A 到 $\mathbb{N}$ 的双射函数。

定义 11.1.5

设 $f: A \to B$，如果存在一个 $y \in B$，使得对所有的 $x \in A$，有 $f(x) = y$，即有 $f[A] = \{y\}$，则称 $f: A \to B$ 为常函数。

定义 11.1.6

A 上的恒等关系 $I_A: A \to A$ 称为恒等函数。于是，对任意的 $x \in A$，有

$$I_A(x) = x.$$

定义 11.1.7

对实数集 $\mathbb{R}$，设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，如果 $(x \leqslant y) \to (f(x) \leqslant f(y))$，则称 f 为单调递增的；如果 $(x < y) \to (f(x) < f(y))$，则称 f 为严格单调递增的。类似可定义单调递减和严格单调递减的函数。

定义 11.1.8

对集合 $A, n \in \mathbb{N}$，把函数 $f : A^n \to A$ 称为 A 上的 n 元运算。
运算是算术运算概念的推广。在代数结构课程中将对运算作深入研究。运算的例子有数字的运算，集合的运算，关系的运算，逻辑联结词是在 $\{T, F\}$ 上的运算。

定义 11.1.9

设 A, B, C 是集合，B_C 为从 B 到 C 的所有函数的集合，则 $F : A \to B_C$ 称为一个泛函（有时 $G : B_C \to A$ 称为一个泛函）。
泛函 F 也是函数，它把 A 的元素 a 映射到从 B 到 C 的函数 $f : B \to C$。即函数值 $F(a)$ 是函数 $f : B \to C$。

例 7

泛函 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\mathbb{R}}$, $F(a)=(f(x)=x+a)$。或写成 $F:a\mapsto[x\mapsto x+a]$。于是

- $F(2)$ 对应函数 $x\mapsto x+2$,
- $F(2)(3)=3+2=5$.
- $F(6)$ 对应函数 $x\mapsto x+6$,
- $F(6)(3)=3+6=9$.

泛函值 $F(2)$ 有双重含义：一方面表示 2 下 F 的函数值为 $F(2)$，另一方面这个值是一个函数 $F(2):\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(2):x\mapsto x+2$。

定义 11.1.10

设 E 是全集，对任意的 $A \subseteq E$，A 的特征函数 χ_A 定义为：

$$\chi_A : E \to \{0,1\}, \chi_A(a) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

例 8

设 $E = \{a,b,c\}, A = \{a,c\}$，则

$$\chi_A(a) = 1, \chi_A(b) = 0, \chi_A(c) = 1.$$

- 特征函数是集合的另一种表示方法。模糊集合论就是参照特征函数的思想，用隶属函数定义模糊集合。

定义 11.1.11

设 R 是 A 上的等价关系，令 $g: A \to A/R$，$g(a) = [a]_R$，则称 g 为从 A 到商集 A/R 的典型映射或自然映射。

例 9

设 $A = \{1,2,3\}$，R 是 A 上的等价关系，它诱导的等价类是 $\{1,2\}$，$\{3\}$ 则从 A 到 A/R 的自然映射 g 为

$$g: \{1,2,3\} \to \{\{1,2\},\{3\}\},$$

$$g(1) = \{1,2\}, g(2) = \{1,2\}, g(3) = \{3\}.$$

选择公理（形式 1）

对任意的关系 R，存在函数 f，使得 $f \subseteq R$ 且 $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(R)$。

- 选择公理是一个重要的数学公理，有时记作 AC。选择公理还有其他的等价形式，这里的形式最直观，最容易理解。
- 一般的关系 R 不是函数，因为 R 不是单值的。也就是对某些 $x \in \mathrm{dom}(R)$，有多于一个 $y_1, y_2, \ldots$，使 $y_1 \in \mathrm{ran}(R), y_2 \in \mathrm{ran}(R), \cdots$，且 $\langle x, y_1 \rangle \in R, \langle x, y_2 \rangle \in R, \cdots$。这时 x 有多个值 $y_1, y_2, \ldots$ 与之对应。为了构造函数 f，只要对任意的 $x \in \mathrm{dom}(R)$，从 $\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle, \cdots$ 中任取一个放入 f 中。则 f 是单值的，$f \subseteq R$，且有 $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(R)$。$f$ 是函数 $f : \mathrm{dom}(R) \to \mathrm{ran}(R)$。因为多个有序对中可任选其一，所以构造的 f 可以有多个。

例 10

设关系 $R = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle\}$，则 $f_1 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle\}$ 和 $f_2 = \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle\}$ 都是满足条件的函数。

11.2 函数的合成与函数的逆

函数是特殊的关系，所以关于关系合成与关系的逆的定理，都适用于函数. 下面讨论函数的一些特殊性质

11.2.1 函数的合成

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

定理 11.2.1

设 $g : A \to B, f : B \to C$, 则

1. $f \circ g$ 是函数 $f \circ g : A \to C$,
2. 对任意的 $x \in A$, 有 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

