

# 第5章 谓词逻辑的等值和推理演算

- 谓词逻辑研究的对象是重要的逻辑规律，普遍有效式是最重要的逻辑规律
- 等值和推理演算是谓词逻辑的基本内容
- 同命题逻辑相比，由于量词谓词的引入，使谓词演算有着广泛的应用
- 这章的讨论，主要是以语义的观点进行的非形式的描述，而严格的形式化的讨论见第6章所建立的公理系统

# 5.1 否定型等值式

- 若给定了两个谓词公式**A**, **B**, 说**A**和**B**是等值的, 如果在公式**A**, **B**的任一解释下, **A**和**B**都有相同的真值

在谓词逻辑中, 需要给出解释的内容包括(见P65):

- (1) 论域
- (2) 谓词变项
- (3) 命题变项
- (4) 函数
- (5) 自由个体

- 等价的说法:

**A**, **B**等值当且仅当**A** $\leftrightarrow$ **B**是普遍有效的公式

记作**A**=**B**或**A** $\leftrightarrow$ **B**

## 5.1.1 由命题公式移植来的等值式

- 若将命题公式的等值式，直接以谓词公式代入命题变项便可得谓词等值式。由

$$\neg\neg p = p, p \rightarrow q = \neg p \vee q, (p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

可得

$$1. \neg\neg P(x) = P(x)$$

$$2. \neg\neg(\forall x)P(x) = (\forall x)P(x)$$

$$3. P(x) \rightarrow Q(x) = \neg P(x) \vee Q(x)$$

$$4. (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x) = \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$5. (P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x) = (P(x) \vee R(x)) \wedge (Q(x) \vee R(x))$$

$$6. ((\forall x)P(x) \wedge Q(y)) \vee (\exists z)R(z) \\ = ((\forall x)P(x) \vee (\exists z)R(z)) \wedge (Q(y) \vee (\exists z)R(z))$$

## 5.1.2 否定型等值式(摩根律的推广)

$$\neg(\forall x)P(x)=(\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x)=(\forall x)\neg P(x)$$

- 形式上看这对公式，是说否定词“ $\neg$ ”可越过量词深入到量词的辖域内，但要把所越过的量词 $\forall$ 转换为 $\exists$ ， $\exists$ 转换为 $\forall$

# (1)从语义上说明

- $\neg(\forall x)P(x)$ 语义上表示的是，并非所有的 $x$ 都具有性质 $P$ 。这相当于，有一个 $x$ 不具有性质 $P$ ，这正是 $(\exists x)\neg P(x)$ 的含义。
- 由语义分析知  $\neg(\forall x)P(x)$  与  $(\exists x)\neg P(x)$ 表示的是同一命题，自然有
$$\neg(\forall x)P(x)=(\exists x)\neg P(x)$$
$$(\forall x)P(x)=\neg(\exists x)\neg P(x)$$
- 类似的有  $\neg(\exists x)P(x)=(\forall x)\neg P(x)$ 
$$(\exists x)P(x)=\neg(\forall x)\neg P(x)$$

# 说明

- $\neg(\forall x)P(x)$ 与 $(\forall x)\neg P(x)$ 不等值

如 $P(x)$ 表示 $x$ 是有理数

前者的语义是并非所有的 $x$ 都是有理数

后者的语义是说所有的 $x$ 都不是有理数

这两句话是不同的

- $\neg(\exists x)P(x)$ 与 $(\exists x)\neg P(x)$ 也不等值

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)\neg P(x) = \neg(\forall x)P(x)$$

## (2)在{1, 2}域上分析

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x)P(x) \\ &= \neg(P(1) \wedge P(2)) \\ &= \neg P(1) \vee \neg P(2) \\ &= (\exists x) \neg P(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \neg(\exists x)P(x) \\ &= \neg(P(1) \vee P(2)) \\ &= \neg P(1) \wedge \neg P(2) \\ &= (\forall x) \neg P(x) \end{aligned}$$

### (3)语义上的证明

- 依等值式定义， $A=B$ 如果在任一解释I下A真B就真，而且B真A就真。

若证明  $\neg(\forall x)P(x)=(\exists x)\neg P(x)$

1. 设任一解释I下有  $\neg(\forall x)P(x)=T$

从而  $(\forall x)P(x)=F$ ，即有一个  $x_0 \in D$ ，使  $P(x_0)=F$

于是  $\neg P(x_0)=T$

故在I下  $(\exists x)\neg P(x)=T$

2. 反过来，设任一解释I下有  $(\exists x)\neg P(x)=T$

即有一个  $x_0 \in D$ ，使  $\neg P(x_0)=T$

从而  $P(x_0)=F$

于是  $(\forall x)P(x)=F$

即  $\neg(\forall x)P(x)=T$



## (4) 举例

例1 “并非所有的动物都是猫” 的表示

设  $A(x)$ :  $x$ 是动物

$B(x)$ :  $x$ 是猫

原语句可表示成  $\neg(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$

依否定型公式得

$$\begin{aligned}\neg(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \\ &= (\exists x) \neg(A(x) \rightarrow B(x)) \\ &= (\exists x) \neg(\neg A(x) \vee B(x)) \\ &= (\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))\end{aligned}$$

