

# 第三次习题课

# 考试要点及例题讲解

# 集合的基本操作及性质

• 下列关于集合的说法不正确的是

- A. 存在  $H = \{x | x \text{ 是一个集合} \wedge x \notin x\}$
- B.  $\emptyset \in \emptyset$ .
- C.  $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{\{a, b\}\}\}$ .
- D. 若  $A \in B$  且  $B \subseteq C$ , 则  $A \subseteq C$ .

ABD

可用反证法证明集合  $H$  是不存在的. 假设存在这样的集合  $H$ . 下面将证明, 对某一具体事物  $y$ , 无法确定  $y$  是否属于  $H$ . 我们以  $H$  本身作为这个具体事物  $y$ , 证明中  $y$  就是  $H$ . 对于集合  $H$ , 必有  $y \in H$  或  $y \notin H$ , 下面分别考虑之. (1) 若  $y \in H$ . 由于  $y$  是  $H$  的元素,  $y$  就具有  $H$  中元素的性质  $y \notin y$ . 考虑到  $y$  就是  $H$ , 所以  $y \notin H$ . 这与  $y \in H$  矛盾. (2) 由于  $y$  不是  $H$  的元素,  $y$  就没有  $H$  中元素的性质, 因此  $y \in y$ . 又因  $y$  就是  $H$ , 则  $y \in H$ . 这与  $y \notin H$  矛盾. 两种情况都存在矛盾, 所以  $y \in H$  和  $y \notin H$  都不成立, 集合  $H$  不存在. 问题的根源在于, 集合论不能研究“所有集合组成的集合”. 这是集合论中的一个悖论, 称为 Russell 悖论.

# 幂集和广义集合

- 写出  $\{\{a\}, a\}$  的幂集.

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\{a\}, a\}\}$$

- 写出  $\{\{1, \{2\}\}\}$  的幂集.

$$P(A) = \{\emptyset, \{\{1, \{2\}\}\}\}$$

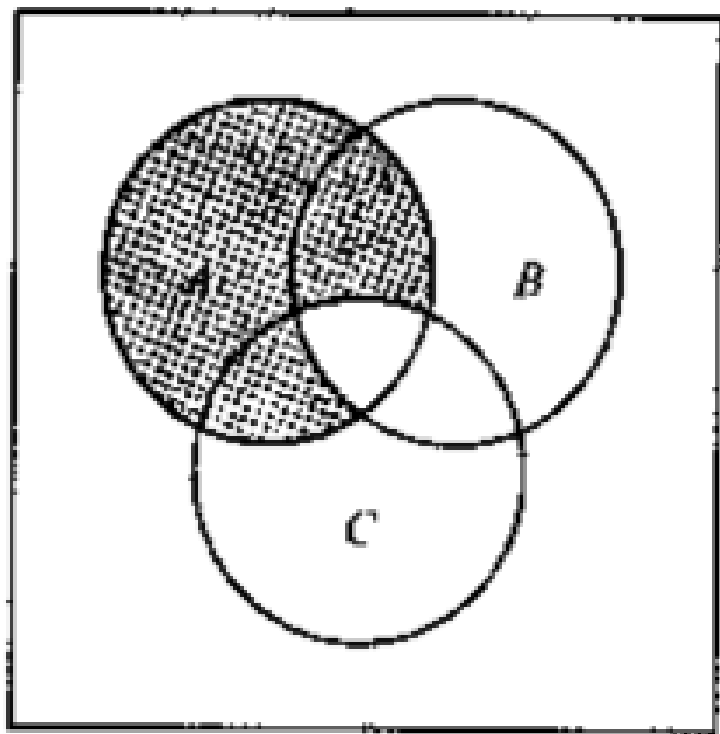
- 写出  $\cap\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$ .

