第十章 关系

马汝辉 副研究员、博导
上海交通大学
2024 年 12 月

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

关系

关系是在集合上定义的一个常用的概念。例如，在自然数之间可以定义相等关系和小于关系，在命题公式之间可以定义等价关系和永真蕴涵关系，在集合 A 的各子集之间可以定义相等关系和包含关系。此外，在学生和课程之间存在选课关系，在课程表上反映了课程、班级、教师、教室、时间等之间的关系。关系就是联系，也就是映射。在数据库的一种重要类型关系数据库中保存了各数据项之间的关系，关系数据库中的数据结构就是按照本章所定义的关系设计的。

10.1.1 二元关系的定义

定义 10.1.1

对集合 A 和 B，$A \times B$ 的任一子集称为 A 到 B 的一个二元关系，一般记作 R。若 $\langle x, y\rangle \in R$，可记作 xRy；若 $\langle x, y\rangle \notin R$，可记作 $x\not{R}y$。在 $A = B$ 时，$A \times A$ 的任一子集称为 A 上的一个二元关系。二元关系可简称关系。
从形式上说，二元关系是笛卡儿积的子集，换句话说，它是有序对的集合。从语义上说，二元关系是集合 A 和 B 元素之间的联系。从下面的例子可以看出这种联系。

例 1

设 $A=\{0,1\}, B=\{a,b\}$，则

$$R_1=\{\langle 0,a\rangle\}$$
$$R_2=\{\langle 0,a\rangle,\langle 0,b\rangle,\langle 1,a\rangle\}$$

是 A 到 B 的两个二元关系。

$$R_3=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle\}$$
$$R_4=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\}$$

是 A 上的两个二元关系。

例 2

设 $X = \{1, 2, 3\}$，定义 X 上的关系 D_X 和 L_X 为

$$D_X = \{\langle x, y\rangle \mid x \in X \wedge y \in X \wedge x \text{ 整除} y\}$$
$$L_X = \{\langle x, y\rangle \mid x \in X \wedge y \in X \wedge x \leq y\}$$

于是，D_X 是

$$D_X = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$$

L_X 关系是

$$L_X = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$$

例 3

对任意的集合 A，在 $P(A)$ 上的包含关系 R_1 和真包含关系 R_2 定义为

$$R_1 = \{\langle x, y\rangle \mid x \in P(A) \wedge y \in P(A) \wedge x \subseteq y\}$$
$$R_2 = \{\langle x, y\rangle \mid x \in P(A) \wedge y \in P(A) \wedge x \subset y\}$$

若 $A = \{\emptyset\}$，则 $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$，$P(A)$ 上的 R_1 和 R_2 是

$$R_1 = \{\langle\emptyset, \emptyset\rangle, \langle\emptyset, \{\emptyset\}\rangle, \langle\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\rangle\}$$
$$R_2 = \{\langle\emptyset, \{\emptyset\}\rangle\}$$

n 元关系

二元关系是二元组的集合。推广这个概念，可以用 n 元组的集合定义 n 元关系。

定义 10.1.2

若 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n > 1$，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 n 个集合，则 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 的任一子集称为从 A_1 到 A_n 上的一个 n 元关系。

10.1.2 特殊的关系

下面定义三个 A 上的特殊的关系。

定义 10.1.3

对任意的集合 A:

1. A 上的恒等关系 I_A 定义为
$$I_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\},$$
2. A 上的全域关系（全关系）E_A 定义为
$$E_A = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \land y \in A\},$$
3. $\emptyset$ 是 A 上的空关系。

例 4

设 $A=\{a,b\}$，则

$$I_A=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle\},$$

$$E_A=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}.$$

10.1.3 定义域和值域

定义 10.1.4

对 A 到 B 的一个关系 R，可以定义

1. R 的定义域 dom(R) 为 $\text{dom}(R) = \{x \mid (\exists y)(\langle x, y\rangle \in R)\}$
2. R 的值域 ran(R) 为 $\text{ran}(R) = \{y \mid (\exists x)(\langle x, y\rangle \in R)\}$
3. R 的域 fld(R) 为 $\text{fld}(R) = \text{dom}(R) \cup \text{ran}(R)$

例 5

设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d\}$，A 到 B 的关系 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle\}$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(R)&=\{a,b\},\\ \mathrm{ran}(R)&=\{b,c,d\},\\ \mathrm{fld}(R)&=\{a,b,c,d\}.\end{aligned}$$

定理 10.1.1

对 A 到 B 的关系 R，如果 $\langle x, y\rangle \in R$，则 $x \in \bigcup\bigcup R$，$y \in \bigcup\bigcup R$。

证明：已知 $\langle x, y\rangle \in R$，即 $\{\{x\},\{x,y\}\} \in R$。因 $\{x,y\}$ 是 R 的元素的元素，故 $\{x,y\} \in \bigcup R$。因 x 和 y 是 $\bigcup R$ 的元素的元素，故 $x \in \bigcup\bigcup R$，$y \in \bigcup\bigcup R$。

定理 10.1.2

对 A 到 B 的关系 R，则 $\mathrm{fld}(R) = \bigcup\bigcup R$。

证明：对任意的 x，若 $x \in \mathrm{fld}(R)$，则 $x \in \mathrm{dom}(R)$ 或 $x \in \mathrm{ran}(R)$。则存在 y，使 $\langle x, y\rangle \in R$ 或 $\langle y, x\rangle \in R$。这时都有 $x \in \bigcup\bigcup R$。
对任意的 t，若 $t \in \bigcup\bigcup R$。因为 R 的元素的形式是 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$，所以必存在 u，使

$$\{\{t\}, \{t, u\}\} \in R$$

或

$$\{\{u\}, \{u, t\}\} \in R.$$

也就是 $t \in \mathrm{fld}(R)$。

10.2 关系矩阵和关系图

描述关系的方法有三种：集合表达式、关系矩阵和关系图，关系的定义使用了集合表达式，这一节介绍后两种方法，对有限集合上的关系，采用关系矩阵和关系图的方法，不仅使分析更加方便，而且有利于使用计算机处理。

10.2.1 关系矩阵

定义 10.2.1

设集合 $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\},Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$。

1. 若 R 是 X 到 Y 的一个关系，则 R 的关系矩阵是 $m\times n$ 的矩阵

$$\mathbf{M}(R)=(r_{ij})_{m\times n}$$

矩阵元素是 r_{ij}，且

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当}\langle x_i,y_j\rangle\in R\\ 0, & \text{当}\langle x_i,y_j\rangle\notin R\end{cases}$$

其中 $1\leq i\leq m$，$1\leq j\leq n$

❷ 若 R 是 X 上的一个关系，则 R 的关系矩阵是 $m \times m$ 的矩阵

$$\mathbf{M}(R) = (r_{ij})_{m\times m}$$

矩阵元素是 r_{ij}，且

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当}\langle x_i, x_j\rangle \in R \\ 0, & \text{当}\langle x_i, x_j\rangle \notin R \end{cases}$$

其中 $1 \le i \le m$，$1 \le j \le m$

关系矩阵

A 到 B 的关系 R 是 $A \times B$ 的子集，$A \times B$ 有 $m \times n$ 个有序对。矩阵 $\mathbf{M}(R)$ 有 m 行（行为横向）、n 列（列为竖向），共有 $m \times n$ 个元素。因此，$\mathbf{M}(R)$ 的每个元素恰好对应 $A \times B$ 的一个有序对。用 $\mathbf{M}(R)$ 中元素 r_{ij} 的值表示有序对 $\langle x_i, y_j \rangle$ 是否在 R 中，因为只有 $\in$ 和 $\notin$ 两种情况，所以 r_{ij} 只取值 0 和 1 是合理的。

例 1

设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\},Y=\{y_1,y_2,y_3\}$，$X$ 到 Y 的关系 R 为

$$R=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_1,y_3\rangle,\langle x_2,y_3\rangle,\langle x_4,y_2\rangle\}$$

则 R 的关系矩阵是

$$\boldsymbol{M}(R)=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \;y_1 & \;y_2 & \;y_3 \end{matrix} & \end{array}$$

关系矩阵

在矩阵右方和下方标注了 X 和 Y 的元素，标注表明，x_1 对应第 1 行，x_2 对应第 2 行，y_1 对应第 1 列，依此类推。因此，第 1 行第 3 列交点的 $r_{13} = 1$ 表示 $\langle x_1, y_3 \rangle \in R$，而第 3 行第 1 列的 $r_{31} = 0$ 表示 $\langle x_3, y_1 \rangle \notin R$。在使用关系矩阵时，集合 X 和 Y 中的元素分别进行了排序。这时就不必在矩阵上标注这些元素，而且也不难确定一个矩阵元素对应的有序对。

例 2

设 $A=\{1,2,3,4\}$，A 上的 $>$ 关系定义为

$$>=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$$

则关系矩阵是

$$\mathbf{M}(>)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

10.2.2 关系图

定义 10.2.2

设集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$。

1. 若只是 X 到 Y 的一个关系，则 R 的关系图是一个有向图 $G(R) = \langle V, E\rangle$，它的顶点集是 $V = X \cup Y$，边集是 E，从 x_i 到 y_j 的有向边 $e_{ij} \in E$，当且仅当 $\langle x_i, y_j\rangle \in R$。
2. 若 R 是 X 上的一个关系，则 R 的关系图是一个有向图 $G(R) = \langle V, E\rangle$，它的顶点集是 $V = X$，边集是 E，从 x_i 到 x_j 的有向边 $e_{ij} \in E$ 当且仅当 $\langle x_i, x_j\rangle \in R$。

关系图中一条有向边 e_{ij} 对应 R 中的一个有序对 $\langle x_i, y_j\rangle$，二者一一对应。图形表示形象直观，易于理解。

例 3

对例 1 中的 X 到 Y 的关系 R，关系图 $G(R)$ 如图 10.2.1 所示。在 $X \neq Y$ 时，为了图示清楚，通常把定义域的元素 x_1, x_2 等画在一边，把值域中的元素 y_1, y_2 画在另一边。

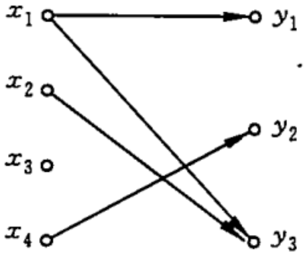

图 10.2.1

例 4

对例 2 中的 A 上的关系 $>$，关系图 $G(>)$ 如图 10.2.2 所示。对 A 上的关系，关系图中一般小区分定义域和值域，每个顶点既可以发出有向边，又可以收到有向边。

