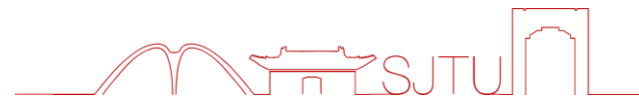




上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY



离散数学 第二次助教课

蔡子诺

2024年11月25日

饮水思源 · 爱国荣校



题目

第一章: 2, 3, 4, 6, 8

第二章: 10, 13, 14, 16, 17, 21, 22, 23, 25

第四章: 26, 27, 30, 31, 32, 33, 34

第五章: 41, 43, 47



第一章 命题逻辑的基本概念

● 考点一：命题的判断

□ 非真即假的陈述句

● 考点二：命题联结词及真值表

● 考点三：重言式、可满足式、矛盾式

● 考点四：代入规则

□ 原子命题、全部代换

● 考点五：命题形式化

□ 易错点：异或的形式化

● 考点六：(逆)波兰表达式



D, 真值表法

2. 命题公式 $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$ 具有 ____ 个使其为真的指派。

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

方法1：为假的指派 $\rightarrow R$ 为F, (P and Q)为F

方法2：真值表法



第一章

③ 命题公式 $P \vee ((Q \vee R) \wedge S)$ 的波兰表达式为 $\vee P \wedge \vee Q R S$

④ 设P：天下雨，Q：他在室内运动，则命题“除非天下雨，否则他不在室内运动”的形式化为

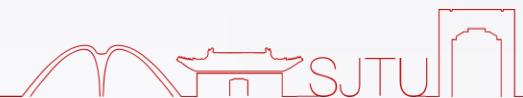
$\neg P \rightarrow \neg Q$

⑩ 设P：“你陪伴我”，Q：“你代我叫车子”，R：“我将出去”。则命题：“除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去”的形式化为：

$\neg (P \vee Q) \rightarrow \neg R$

⑥ 命题公式 $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$ 是 重言式

P	Q	结果
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T





第二章 命题逻辑的等值和推理演算

④ 考点一：等值公式 (18条)

④ 考点二：联结词的完备集

④ 考点三：对偶式

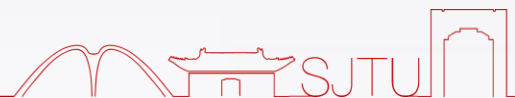
④ 考点四：范式、主范式

④ 考点五：推理公式

④ 考点六：推理演算

- 条件证明规则

- 归结法





第二章 联结词的完备集

下面有 ____ 个命题联结词集合是完备集。

B

- $\{\neg, \wedge\}$
- $\{\neg, \vee\}$
- $\{\neg, \rightarrow\}$
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$
- $\{\vee, \rightarrow\}$
- $\{\wedge, \rightarrow\}$
- $\{\vee, \uparrow\}$
- $\{\downarrow\}$

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

不完备集

- $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 不是完备的
因为 \neg 不能仅由该集合的联结词表达出
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$ 不是完备的
- $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 的任何子集都是不完备的
 $\{\neg, \leftrightarrow\}$ 的任何子集也是不完备的
(如果一个联结词的集合是不完备的, 那么它的任何子集都是不完备的)
- $\{\vee, \wedge\}$ 不是完备的

最小完备集的个数为4个





第二章 联结词的完备集



17

逻辑联结词或非 \downarrow 可以定义为: $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$ 。将公式 $\neg(x \vee y) \wedge z$ 转换成只用 \downarrow 表示的公式 ____。

$$\underline{((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)) \downarrow (z \downarrow z)}.$$



21

$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$, 用或非联结词表示出 $P \rightarrow Q$ 为 ____。

$$\underline{((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow P \downarrow Q)}$$



第二章 对偶式



13

$P \rightarrow Q \vee R \rightarrow S$ 的对偶式为 ____。

$$\underline{(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge S}$$

注意运算顺序和括号的添加



第二章 主范式 (填空题)



16

C

16. 命题公式 $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$ 的主析取范式中含极小项的个数为 ____。