$$\cap\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\} = \{3\}$$

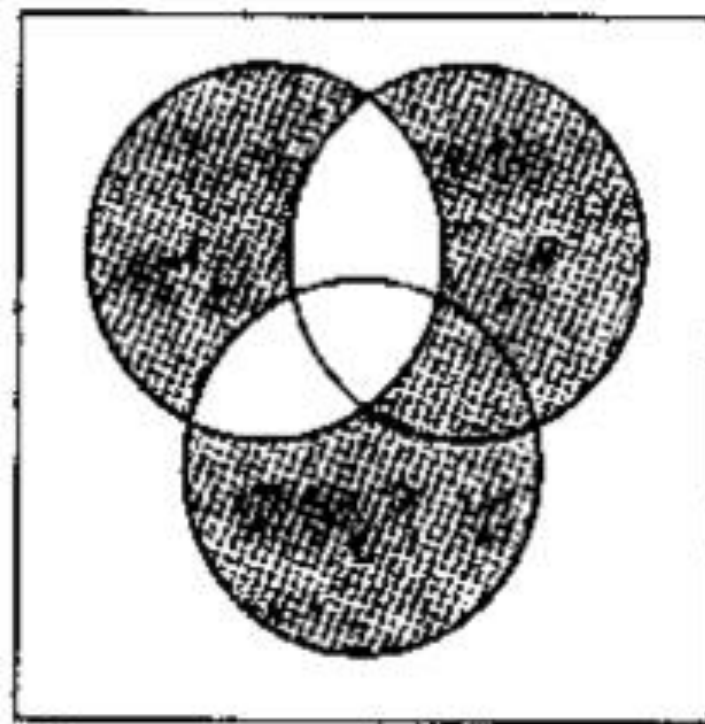
# 集合的图像表示

- 画出下列集合的文氏图

$$A \cap (-B \cup -C).$$



$$A \oplus (B \cup C).$$



# 关系及关系矩阵

设  $A=\{1,2,3\}$ , 在  $A$  上有多少不同的关系? 设  $|A|=n$ , 在  $A$  上有多少不同的关系?

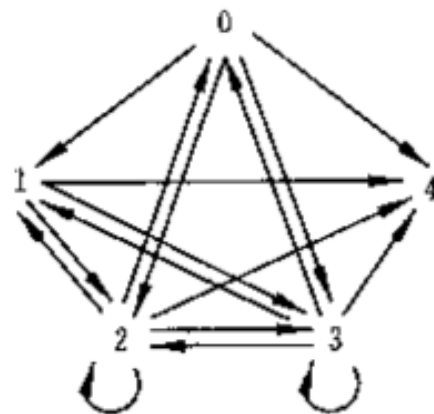
$A=\{1,2,3\}$  时,  $A$  上不同的关系有  $2^{3^2}=512$  种.

$|A|=n$  时,  $A$  上不同的关系有  $2^{n^2}$  种.

对  $A=\{0,1,2,3,4\}$  上的下列关系, 给出关系图和关系矩阵.

$R_1 = \{ \langle x, y \rangle \mid x < y \text{ 或 } x \text{ 是质数} \}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



# 关系的逆、合成

设集合  $A$  上的关系  $R$  为

$$A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\},$$

$$R = \{\langle a, \{a\} \rangle, \langle \{a\}, \{\{a\}\} \rangle\}.$$

求  $R^{-1}$     $R \upharpoonright \{\{a\}\}$     $R \circ R$     $R[\{a\}]$

$$R^{-1} = \{\langle \{\{a\}\}, \{a\} \rangle, \langle \{a\}, \{a\} \rangle\}$$

$$R \upharpoonright \{\{a\}\} = \{\langle \{a\}, \{\{a\}\} \rangle\}$$

$$R \circ R = \{\langle a, \{\{a\}\} \rangle\}$$

$$R[\{a\}] = \{\{a\}\}$$

对  $X$  到  $Y$  的关系  $Q$ ,  $Y$  到  $Z$  的关系  $S$ ,  
 $Z$  到  $W$  的关系  $R$ .

下列说法中正确的是

- A.  $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$ .
- B.  $\text{ran}(R^{-1}) = \text{dom}(R)$
- C.  $(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q)$
- D.  $S \circ R \neq R \circ S$

ABCD

# 等价、相容、偏序、拟序

- 等价：自反+对称+传递
- 相容：自反+对称
- 偏序：自反+反对称+传递
- 拟序：非自反+反对称+传递

$R$  是  $A$  上自反的  $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow xRx)$ ,

$R$  是  $A$  上非自反的  $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \not R x)$ .