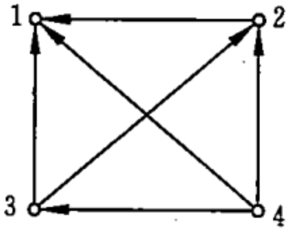

图 10.2.2

例 5

对 $A=\{a,b,c\}$ 上的关系 $R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$，关系图 $G(R)$ 如图 10.2.3 所示。图中从 a 到 a 的有向边 e_{aa} 表示 $\langle a,a\rangle\in R$，这类有向边称为自圈。

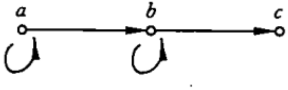

图 10.2.3

定义

定义 10.3.1

对 X 到 Y 的关系 R，Y 到 Z 的关系 S，定义：

1. R 的逆 R^{-1} 为 Y 到 X 的关系

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\},$$

2. R 与 S 的合成 $S \circ R$ 为 X 到 Z 的关系

$$S \circ R = \{\langle x, y\rangle \mid (\exists z)(\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in S)\}.$$

此外，对任意的集合 A，还可定义

3. R 在 A 上的限制 $R \upharpoonright A$ 为 A 到 Y 的关系

$$R \upharpoonright A = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \land x \in A\},$$

4. A 在 R 下的象 $R[A]$ 为集合

$$R[A] = \{y \mid (\exists x)(x \in A \land \langle x, y\rangle \in R)\}.$$

对 R 的每个有序对 $\langle x,y\rangle$，把两个元素颠倒得到有序对 $\langle y,x\rangle$，这些 $\langle y,x\rangle$ 的集合就是 R^{-1}。把 R 的关系图中每个有向边的方向颠倒就得到 R^{-1} 的关系图。

如果在关系 R 和 S 中各有一个有序对，使 $\langle x,z\rangle\in R$ 且 $\langle z,y\rangle\in S$，则 $\langle x,y\rangle$ 是关系 $S\circ R$ 的元素。而且，$S\circ R$ 包含全部这样的有序对。关系的合成如图 10.3.1 所示。因为 $\langle 5,6\rangle\in R$ 且 $\langle 6,7\rangle\in S$，故 $\langle 5,7\rangle\in S\circ R$。虽有 $\langle 1,2\rangle\in R$，但不存在 y 使 $\langle 2,y\rangle\in S$，故没有 y 使 $\langle 1,y\rangle\in S\circ R$ 也没有 x 使 $\langle x,4\rangle\in S\circ R$。

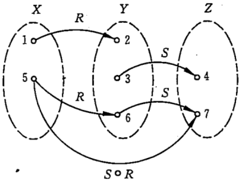

图 10.3.1

注意，X 到 Y 的关系 R 和 Y 到 Z 的关系 S 合成为 $S \circ R$，而不写成 $R \circ S$（注：有的书写为 $R \circ S$。）$S \circ R$ 是 X 到 Z 的关系。为了求 $S \circ R$，应把 R 中每个有序对与 S 中每个有序对一一配合，以此确定 $S \circ R$ 的每个有序对。

$R \upharpoonright A$ 是关系 R 的子集，其中每个有序对 $\langle x, y \rangle$ 满足 $x \in A$。可以说 $R \upharpoonright A$ 是 A 到 Y 的关系。也可以说是 X 到 Y 的关系。当 $\mathrm{dom}(R) \subseteq A$ 时，$R \upharpoonright A = R$。$R[A]$ 是一个集合，它实质上是只 $R \upharpoonright A$ 的值域。

例 1

设集合 A 上的关系 R 为

$$A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\},$$

$$R = \{\langle a, \{a\}\rangle, \langle \{a\}, \{\{a\}\}\rangle\}.$$

$$\begin{aligned}
R^{-1} &= \{\langle \{a\}, a\rangle, \langle \{\{a\}\}, \{a\}\rangle\} \\
R \circ R &= \{\langle a, \{\{a\}\}\rangle\} \\
R \restriction \{a\} &= \{\langle a, \{a\}\rangle\} \\
R \restriction \{\{a\}\} &= \{\langle \{a\}, \{\{a\}\}\rangle\} \\
R^{-1} \restriction \{a\} &= \varnothing \\
R[\{a\}] &= \{\{a\}\} \\
R[\{\{a\}\}] &= \{\{\{a\}\}\}
\end{aligned}$$

例 2

设集合 N 上的关系 R 和 S 为

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle\},$$
$$S = \{\langle 3,4\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,4\rangle\}.$$

则

$$R^{-1} = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,3\rangle\},$$
$$S \circ R = \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,5\rangle\},$$
$$R \circ S = \Phi.$$

10.3.2 $S \circ R$ 的关系矩阵

R^{-1} 的关系矩阵 $\mathbf{M}(R^{-1})$ 就是 R 的关系矩阵的转置矩阵。也就是说，把 $\mathbf{M}(R)$ 中每一对 r_{ij} 和 $r_{ji}(i \neq j)$ 互换就得到 $\mathbf{M}(R^{-1})$，下面介绍求 $S \circ R$ 的关系矩阵的方法。如果 A 是有限集合，$|A| = n$。关系 R 和 S 都是 A 上的关系，R 和 S 的关系矩阵 $\mathbf{M}(R) = (r_{ij})$ 和 $\mathbf{M}(S) = (s_{ij})$ 都是 $n \times n$ 的方阵。于是 $S \circ R$ 的关系矩阵 $\mathbf{M}(S \circ R) = (w_{ij})$，可以用下述的矩阵逻辑乘法计算（类似于矩阵乘法）。可以写为

$$\mathbf{M}(S \circ R) = \mathbf{M}(R)\mathbf{M}(S),$$

例 3

设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，A 上的关系

$$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle\},$$

$$S = \{\langle 4, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$$

则

$$\mathbf{M}(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}(R \circ S) = \mathbf{M}(S)\mathbf{M}(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中

$$
\begin{aligned}
w_{14} &= (s_{11} \wedge r_{14}) \vee (s_{12} \wedge r_{24}) \vee (s_{13} \wedge r_{34}) \vee (s_{14} \wedge r_{444}) \\
&= (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\
&= 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 = 1 \\
w_{21} &= (s_{21} \wedge r_{11}) \vee (s_{22} \wedge r_{21}) \vee (s_{23} \wedge r_{31}) \vee (s_{24} \wedge r_{41}) \\
&= (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) = 0
\end{aligned}
$$

此外

$$
\mathbf{M}(S \circ R) = \mathbf{M}(R)\mathbf{M}(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

10.3.3 性质

定理 10.3.1

对 X 到 Y 的关系 R 和 Y 到 Z 的关系 S，则

1. $\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{ran}(R)$,
2. $\mathrm{ran}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$,
3. $(R^{-1})^{-1} = R$,
4. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$,

证明

1. 对任意的 x，有

$$x \in \mathrm{dom}(R^{-1}) \Leftrightarrow (\exists y)(\langle x, y\rangle \in R^{-1})$$
$$\Leftrightarrow (\exists y)(\langle y, x\rangle \in R) \Leftrightarrow x \in \mathrm{ran}(R),$$

所以，$\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{ran}(R)$.

2. 类似于 (1).
3. 对任意的 $\langle x, y\rangle$，有

$$\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in (R^{-1})^{-1}$$

所以，$(R^{-1})^{-1} = R$。
4. 对任意的 $\langle x, y\rangle$，有

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle \in (S \circ R)^{-1} &\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in S \circ R \\ &\Leftrightarrow (\exists z)(\langle y, z\rangle \in R \wedge \langle z, x\rangle \in S) \\ &\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x, z\rangle \in S^{-1} \wedge \langle z, y\rangle \in R^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R^{-1} \circ S^{-1}. \end{aligned}$$

所以，$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$。

定理 10.3.2

对 X 到 Y 的关系 Q，Y 到 Z 的关系 S，Z 到 W 的关系 R，则

$$(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q).$$

证明对任意的 $\langle x, y \rangle$ 有

$$\begin{aligned}
&\langle x, y \rangle \in (R \circ S) \circ Q \\
\Leftrightarrow\ & (\exists u)(\langle x, u \rangle \in Q \wedge \langle u, y \rangle \in (R \circ S)) \\
\Leftrightarrow\ & (\exists u)(\langle x, u \rangle \in Q \wedge (\exists v)(\langle u, v \rangle \in S \wedge \langle v, y \rangle \in R)) \\
\Leftrightarrow\ & (\exists v)(\exists u)(\langle x, u \rangle \in Q \wedge \langle u, v \rangle \in S \wedge \langle v, y \rangle \in R) \\
\Leftrightarrow\ & (\exists v)(\langle x, v \rangle \in (S \circ Q) \wedge \langle v, y \rangle \in R) \\
\Leftrightarrow\ & \langle x, y \rangle \in R \circ (S \circ Q).
\end{aligned}$$

关系的合成是关系的运算。定理表明，这个运算满足结合律。但是它不满足交换律，一般 $S \circ R \neq R \circ S$。

定理 10.3.3

对 X 到 Y 的关系 R_2 和 R_3，Y 到 Z 的关系 R_1，有

1. $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = R_1 \circ R_2 \cup R_1 \circ R_3$,
2. $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3$,

对 X 到 Y 的关系 R_3，Y 到 Z 的关系 R_1、R_2，有

3. $(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = R_1 \circ R_3 \cup R_2 \circ R_3$,
4. $(R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteq R_1 \circ R_3 \cap R_2 \circ R_3$,

(注意，规定关系合成符优先于集合运算符。)

证明只证 (2)，其他留作思考题。

② 对任意的 $\langle x, y\rangle$，可得

$$\langle x, y\rangle \in R_1 \circ (R_2 \cap R_3)$$

$$\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x, z\rangle \in (R_2 \cap R_3) \land \langle z, y\rangle \in R_1)$$

$$\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x, z\rangle \in R_2 \land \langle x, z\rangle \in R_3 \land \langle z, y\rangle \in R_1)$$

$$\Rightarrow (\exists z)(\langle x, z\rangle \in R_2 \land \langle z, y\rangle \in R_1) \land (\exists z)(\langle x, z\rangle \in R_3 \land \langle z, y\rangle \in R_1)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in (R_1 \circ R_2) \land \langle x, y\rangle \in (R_1 \circ R_3)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$$

所以，$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$。

定理 10.3.4

对 X 到 Y 的关系 R 和集合 A, B，有

1. $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$,
2. $R[\bigcup A] = \bigcup\{R[B] \mid B \in A\}$,
3. $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$,
4. $R[\bigcap A] \subseteq \bigcap\{R[B] \mid B \in A\}, A \neq \emptyset$,
5. $R[A] - R[B] \subseteq R[A - B]$.