A. 8

B. 3

C. 5

D. 0



第二章：主范式

25 设命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q) \vee (Q \wedge (\neg P \rightarrow R))$ 主析取范式。

1. 消去联结词
2. 否定词内移
3. 使用分配律
4. 添加缺失项

$$\begin{aligned}
 G &= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge (P \vee R)) \\
 &= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge R) \\
 &= (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\
 &\quad \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \\
 &\quad \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\
 &= \bigvee_{3,4,5,6,7}
 \end{aligned}$$

主合取范式: $\bigwedge_{7,6,5}$





第二章 推理公式

22

22. 设命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q)$, $H = P \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$, 则 G 与 H 的关系是 ____。

A. $G \Rightarrow H$

B. $H \Rightarrow G$

C. $G = H$

D. 以上都不是

A

23

23. 下面 4 个推理定律中, 不正确的是 ____。

A. $A \Rightarrow (A \vee B)$

B. $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$

C. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$

D. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

D



第二章：自然语句形式化+推理演算

14. 证明下列推理关系:如果李华在光明中学上学,那么他不是初中生,就是高中生。如果李华是初中生,那么他需要参加中考。如果李华是高中生,那么他经常给外国的友人写信。如果李华经常给外国的友人写信,那么他的英文写作能力很强。李华的英文写作能力不强。从而知:如果李华在光明中学上学,那么他需要参加中考。

自然语句形式化

P : 李华在光明中学上学
 Q : 李华初中生
 R : 李华高中生
 S : 李华参加中考
 T : 李华给外国友人写信
 W : 李华英文写作能力强

$(P \rightarrow Q \vee R), Q \rightarrow S, R \rightarrow T, T \rightarrow W, \neg W \Rightarrow P \rightarrow S$

(1) P 附加前提引入
(2) $P \rightarrow Q \vee R$ 前提引入
(3) $Q \vee R$ (1)(2)分离
(4) $T \rightarrow W$ 前提引入
(5) $\neg W \rightarrow \neg T$ (4)置块
(6) $\neg W$ 前提引入
(7) $\neg T$ (5)(6)分离
(8) $R \rightarrow T$ 前提引入
(9) $\neg T \rightarrow \neg R$ (8)置块
(10) $\neg R$ (7)(9)分离
(11) Q (3)(10)
(12) $Q \rightarrow S$ 前提引入
(13) S (11)(12)分离
(14) $P \rightarrow S$ 条件证明规则





第四章 谓词逻辑的基本概念

● 考点一：基本概念（谓词、个体词、函数、量词、自由变元与约束变元、辖域）

● 考点二：合式公式的判断

● 考点三：自然语句形式化

□所有的有理数都是实数；

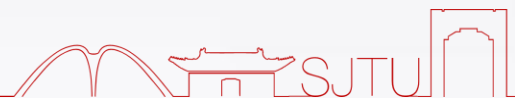
□有的实数是有理数；

□没有有理数是无理数；

□有的实数不是有理数

● 考点四：有限域下的表示

● 考点五：普遍有效性的判定





第四章 基本概念



30

30. 公式 $(\forall x)((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\exists y)R(y)) \wedge S(z)$ 的自由变元是 z, 全称量词的辖域为 $((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\exists y)R(y))$ 。

26

26. 若个体域为整数集合, 下列公式中 ____ 不是命题。

A. $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = x)$

B. $(\forall x)(\exists y)(x \cdot y = 1)$

C. $(\forall x)(x \cdot y = x)$

D. $(\exists x)(\exists y)(x \cdot y = 2)$

C





27. 设个体域 $D = \{a, b\}$, 则公式 $(\forall x)(F(x) \wedge G(x))$ 消去量词后可表示为 ____。

A. $(F(a) \wedge F(b)) \vee (G(a) \wedge G(b))$

B. $(F(a) \vee F(b)) \wedge (G(a) \vee G(b))$

C. $(F(a) \wedge G(a)) \vee (F(b) \wedge G(b))$

D. $(F(a) \vee G(a)) \wedge (F(b) \vee G(b))$



第四章 自然语句形式化



31

D

31. 设 $A(x) : x$ 是人, $B(x) : x$ 犯错误, 命题“没有人不犯错误”符号化为

A. $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$

B. $\neg(\exists x)(A(x) \rightarrow \neg B(x))$

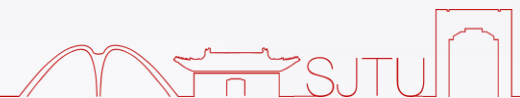
C. $\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$

