

2024 年秋离散数学

数理逻辑部分习题

一. 命题逻辑的基本概念

1. 对一个可满足的命题公式, 其否定 ____ 。
A. 不是重言的 B. 不是可满足的 C. 还是可满足的 D. 不是矛盾的
2. 命题公式 $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$ 具有 ____ 个使其为真的指派。
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
3. 命题公式 $P \vee ((Q \vee R) \wedge S)$ 的波兰表达式是 ____ 。
4. 设 P : 天下雨, Q : 他在室内运动, 则命题“除非天下雨, 否则他不在室内运动”可转化为 ____ 。
5. 请写出一个满足以下要求的命题公式并写出求解过程。
 1. 具有 P, Q, R 三个变元
 2. 只有两个联结词(可使用 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$)
 3. 恰好具有五个使其为真的指派
6. 命题公式 $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$ 是 ____ 。
A. 矛盾时 B. 蕴含式 C. 重言式 D. 等值式
7. 下面哪个命题公式是重言式? ____
A. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ B. $(P \wedge Q) \rightarrow P$
C. $(\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge \neg Q)$ D. $\neg(P \vee Q)$
8. 设 P : “你陪伴我”, Q : “你代我叫车子”, R : “我将出去”。则命题“除非你陪伴我或代我叫车子, 否则我将不出去”可写成命题演算公式: ____ 。
9. 设 p, r 为真命题, q, s 为假命题, 则复合命题 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg r \rightarrow s)$ 的真值为 ____ 。

二. 命题逻辑的等值和推理演算

10. 下面有 ____ 个命题联结词集合是完备集。

- $\{\neg, \wedge\}$
- $\{\neg, \vee\}$
- $\{\neg, \rightarrow\}$
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$
- $\{\vee, \rightarrow\}$
- $\{\wedge, \rightarrow\}$
- $\{\vee, \uparrow\}$

• $\{\downarrow\}$

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

11. 下列推理式正确的是 ____。

A. $(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \vee Q) \rightarrow R$

B. $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R)$

C. $P \vee Q \Rightarrow P$

D. $(P \vee Q) \rightarrow (P \vee R) \Rightarrow Q \rightarrow R$

12. 命题公式 $G = \neg P \rightarrow \neg Q \wedge R$ 的主析取范式是 ____。

13. $P \rightarrow Q \vee R \rightarrow S$ 的对偶式为 ____。

14. 证明下列推理关系:如果李华在光明中学上学,那么他不是初中生,就是高中生。如果李华是初中生,那么他需要参加中考。如果李华是高中生,那么他经常给外国的友人写信。如果李华经常给外国的友人写信,那么他的英文写作能力很强。李华的英文写作能力不强。从而知:如果李华在光明中学上学,那么他需要参加中考。

15. 下面哪一组命题公式是等值的?

A. $\neg P \wedge \neg Q, P \vee Q$

B. $A \rightarrow (B \rightarrow A), \neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

C. $Q \rightarrow (P \vee Q), \neg Q \wedge (P \vee Q)$

D. $\neg A \vee (A \wedge B), B$

16. 命题公式 $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$ 的主析取范式中含极小项的个数为 ____。

A. 8

B. 3

C. 5

D. 0

17. 逻辑联结词或非 \downarrow 可以定义为: $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$ 。将公式 $\neg(x \vee y) \wedge z$ 转换成只用 \downarrow 表示的公式 ____。

18. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ 的主合取范式是 ____。

19. 任用一种推理方法证明: $(a \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \wedge (\delta \rightarrow \neg \gamma) \Rightarrow \neg(a \wedge \delta)$

20. 已知命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q) \wedge R$, 则 G 的主析取范式是 ____。

21. $P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$, 用或非联结词表示出 $P \rightarrow Q$ 为 ____。

22. 设命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q), H = P \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$, 则 G 与 H 的关系是 ____。

A. $G \Rightarrow H$

B. $H \Rightarrow G$

C. $G = H$

D. 以上都不是

23. 下面 4 个推理定律中, 不正确的是 ____。

A. $A \Rightarrow (A \vee B)$

B. $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$

C. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$

D. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

24. 设 A, B 都是命题公式, 则 $A \rightarrow B$ 为可满足式是 $A \Rightarrow B$ 的 ____。

A. 充分而非必要条件

B. 必要而非充分条件

C. 充分必要条件

D. 既非充分也非必要条件

25. 设命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q) \vee (Q \wedge (\neg P \rightarrow R))$, 求 G 的主析取范式。

三. 谓词逻辑的基本概念

26. 若个体域为整数集合, 下列公式中 ____ 不是命题。

- A. $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = x)$ B. $(\forall x)(\exists y)(x \cdot y = 1)$
C. $(\forall x)(x \cdot y = x)$ D. $(\exists x)(\exists y)(x \cdot y = 2)$