只证 (2), (3), 其他留作思考题。

❷ 对任意的 y，可得

$$y \in R[\bigcup A] \Leftrightarrow y \in \mathsf{ran}(R \upharpoonright \bigcup A)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(x \in \bigcup A \wedge \langle x, y \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists B)(B \in A \wedge x \in B \wedge \langle x, y \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow (\exists B)(B \in A \wedge (\exists x)(x \in B \wedge \langle x, y \rangle \in R))$$

$$\Leftrightarrow (\exists B)(B \in A \wedge y \in R[B])$$

$$\Leftrightarrow (\exists B)(y \in R[B] \wedge R[B] \in \{R[B] \mid B \in A\})$$

$$\Leftrightarrow y \in \bigcup \{R[B] \mid B \in A\}$$

所以，$R[\bigcup A] = \bigcup \{R[B] \mid B \in A\}$。

❸ 对任意的 y，可得

$$
\begin{aligned}
y \in R[A \cap B] &\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \cap B \wedge \langle x, y\rangle \in R) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \in B \wedge \langle x, y\rangle \in R) \\
&\Rightarrow (\exists x)(x \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge \langle x, y\rangle \in R) \\
&\Leftrightarrow y \in R[A] \wedge y \in R[B] \\
&\Leftrightarrow y \in R[A] \cap R[B]
\end{aligned}
$$

所以，$R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$。

例 4

设整数集合 Z 上的关系为 R

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x \in Z \wedge y \in Z \wedge y = x^2\}$$

集合 $A = \{1, 2\}, B = \{0, -1, -2\}$。
于是，$R[A] = \{1, 4\}, R[B] = \{0, 1, 4\}, R[A] \cap R[B] = \{1, 4\}$。但是，$A \cap B$ 是 $\varnothing, R[A \cap B] = \varnothing$。
此外，$A - B = \{1, 2\}, R[A - B] = \{1, 4\}$。但是 $R[A] - R[B] = \varnothing$。

关系的性质

在实际问题中，我们感兴趣的往往不是一般的关系，而是具有某些特殊性质的关系。为了更好地处理这些关系，有必要深入研究关系的性质。对 A 上的关系来说，主要的性质有：自反性、非自反性、对称性、反对称性、传递性。这一节定义这些性质，并给出若干结论。

10.4.1 定义

定义 10.4.1

对 A 上的关系 R，若对任意的 $x \in A$ 都有 xRx，则称 R 为 A 上自反的关系，若对任意的 $x \in A$ 都有 $x \not R x$，则称 R 为 A 上非自反的关系。

这个定义也可以写成：

$$R\text{是}A\text{ 上自反的} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to xRx),$$
$$R\text{是}A\text{ 上非自反的} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \not R x),$$

例 1

在非空集合 A 上的恒等关系 I_A 和全关系 E_A 都是自反的。在集合 $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \wedge x \neq 0\}$ 上的整除关系 D_B 和小于等于关系 L_B 都是自反的。在集合 A 的幂集 $P(A)$ 上的包含关系 $\subseteq$ 和相等关系 $=$ 都是自反的，这些关系都不是非自反的。

例 2

在非空集合 A 上的空关系 $\varnothing$ 是非自反的。在集合 $\mathbb{N}$ 上的小于关系 $<$ 是非自反的。在集合 A 的幂集 $P(A)$ 上的真包含关系 $\subset$ 是非自反的。这些关系都不是自反的。

例 3

在集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系 $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}$ 不是自反的，也不是非自反的。但是在非空集合 A 上，不存在一个关系，它是自反的又是非自反的。

如果 R 是 A 上自反的，则关系矩阵 $\mathbf{M}(R)$ 的主对角线元素都是 1（即 r_{ii} 都是 1），关系图 $G(R)$ 的每个顶点都有自圈。如果 R 是 A 上非自反的，则 $\mathbf{M}(R)$ 的主对角线元素都是 0，$G(R)$ 的每个顶点都没有自圈。

定义 10.4.2

R 为 A 上的关系，对任意的 $x, y \in A$，若 $xRy \to yRx$，则称 R 为 A 上对称的关系；若 $(xRy \land yRx) \to (x = y)$，则称 R 为 A 上反对称的关系。

这个定义也可以写成

$$R\text{是}A\text{ 上对称的} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A \land y \in A \land xRy) \to yRx)$$
$$R\text{是}A\text{ 上反对称的} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A \land y \in A \land xRy \land yRx) \to x = y))$$

反对称性还有另一种等价的定义

$$R\text{ 是}A\text{ 上反对称的} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A \land x \neq y \land xRy) \to yRx)),$$

例 4

在非空集合 A 上的全关系是对称的，不是反对称的。

例 5

在 $B=\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \neq 0\}$ 上的整除关系、小于等于关系、小于关系都是反对称的。且不是对称的。

例 6

在非空集合 A 上的恒等关系和空关系都是对称的，也都是反对称的。

例 7

在集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系

$$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$$

不是对称的，也

不是反对称的.

例 6 和 例 7 说明，对称性和反对称性既可以同时满足，也可以都不满足。

如果 R 是 A 上对称的，则 $\mathbf{M}(R)$ 是对称矩阵。
对任意的 i 和 j，$r_{ij} = r_{ji}$。在 $G(R)$ 中，任意两个顶点之间或者没有有向边，或者互有有有向边 e_{ij} 和 e_{ji}（不会只有 e_{ij} 没有 e_{ji}）。如果 R 是 A 上反对称的，则 $\mathbf{M}(R)$ 是反对称矩阵（对任意的 $i \neq j$，若 $r_{ij} = 1$ 则 $r_{ji} = 0$），在 $G(R)$ 中，任意两个顶点之间或者没有有向边，或者仅有一条有向边（不会同时有 e_{ij} 和 e_{ji}）。

定义 10.4.3

R 为 A 上的关系，对任意的 $x, y, z \in A$，若 $(xRy \wedge yRz) \to xRz$，则称 R 为 A 上传递的关系。

这个定义也可以写成

$$R \text{ 是} A \text{ 上传递的} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \to xRz)$$

例 8

在集合 A 上的全关系、恒等关系、空关系都是传递的。
在 $B=\{x \mid x\in\mathbb{N}\wedge x\neq 0\}$ 上的整除关系、小于等于关系、小于关系都是传递的。

例 9

在集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$$

不是传递的关系。因为 $\langle 1,2\rangle\in R$, $\langle 2,3\rangle\in R$。但是 $\langle 1,3\rangle\notin R$。

10.4.2 几个结论

定理 10.4.1

如果 R_1 和 R_2 是集合 A 上的自反关系，则 R_1^{-1}，$R_1 \cap R_2$，和 $R_1 \cup R_2$ 也是 A 上的自反关系。

证明：对于任意的 $x \in A$，我们有

$$x \in A \Longrightarrow \langle x, x\rangle \in R_1 \wedge \langle x, x\rangle \in R_2$$

$$\Longrightarrow \langle x, x\rangle \in R_1 \cap R_2$$

因此，$R_1 \cap R_2$ 是 A 上的自反关系。
对于 R_1^{-1} 和 $R_1 \cup R_2$ 的证明是类似的。

定理 10.4.2

如果 R_1 和 R_2 是集合 A 上的对称关系，则 R_1^{-1}，$R_1 \cap R_2$，和 $R_1 \cup R_2$ 也是 A 上的对称关系。

证明：对于任意的 $\langle x, y\rangle$，我们有

$$\langle x, y\rangle \in R_1 \cup R_2 \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle \in R_1 \vee \langle x, y\rangle \in R_2$$

$$\Longleftrightarrow \langle y, x\rangle \in R_1 \vee \langle y, x\rangle \in R_2$$

$$\Longleftrightarrow \langle y, x\rangle \in R_1 \cup R_2$$

因此，$R_1 \cup R_2$ 是 A 上的对称关系。
对于 R_1^{-1} 和 $R_1 \cap R_2$ 的证明是类似的。

定理 10.4.3

如果 R_1 和 R_2 是集合 A 上的传递关系，则 R_1^{-1} 和 $R_1 \cap R_2$ 也是 A 上的传递关系。

证明：对于任意的 $\langle x, y\rangle$ 和 $\langle y, z\rangle$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle \in R_1^{-1} \wedge \langle y, z\rangle \in R_1^{-1} \\
\Longleftrightarrow &\langle y, x\rangle \in R_1 \wedge \langle z, y\rangle \in R_1 \\
\Longrightarrow &\langle z, x\rangle \in R_1 \\
\Longleftrightarrow &\langle x, z\rangle \in R_1^{-1}
\end{aligned}
$$

因此，R_1^{-1} 是 A 上的传递关系。
对于 $\langle x, y\rangle \in R_1 \cap R_2$ 和 $\langle y, z\rangle \in R_1 \cap R_2$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle \in R_1 \cap R_2 \wedge \langle y, z\rangle \in R_1 \cap R_2 \\
\Longleftrightarrow &\langle x, y\rangle \in R_1 \wedge \langle x, y\rangle \in R_2 \wedge \langle y, z\rangle \in R_1 \wedge \langle y, z\rangle \in R_2 \\
\Longrightarrow &\langle x, z\rangle \in R_1 \wedge \langle x, z\rangle \in R_2
\end{aligned}
$$

注意：$R_1 \cup R_2$ 不一定是传递的。

例 10

在集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系 $R_1=\{\langle 1,2\rangle\}$，$R_2=\{\langle 2,3\rangle\}$ 都是 A 上的传递关系。但是，$R_1 \cup R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$ 不是 A 上的传递关系。

定理 10.4.4

如果 R_1 和 R_2 是集合 A 上的反对称关系，则 R_1^{-1} 和 $R_1 \cap R_2$ 也是 A 上的反对称关系。

证明：为了证明方便，把反对称性的充要条件等价改写为：
$(\forall x)(\forall y)(x \neq y \rightarrow (\langle x, y\rangle \notin R \vee \langle y, x\rangle \in R))$。
对于任意的 $x, y \in A$，我们有

$$x \neq y \rightarrow (\langle x, y\rangle \notin R_1 \vee \langle y, x\rangle \notin R_1)$$

$$\Longleftrightarrow x \neq y \rightarrow (\langle y, x\rangle \notin R_1^{-1} \vee \langle x, y\rangle \notin R_1^{-1})$$

因此，R_1^{-1} 是 A 上的反对称关系。

对于 $R_1 \cap R_2$，我们有

$$x \neq y \to (\langle x, y\rangle \notin R_1 \vee \langle y, x\rangle \notin R_1) \wedge (\langle x, y\rangle \notin R_2 \vee \langle y, x\rangle \notin R_2)$$

$$\Longrightarrow x \neq y \to (\langle x, y\rangle \notin R_1 \cap R_2 \vee \langle y, x\rangle \notin R_1 \cap R_2)$$