$R$  是  $A$  上对称的  $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)$

$$((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy) \rightarrow yRx)$$

$R$  是  $A$  上反对称的  $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)$

$$((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y)$$

$R$  是  $A$  上传递的  $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)$

$$((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz).$$



# 函数的概念及性质

- 下列说法中正确的是
- A.  $\{\langle x, y \rangle \mid x \in \mathbf{N} \wedge y \in \mathbf{N} \wedge x + y < 10\}$  是函数
- B.  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 2x - 15$  是单射的
- C.  $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = 2^x$  是双射的
- D.  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}, f(x) = |x|$  是满射的

CD

(1) 若  $\text{ran}(f) = B$ , 则称  $f$  是满射的, 或称  $f$  是  $A$  到  $B$  上的;

(2) 若对任意的  $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ , 都有

$f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称  $f$  是单射的, 或内射的, 或一对一的;

(3) 若  $f$  是满射的又是单射的, 则称  $f$  是双射的, 或一对一  $A$  到  $B$  上的. 简称双射.

# 函数的复合及逆

设  $f, g, h \in \mathbf{N}_\mathbf{N}$ ,  $f(n) = n + 1$ ,  $g(n) = 2n$ ,  $h(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ 是偶数} \\ 1 & n \text{ 是奇数} \end{cases}$ , 求出  $f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ h, h \circ g, (f \circ g) \circ h$ .

$$f \circ f(n) = n + 2, f \circ g(n) = 2n + 1, g \circ f(n) = 2n + 2,$$

$$g \circ h(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ 为偶数} \\ 1 & n \text{ 为奇数} \end{cases}, h \circ g(n) = 0, (f \circ g) \circ h(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ 为偶数} \\ 3 & n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

**定义 11.2.2** 设  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ , 如果  $g \circ f = I_A$ , 则称  $g$  为  $f$  的左逆; 如果  $f \circ g = I_B$ , 则称  $g$  为  $f$  的右逆.

# 补充题讲解

## 9.1. 集合的概念和表示方法

- ( ) 1. 以下\_\_不是集合
- A.  $\phi \times P(\phi)$  ( $P$  表示幂集运算)
  - B.  $\{x | x \text{ 是整数且 } |x| \text{ 是素数}\}$
  - C.  $\{x | x \text{ 是包含 } 1 \text{ 的集合}\}$
  - D.  $\{x | x \text{ 包含 } 1 \text{ 且 } x \subseteq R\}$

C

书P131

矛盾. 两种情况都存在矛盾, 所以  $y \in H$  和  $y \notin H$  都不成立, 集合  $H$  不存在. 问题的根源在于, 集合论不能研究“所有集合组成的集合”. 这是集合论中的一个悖论, 称为 Russell 悖论.