27. 设个体域 $D = \{a, b\}$, 则公式 $(\exists x)(F(x) \wedge G(x))$ 消去量词后可表示为 ____。

- A. $(F(a) \wedge F(b)) \vee (G(a) \wedge G(b))$ B. $(F(a) \vee F(b)) \wedge (G(a) \vee G(b))$
C. $(F(a) \wedge G(a)) \vee (F(b) \wedge G(b))$ D. $(F(a) \vee G(a)) \wedge (F(b) \vee G(b))$

28. 设 $P(x, y)$ 表示 $x < y$ 。当个体域为 ____ 时, 公式 $(\forall x)(\exists y)P(y, x)$ 不是普遍有效的。

- A. 自然数集 B. 整数集 C. 有理数集 D. 实数集

29. 求公式 $(\forall x)(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a)$ 的真值为 ____, 其中 $P: 6 > 3$, $Q(x): x \leq 3$, $R(x): x > 3$, 而 $a = 3$, 论域为 $\{-2, 3, 6\}$ 。

30. 公式 $(\forall x)((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\exists y)R(y)) \wedge S(z)$ 的自由变元是 ____, 全称量词的辖域为 ____。

31. 设 $A(x): x$ 是人, $B(x): x$ 犯错误, 命题“没有人不犯错误”符号化为 ____。

- A. $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ B. $\neg(\exists x)(A(x) \rightarrow \neg B(x))$
C. $\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$ D. $\neg(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$

32. 设 $R(x)$ 表示 x 是实数, $E(x, y)$ 表示 $x = y$, 则语句“对所有的实数 x , 都存在实数 y , 使得 $x = y$ ”的符号化为 ____。

33. 公式 $(\exists x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$ ____ (是/不是) 普遍有效的。

34. 公式 $\neg((\forall x)F(x) \rightarrow (\exists y)G(y)) \wedge (\exists y)G(y)$ ____ (是/不是) 不可满足的。

35. 设 I 是如下一个解释: $D = \{a, b\}$, $P(a, a) = 1$, $P(a, b) = 0$, $P(b, a) = 1$, $P(b, b) = 0$, 则在解释 I 下真值为 1 的公式是 ____。

- A. (A) $\exists x \exists y P(x, y)$ B. (B) $\forall x \forall y P(x, y)$ C. (C) $\forall x P(x, x)$ D. (D) $\forall x \exists y P(x, y)$

36. 下列描述中正确的是 ____。

- A. 不是所有谓词逻辑公式都能化成 Skolem 标准形
B. 把谓词公式化为前束范式时对于量词的次序排列有要求
C. 每个谓词公式都能化成唯一的前束范式
D. 这些说法都不对

四. 谓词逻辑的等值和推理演算

37. 下面推理形式中正确的是 ____。其中 p, q 是和 x 无关的命题变项, 论域不为空。

A. $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y))$

B. $((\forall x)P(x)) \rightarrow q \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow q)$

C. $(\forall x)(p \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (p \rightarrow (\exists x)Q(x))$

D. $((\exists x)P(x) \wedge (\exists y)Q(y)) \Rightarrow ((\exists x)(P(x) \wedge Q(x)))$

38. 一个谓词公式的 Skolem 标准形是 $(\forall x)(P(x) \vee \neg Q(a, x))$, 那么这个公式本身是 (填可满足、不可满足或者不确定): ____。

39. 任用一种推理方法证明 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \wedge (\exists x)(\neg P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \Rightarrow (\exists x)(\neg R(x))$

40. 求公式 $((\forall x)(\exists y)(P(x, y) \rightarrow Q(y))) \rightarrow (\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists u)(\forall v)L(x, u, v))$ 的前束范式和 Skolem 标准形。

41. 下列各式哪个不正确?

A. $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

B. $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

C. $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

D. $(\forall x)(P(x) \vee q) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee q$

42. 写出下列公式的前束范式 $(\exists x)(\forall y)(P(x, y)) \rightarrow (\exists z)(Q(z) \rightarrow R(z))$

43. 任用一种推理方法证明 $\exists x(R(x) \wedge W(x)), (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(W(x) \wedge \neg P(x))$

44. 设一阶逻辑公式 $G = \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$, 则 G 的前束范式是 ____。

45. 设谓词的论域为 $\{a, b\}$, 将表达式 $\forall xR(x) \rightarrow \exists xS(x)$ 中量词消去, 写成与之对应的命题公式是 ____。

46. 下列等值式不正确的是 ____。

A. $\neg(\forall x)A = (\exists x)\neg A$

B. $(\forall x)(B \rightarrow A(x)) = B \rightarrow (\forall x)A(x)$

C. $(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) = (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$

D. $(\forall x)(\forall y)(A(x) \rightarrow B(y)) = (\exists x)A(x) \rightarrow (\forall y)B(y)$

47. 求公式 $((\forall x)(\exists y)(P(x, y) \rightarrow Q(y))) \rightarrow (\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists u)(\forall v)L(x, u, v))$ 的前束范式和 Skolem 标准形。