而  $(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$  的含义是有一个动物不是猫, 显然这句话与原语句等同

# 举例

例2 “天下乌鸦一般黑” 的表示

设  $F(x)$ :  $x$ 是乌鸦

$G(x, y)$ :  $x$ 与 $y$ 是一般黑

原语句可表示成

$$(\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x, y))$$

不难知道与之等值的公式是

$$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x, y))$$

即不存在 $x, y$ 是乌鸦但不一般黑. 这两句话含义是相同的. 经计算有

# 举例

$$\begin{aligned} & \neg (\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x,y)) \\ &= (\forall x) \neg ((\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x,y))) \\ &= (\forall x)(\forall y) \neg (F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x,y)) \\ &= (\forall x)(\forall y)(\neg (F(x) \wedge F(y)) \vee G(x,y)) \\ &= (\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x,y)) \end{aligned}$$

## 5.2 量词分配等值式

### 5.2.1 量词对 $\vee$ 、 $\wedge$ 的分配律

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$

$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$

- 这是一组量词对 $\vee$ 、 $\wedge$ 的分配律，其中 $q$ 是命题变项，与个体变元 $x$ 无关，这是很重要的条件
- 我们仅对第一个等式给出证明，其余三个同样可证

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$

- 设在一解释I下， $(\forall x)(P(x) \vee q) = T$ ，从而对任一 $x \in D$ ，有 $P(x) \vee q = T$   
若 $q = T$ ，则 $(\forall x)P(x) \vee q = T$   
若 $q = F$ ，从而对任一 $x \in D$ ，有 $P(x) = T$ ，即有 $(\forall x)P(x) = T$ ，故仍有 $(\forall x)P(x) \vee q = T$
- 反过来，设在一解释I下， $(\forall x)P(x) \vee q = T$   
若 $q = T$ ，则 $(\forall x)(P(x) \vee q) = T$   
若 $q = F$ ，必有 $(\forall x)P(x) = T$ ，从而对任一 $x \in D$ 有 $P(x) = T$ ，于是对任一 $x \in D$ 有 $P(x) \vee q = T$ ，故 $(\forall x)(P(x) \vee q) = T$

## 5.2.2 量词对 $\rightarrow$ 的分配律

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow q) = (\exists x)P(x) \rightarrow q$$

$$(\exists x)(P(x) \rightarrow q) = (\forall x)P(x) \rightarrow q$$

$$(\forall x)(p \rightarrow Q(x)) = p \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(p \rightarrow Q(x)) = p \rightarrow (\exists x)Q(x)$$

- 这是一组量词对 $\rightarrow$ 的分配律，其中 $p$ ， $q$ 是命题变项，与个体变元 $x$ 无关，这是很重要的条件

# 证明

- 先证明其中的第一个等式.

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow q)$$

$$= (\forall x)(\neg P(x) \vee q)$$

$$= (\forall x)\neg P(x) \vee q \quad \text{依5.2.1的等值式}$$

$$= \neg (\exists x)P(x) \vee q \quad \text{依5.1.2的等值式}$$

$$= (\exists x)P(x) \rightarrow q$$

# 证明

- 再证明其中的第三个等式

$$\begin{aligned} & (\forall x)(p \rightarrow Q(x)) \\ &= (\forall x)(\neg p \vee Q(x)) \\ &= \neg p \vee (\forall x)Q(x) \\ &= p \rightarrow (\forall x)Q(x) \end{aligned}$$

依5.2.1的等值式

- 其余两个等值式同样可证



## 5.2.3 量词 $\forall$ 对 $\wedge$ 、量词 $\exists$ 对 $\vee$ 的分配律

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

- 这是当 $P(x)$ ， $Q(x)$ 都含有个体变元 $x$ 时，量词 $\forall$ 对 $\wedge$ ，量词 $\exists$ 对 $\vee$ 所遵从的分配律。然而 $\forall$ 对 $\vee$ ， $\exists$ 对 $\wedge$ 的分配律一般并不成立