## 9.3. 集合的运算

( ) 10. 以下各项中正确的选项为\_\_\_\_\_。

A.  $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \emptyset$

B.  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$

C.  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

D.  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \emptyset = \{\{\emptyset\}\}$

B

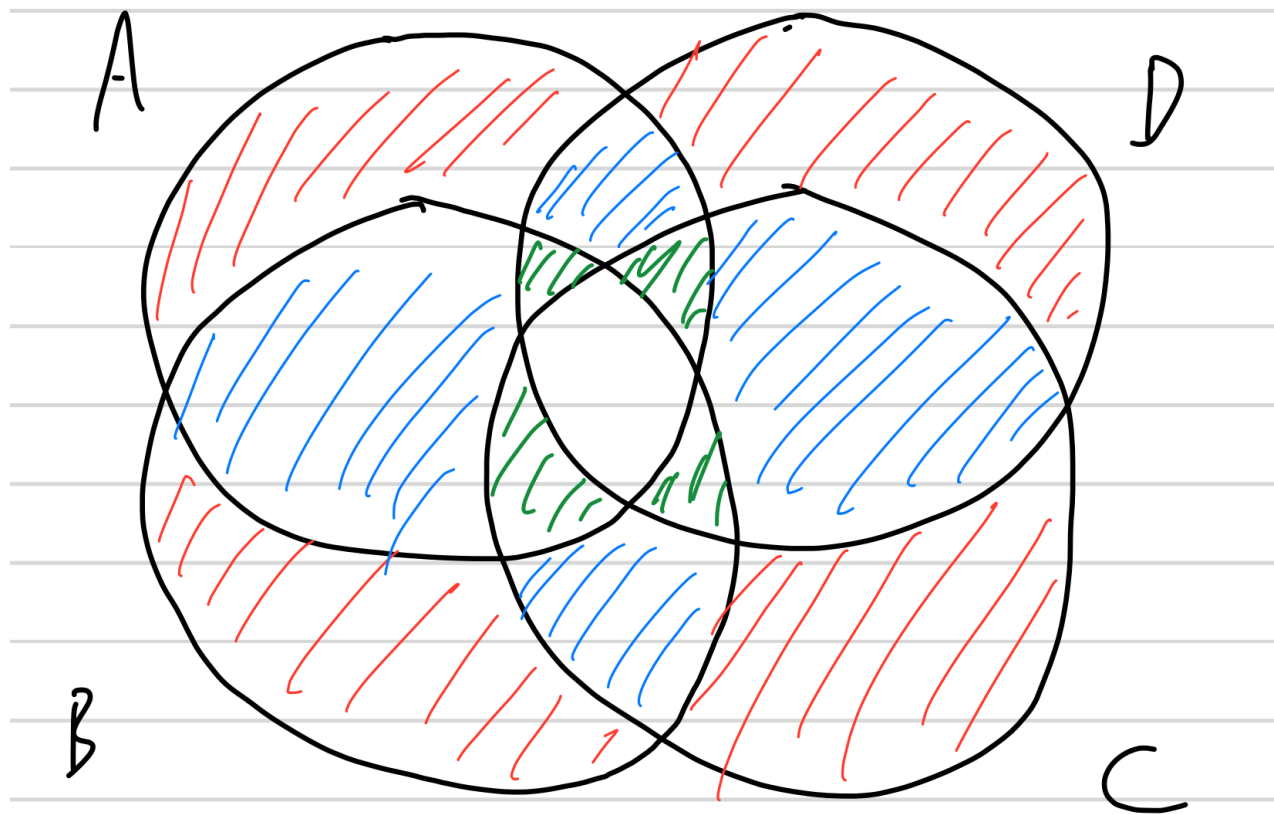
大括号层级分清楚

## 9.4. 集合的图形表示法

10. 对 24 名科技人员进行掌握外语情况的调查，其统计资料如下：会说英语、日语、德语、法语的人数分别是 13、5、10 和 9。其中同时会说英语、日语的人数为 2。同时会说英语、德语或同时会说英语、法语或同时会说德语、法语两种语言的人数均为 4。会说日语的人既不会说法语也不会说德语。则同时会说英语、德语、法语的人数为 1。

$$\sum 1\text{个} - \sum 2\text{交} + \sum 3\text{交} - 4\text{交} = 4\text{并}$$
$$(37) - (14) + (x) = 24 \Rightarrow x = 1$$

## 9.4. 集合的图形表示法



## 9.5. 集合运算的性质和证明

( ) 2.  $A \cup (B \cap C)$  与 \_\_\_ 不恒等

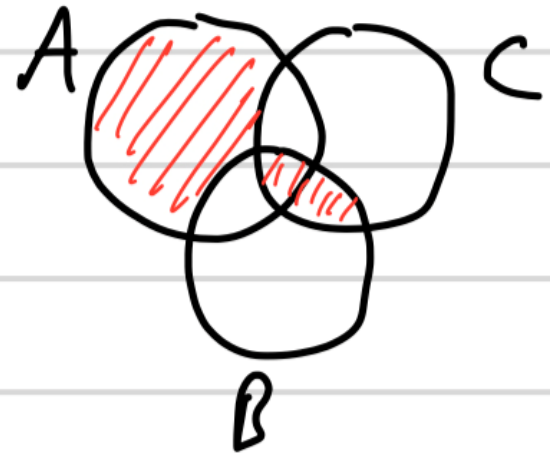
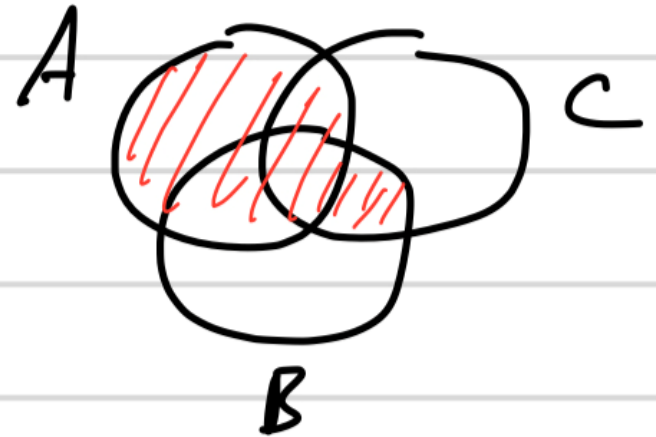
A.  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