证明

1. 因为 $g : A \to B$, 则 $(\forall x)(x \in A \to (\exists y)(y \in B \wedge \langle x, y \rangle \in g))$. 又因 $f : B \to C$, 则 $(\forall y)(y \in B \to (\exists z)(z \in C \wedge \langle y, z \rangle \in f))$. 由任意的 $x \in A$, 存在 $y \in B$ 有 $\langle x, y \rangle \in g$, 对 $y \in B$ 存在 $z \in C$ 有 $\langle y, z \rangle \in f$, 因此对 $x \in A$ 存在 $z \in C$ 使 $\langle x, y \rangle \in g \wedge \langle y, z \rangle \in f$, 使 $\langle x, z \rangle \in f \circ g$. 所以 $\mathrm{dom}(f \circ g) = A$, 假设对任意的 $x \in A$, 存在 y_1 和 y_2, 使得 $\langle x, y_1 \rangle \in f \circ g$ 且 $\langle x, y_2 \rangle \in f \circ g$. 则 $(\exists t_1)(\exists t_2)((xgt_1 \wedge t_1 f y_1) \wedge (xgt_2 \wedge t_2 f y_2))$. 因为 g 是函数，则 $t_1 = t_2$, 又因 f 是函数，则 $y_1 = y_2$. 所以 $f \circ g$ 是函数.

❷ 对任意的 $x \in A$, 因为 $\langle x, g(x)\rangle \in g, \langle g(x), f(g(x))\rangle \in f$, 故 $\langle x, f(g(x))\rangle \in f \circ g$.
又因 $f \circ g$ 是函数，则可写为 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
函数的合成可以用图 11.2.1 表示. 从图中可见
$\mathrm{dom}(g) = A$, $\mathrm{ran}(g) \subseteq B = \mathrm{dom}(f)$, $\mathrm{ran}(f) \subseteq C$. 而
$\mathrm{dom}(f \circ g) = A$, $\mathrm{ran}(f \circ g) \subseteq C$.

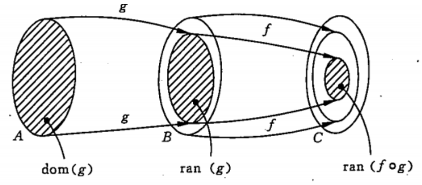

图: 11.2.1

定理 11.2.2

设 $g: A \to B, f: B \to C$, 则有

1. 若 f, g 是满射的，则 $f \circ g$ 是满射的，
2. 若 f, g 是单射的，则 $f \circ g$ 是单射的，
3. 若 f, g 是双射的，则 $f \circ g$ 是双射的。

证明

1. 对任意的 $z \in C$, 因为 f 是满射的，故 $\exists y \in B$, 使 $f(y) = z$. 对这个 $y \in B$, 因为 g 是满射的，故 $\exists x \in A$, 使 $g(x) = y$. 所以， $z = f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$, $f \circ g$ 是满射的。

2. 对任意的 $z \in \mathrm{ran}(f \circ g)$, 若存在 x_1, x_2, 使 $(f \circ g)(x_1) = z$ 且 $(f \circ g)(x_2) = z$. 则存在 y_1, y_2, 使 $x_1 g y_1 \wedge y_1 f z$ 且 $x_2 g y_2 \wedge y_2 f z$. 因为 f 是单射的，故 $y_1 = y_2$; 又因 g 是单射的，故 $x_1 = x_2$. 所以，$f \circ g$ 是单射的。
3. 由 (1)、(2) 得证。

这个定理的逆定理是否成立呢？请看下列定理。

定理 11.2.3

设 $g : A \to B, f : B \to C$, 则有

1. 若 $f \circ g$ 是满射的，则 f 是满射的，
2. 若 $f \circ g$ 是单射的，则 g 是单射的，
3. 若 $f \circ g$ 是双射的，则 f 是满射的，g 是单射的。

证明

1. 对任意的 $z \in C$, 因为 $f \circ g$ 是满射的，故 $\exists x \in A$, 使 $x(f \circ g)z$. 则 $\exists y \in B$, 使 $xgy \wedge yfz$. 则 $\exists y \in B$, 使 $f(y) = z$. f 是满射的。

2. 对任意的 $y \in \mathrm{ran}(g)$, 若存在 $x_1, x_2 \in A$, 使 $x_1 g y \wedge x_2 g y$, 即 $g(x_1) = y = g(x_2)$. 对这个 $y \in B$, (因 $\mathrm{ran}(g) \subseteq B$), 存在 $z \in C$, 使得 $f(y) = z$. 则 $f(g(x_1)) = z = f(g(x_2))$, 于是 $x_1(f \circ g)z \wedge x_2(f \circ g)z$. 因为 $f \circ g$ 是单射的，故 $x_1 = x_2$. 所以 g 是单射的。
3. 由 (1), (2) 得证。