# 证明

## (1) 证明 $\forall$ 对 $\wedge$ 的分配律

设在一解释 $I$ 下,  $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))=T$

于是对任一 $x \in D$ ,  $P(x) \wedge Q(x)=T$

即 $P(x)=Q(x)=T$

从而有 $(\forall x)P(x)=(\forall x)Q(x)=T$

故有 $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)=T$

反推回去, 易知在一解释 $I$ 下, 只要

$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)=T$

必有 $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))=T$

# 证明

## (2) 证明 $\exists$ 对 $\vee$ 的分配律

设在一解释 $I$ 下,  $(\exists x)(P(x) \vee Q(x))=T$

于是有 $x_0 \in D$  使 $P(x_0) \vee Q(x_0)=T$

从而有 $P(x_0)=T$ 或 $Q(x_0)=T$ 也即

$(\exists x)P(x)$ 或 $(\exists x)Q(x)$ 为 $T$

故有 $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)=T$

反推回去, 易知在一解释 $I$ 下, 只要

$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)=T$

必有 $(\exists x)(P(x) \vee Q(x))=T$

# 证明

(3) 分析一下 $\forall$ 对 $\vee$ 分配律不成立的原因

先从 $\{1, 2\}$ 域上看. 有

$$\begin{aligned}(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) &= (P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2)) \\ &= (P(1) \wedge P(2)) \vee (Q(1) \wedge Q(2)) \\ &\quad \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2))\end{aligned}$$

$$\text{而 } (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) = (P(1) \wedge P(2)) \vee (Q(1) \wedge Q(2))$$

于是有

$$\begin{aligned}(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \\ &= (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2))\end{aligned}$$

$$\text{然而 } (\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (P(1) \wedge Q(1)) \wedge (P(2) \wedge Q(2))$$

$$= (P(1) \wedge P(2)) \wedge (Q(1) \wedge Q(2)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

# 说明

- 可看出 $\forall$ 对 $\wedge$ 的分配律，只涉及到 $\wedge$ 和交换律，这是没有问题的， $\forall$ 对 $\vee$ 的分配律，涉及到 $\wedge$ 和 $\vee$ ，这是 $\forall$ 对 $\vee$ 分配律不成立的原因

- 从 $\{1, 2\}$ 域上的观察，可知

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

是成立的

将会看到该蕴涵关系在任意论域 $D$ 上也是成立

# 证明

(4) 分析一下， $\exists$ 对 $\wedge$ 分配律不成立的原因

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) = (P(1) \wedge Q(1)) \vee (P(2) \wedge Q(2))$$

$$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

$$= (P(1) \vee P(2)) \wedge (Q(1) \vee Q(2))$$

$$= (P(1) \wedge Q(1)) \vee (P(2) \wedge Q(2)) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (P(2) \wedge Q(1))$$

$$= (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (P(2) \wedge Q(1))$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$= (P(1) \vee Q(1)) \vee (P(2) \vee Q(2))$$

$$= (P(1) \vee P(2)) \vee (Q(1) \vee Q(2))$$

$$= (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

# 说明

- 可看出 $\exists$ 对 $\vee$ 的分配律，只涉及到 $\vee$ 和交换律，仍然是没问题的。 $\exists$ 对 $\wedge$ 的分配律，涉及到 $\vee$ 和 $\wedge$ ，这是 $\exists$ 对 $\wedge$ 分配律不成立的原因
- 从 $\{1, 2\}$ 域上的观察，可知
$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$
是成立的。  
将会看到该蕴涵关系在任意论域 $D$ 上也是成立的

# 说明

- 解释性的说明.

如下规定解释I:

**x=1时,  $P(1)=T$ 而 $Q(1)=F$ .**

**x=2时,  $P(2)=F$ 而 $Q(2)=T$ .**

对其他x属于D, 只要求P(x), Q(x)中只有一为T  
在这个I下,

**(1) 有 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))=T$**

而没有 $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)=T$

**(2) 有 $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)=T$**

而没有 $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))=T$



## 5.2.4 变元易名后的分配律

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y)) = (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) = (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

- 这两个等值式，说明了通过变元的易名，仍可实现 $\forall$ 对 $\vee$ ， $\exists$ 对 $\wedge$ 的分配律
- 证明是容易的。首先有变元易名等值式

$$(\forall x)Q(x) = (\forall y)Q(y)$$

$$(\exists x)Q(x) = (\exists y)Q(y)$$

$$\text{于是 } (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) = (\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y)$$

# 分配律

- 对 $x$ 而言 $(\forall y)Q(y)$ 相当于命题变项，与 $x$ 无关，可推得

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y) = (\forall x)(P(x) \vee (\forall y)Q(y))$$