B.  $((A - B) - C) \cup (B \cap C)$

C.  $(A - B) \cup (B \cap C) \cup (A - C)$

D.  $A \cup (B - (B \oplus C))$

B





## 9.5. 集合运算的性质和证明

书P142及145

( ) 3. 假设  $A \subseteq B$ , 以下\_\_\_不一定成立

A.  $\cup A \subseteq \cup B$

B.  $\cap A \subseteq \cap B$

C.  $P(A) \subseteq P(B)$

D.  $A - B \subseteq B - A$

B

定理 9.5.11 对集合的集合  $A$  和  $B$ , 有

(1)  $A \subseteq B \Rightarrow \cup A \subseteq \cup B$ ,

(2)  $A \subseteq B \Rightarrow \cap B \subseteq \cap A$ , 其中  $A$  和  $B$  非空.

证明 (1) 设  $A \subseteq B$ . 对任意的  $x$ , 可得

$$\begin{aligned} x \in \cup A &\Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in A) \\ &\Rightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in B) \Leftrightarrow x \in \cup B \end{aligned}$$

所以,  $\cup A \subseteq \cup B$ .

(2) 设  $A \subseteq B$ . 对任意的  $x$ , 可得

$$\begin{aligned} x \in \cap B &\Leftrightarrow (\forall y)(y \in B \rightarrow x \in y) \\ &\Rightarrow (\forall y)(y \in A \rightarrow x \in y) \text{ (由 } A \subseteq B \text{)} \\ &\Leftrightarrow x \in \cap A \end{aligned}$$

所以,  $\cap B \subseteq \cap A$ .

## 9.6. 有限集合的基数

1. 对于有限集合  $A$ 、 $B$ ， $P(P(A) \times B)$  基数是  $2^{|B|} * 2^{|A|}$

$P(A)$  基数是  $2^{|A|}$

## 9.7. 集合论公理系统

三. (8') 证明:  $A \times A \in P(P(P(A)))$ .

9.7

证明: (根据定义证明)

$$A \times A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \} = \{ \{x, y\}, \{x\} \mid x, y \in A \}.$$

$$\{x\} \in P(A), \{x, y\} \in P(A)$$

$$\Rightarrow \{ \{x\}, \{x, y\} \} \subseteq P(A)$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \subseteq P(A)$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in PP(A)$$

$$\Rightarrow A \times A \subseteq PP(A)$$

$$\Rightarrow A \times A \in PPP(A).$$

## 10.1. 二元关系

2. 设  $A$  是  $n$  个元素的集合, 则  $A$  中的所有不同关系的总数是  $2^{n^2}$

$A \times A$  有  $n^2$  种组合

每个组合有两种可能 ( $xRy$  或  $x \not R y$ )

## 10.5. 关系的闭包

五. (8') 给定  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  和  $A$  上的关系  $R = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$ .

求:  $R$  的自反闭包、对称闭包及传递闭包的关系矩阵.

五.  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}.$$

$$M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I(R) = R \cup R^0 = R \cup I_A$$

$$M(I(R)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(R) = R \cup R^{-1}$$

$$M(S(R)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R$  本身是传递的,  $M(t(R)) = M(R)$ .