注意，当 $f \circ g$ 是满射的，g 不一定是满射的；当 $f \circ g$ 是单射的，f 不一定是单射的。

例 1

设 $g: A \to B, f: B \to C$, 其中 $A=\{a\}, B=\{b,d\}, C=\{c\}$. 且 $g=\{<a,b>\}, f=\{<b,c>,<d,c>\}$, 则 $f\circ g=\{<a,c>\}$. $f\circ g$ 是满射的，但是 g 不是满射的。

例 2

设 $g: A \to B, f: B \to C$, 其中 $A=\{a\}, B=\{b,d\}, C=\{c\}$, 且 $g=\{<a,b>\}, f=\{<b,c>,<d,c>\}$, 则 $f\circ g=\{<a,c>\}$, $f\circ g$ 是单射的，但是 f 不是单射的。

定理 11.2.4

设 $f: A \to B$, 则

$$f = f \circ I_A = I_B \circ f$$

证明留作思考题。

11.2.2 函数的逆

一个关系的逆不一定是函数，一个函数的逆也不一定是函数.

例 3

对 $A=\{a,b,c\}$. A 上的关系 R 为

$$R=\{<a,b>,<a,c>,<a,a>\},$$

从 A 到 A 的函数 f 为

$$f=\{<a,c>,<b,c>,<c,a>\}.$$

则它们的逆为

$$R^{-1}=\{<b,a>,<c,a>,<a,a>\}\text{是}A\text{到}A\text{的函数},$$

$$f^{-1}=\{<c,a>,<c,b>,<a,c>\}\text{不是}A\text{到}A\text{的函数。}$$

定理 11.2.5

若 $f : A \to B$ 是双射的，则 f^{-1} 是函数 $f^{-1} : B \to A$.

证明：对任意的 $y \in B$, 因为 f 是双射的，所以存在 $x \in A$, 使 $\langle x, y\rangle \in f$, $\langle y, x\rangle \in f^{-1}$. 所以，$\mathrm{dom}(f^{-1}) = B$.
对任意的 $y \in B$, 若存在 $x_1, x_2 \in A$, 使得 $\langle y, x_1\rangle \in f^{-1}$ 且 $\langle y, x_2\rangle \in f^{-1}$, 则 $\langle x_1, y\rangle \in f$ 且 $\langle x_2, y\rangle \in f$. 因为 f 是双射的，故 $x_1 = x_2$. 所以，f^{-1} 是函数 $f^{-1} : B \to A$.

定义 11.2.1

设 $f: A \to B$ 是双射的，则称 $f^{-1}: B \to A$ 为 f 的反函数。

定理 11.2.6

若 $f: A \to B$ 是双射的，则 $f^{-1}: B \to A$ 是双射的。

证明：对任意的 $x \in A$, 因为 f 是从 A 到 B 的函数，故存在 $y \in B$, 使 $\langle x, y \rangle \in f$, $\langle y, x \rangle \in f^{-1}$. 所以，$f^{-1}$ 是满射的。

对任意的 $x \in A$, 若存在 $y_1, y_2 \in B$, 使得 $\langle y_1, x \rangle \in f^{-1}$ 且 $\langle y_2, x \rangle \in f^{-1}$, 则有 $\langle x, y_1 \rangle \in f$ 且 $\langle x, y_2 \rangle \in f$. 因为 f 是函数，故 $y_1 = y_2$. 所以，f^{-1} 是单射的，它是双射的。

例 4

$f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$, $f(x)=\sin x$ 是双射函数。所以，

$$f^{-1}:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\quad f^{-1}(y)=\arcsin y$$

是 f 的反函数。
对实数集合 R, 正实数集合 R_+, $g:R\to R_+$, $g(x)=2^x$ 是双射的。所以，

$$g^{-1}:R_+\to R,\quad g^{-1}(y)=\log_2 y$$

是 g 的反函数。

定理 11.2.7

若 $f : A \to B$ 是双射的，则对任意的 $x \in A$, 有 $f^{-1}(f(x)) = x$, 对任意的 $y \in B$, 有 $f(f^{-1}(y)) = y$。

证明：对任意的 $x \in A$，因为 f 是函数，则有 $\langle x, f(x)\rangle \in f$，有 $\langle f(x), x\rangle \in f^{-1}$，因为 f^{-1} 是函数，则可写为 $f^{-1}(f(x)) = x$。
对任意的 $y \in B$，类似可证 $f(f^{-1}(y)) = y$。
由定理，对任意的 $x \in A$，$f^{-1}(f(x)) = x$，则 $(f^{-1} \circ f)(x) = x$，于是 $f^{-1} \circ f = I_A$。同理也有，$f \circ f^{-1} = I_B$。对非双射的函数 $f : A \to B$，是否存在函数 $g : B \to A$ 使 $g \circ f = I_A$ 呢？是否存在函数 $h : B \to A$ 使 $f \circ h = I_B$ 呢？