所以，R_1^{-1} 是 A 上反对称的。

$$
\begin{aligned}
&(x \neq y \to (\langle x,y\rangle R_1 \vee \langle y,x\rangle R_1))\wedge \\
&(x \neq y \to (\langle x,y\rangle R_2 \vee \langle y,x\rangle R_2)) \\
&\Leftrightarrow x \neq y \to ((\langle x,y\rangle R_1 \vee \langle y,x\rangle R_1) \wedge (\langle x,y\rangle R_2 \vee \langle y,x\rangle R_2)) \\
&\Rightarrow x \neq y \to (\langle x,y\rangle R_1 \vee \langle y,x\rangle R_1 \vee \langle x,y\rangle R_2 \vee \langle y,x\rangle R_2) \\
&\Leftrightarrow x \neq y \to (\neg(\langle x,y\rangle \in R_1 \wedge \langle x,y\rangle \in R_2) \vee \neg(\langle y,x\rangle \in R_1 \wedge \langle y,x\rangle \in R_2)) \\
&\Leftrightarrow x \neq y \to (\langle x,y\rangle R_1 \cap R_2 \vee \langle y,x\rangle R_1 \cap R_2)
\end{aligned}
$$

所以，$R_1 \cap R_2$ 是 A 上反对称的。

注意：这时 $R_1 \cup R_2$ 不一定是反对称的。

例 11

：在集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系 $R_1 = \{\langle 1, 2\rangle\}$，$R_2 = \{\langle 2, 1\rangle\}$ 都是 A 上的反对称关系。但是，$R_1 \cup R_2 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$ 不是 A 上的反对称关系。

定理 10.4.5

对于集合 A 上的关系 R，我们有
(1) R 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$。
(2) R 是反对称的 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。

证明 (1)：首先假设 R 是对称的。对于任意的 $\langle x, y \rangle$，我们有

$$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R \Longleftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1}$$

因此，$R = R^{-1}$。
现在假设 $R = R^{-1}$。对于任意的 $\langle x, y \rangle$，我们有

$$\langle x, y \rangle \in R \Longleftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$$

因此，R 是对称的。

(2) 首先假设 R 是反对称的。对于任意的 $\langle x, y\rangle$，我们有

$$\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1} \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in R^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R$$

$$\Longleftrightarrow x = y \langle x, y\rangle \in I_A$$

因此，$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。
现在假设 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。对于任意的 $\langle x, y\rangle$，我们有

$$\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1} \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R$$

$$\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in I_A \Longrightarrow x = y$$

因此，R 是反对称的。

10.5 关系的闭包

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

我们经常希望关系具有自反性、对称性和传递性。对于不具有这些性质的关系，可以扩充这个关系为更大的关系（原关系的超集合），使新关系有这些性质。这种作法就是闭包思想。闭包是数学上常用的概念，下面先介绍多个关系的合成，再介绍闭包的定义、性质和构造方法。

10.5.1 多个关系的合成

在 10.3 节介绍了两个关系的合成，下面推广到多个关系的合成。
定义 10.5.1 对于集合 A 上的关系 R，$n \in \mathbb{N}$，关系 R 的 n 次幂 R^n 定义如下：

$$
\begin{aligned}
&(1)R^0 = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\} = I_A,\\
&(2)R^{n+1} = R^n \circ R \quad (n \geq 0).
\end{aligned}
$$

注意，n 个关系 R 的合成简写为 R^n，n 个集合 A 的笛卡儿积经常也简写为 A^n。二者的概念不同，却使用了相同的表示。应该注意应用的场合，以免理解错误。

例 1

集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的关系 R 定义为

$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}.$$

则 R^0、R^1、R^2、R^3、R^4、R^5 的关系图如下:

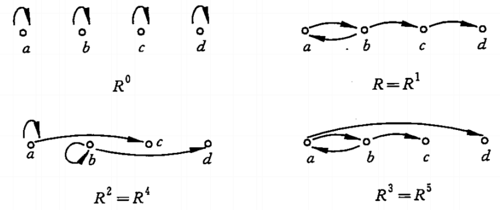

图 10.5.1

在例 1 中有一种有意义的现象，$R^2 = R^4 = R^6 = \ldots$ 和 $R^3 = R^5 = R^7 = \ldots$。这种现象是否普遍存在呢？下面考虑这个问题。

定理 10.5.1

设 A 是有限集合，$|A| = n$，R 是 A 上的关系，则存在自然数 s 和 t，$s \neq t$，使得 $R^s = R^t$。

证明：对于 $i \in \mathbb{N}$，R^i 都是 A 上的关系，它们都是 $P(A \times A)$ 的元素。因为 $|A| = n$，所以 $|A \times A| = n^2$，$|P(A \times A)| = 2^{n^2}$。列出 R 的各次幂，$R^1, R^2, R^3, \ldots, R^{2n^2}, \ldots$。由鸽巢原理，至少有两个幂是相等的，即存在自然数 s 和 t，$s \neq t$，使得 $R^s = R^t$。
(注：鸽巢原理是组合学的基本原理。它指出：如果 $n+1$ 个物体放入 n 个盒子里，则有一个盒子中有两个物体。)

定理 10.5.2

设 A 是有限集合，R 是 A 上的关系，m 和 n 是非零自然数，则
(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$,
(2) $(R^m)^n = R^{mn}$.

证明

(1) 对任意的 m，对 n 施归纳。
当 $n = 1$ 时，$R^m \circ R^1 = R^{m+1}$。
假设 $n = k\ (k \geq 1)$ 时结论成立，即有 $R^m \circ R^k = R^{m+k}$。令 $n = k + 1$，则

$$R^m \circ R^{k+1} = R^m \circ (R^k \circ R) = (R^m \circ R^k) \circ R = R^{m+k} \circ R = R^{m+k+1}$$

结论得证。

(2) 对任意的 m，对 n 施归纳。
当 $n = 1$ 时，$(R^m)^1 = R^m = R^{m\cdot 1}$。
假设 $n = k$ $(k \geq 1)$ 时有 $(R^m)^k = R^{mk}$，令 $n = k+1$，则

$$(R^m)^{k+1} = (R^m)^k \circ (R^m) = R^{mk} \circ R^m = R^{mk+m} = R^{m(k+1)}$$

所以，结论得证。

定理 10.5.3

设 A 是有限集合，R 是 A 上的关系，若存在自然数 s 和 t，$s<t$，使得 $R^s=R^t$，则

(1) $R^{s+k}=R^{t+k}$，其中 k 为自然数；

(2) $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，k 和 i 为自然数，$p=t-s$；

(3) 令 $B=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$，则 R 的各次幂均为 B 的元素，即对任意的自然数 q，有 $R^q\in B$。

证明 (1) $R^{s+k}=R^s\circ R^k=R^t\circ R^k=R^{t+k}$。

(2) 对 k 施归纳。当 $k=0$ 时，$R^{s+0+i}=R^{s+i}$。假设 $k=n$ 时有 $R^{s+np+i}=R^{s+i}$，其中 $p=t-s$。令 $k=n+1$，则

$$R^{s+(n+1)p+i}=R^{s+np+p+i}=R^{s+np+i}\circ R^{p}=R^{s+i}\circ R^{p}=R^{s+p+i}=R^{s+i}.$$

所以，结论得证。

(3) 若 $q < t$，由 B 的定义，$R^q \in B$。
若 $q \geq t$，则 $q - s > 0$。一定存在自然数 k 和 i，使得

$$q = s + kp + i, \quad \text{其中} 0 \leqslant i \leqslant p - 1.$$

于是，

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}.$$

此外，$s + i \leqslant s + p - 1 = t - 1$。所以，

$$R^q = R^{s+t} \in B.$$

例 2：对例 1 中的关系 R，$R^2 = R^4$，于是对应的 $s = 2$，$t = 4$。
$B = \{R^0, R^1, R^2, R^3\}$。$R$ 的幂中不相同的只有以上 4 种。

10.5.2 闭包的定义

设 R 是 A 上的关系，有时希望给 R 增加一些有序对构成新关系 R'（显然 $R \subseteq R'$），使得 R' 具有自反性或对称性或传递性。但不希望 R' 太大，希望增加的有序对尽量少。这就是建立 R 的闭包的基本思想。

定义 10.5.2

对于非空集合 A 上的关系 R，如果有 A 上另一个关系 R'，满足：
(1) R' 是自反的（对称的，传递的），
(2) $R \subseteq R'$，
(3) 对 A 上任何自反的（对称的，传递的）关系 R''，如果 $R \subseteq R''$ 则 $R' \subseteq R''$，
则称关系 R' 为 R 的自反（对称，传递）闭包，记作 $r(R)$ $(s(R), t(R))$。

这一个定义中定义了三个闭包：自反闭包 $r(R)$，对称闭包 $s(R)$，传递闭包 $t(R)$。直观上说，$r(R)$ 是有自反性的 R 的"最小"超集合，$s(R)$ 是有对称性的 R 的"最小"超集合，$t(R)$ 是有传递性的 R 的"最小"超集合。

例 3

对例 1 中的关系 R，R 的自反闭包 $r(R)$，对称闭包 $s(R)$，传递闭包 $t(R)$ 的关系图如图 10.5.2 所示。

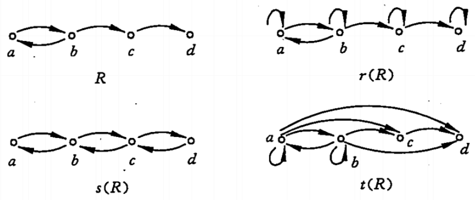

图 10.5.2

10.5.3 闭包的性质

定理 10.5.4

对非空集合 A 上的关系 R，有

1. R 是自反的 $\Leftrightarrow r(R)=R$,
2. R 是对称的 $\Leftrightarrow s(R)=R$,
3. R 是传递的 $\Leftrightarrow t(R)=R$.

证明:

(1) 先设 R 是自反的。因为 $R\subseteq R$，且任何包含 R 的自反关系 R''，有 $R\subseteq R''$。所以，R 满足 $r(R)$ 的定义，$r(R)=R$.
再设 $r(R)=R$。由 $r(R)$ 的定义，R 是自反的.
(2) 和 (3) 的证明类似.

定理 10.5.5

对非空集合 A 上的关系 R_1, R_2，若 $R_1 \subseteq R_2$，则

1. $r(R_1) \subseteq r(R_2)$,
2. $s(R_1) \subseteq s(R_2)$,
3. $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

- 证明留作思考题。

定理 10.5.6

对非空集合 A 上的关系 R_1, R_2，则

1. $r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$,
2. $s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$,
3. $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$.