## 10.5. 关系的闭包

八、(10') 设  $A = \{a, b, c, d\}$  中的关系  $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle \}$ ,

(1) 用  $M(R)$  的幂求  $R^2, R^3$ ;

(2) 求最小的自然数  $m, n$  ( $m < n$ ), 使得  $R^m = R^n$ 。

(3) 求出关系  $R$  的自反、对称且传递的闭包, 请写出详细步骤。

八. (1)  $A = \{a, b, c, d\}$ ,

$$M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(R^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^2 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, d \rangle \}.$$



## 10.5. 关系的闭包

$$M(R^3) = M(R^2 \circ R)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^3 = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle \}.$$

$$(2) \quad M(R^4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^2 = R^4 \Rightarrow m=2, n=4.$$

$$(3) \quad \text{自反} \quad r(R) = R \cup I_A = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \\ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle \}.$$

$$\text{对称} \quad s(R) = R \cup R^{-1} = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \\ \langle c, b \rangle, \langle d, c \rangle \}.$$

$$\text{传递} \quad t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \dots$$

$$M(t(R)) = M(R \cup R^2 \cup R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$t(R) = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, a \rangle, \\ \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \\ \langle c, d \rangle \}.$$

## 10.6. 等价关系和划分

9

3.  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  上的等价关系的个数为

书上P181

**定理 10.6.1**  $R$  是非空集合  $A$  上的等价关系, 对任意的  $x, y \in A$ , 成立

- (1)  $[x]_R \neq \emptyset$  且  $[x]_R \subseteq A$ ,
- (2) 若  $xRy$ , 则  $[x]_R = [y]_R$ ,
- (3) 若  $x \not R y$ , 则  $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ ,
- (4)  $\bigcup \{[x]_R \mid x \in A\} = A$ .



## 10.6. 等价关系和划分

四. (8') 设  $R$  是  $A$  中的对称关系, 且  $R^2 \subseteq R$ , 证明:  $S = I_A \cup R$  是  $A$  上的等价关系.

先证明自反性

$$\langle x, x \rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in I_A \cup R \Rightarrow x S x \text{ 得证.}$$

再证明对称性

$$x S y \Leftrightarrow x R y \vee x I_A y \Leftrightarrow y R x \vee y I_A x \Leftrightarrow y S x$$

最后是传递性

$$(x S y) \wedge (y S z)$$

$$\Leftrightarrow (x I_A y \vee x R y) \wedge (y I_A z \vee y R z)$$

$$\Leftrightarrow (x I_A y \wedge y I_A z) \vee (x I_A y \wedge y R z)$$

$$\vee (x R y \wedge y I_A z) \vee (x R y \wedge y R z)$$

$$\Leftrightarrow (x I_A z) \vee (x R z) \vee (x R z) \vee (x R^2 z)$$

$$\Rightarrow x S z.$$

## 10.8. 偏序关系

- ( ) 6. 下面四个关系中\_\_\_\_\_是拟序关系
- A.  $R$  中的 “ $>$ ” 关系
  - B.  $N - \{0\}$  中的整除关系
  - C.  $N - \{0\}$  中的互素关系
  - D.  $R = \{ \langle x, y \rangle \mid (x - y) \text{ 被 } 5 \text{ 整除}, x, y \in Z \}$

A

书上P185

**定义 10.8.2** 对非空集合  $A$  上的关系  $R$ , 如果  $R$  是非自反的和传递的, 则称  $R$  为  $A$  上的拟序关系.

**定理 10.8.1**  $R$  为  $A$  上的拟序关系, 则  $R$  是反对称的.

## 10.6-8. 等价关系和划分、相容关系和覆盖、偏序关系

( )7. 设  $R$  是  $A$  中的一个关系,  $I_A \subseteq R$ , 若有  $\langle a, b \rangle \in R \wedge \langle a, c \rangle \in R \Rightarrow \langle b, c \rangle \in R$ , 则下列说法最准确的是\_\_\_\_\_