D. $\neg(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$

32

设 $R(x)$ 表示 x 是实数, $E(x, y)$ 表示 $x = y$, 则语句“对所有的实数 x , 都存在实数 y , 使得 $x = y$ ”的符号化为 ____。

$$(\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists y)(R(y) \wedge E(x, y)))$$





第四章 普遍有效性的判定



33

33. 公式 $(\exists x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$ 不是 (是/不是) 普遍有效的。

$Q(0)=Q(1)=P(0)=F, P(1)=F$

34

34. 公式 $\neg((\forall x)F(x) \rightarrow (\exists y)G(y)) \wedge (\exists y)G(y)$ 是 (是/不是) 不可满足的。



第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

● 考点一：等值式

● 考点二：范式

□ 前束范式：去联结词 \rightarrow 否定词内移 \rightarrow 量词左移 \rightarrow 变元异名

□ Skolem 标准型

● 考点三：推理演算

□ 全称/存在量词的引入与消去

□ 归结推理



A

41. 下列各式哪个不正确?

A. $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

B. $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

C. $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

D. $(\forall x)(P(x) \vee q) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee q$



第五章 范式

47. 求公式 $((\forall x)(\exists y)(P(x, y) \rightarrow Q(y))) \rightarrow (\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists u)(\forall v)L(x, u, v))$ 的前束范式和 Skolem 标准形。

$$\begin{aligned}
 & ((\forall x)(\exists y)(P(x, y) \rightarrow Q(y))) \rightarrow (\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists u)(\forall v)L(x, u, v)) \\
 = & \neg((\forall x)(\exists y)(\neg(P(x, y) \vee Q(y))) \vee (\forall x)(\neg R(x) \vee (\exists u)(\forall v)L(x, u, v))) \\
 = & (\exists x)(\forall y)(P(x, y) \wedge \neg Q(y)) \vee (\forall x)(\neg R(x) \vee (\exists u)(\forall v)L(x, u, v)) \\
 = & (\exists x)(\forall y)(P(x, y) \wedge \neg Q(y)) \vee ((\forall x)(\exists u)(\forall v)(\neg R(x) \vee L(x, u, v))) \\
 = & (\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(P(x, y) \wedge \neg Q(y)) \vee (\neg R(z) \vee L(z, u, v))
 \end{aligned}$$

skolem标准型

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v) P(a, y) \wedge \neg Q(y) \vee \neg R(z) \vee L(z, f(y, z), v).$$





第五章 推理演算



43. 任用一种推理方法证明 $\exists x(R(x) \wedge W(x)), (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(W(x) \wedge \neg P(x))$

- | | | |
|------|---|----------|
| (1) | $(\exists x) R(x) \wedge W(x)$ | 前提引入 |
| (2) | $R(a) \wedge W(a)$ | 存在量词消去 |
| (3) | $R(a)$ | (2) |
| (4) | $(\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x))$ | 前提引入 |
| (5) | $R(a) \rightarrow \neg Q(a)$ | 全称量词消去 |
| (6) | $\neg Q(a)$ | (2)(5)分离 |
| (7) | $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ | 前提引入 |
| (8) | $P(a) \rightarrow Q(a)$ | 全称量词消去 |
| (9) | $\neg Q(a) \rightarrow \neg P(a)$ | (8)置换 |
| (10) | $\neg P(a)$ | (6)(9)分离 |
| (11) | $W(a)$ | (2) |
| (12) | $\neg P(a) \wedge W(a)$ | (10)(11) |
| (13) | $(\exists x)(\neg P(x) \wedge W(x))$ | 存在量词引入 |





谢谢！

饮水思源 爱国荣校