对 $y$ 而言， $P(x)$ 相当于命题变项与 $y$ 无关，又可推得

$$(\forall x)(P(x) \vee (\forall y)Q(y)) = (\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y))$$

- 同理 $(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) = (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

- 然而

$(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y))$ 与 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 是不等值的

$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y))$ 与 $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ 是不等值的

## 5.3 范式

- 在命题逻辑里. 每一公式都有与之等值的范式  
范式是一种统一的表达形式、当研究一个公式的特点(如永真、永假)时, 范式起着重要的作用
- 对谓词逻辑的公式来说也有范式, 其中前束范式与原公式是等值的, 而其他范式与原公式只有较弱的关系

## 5.3.1 前束范式

- 定义5.3.1 说公式**A**是一个前束范式, 如果**A**中的一切量词都位于该公式的最左边(不含否定词)且这些量词的辖域都延伸到公式的末端, 前束范式**A**的一般形式为

$$(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)M(x_1, \dots, x_n)$$

其中 $Q_i$ 为量词 $\forall$ 或 $\exists$  ( $i=1, \dots, n$ ),  $M$ 称作公式**A**的母式(基式),  $M$ 中不再有量词

# 前束范式

- 定理**5.3.1** 谓词逻辑的任一公式都可化为与之等值的前束范式. 但其前束范式并不唯一
- 举例给出化前束范式的过程

# 举例

例 1 求  $\neg((\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \rightarrow (\exists x)(\neg(\forall y)Q(y,b) \rightarrow R(x)))$  的前束范式.  
可按下述步骤实现:

(1) 消去联结词  $\rightarrow, \leftrightarrow$ .

$$\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \vee (\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y,b) \vee R(x)))$$

(2)  $\neg$  内移 (反复使用摩根律)

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge \neg(\exists x)((\forall y)Q(y,b) \vee R(x)) \\ &= (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$

(3) 量词左移 (使用分配等值式)

$$(\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x))$$

(4) 变元易名. (使用变元易名分配等值式)

$$\begin{aligned} & (\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists z)\neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)) \\ &= (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a,x,y) \wedge \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)) \\ &= (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a,b,x,y,z) \end{aligned}$$

# 前束范式

- 经过这几步，便可求得任一公式的前束范式。由于每一步变换都保持着等值性，所以，所得到的前束形与原公式是等值的
- 这里的 $S(a, b, x, y, z)$ 便是原公式的母式。其中 $a, b$ 是自由个体变项
- 由于前束中量词的次序排列，以及对母式都没有明确的限制，自然前束范式不是唯一的，如例1的前束范式也可以是

$$(\forall x)(\exists z)(\exists y)(S(a, b, x, y, z) \wedge P)$$

其中 $P$ 可以是任一不含量词的普遍有效的公式

## 5.3.2 Skolem标准形

- 前束范式对前束量词没有次序要求，也没有其他要求
- 如果我们要求：
  - (1) 只保留全称量词而消去存在量词-- **Skolem标准形**
  - (2) 所有存在量词都在全称量词之左
  - (3) 所有全称量词都在存在量词之左
- 不难想像，仍保持与原公式的等值性就不可能了，只能保持在某种意义下的等值关系



# Skolem标准形

- 仅保留全称量词的前束形
- 定理5.3.3 谓词逻辑的任一公式 $A$ ，都可化成相应的**Skolem标准形**(只保留全称量词的前束形)，并且 $A$ 是不可满足的当且仅当其**Skolem标准形**是不可满足的
- 这定理是说对不可满足的公式，它与其**Skolem标准形**是等值的，而一般的公式与其**Skolem标准形**并不是等值的。自然仅当 $A$ 是不可满足的方使用**Skolem标准形**

# 举例

例3 求公式 $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x, y, z, u, v, w)$ 的Skolem标准形

- 将一公式化成Skolem标准形，首先也要求出前束形。这个例子已是前束形了，便可直接求Skolem标准形了

### 例3 $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x, y, z, u, v, w)$

- 首先将最左边的 $(\exists x)$ 消去，而将谓词 $P$ 中出现的所有变元 $x$ 均以论域中的某个常项 $a$ (未在 $P$ 中出现过)代入
- 进而消去从左边数第二个存在量词 $(\exists u)$ ，因 $(\exists u)$ 的左边有全称量词 $(\forall y)(\forall z)$ ，需将谓词 $P$ 中出现的所有变元 $u$ 均以 $y, z$ 的某个二元函数 $f(y, z)$ (未在 $P$ 中出现过)代入
- 最后按同样的方法消去存在量词 $(\exists w)$ ，因 $(\exists w)$ 的左边有全称量词 $(\forall y)(\forall z)$ 和 $(\forall v)$ ，需将谓词 $P$ 中出现的所有变元 $w$ 均以 $y, z, v$ 的某个三元函数 $g(y, z, v)$ (未在 $P$ 中出现过也不同于 $f(y, z)$ )代。
- 这样便得消去全部存在量词的Skolem标准形 $(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))$