证明:

(1) 因为 $r(R_1)$ 和 $r(R_2)$ 都是 A 上自反的关系，所以 $r(R_1) \cup r(R_2)$ 是 A 上自反的关系。由 $R_1 \subseteq r(R_1)$ 和 $R_2 \subseteq r(R_2)$，有 $R_1 \cup R_2 \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$。所以 $r(R_1) \cup r(R_2)$ 是包含 $R_1 \cup R_2$ 的自反关系。由自反闭包定义，$r(R_1 \cup R_2) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$。

因为 $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$，有 $r(R_1) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$。类似地 $r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$。则

$$r(R_1) \cup r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2).$$

(2) 和 (3) 的证明留作思考题。

- 注意，定理的结论 (3) 是包含关系，不是相等关系。下面是真包含的例子。

例 4

集合 $A=\{a,b,c\}$ 上的关系 R_1 和 R_2 为，$R_1=\{\langle a,b\rangle\}, R_2=\{\langle b,c\rangle\}$。于是，$t(R_1)=R_1=\{\langle a,b\rangle\}$, $\quad t(R_2)=R_2=\{\langle b,c\rangle\}$. 则有 $t(R_1)\cup t(R_2)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$.
但是 $R_1\cup R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$，$t(R_1\cup R_2)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$。显然 $t(R_1)\cup t(R_2)\subsetneq t(R_1\cup R_2)$.

10.5.4 闭包的构造方法

- 下面介绍如何求出已知关系 R 的三种闭包。

定理 10.5.7

对非空集合 A 上的关系 R，有

$$r(R) = R \cup R^0.$$

证明

对任意的 $x \in A$，$\langle x, x\rangle \in R^0$，于是 $\langle x, x\rangle \in R \cup R^0$，所以 $R \cup R^0$ 是 A 上自反的。显然 $R \subseteq R \cup R^0$，所以 $R \cup R^0$ 是包含 R 的自反关系。对 A 上任意的自反关系 R''，如果 $R \subseteq R''$，则对任意的 $\langle x, y\rangle$，若 $\langle x, y\rangle \in R \cup R^0$，则或者 $\langle x, y\rangle \in R$，或者 $\langle x, y\rangle \in R^0$。当 $\langle x, y\rangle \in R$，由 $R \subseteq R''$ 有 $\langle x, y\rangle \in R''$。若 $\langle x, y\rangle \in R^0$，则 $x = y$，由 R'' 的自反性有 $\langle x, y\rangle \in R''$。两种情况都有 $\langle x, y\rangle \in R''$。因此，$R \cup R^0 \subseteq R''$。总之，$R \cup R^0$ 满足 $r(R)$ 的定义，$r(R) = R \cup R^0$。

- 由定理可知，很容易构造 R 的自反闭包，只要把所有的 $x \in A$ 构成的 (x, x) 加入 R 中。

定理 10.5.8

对非空集合 A 上的关系 R，有

$$s(R) = R \cup R^{-1}.$$

证明

对任意的 $\langle x, y\rangle$，可得

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \cup R^{-1} &\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \vee \langle x, y\rangle \in R^{-1} \\ &\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R^{-1} \vee \langle y, x\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R \cup R^{-1}\end{aligned}$$

所以，$R \cup R^{-1}$ 是 A 上对称的关系。
显然有 $R \subseteq R \cup R^{-1}$。

- 对 A 上任意的包含 R 的对称关系 R''，对任意的 $\langle x,y\rangle$，若 $\langle x,y\rangle \in R\cup R^{-1}$，则 $\langle x,y\rangle \in R$ 或 $\langle x,y\rangle \in R^{-1}$。当 $\langle x,y\rangle \in R$，由 $R\subseteq R''$ 有 $\langle x,y\rangle \in R''$。当 $\langle x,y\rangle \in R^{-1}$，则 $\langle y,x\rangle \in R$，$\langle y,x\rangle \in R''$，因 R'' 是对称的，故 $\langle x,y\rangle \in R''$。两种情况都有 $\langle x,y\rangle \in R''$，则 $R\cup R^{-1}\subseteq R''$。
- 总之，$R\cup R^{-1}$ 满足 $s(R)$ 的定义，所以 $s(R)=R\cup R^{-1}$。
- 由定理可知，很容易构造 R 的对称闭包，只要对任何 $\langle x,y\rangle \in R$ 且 $\langle y,x\rangle \notin R$ 把 $\langle y,x\rangle$ 加入 R 中。

定理 10.5.9

对非空集合 A 上的关系 R，有

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明

先证 $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \subseteq t(R)$。为此只要证明对任意的 $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$，有 $R^n \subseteq t(R)$。

施归纳于 n，

当 $n = 1$ 时，$R^1 = R \subseteq t(R)$。

假设 $n = k$ 时有 $R^k \subseteq t(R)$。令 $n = k + 1$，对任意的 $\langle x, y \rangle$ 有

$$
\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in R^{k+1} &\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R^k \circ R \\
&\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in R^k) \\
&\Rightarrow (\exists z)(\langle x, z\rangle \in t(R) \wedge \langle z, y\rangle \in t(R)) \\
&\Rightarrow \langle x, y\rangle \in t(R)
\end{aligned}
$$

所以，$R^{k+1} \subseteq t(R)$。由归纳法，对 $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$，有 $R^n \subseteq t(R)$。于是 $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \subseteq t(R)$。

再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$。对任意的 $\langle x, y\rangle$ 和 $\langle y, z\rangle$，可得

$$
\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \wedge \langle y, z\rangle \in R \cup R^2 \cup \cdots \\
\Leftrightarrow\ &(\exists s)(\langle x, y\rangle \in R^s) \wedge (\exists t)(\langle y, z\rangle \in R^t)
\end{aligned}
$$

其中 s 和 t 是非零自然数，

$$\Rightarrow (\exists s)(\exists t)(\langle x, z\rangle \in R^s \circ R^t)$$
$$\Leftrightarrow (\exists s)(\exists t)(\langle x, z\rangle \in R^{s+t})$$
$$\Rightarrow \langle x, z\rangle \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

所以，$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$ 是传递的，此外它包含 R。所以

$$t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots .$$

总之,

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots .$$

通常简写为

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots ,$$

而且

$$R^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k = R^0 \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots .$$

- 定理 10.5.3 指出，在 $R, R^2, \cdots$ 中只有有限个不同的合成关系。所以在计算 $t(R) = R^+$ 时，可以只用有限个合成关系。

定理 10.5.10

设 A 为非空有限集合，$|A| = n$，R 是 A 上的关系，则存在一个正整数 $k \leqslant n$，使得

$$t(R) = R^+ = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k.$$

证明

设有 $\langle x, y\rangle \in R^+$，则存在整数 $p > 0$，使得 $\langle x, y\rangle \in R^p$，即存在序列 $x_0 = x, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1} = y$，有 $\langle x_0, x_1\rangle \in R, \langle x_1, x_2\rangle \in R, \ldots, \langle x_{p-1}, x_p\rangle \in R$。设满足上述条件的最小的 p，有 $p > n$，则 $p+1$ 个元素 $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p$ 都是 A 中的 n 个元素，$p+1$ 个元素中必有两个相等，即有 $0 \leqslant i < q \leqslant p$ 使 $x_i = x_q$，因此序列可以去掉中间一段成为 $\langle x_0, x_1\rangle \in R, \ldots \langle x_{t-1}, x_t\rangle \in R$, 和 $\langle x_t, x_{q+1}\rangle \in R, \ldots, \langle x_{p-1}, x_p\rangle \in R$ 两段。第一段有 t 个有序对，第二段有 $p-q$ 个有序对。因此，$\langle x_0, x_p\rangle = \langle x, y\rangle \in R^k$，其中 $k = t + p - q = p - (q - t) < p$。这与 p 为最小的假设矛盾。故 $p > n$ 不成立。

- 由此定理可知，这时的 R^+ 不妨写成

$$R^+ = t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^n.$$

例 5

集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系 R 为

$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\}.$$

则

$$\begin{aligned} r(R) &= R \cup R^\circ \\ &= \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} s(R) &= R \cup R^{-1} \\ &= \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,a\rangle, \langle a,c\rangle\}. \end{aligned}$$

由

$$M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M(R^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M(R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} t(R) &= R \cup R^2 \cup R^3 \\ &= \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle\}. \end{aligned}$$

- 当有限集合 A 的元素较多时，用矩阵运算求 A 上的关系 R 的传递闭包仍很复杂。1962 年 Warshall 提出了一种有效的算法。

Warshall 算法

令 $B[j,i]$ 表示矩阵 B 第 j 行第 i 列的元素

1. 令矩阵 $B = M(R)$,
2. 令 $i = 1, n = |A|$,
3. 对 $1 \leqslant j \leqslant n$，如果 $B[j,i] = 1$，则对 $1 \leqslant k \leqslant n$，令
$$B[j,k] = B[j,k] \vee B[i,k],$$
4. i 加 1,
5. 若 $i \leqslant n$，则转到 (3)，否则停止，且
$$M(R^+) = B.$$

例 6

A 上的关系 R 的关系矩阵为

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $B = M(R)$.

当 $i=1$ 时，第 1 列只有 $B[1,1]=1$，将第 1 行与第 1 行各对应元素作逻辑加，仍记于第 1 行。

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $i=2$ 时，第 2 列中 $B[1,2]=1$，将第 1 行与第 2 行各对应元素作逻辑加，记于第 1 行。第 2 列还有 $B[4,2]=1$，将第 4 行与第 2 行对应加，记于第 4 行。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

当 $i = 3$ 时，第 3 列全是 0，B 不变。
当 $i = 4$ 时，第 4 列中 $B[1,4] = B[2,4] = B[4,4] = 1$，将 1, 2, 4 这 3 行分别与第 4 行对应元素逻辑加，分别记于 1, 2, 4 这 3 行。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这就是 $M(R^+)$

- 有时希望所求的闭包具有两种或三种性质。应该先作哪种闭包运算呢？下面分析这个问题。

定理 10.5.11

对非空集合 A 上的关系 R，有

1. 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 是自反的，
2. 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 是对称的，
3. 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 是传递的。

只证 (2)，其他留作思考题。
(2) 先证 $r(R)$ 是对称的。对任意的 $x, y \in A$，如果 $x = y$，则

$$\langle x, y\rangle \in r(R) \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in r(R),$$

如果 $x \neq y$，则

$$\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle \in r(R) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \cup R^0 \\
\Rightarrow &\langle x, y\rangle \in R \\
\Rightarrow &\langle y, x\rangle \in R \\
\Rightarrow &\langle y, x\rangle \in R \cup R^0 \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in r(R).
\end{aligned}$$

总之，$r(R)$ 是对称的。

再证 $t(R)$ 是对称的。为此先证，若 R 对称，则对非零自然数 n，有 R^n 是对称的。施归纳于 n。
当 $n=1$ 时，$R^1=R$ 是对称的。
假设 $n=k(k\geqslant 1)$ 时 R^k 是对称的。令 $n=k+1$，对任意的 $\langle x,y\rangle$，可得

$$\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle\in R^{k+1}\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R^k\circ R\\
&\Leftrightarrow(\exists z)(\langle x,z\rangle\in R\wedge\langle z,y\rangle\in R^k)\\
&\Rightarrow(\exists z)(\langle z,x\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R^k)\\
&\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in R\circ R^k\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in R^{k+1}
\end{aligned}$$

则 R^{k+1} 是对称的。对非零自然数 n，有 R^n 是对称的。

对任意的 $\langle x, y\rangle$，可得

$$\begin{aligned}&\langle x, y\rangle \in t(R) \Leftrightarrow (\exists n)(\langle x, y\rangle \in R^n)\\ &\Rightarrow (\exists n)(\langle y, x\rangle \in R^n) \Leftrightarrow (y, x) \in t(R)\end{aligned}$$

所以，$t(R)$ 是对称的。

定理 10.5.12

对非空集合 A 上的关系 R，有

1. $rs(R) = sr(R)$,
2. $rt(R) = tr(R)$,
3. $st(R) \subseteq ts(R)$.