- A.  $R$  是等价关系
- B.  $R$  是相容关系
- C.  $R$  是偏序关系
- D.  $R$  是拟序关系

A

(自反+对称) +传递

# 10.6-8. 等价关系和划分、相容关系和覆盖、偏序关系

( ) 11.  $R_1, R_2$  均为  $A$  中的关系, 下面结论正确的是\_\_\_\_\_。

B

$$r_1 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$$

$$r_2 = \{ \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$$

$$r_1 \cup r_2 = \{ \langle 1, 3 \rangle \}$$

A. 若  $R_1, R_2$  均为对称关系, 则  $R_1 \circ R_2$  为对称关系

B. 若  $R_1$  是偏序关系, 则  $R_1^{-1}$  也是偏序关系

C.  $t(R_1) \cup t(R_2) = t(R_1 \cup R_2)$

D.  $st(R_1) = ts(R_1)$

定理 10.5.6 对非空集合  $A$  上的关系  $R_1, R_2$ , 则

$$(1) r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2),$$

$$(2) s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2),$$

$$(3) t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2).$$

定理 10.5.12 对非空集合  $A$  上的关系  $R$ , 有

$$(1) rs(R) = sr(R),$$

$$(2) rt(R) = tr(R),$$

$$(3) st(R) \subseteq ts(R).$$

其中  $rs(R) = r(s(R))$ , 其他类似.

书上P166及P174

## 10.6-8. 等价关系和划分、相容关系和覆盖、偏序关系

( ) 15. 设  $R$  是  $A$  中的对称关系, 且  $R^2 \subseteq R$ , 则  $S = I_A \cup R$  是  $A$  上\_\_\_\_\_。

- A. 相容关系
- B. 等价关系
- C. 偏序关系
- D. 拟序关系

B

对称+ (自反+传递)

## 11.1. 函数和选择公理

4.  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ . 从  $A$  到  $B$  的满射函数有 0 个。

书上P195

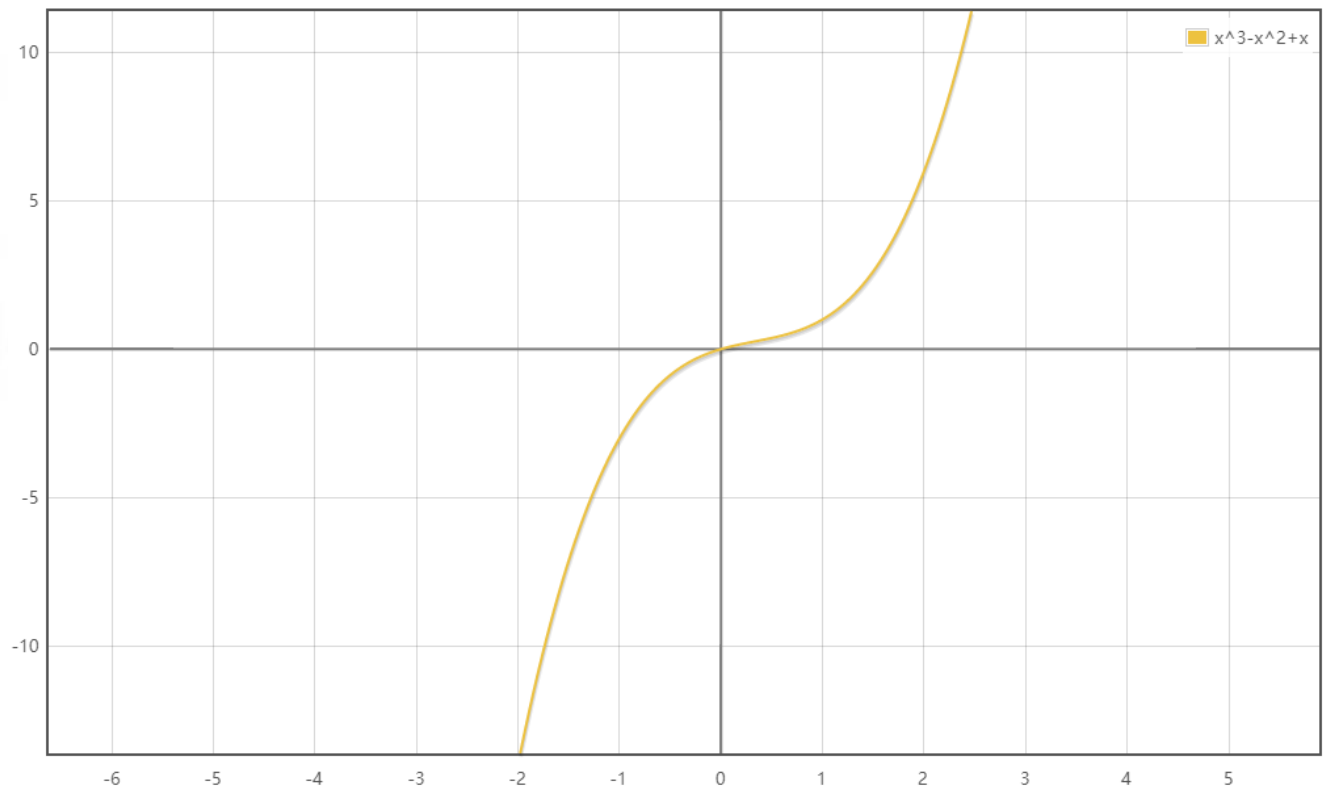
如果  $f: A \rightarrow B$  是满射的, 则对任意的  $y \in B$ , 存在  $x \in A$ , 使  $f(x) = y$ . 如果  $f: A \rightarrow B$  是单射的, 则对任意的  $y \in \text{ran}(f)$ , 存在唯一的  $x \in A$ , 使  $f(x) = y$ .

