2024 年秋离散数学

集合论复习题

一. 9.1 集合的概念和表示方法

1. 以下 $\underline{\text{ C }}$ 不是集合?

   A. $\phi \times P(\phi)$ (P 表示幂集运算)

   B. $\{x \mid x$ 是整数且$|x|$ 是素数$\}$

   C. $\{x \mid x$ 是包含 1 的集合$\}$

   D. $\{x \mid x$ 包含 1 且$x \subseteq R\}$

二. 9.3 集合的运算

2. 以下各项中正确的选项为 $\underline{\text{ B }}$

   A. $\phi \cup \{\phi\} = \phi$

   B. $[\phi, \{\phi\}] - \{\{\phi\}\} = \{\phi\}$

   C. $\{\phi, \{\phi\}\} - \{\phi\} = \{\phi, \{\phi\}\}$

   D. $\{\phi, \{\phi\}\} - \phi = \{\{\phi\}\}$

三. 9.4 集合的图形表示法

3. 对 24 名科技人员进行掌握外语情况的调查, 其统计资料如下: 会说英语、日语、德语、法语的人数分别是 13、5、10 和 9。其中同时会说英语、日语的人数为 2。同时会说英语、德语或同时会说英语、法语或同时会说德语、法语两种语言的人数均为 4。会说日语的人既不会说法语也不会说德语。则同时会说英语、德语、法语的人数为 $\underline{\text{ 1 }}$

四. 9.5 集合运算的性质和证明

4. $A \cup (B \cap C)$ 与 $\underline{\text{ B }}$ 不恒等

   A. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

   B. $((A - B) - C) \cup (B \cap C)$

   C. $(A - B) \cup (B \cap C) \cup (A - C)$

   D. $A \cup (B - (B \oplus C))$

5. 假设 $A \subseteq B$, 以下 $\underline{\text{ B }}$ 不一定成立?

   A. $UA \subseteq UB$

   B. $\cap A \subseteq \cap B$

   C. $P(A) \subseteq P(B)$

   D. $A - B \subseteq B - A$

五. 9.6 有限集合的基数

6. 对于有限集合 A、B, $P(P(A) \times B)$ 基数是 $\underline{2^{|B| \cdot 2^{|A|}}}$

六. 9.7 集合论公理系统

7. 证明: $A \times A \in P(P(P(A)))$

   证明: (根据定义证明)

$$A \times A = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A\} = \{\{x, y\}, \{x\} \mid x, y \in A\}$$

$$\{x\} \in P(A), \{x,y\} \in P(A)$$

$$\Rightarrow \{\{x\},\{x,y\}\} \subseteq P(A)$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle \subseteq P(A)$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in P(P(A))$$

$$\Rightarrow A \times A \subseteq P(P(A))$$

$$\Rightarrow A \times A \in P(P(P(A)))$$

8. 已知 $A=\{\phi,\{\phi\}\}$, 则 $A\times P(A)=$ $\underline{\{\langle\phi,\phi\rangle,\langle\phi,\{\phi\}\rangle,\langle\phi,\{\{\phi\}\}\rangle,\langle\phi,\{\phi,\{\phi\}\}\rangle,\langle\{\phi\},\phi\rangle,\langle\{\phi\},\{\phi\}\rangle,\langle\{\phi\},\{\{\phi\}\}\rangle,\langle\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\rangle\}}$

七. 10.1 二元关系

9. 设 A 是 n 个元素的集合, 则 A 中的所有不同关系的总数是 $\underline{2^{n^2}}$

八. 10.3 关系的逆、合成、限制和象

10. 给定三个关系 R_1, R_2, R_3, 如果下面等式所涉及的运算都有意义, 那么不正确的等式是 $\underline{\text{C}}$

    A. $R_1\circ(R_2\cup R_3)=R_1\circ R_2\cup R_1\circ R_3$

    B. $(R_1\circ R_2)\circ R_3=R_1\circ(R_2\circ R_3)$

    C. $R_1\circ(R_2\cap R_3)=R_1\circ R_2\cap R_1\circ R_3$

    D. $(R_1\circ R_2)^{-1}=R_2^{-1}\circ R_1^{-1}$

九. 10.5 关系的闭包

11. 给定 $A=\{1,2,3,4\}$ 和 A 上的关系 $R=\{\langle1,3\rangle,\langle1,4\rangle,\langle2,3\rangle,\langle2,4\rangle,\langle3,4\rangle\}$。求: R 的自反闭包、对称闭包及传递闭包的关系矩阵。

$$A=\{1,2,3,4\}$$

$$R=\{\langle1,3\rangle,\langle1,4\rangle,\langle2,3\rangle,\langle2,4\rangle,\langle3,4\rangle\}$$

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$r(R)=R\cup R^0=R\cup I_A$$

$$M(r(R))=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$S(R)=R\cup R^{-1}$$

$$M(S(R))=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

由于 R 本身是传递的, $M(t(R))=M(R)$

12. 设 $A=\{a,b,c,d\}$ 中的关系 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$, 则:

(1) 用 $M(R)$ 的幂求 R^2,R^3;

(2) 求最小的自然数 m,n $(m<n)$, 使得 $R^m=R^n$;

(3) 求出关系 R 的自反、对称且传递的闭包, 请写出详细步骤.