其中 $rs(R) = r(s(R))$，其他类似。

证明

1

$$
\begin{aligned}
sr(R) &= s(R \cup R^0) \\
&= (R \cup R^0) \cup (R \cup R^0)^{-1} \\
&= R \cup R^{-1} \cup R^0 \\
&= (R \cup R^{-1}) \cup (R \cup R^{-1})^0 \\
&= rs(R).
\end{aligned}
$$

❷ **先证** $(R \cup R^0)^n = R^0 \cup R \cup \cdots \cup R^n$。**施归纳于** n。
当 $n = 1$ **时**，$(R \cup R^0)^1 = R^0 \cup R$。
假设 $n = k (k \geqslant 1)$ **时有** $(R \cup R^0)^k = R^0 \cup R \cup \cdots \cup R^k$。**令** $n = k + 1$，**则有**

$$
\begin{aligned}
&(R \cup R^0)^{k+1} = (R \cup R^0)^k \circ (R \cup R^0) \\
&= (R^0 \cup R^1 \cup \cdots \cup R^k) \circ (R \cup R^0) \\
&= ((R^0 \cup R^1 \cup \cdots \cup R^k) \circ R) \cup ((R^0 \cup R^1 \cup \cdots \cup R^k) \circ R^0) \\
&= (R^1 \cup R^2 \cup \cdots \cup R^{k+1}) \cup (R^0 \cup R^1 \cup \cdots \cup R^k) \\
&= R^0 \cup R^1 \cup \cdots \cup R^{k+1}.
\end{aligned}
$$

利用这个结论

$$
\begin{aligned}
tr(R) &= t(R \cup R^0) \\
&\quad (R \cup R^0) \cup (R \cup R^0)^2 \cup (R \cup R^0)^3 \cup \cdots \\
&= (R^0 \cup R^1) \cup (R^0 \cup R^1 \cup R^2) \cup \cdots \\
&= R^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots = R^0 \cup t(R) \\
&= t(R) \cup (t(R))^0 = rt(R).
\end{aligned}
$$

3. 因为 $R \subseteq s(R)$，所以 $t(R) \subseteq ts(R)$ 和 $st(R) \subseteq sts(R)$。因为 $ts(R)$ 是对称的，所以 $sts(R) = ts(R)$。因此 $st(R) \subseteq ts(R)$。

- 由定理可知，若要求出 R 的自反、对称且传递的闭包，则应先求 $r(R)$，再求 $sr(R)$，最后求 $tsr(R)$。若先求 $tr(R)$，再求 $str(R)$，则 $str(R)$ 不一定是传递的。

10.6 等价关系和划分

- 在实数之间的相等关系、在集合之间的相等关系、在谓词公式之间的等值关系具有类似的性质。它们都具有自反性、对称性和传递性。下面把具有这三种性质的关系称为等价关系。
- 这是一类很重要的关系，可以用集合上的等价关系把该集合划分成等价类。

10.6.1 等价关系

定义 10.6.1

对非空集合 A 上的关系 R，如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。

例 1

在非空集合 A 上的恒等关系 I_A 和全关系 E_A 都是等价关系，在所有谓词公式的集合上的等值关系也是等价关系。

例 2

集合 $A = \{1, 2, \ldots, 8\}$ 上的关系 $R = \{\langle x, y\rangle \mid x \equiv y \pmod 3\}$。其中 $x \equiv y \pmod 3$ 表示 $x - y$ 可被 3 整除。
对任意的 $x, y, z \in A$，$x - x$ 可被 3 整除。若 $x - y$ 可被 3 整除，则 $y - x$ 也可被 3 整除。若 $x - y$ 和 $y - z$ 可被 3 整除，则 $x - z = (x - y) + (y - z)$ 可被 3 整除。所以，R 具有自反性、对称性和传递性，R 是 A 上的等价关系。

R 的关系图如图所示。在图中，A 的元素被分成三组，每组中任两个元素之间都有关系，而不同组的元素之间都没有关系。这样的组称为等价类。

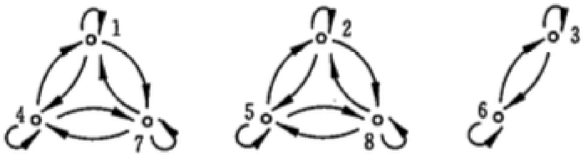

图 10.6.1

- 第 9 章给出了用平面坐标系中的矩形表示笛卡儿积 $A \times B$ 的图形表示法，显然可以用正方形表示 $A \times A$，如图 (a) 所示。A 上的关系是 $A \times A$ 的子集，因此可以用正方形的子集表示。A 上的等价关系可以用正方形的一条对角线和线上的若干正方形表示，如图 (b) 所示。但是图 (c) 所表示的关系不是等价关系。它包括了对角线，所以有自反性。它以对角线为对称轴，所以有对称性。但它没有传递性。因为 R 中的 a 和 b 点对应的有序对，经传递得到 c 点对应的有序对应在 R 中，但 c 点不在 R 中。

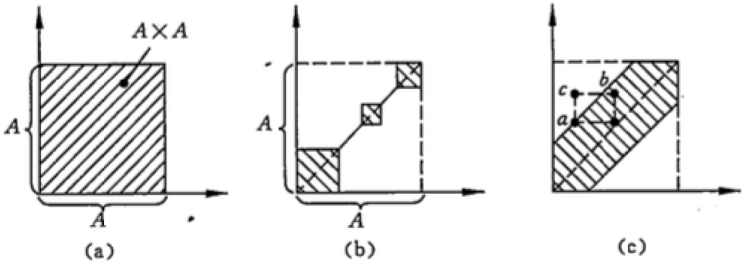

图 10.6.2

定义 10.6.2

R 是非空集合 A 上的等价关系，对任意的 $x \in A$，令 $[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge x\,R\,y\}$，则称集合 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类，简称 x 的等价类，也可记作 $[x]$ 或 $\bar{x}$。

例 3

对例 2 的等价关系 R，有三个不同的等价类：

$$
\begin{aligned}
[1]_R &= \{1,4,7\} = [4]_R = [7]_R,\\
[2]_R &= \{2,5,8\} = [5]_R = [8]_R,\\
[3]_R &= \{3,6\} = [6]_R.
\end{aligned}
$$

A 的 8 个元素各有一个等价类。各等价类之间，或者相等，或者不相交，而且所有等价类的并集就是 A。

定理 10.6.1

R 是非空集合 A 上的等价关系，对任意的 $x, y \in A$，成立

1. $[x]_R \neq \varnothing$ 且 $[x]_R \subseteq A$,
2. 若 $x\ R\ y$，则 $[x]_R = [y]_R$,
3. 若 $x\ \not R\ y$，则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$,
4. $\bigcup\{[x]_R \mid x \in A\} = A$.

证明

1. 对任意的 $x \in A$，$x\ R\ x$，则 $x \in [x]_R$，因此 $[x]_R \neq \varnothing$。由等价类定义，显然 $[x]_R \subseteq A$.
2. 对任意的 $x_0 \in [x]_R$，有 $x\ R\ x_0$。由对称性，有 $x_0\ R\ x$。由 $x\ R\ y$ 和传递性，有 $x_0\ R\ y, y\ R\ x_0$，所以 $x_0 \in [y]_R$。类似可证 $x_0 \in [y]_R \to x_0 \in [x]_R$。因此，$[x]_R = [y]_R$.

3. 假设 $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$。则存在 x_0，使得 $x_0 \in [x]_R$ 且 $x_0 \in [y]_R$。即 $x \, R \, x_0$ 且 $y \, R \, x_0$，由对称性 $x_0 \, R \, y$，由传递性 $x \, R \, y$。与已知矛盾.
4. 对任意的 $x \in A$，$[x]_R \subseteq A$。则有 $\bigcup\{[x]_R \mid x \in A\} \subseteq A$. 反之，对任意的 $x \in A$，$x \in [x]_R$, 则有 $x \in \bigcup\{[x]_R \mid x \in A\}$. 所以，$A \subseteq \bigcup\{[x]_R \mid x \in A\}$. 因此 $\bigcup\{[x]_R \mid x \in A\} = A$.

- 由定理可知，对 A 上的等价关系 R，所有等价类的集合具有很好的性质。

定义 10.6.3

对非空集合 A 上的关系 R，以 R 的不相交的等价类为元素的集合称为 A 的商集，记作 $A/\ R$。
这个定义也可以写成

$$A/\ R = \{y \mid (\exists x)(x \in A \land y = [x]_R)\}.$$

例 4

对例 2 中的 A 和 R，商集是

$$\begin{aligned} A/\ R &= \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\} \\ &= \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}. \end{aligned}$$

10.6.2 划分

定义 10.6.4

对非空集合 A，若存在集合 π 满足下列条件：

1. $(\forall x)(x \in \pi \to x \subseteq A)$,
2. $\varnothing \notin \pi$,
3. $\bigcup \pi = A$,
4. $(\forall x)(\forall y)((x \in \pi \land y \in \pi \land x \neq y) \to x \cap y = \varnothing)$,

则称 π 为 A 的一个划分，称 π 中的元素为 A 的划分块。

- A 的一个划分 π，是 A 的非空子集的集合（即 $\pi \subseteq P(A)$ 且 $\varnothing \notin \pi$），A 的这些子集互不相交，且它们的并集为 A。