## 11.1. 函数和选择公理

( ) 13. 函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - x^2 + x$  是\_\_\_\_\_。

- A. 满射但是不单射的
- B. 单射但是不满射的
- C. 双射的
- D. 既不是满射也不是单射的

C





## 11.2. 函数的合成与函数的逆

( ) 9.  $f, g$  是函数. 若  $g$  不是单射的, 则\_\_\_\_\_

A.  $f \circ g$  不是单射的

B.  $g \circ f$  不是单射的

C. A, B 都不对

D. 不一定

A

书上P197

定理 11.2.1 设  $g:A \rightarrow B, f:B \rightarrow C$ , 则

(1)  $f \circ g$  是函数  $f \circ g:A \rightarrow C$ ,

(2) 对任意的  $x \in A$ , 有  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .



## 11.2. 函数的合成与函数的逆

( ) 8.  $f$  是集合  $A$  到集合  $B$  的关系, 则\_\_\_\_\_

- A. 若  $f$  是函数, 则  $f^{-1}$  也是函数
- B. 若  $f^{-1}$  是函数, 则  $f$  也是函数
- C. 若  $f$  不是函数, 则  $f^{-1}$  也不是函数
- D. 都不对

D

多对一vs.一对多

## 11.2. 函数的合成与函数的逆

( ) 14. 函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$  与  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(y) = y - 1$ , 则函数的合成  $h = f \circ g$  为\_\_\_\_\_。

A.  $h(x) = x$

B.  $h(x) = x^2 - 1$

C.  $h(x, y) = (x + 1)(y - 1)$

D.  $h(x) = x^2 + x - 1$

A

$$h(x) = (x - 1) + 1$$

## 11.2. 函数的合成与函数的逆

等于

8. 若函数  $f: A \rightarrow B$  是双射的, 则  $f$  的左逆\_\_\_\_\_右逆 (等于, 不等于)。

书上P200

定理 11.2.8 设  $f: A \rightarrow B, A \neq \emptyset$ , 则

- (1)  $f$  存在左逆, 当且仅当  $f$  是单射的;
- (2)  $f$  存在右逆, 当且仅当  $f$  是满射的;
- (3)  $f$  存在左逆又存在右逆, 当且仅当  $f$  是双射的;
- (4) 若  $f$  是双射的, 则  $f$  的左逆等于右逆.

(4) 设  $f$  的左逆为  $g: B \rightarrow A$ , 右逆为  $h: B \rightarrow A$ , 则  $g \circ f = I_A, f \circ h = I_B$ .

$$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I_A \circ h = h$$

所以,  $g = h$ .

## 11.3. 函数的性质

五. (8') 设  $f: A \rightarrow B, g: C \rightarrow D, f \subseteq g, C \subseteq A$ , 证明  $f = g$

$\forall \langle x, y \rangle \in g$ , 有  $x \in C$ , 由  $C \subseteq A$ , 则  $x \in A$ ,

那么  $\exists y_0, f(x) = y_0$ , 即  $\langle x, y_0 \rangle \in f$ ,

又由  $f \subseteq g$ , 则  $\langle x, y_0 \rangle \in g$ .

由函数定义易知  $y = y_0$ , 因此  $\langle x, y \rangle \in f$

则  $g \subseteq f$ , 所以  $f = g$ .