定义 11.2.2

设 $f: A \to B, g: B \to A$, 如果 $g \circ f = I_A$, 则称 g 为 f 的左逆; 如果 $f \circ g = I_B$, 则称 g 为 f 的右逆。

例 5

设

$$f_1 : \{a, b\} \to \{0, 1, 2\},$$

$$f_2 : \{a, b, c\} \to \{0, 1\},$$

$$f_3 : \{a, b, c\} \to \{0, 1, 2\},$$

如图 11.2.2 所示，则 f_1 存在左逆 g_1, 不存在右逆。f_2 存在右逆 h_2, 不存在左逆。f_3 即存在左逆 g_3, 又存在右逆 h_3, 且 $g_3 = h_3 = f_3^{-1}$. 如图 11.2.2 所示。

11.2.2 函数的逆

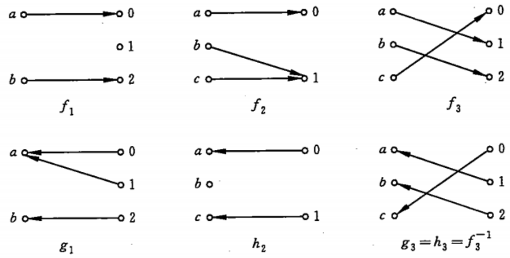

图: 11.2.2

定理 11.2.8

设 $f: A \to B, A \neq \Phi$, 则

1. f 存在左逆，当且仅当 f 是单射的；
2. f 存在右逆，当且仅当 f 是满射的；
3. f 存在左逆又存在右逆，当且仅当 f 是双射的；
4. 若 f 是双射的，则 f 的左逆等于右逆。

证明

1. 先证必要性。设存在 $x_1, x_2 \in A$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 设 g 为 f 的左逆，则

$$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2.$$

所以，f 是单射的。

再证充分性。因为 f 是单射的，所以 $f: A \to \mathrm{ran}(f)$ 是双射的，则 $f^{-1}: \mathrm{ran}(f) \to A$ 也是双射的。已知 $A \neq \Phi$, 则 $\exists a \in A$, 构造 $g: B \to A$ 为

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & \text{当} y \in \mathrm{ran}(f) \\ a, & \text{当} y \in B - \mathrm{ran}(f) \end{cases}$$

显然，g 是函数 $g: B \to A$. 对任一 $x \in A$, 有 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$, 所以，$g \circ f = I_A$, g 的构造如图，实箭头表示 g, 虚箭头表示 f.

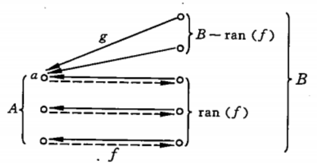

图: 11.2.3

❷ 先证必要性。设 f 的右逆为 $h : B \to A$, 有 $f \circ h = I_B$. 则对任意的 $y \in B$, 存在 $x \in A$, 使 $h(y) = x$, 则

$$y = I_B(y) = (f \circ h)(y) = f(h(y)) = f(x),$$

所以，f 是满射的。

再证充分性。(注意，不能取 $h = f^{-1}$, 因为 f^{-1} 不一定是函数，只是关系。) 因为 f 是满射的，所以 $\text{ran}(f) = \text{dom}(f^{-1}) = B$. 依据选择公理，对关系 f^{-1}, 存在函数 $h \subseteq f^{-1}$, 且有 $\text{dom}(h) = \text{dom}(f^{-1}) = B$, 且 $\text{ran}(h) \subseteq \text{ran}(f^{-1}) = A$. 即 $h : B \to A$, 对任意的 $y \in B$, 存在 $x \in A$, 使 $h(y) = x$ 且 $f(x) = y$. 则

$$(f \circ h)(y) = f(h(y)) = f(x) = y.$$

所以，$f \circ h = I_B$, h 是 f 的右逆。h 的构造如图 11.2.4，实箭头表示 h, 虚箭头表示 f.

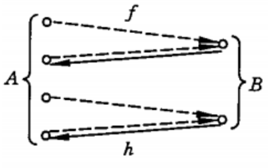

图: 11.2.4

1. 由 (1), (2) 得证.
2. 设 f 的左逆为 $g : B \to A$, 右逆为 $h : B \to A$, 则 $g \circ f = I_A$, $f \circ h = I_B$.

$$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I_A \circ h = h$$

所以，$g = h$.

谢谢