例 5

对集合 $A = \{a, b, c, d\}$，则

$$\pi_1 = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$$

和

$$\pi_2 = \{\{a, b, c, d\}\}$$

都是 A 的划分。$\{a\}, \{b, c\}, \{d\}$ 为 π_1 的划分块。但是

$$\pi_3 = \{\{a, b\}, \{c\}, \{a, d\}\}$$

和

$$\pi_4 = \{\{a, b, d\}\}$$

都不是 A 的划分。

定理 10.6.2

对非空集合 A 上的等价关系 R，A 的商集 A/R 就是 A 的划分，它称为由等价关系 R 诱导出来的 A 的划分，记作 π_R。

- 证明可以由定义 10.6.3、定义 10.6.4 和定理 10.6.1 直接得到。
- 上面说明，由 A 上的等价关系 R 可以诱导出 A 的一个划分。下面考虑，由 A 的一个划分如何诱导出 A 上的一个等价关系。

定理 10.6.3

对非空集合 A 的一个划分 π，令 A 上的关系

$$R_\pi = \{\langle x, y\rangle \mid (\exists z)(z \in \pi \wedge x \in z \wedge y \in z)\}$$

则 R_π 为 A 上的等价关系，它称为划分 π 诱导出的 A 上的等价关系。

- 证明留作思考题。

定理 10.6.4

对非空集合 A 的一个划分 π 和 A 上的等价关系 R，π 诱导 R 当且仅当 R 诱导 π。

证明：先证必要性。若 π 诱导 R，且 R 诱导 π'。对任意的 $x \in A$，设 x 在 π 的划分块 B 中，也在 π' 的划分块 B' 中。对任意的 $y \in A$，有

$$\begin{aligned} y \in B &\Leftrightarrow x\ R\ y \quad (x \in B \text{ 且 } \pi \text{ 诱导 } R) \\ &\Leftrightarrow [x]_R = [y]_R \quad (R \text{ 为等价关系}) \\ &\Leftrightarrow y \in B' \quad \left(x \in B' \text{且} R \text{诱导} \pi'\right) \end{aligned}$$

所以，$B = B'$。由 x 的任意性，$\pi = \pi'$。

再证充分性。若 R 诱导 π，且 π 诱导 R'。对任意的 $x, y \in A$，可得

$$\begin{aligned} x\ R\ y &\Leftrightarrow [x]_R = [y]_R \\ &\Leftrightarrow x \in [x]_R \wedge y \in [x]_R \\ &\Leftrightarrow x \text{ 和} y \text{ 在} \pi \text{ 的同一划分块中} \\ &\Leftrightarrow x\ R'\ y \end{aligned}$$

所以，$R = R'$。

- 由定理可知，集合 A 的划分和 A 上的等价关系可以建立一一对应。

例 6

在集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上求出尽可能多的等价关系。
先求 A 的所有划分，如图 10.6.3 所示。

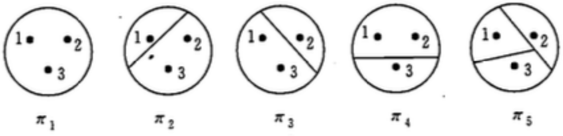

图 10.6.3

于是可得到 5 个等价关系:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}, \\
R_2 &= \{\langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}, \\
R_3 &= \{\langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}, \\
R_4 &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}, \\
R_5 &= \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}.
\end{aligned}
$$

10.7.1 相容关系

定义 10.7.1

对非空集合 A 上的关系 R，如果 R 是自反的、对称的，则称 R 为 A 上的相容关系。

例 1

A 是英文单词的集合

$$A = \{\text{cat}, \text{teacher}, \text{cold}, \text{desk}, \text{knife}, \text{by}\},$$

A 上的关系 R 为

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ 和} y \text{ 至少有一相同字母}\}.$$

显然，R 是自反的、对称的，但不是传递的。因此，R 是相容关系。

- 相容关系的关系图中，每个顶点都有自圈，而且若一对顶点间有边则有向边成对出现。因此可以简化关系图，可以不画自圈，并用无向边代替一对来回的有向边。对例 1 的 R，设

$$x_1 = \text{cat}, x_2 = \text{teacher}, x_3 = \text{cold},$$
$$x_4 = \text{desk}, x_5 = \text{knife}, x_6 = \text{by},$$

则关系图可以简化为图 10.7.1。

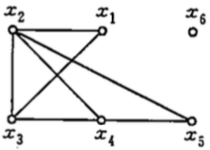

图 10.7.1

定义 10.7.2

对非空集合 A 上的相容关系 R，若 $C \subseteq A$，且 C 中任意两个元素 x 和 y 有 $x\,R\,y$，则称 C 是由相容关系 R 产生的相容类，简称相容类。
这个定义也可以写成

$$C = \{x \mid x \in A \wedge (\forall y)(y \in C \rightarrow x\,R\,y)\}.$$

例 2

对例 1 中的相容关系 R，相容类有 $\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}$ 等。前两个相容类都可以加入其他元素，构成更大的相容类。如 $\{x_1, x_2\}$ 加入 x_3 得到另一相容类 $\{x_1, x_2, x_3\}$。后两个相容类再加入任何新元素都不是相容类了，这两个相容类称为最大相容类。

定义 10.7.3

对非空集合 A 上的相容关系 R，一个相容类若不是任何相容类的真子集，就称为最大相容类，记作 C_R。

对最大相容类 C_R 有下列性质：

$$(\forall x)(\forall y)((x \in C_R \land y \in C_R) \to x\ R\ y)$$

$$(\forall x)(x \in A - C_R \to (\exists y)(y \in C_R \land x \not R\ y)).$$

- 在相容关系的简化图中，最大完全多边形是每个顶点与其他所有顶点相连的多边形。这种最大完全多边形的顶点集合，才是最大相容类。此外，一个孤立点的集合也是最大相容类；如果两点连线不是最大完全多边形的边，这两个顶点的集合也是最大相容类。

例 3

对例 1 中的相容关系 R，最大相容类有 $\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_2, x_4, x_5\}$ 和 $\{x_6\}$。

定理 10.7.1

对非空有限集合 A 上的相容关系 R，若 C 是一个相容类，则存在一个最大相容类 C_R，使 $C \subseteq C_R$。

证明设 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$。构造相容类的序列

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots$$

使 $C_0 = C, C_{i+1} = C_i \cup \{a_j\}$，而 j 是满足 $a_j \notin C_i$ 且 a_j 与 C_j 中各元素有关系 R 的最小下标。
因为 $|A| = n$，所以至多经过 $n - |C|$ 步，过程就结束，而且序列中最后一个相容类是 C_R。结论得证。
对任意的 $a \in A$，有相容类 $\{a\}$。它必定包含在某个 C_R 中。所以，C_R 的集合覆盖住 A。

覆盖

定义 10.7.4

对非空集合 A，若存在集合 Ω 满足下列条件：

1. $(\forall x)(x \in \Omega \to x \subseteq A)$,
2. $\emptyset \notin \Omega$,
3. $\bigcup \Omega = A$,

则称 Ω 为 A 的一个覆盖，称 Ω 中的元素为 Ω 的覆盖块。

- 一个划分是一个覆盖，但一个覆盖不一定是一个划分。因为划分中各元素不相交，覆盖中各元素可能相交。

定理 10.7.2

对非空集合 A 上的相容关系 R，最大相容类的集合是 A 的一个覆盖，称为 A 的完全覆盖，记作 $C_R(A)$。而且 $C_R(A)$ 是唯一的。

- 证明从略。

定理 10.7.3

对非空集合 A 的一个覆盖 $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，由 Ω 确定的关系

$$R = A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup \ldots \cup A_n \times A_n$$

是 A 上的相容关系。

- 证明从略。
- 由 A 上的一个相容关系 R，可以确定一个 A 的完全覆盖 $C_R(A)$。由 A 的一个覆盖，也可确定一个 A 上的相容关系。但是不同的覆盖，可能确定同一个相容关系。

例 4

集合 $A=\{1,2,3,4\}$ 的两个覆盖

$$\Omega_1=\{\{1,2,3\},\{3,4\}\}$$
$$\Omega_2=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\},\{3,4\}\}$$

和可以确定相同的相容关系

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}.$$

10.8 偏序关系

- 在实数之间的小于等于关系，在集合之间的包含关系具有类似的性质。它们都具有自反性、反对称性和传递性。下面把具有这三种性质的关系称为偏序关系。它和等价关系同为很重要的关系。

10.8.1 偏序关系和拟序关系

定义 10.8.1

对非空集合 A 上的关系 R，如果 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 为 A 上的偏序关系。

- 在不会产生误解时，偏序关系 R 通常记作 $\leqslant$。当 $x\,R\,y$ 时，可记作 $x \leqslant y$，读作 x “小于等于” y。

例 1

在集合 $\mathbb{N}-\{0\}$ 上的小于等于关系和整除关系，都是偏序关系。对集合 A，在 $P(A)$ 上的包含关系也是偏序关系。

定义 10.8.2

对非空集合 A 上的关系 R，如果 R 是非自反的和传递的，则称 R 为 A 上的拟序关系。

- 在不会产生误解时，拟序关系 R 通常记作 $<$。当 $x\,R\,y$ 时，可记作 $x<y$，读作 x “小于” y。

例 2

在集合 $\mathbb{N}$ 上的小于关系是拟序关系。对集合 A，在 $P(A)$ 上的真包含关系也是拟序关系。

- 偏序关系又称弱偏序关系，或半序关系。拟序关系又称强偏序关系。

定理 10.8.1

R 为 A 上的拟序关系，则 R 是反对称的。

证明：假设 R 不是反对称的。则存在 $x \in A, y \in A, x \neq y$，使 $\langle x, y\rangle \in R$ 且 $\langle y, x\rangle \in R$。由传递性，$\langle x, x\rangle \in R$。与非自反性矛盾。

- 有的书上把反对称性也作为拟序关系定义的一个条件。定理表明，这是不必要的。

定理 10.8.2

对 A 上的拟序关系 R，$R \cup R^{\circ}$ 是 A 上的偏序关系。

- 证明从略。

定理 10.8.3

对 A 上的偏序关系 R，$R - R^{\circ}$ 是 A 上的拟序关系。

- 证明从略。
- 拟序关系和偏序关系的区别只是自反性。由于它们类似，只要把偏序关系搞清，拟序关系也容易搞清。以下只讨论偏序关系。

定义 10.8.3

集合 A 与 A 上的关系 R 一起称为一个结构。集合 A 与 A 上的偏序关系 R 一起称为一个偏序结构，或称偏序集，并记作 $\langle A, R\rangle$。

例 3

$\langle \mathbb{N}, \leqslant\rangle$ 和 $\langle P(A), \subseteq\rangle$ 都是偏序集。

10.8.2 哈斯图

- 利用偏序关系的良好性质，可以把它的关系图简化为较简单的哈斯图。首先，由于自反性，每个顶点都有自圈，则可不画自圈。其次，由于反对称性，两个顶点之间至多一条有向边，则可约定箭头指向上方或斜上方并适当安排顶点位置，以便用无向边代替有向边。最后，由于传递性，依传递可得到的有向边可以不画。下面定义盖住关系，并给出作图规则。