(1)

$$A=\{a,b,c,d\}$$

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$R^2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle\}$$

$$M(R^3)=M(R^2\circ R)$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$R^3=\{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$$

(2)

$$M(R^4)=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$R^2=R^4\Rightarrow m=2,n=4$$

(3) 自反闭包 $r(R)=R\cup I_A=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$

对称闭包 $S(R)=R\cup R^{-1}=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,c\rangle\}$

传递闭包 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \ldots$

$$M(t(R)) = M(R \cup R^2 \cup R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$t(R) = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,d\rangle\}$$

先证明自反性:

$$\langle x,x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in I_A \cup R \Rightarrow xSx \text{ 得证.}$$

再证明对称性:

$$xSy \Leftrightarrow xRy \vee xI_Ay \Leftrightarrow yRx \vee yI_Ax \Leftrightarrow ySx$$

最后是传递性:

$$(xSy) \wedge (ySz)$$

$$\Leftrightarrow (xI_Ay \vee xRy) \wedge (yI_Az \vee yRz)$$

$$\Leftrightarrow (xI_Ay \wedge yI_Az) \vee (xI_Ay \wedge yRz) \vee (xRy \wedge yI_Az) \vee (xRy \wedge yRz)$$

$$\Leftrightarrow (xI_Az) \vee (xRz) \vee (xRz) \vee (xR^2z)$$

$$\Rightarrow xSz$$

十. 10.6 等价关系和划分

13. 集合 $A = \{1,2,3,4\}$ 上的等价关系的个数为 __15__

14. 设 R 是 A 中的对称关系, 且 $R^2 \subseteq R$, 证明: $S = I_A \cup R$ 是 A 上的等价关系

    证明:

- 自反性 $I_A \subseteq S$
- 对称性(已知)
- 传递性

$$\text{若}\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in R$$

$$\text{则有}\langle a,c\rangle \in R^2 \subseteq R, \text{所以}\langle a,c\rangle \in R.$$

十一. 10.8 偏序关系

15. 下面四个关系中, A 是拟序关系?

A. R 中的 “ $>$ ” 关系

B. $N-\{0\}$ 中的整除关系

C. $N-\{0\}$ 中的互素关系

D. $R=\{\langle x,y\rangle|(x-y)$ 被 5 整除, $x,y\in\mathbb{Z}\}$

十二. 10.6,10.7,10.8 等价关系和划分、相容关系和覆盖、偏序关系

16. 设 R 是 A 中的一个关系, $I_A\subseteq R$, 若有 $\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle a,c\rangle\in R\Rightarrow\langle b,c\rangle\in R$, 则下列说法最准确的是: A

A. R 是等价关系　　B. R 是相容关系　　C. R 是偏序关系　　D. R 是拟序关系

17. 若 R_1,R_2 均为 A 中的关系, 下面结论正确的是 B

A. 若 R_1,R_2 均为对称关系, 则 $R_1\circ R_2$ 为对称关系

B. 若 R_1 是偏序关系, 则 R_1^{-1} 也是偏序关系

C. $t(R_1)\cup t(R_2)=t(R_1\cup R_2)$

D. $st(R_1)=ts(R_1)$

18. 设 R 是 A 中的对称关系, 且 $R^2\subseteq R$, 则 $S=I_A\cup R$ 是 A 上 B

A. 相容关系　　B. 等价关系　　C. 偏序关系　　D. 拟序关系

十三. 11.1 函数和选择公理

19. 从集合 $A=\{a,b\}$ 到 $B=\{1,2,3\}$ 的满射函数有 0 个

20. 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-x^2+x$ 是: C

A. 满射但是不单射的　　B. 单射但是不满射的

C. 双射的　　D. 既不是满射也不是单射的

十四. 11.2 函数的合成与函数的逆

21. 设 f,g 是函数。若 g 不是单射的, 则 A

A. $f\circ g$ 不是单射的　　B. $g\circ f$ 不是单射的　　C. A, B 都不对　　D. 不一定

22. 设 f 是集合 A 到集合 B 的关系, 则 D

A. 若 f 是函数, 则 f^{-1} 也是函数　　B. 若 f^{-1} 是函数, 则 f 也是函数

C. 若 f 不是函数, 则 f^{-1} 也不是函数　　D. 都不对

23. 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1$ 与 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(y)=y-1$, 则函数的合成 $h=f\circ g$ 为 __A__

A. $h(x)=x$

B. $h(x)=x^2-1$

C. $h(x,y)=(x+1)(y-1)$

D. $h(x)=x^2+x-1$

24. 若函数 $f:A\to B$ 是双射的, 则 f 的左逆__等于__右逆(等于, 不等于)

十五. 11.3 函数的性质

25. 设 $f:A\to B, g:C\to D, f\subseteq g, C\subseteq A$, 证明 $f=g$

证明:

$$\forall\langle x,y\rangle\in g,\ 有x\in C,\ 由C\subseteq A,\ 则x\in A,$$

$$那么\exists y_0\ 使得f(x)=y_0\ 即\langle x,y_0\rangle\in f$$

$$又由f\subseteq g\ 则\langle x,y_0\rangle\in g$$

$$由函数定义易知y=y_0\ 因此\langle x,y\rangle\in f$$

$$则g\subseteq f, 所以f=g$$