定义 10.8.4

对偏序集 $\langle A, \leqslant \rangle$，如果 $x, y \in A, x \leqslant y, x \neq y$，且不存在元素 $z \in A$ 使得 $x \leqslant z$ 且 $z \leqslant y$，则称 y 盖住 x。A 上的盖住关系 cov$A$ 定义为

$$\mathrm{cov}A = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge y \text{ 盖住} x\}.$$

例 4

集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 上的整除关系 D_A 是 A 上的偏序关系，则 A 上的盖住关系 cov$A$ 为

$$\mathrm{cov}A = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 12 \rangle, \langle 6, 12 \rangle\}.$$

- 对偏序集 $\langle A, \leqslant \rangle$，$A$ 上的盖住关系 cov$A$ 是唯一的。可以用盖住关系画偏序集的哈斯图。作图规则为：
  1. 每个顶点代表 A 的一个元素，
  2. 若 $x \leqslant y$ 且 $x \neq y$，则顶点 y 在顶点 x 上方，
  3. 若 $\langle x, y \rangle \in \operatorname{cov} A$，则 x, y 间连无向边。

例 5

例 4 中偏序集的哈斯图如图 10.8.1。

例 6

对 $A = \{a, b, c\}$，$\langle P(A), \subseteq \rangle$ 是偏序集，它的哈斯图如图 10.8.2。

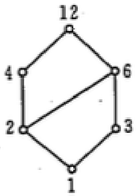

图 10.8.1

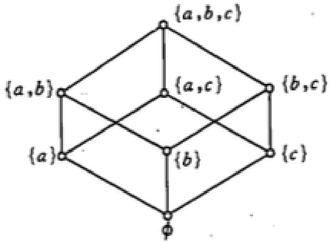

图 10.8.2

10.8.3 上确界和下确界

定义 10.8.5

对偏序集 $\langle A, \leqslant \rangle$，且 $B \subseteq A$，进一步

1. 若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow y \leqslant x))$，则称 y 为 B 的最小元，
2. 若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \leqslant y))$，则称 y 为 B 的最大元，
3. 若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)((x \in B \wedge x \leqslant y) \rightarrow x = y))$，则称 y 为 B 的极小元，
4. 若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)((x \in B \wedge y \leqslant x) \rightarrow x = y))$，则称 y 为 B 的极大元。

例 7

在例 4 的偏序集 $\langle A, D_A\rangle$ 的哈斯图中。令 $B_1 = \{2,4,6,12\}$，则 B_1 的最大元和极大元是 12，最小元和极小元是 2。令 $B_2 = \{2,3,4,6\}$，则 B_2 的极大元是 4 和 6，极小元是 2 和 3，没有最大元和最小元。

- 注意区别最小元与极小元。B 的最小元应小于等于 B 中其他各元。B 的极小元应不大于 B 中其他各元（它小于等于 B 中一些元，并与 B 中另一些元无关系）。最小元（最大元）不一定存在，若存在必唯一。在非空有限集合 B 中，极小元（极大元）必存在，不一定唯一。

定义 10.8.6

对偏序集 $\langle A, \leqslant\rangle$，且 $B \subseteq A$，进一步

1. 若 $(\exists y)(y \in A \wedge (\forall x)(x \in B \to x \leqslant y))$，则称 y 为 B 的上界，
2. 若 $(\exists y)(y \in A \wedge (\forall x)(x \in B \to y \leqslant x))$，则称 y 为 B 的下界，
3. 若集合 $C = \{y \mid y$ 是B 的上界$\}$，则 C 的最小元称为 B 的上确界或最小上界，
4. 若集合 $C = \{y \mid y$ 是B 的下界$\}$，则 C 的最大元称为 B 的下确界或最大下界。

例 8

集合 $A=\{2,3,4,6,9,12,18\}$，A 上的整除关系 D_A 是偏序关系。偏序集 $\langle A,D_A\rangle$ 的哈斯图如图 10.8.3 所示。

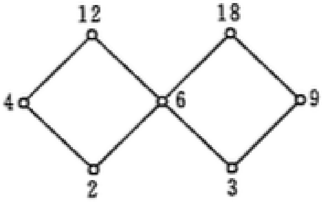

图 10.8.3

- $B_1 = \{2,4\}$ 的上界是 4 和 12，上确界是 4，下界和下确界是 2。$B_2 = \{4,6,9\}$ 没有上下界，没有上下确界。$B_3 = \{2,3\}$ 的上界是 6, 12, 18，上确界是 6，没有下界和下确界。
- B 的上下界和上下确界可能在 B 中，可能不在 B 中，但一定在 A 中。上界（下界）不一定存在，不一定唯一。上确界（下确界）不一定存在，若存在必唯一。

10.8.4 全序关系和链

定义 10.8.7

对偏序集 $\langle A, \leqslant \rangle$，对任意的 $x, y \in A$，若有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$，则称 x 和 y 是可比的

定义 10.8.8

对偏序集 $\langle A, \leqslant \rangle$，如果对任意的 $x, y \in A$，x 和 y 都可比，则称 $\leqslant$ 为 A 上的全序关系，或称线序关系。并称 $\langle A, \leqslant \rangle$ 为全序集。

例 9

$\mathbb{N}$ 上的小于等于关系是全序关系，所以 $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ 是全序集。$\mathbb{N} - \{0\}$ 上的整除关系不是全序关系。对非空集合 A, $P(A)$ 上的包含关系不是全序关系。

定义 10.8.9

对偏序集 $<A,\leqslant>$，且 $B\subseteq A$，进一步

1. 如果对任意的 $x,y\in B$，x 和 y 都是可比的，则称 B 为 A 上的链，B 中元素个数称为链的长度。
2. 如果对任意的 $x,y\in B$，x 和 y 都不是可比的，则称 B 为 A 上的反链，B 中元素个数称为反链的长度。

例 10

对例 8 中的偏序集。$\{2,4,12\},\{3,6,18\},\{3,9\},\{18\}$ 都是链。
$\{4,6,9\},\{12,18\},\{4,9\}$ 都是反链。

- 对全序集 $<A,\leqslant>$，显然 A 是链。A 的任何子集都是链。

定理 10.8.4

对偏序集 $\langle A, \leqslant \rangle$，设 A 中最长链的长度是 n，则将 A 中元素分成不相交的反链，反链个数至少是 n。

证明：施归纳于 n。
当 $n=1$ 时，A 本身就是一条反链，定理结论成立。(这时 $\leqslant$ 是恒等关系)
假设对于 $n=k$，结论成立。考虑 $n=k+1$ 的情况。当 A 中最长链的长度为 $k+1$ 时，令 M 为 A 中极大元的集合，显然 M 是一条反链。而且 $A-M$ 中最长链的长度为 k。由归纳假设，可以把 $A-M$ 分成至少 k 个不相交的反链，加上反链 M，则 A 可分成至少 $k+1$ 条反链。

- 这个定理称为偏序集的分解定理，这是组合学三大存在性定理之一，有广泛的应用。

定理 10.8.5

对偏序集 $\langle A, \leqslant \rangle$，若 A 中元素为 $mn+1$ 个，则 A 中或者存在一条长度为 $m+1$ 的反链，或者存在一条长度为 $n+1$ 的链。

10.8.5 良序关系

定义 10.8.10

对偏序集 $\langle A, \leqslant \rangle$，如果 A 的任何非空子集都有最小元，则称 $\leqslant$ 为良序关系，称 $\langle A, \leqslant \rangle$ 为良序集。

例 11

$\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ 是全序集，也是良序集。$\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle$ 是全序集，不是良序集。其中 $\mathbb{Z}$ 是整数集。因为 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$，但是 $\mathbb{Z}$ 没有最小元。

定理 10.8.6

一个良序集一定是全序集。

证明：设 $\langle A, \leqslant \rangle$ 是良序集。对任意的 $x, y \in A$，可构成 $\{x, y\} \subseteq A$，它有最小元。该最小元或为 x 或为 y，则 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$。所以，$\langle A, \leqslant \rangle$ 是全序集。

定理 10.8.7

一个有限的全序集一定是良序集。

证明：设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，且 $\langle A,\leqslant\rangle$ 是全序集。假设 $\langle A,\leqslant\rangle$ 不是良序集，则存在非空子集 $B\subseteq A$，B 中没有最小元。因为 B 是有限集合，所以存在 $x,y\in B$，使 x 和 y 无关系。与全序集矛盾。

- 对一个非良序的集合，可以定义集合上的一个全序关系，使该集合成为良序集。例如，$\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle$ 不是良序集。在 $\mathbb{Z}$ 上定义全序关系 R 为：对 $a, b \in \mathbb{Z}$，若 $|a| \leqslant |b|$，则 aRb；若 $a > 0$，则 $-aRa$。于是
- $0R-1, -1R1, 1R-2, -2R2, \ldots$ 这样，$\mathbb{Z}$ 的最小元是 0，$\mathbb{Z}$ 的子集都有最小元。$\langle \mathbb{Z}, R \rangle$ 是良序集。这个定义 R 的过程称为良序化。

定理 10.8.8（良序定理）

任意的集合都是可以良序化的。

- 良序定理可以由 Zorn 引理证明，它们都是选择公理的等价形式。这里不给出证明。
- 设 R 是实数集合，$\leqslant$ 是 R 上的小于等于关系。显然，$\langle R, \leqslant\rangle$ 是全序集，不是良序集。可以在 $\langle R, \leqslant\rangle$ 上定义常用的区间。

定义 10.8.11

在全序集 $\langle R, \leqslant \rangle$ 上，对于 $a, b \in R, a \neq b, a \leqslant b$，则

1. $[a, b] = \{x \mid x \in R \wedge a \leqslant x \leqslant b\}$，称为从 a 到 b 的闭区间，
2. $(a, b) = \{x \mid x \in R \wedge a \leqslant x \leqslant b \wedge x \neq a \wedge x \neq b\}$，称为从 a 到 b 的开区间，
3. $[a, b) = \{x \mid x \in R \wedge a \leqslant x \leqslant b \wedge x \neq b\}$，$(a, b] = \{x \mid x \in R \wedge a \leqslant x \leqslant b \wedge x \neq a\}$ 都称为从 a 到 b 的半开区间，
4. 还可以定义下列区间

$$\begin{aligned}
(-\infty, a] &= \{x \mid x \in R \wedge x \leqslant a\}, \\
(-\infty, a) &= \{x \mid x \in R \wedge x \leqslant a \wedge x \neq a\}, \\
[a, \infty) &= \{x \mid x \in R \wedge a \leqslant x\}, \\
(a, \infty) &= \{x \mid x \in R \wedge a \leqslant x \wedge x \neq a\}, \\
(-\infty, \infty) &= R.
\end{aligned}$$

谢谢