# 说明

- 消存在量词是将相应变元以函数代入，可这样来理解，如 $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ 的Skolem标准形是 $(\forall x)P(x, f(x))$ .
- 因为 $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ 的意思是对任一 $x$ ，都有一个 $y$ 使 $P(x, y)$ 成立，那么这个 $y$ 通常是依赖于 $x$ 的，可视为 $x$ 的某个函数 $f(x)$ 。从而有Skolem标准形 $(\forall x)P(x, f(x))$
- 然而所能找到的 $y$ 不必然是 $x$ 的函数 $f$ ，于是 $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ 与 $(\forall x)P(x, f(x))$ 并不等值

# $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ 与 $(\forall x)P(x, f(x))$ 不等值

- 在 $\{1, 2\}$ 域上

$$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$$

$$=(P(1, 1) \vee P(1, 2)) \wedge (P(2, 1) \vee P(2, 2))$$

$$=(P(1, 1) \wedge P(2, 1)) \vee (P(1, 1) \wedge P(2, 2))$$

$$\vee (P(1, 2) \wedge P(2, 1)) \vee (P(1, 2) \wedge P(2, 2))$$

$$(\forall x)P(x, f(x))=P(1, f(1)) \wedge P(2, f(2))$$

- 两者明显的不等值，但在不可满足的意义下两者是一致的，这种标准形，对使用归结法的定理证明来说是很重要的

# 作业一

## P84 习题五

■ 1(1, 3, 5, 7, 9)

■ 2(2, 4, 6, 8)

■ 4(1, 2, 3, 4, 5, 9, 10)

## 5.4 基本的推理公式

- 命题逻辑中有关推理形式、重言蕴涵以及基本的推理公式的讨论和所用的术语，都可引入到谓词逻辑中。并可把命题逻辑的推理作为谓词逻辑推理的一个部分来看待
- 这里所介绍的是谓词逻辑所特有的，在命题逻辑里不能讨论的推理形式和基本的推理公式

## 5.4.1 推理形式举例

- 例1 所有的整数都是有理数，所有的有理数都是实数，所以所有的整数都是实数。

引入谓词将这三句话形式化，可得如下推理形式

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \\ \rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$$

其中：

$P(x)$ :  $x$ 是整数；  $Q(x)$ :  $x$ 是有理数；  $R(x)$ :  $x$ 是实数



# 举例

- 例2 所有的人都是要死的，孔子是人，所以孔子是要死的

引入谓词将这三句话形式化，可得如下推理形式

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge A(\text{孔子}) \rightarrow B(\text{孔子})$$

其中：

**A(x): x是人； B(x): x是要死的**

# 举例

- 例3 有一个又高又胖的人，必有一个高个子而且有一个胖子。

引入谓词将这两句话形式化，可得如下推理形式

$$(\exists x)(C(x) \wedge D(x)) \rightarrow (\exists x)C(x) \wedge (\exists x)D(x)$$

其中：

**C(x)**: x是高个子； **D(x)**: x是胖子

# 举例

- 例4 若某一个体**a**具有性质**E**，那么所有的个体**x**都具有性质**E**.

这两句话形式化，可得如下推理形式：

$$E(a) \rightarrow (\forall x)E(x)$$

- 不难看出，由例1，2，3所建立的推理形式是正确的，而例4的推理形式是不正确的

# 说明

- 从而有

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \\ \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$$

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge A(\text{孔子}) \Rightarrow B(\text{孔子})$$

$$(\exists x)(C(x) \wedge D(x)) \Rightarrow (\exists x)C(x) \wedge (\exists x)D(x)$$

- 这样的推理形式是命题逻辑所不能处理的，或说这些推理关系，仅使用命题逻辑的工具是无法描述的，需使用谓词逻辑的工具。
- 如例1所讨论的推理，在命题逻辑里只能形式化成 三个独立命题  $p$ ,  $q$ ,  $r$  间的推理形式
$$p \wedge q \rightarrow r$$
这显然不是正确的推理形式

## 5.4.2 基本的推理公式

$$(1) (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(2) (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

$$(3) (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$(4) (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$$

$$(5) (\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$(6) (\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)Q(x)$$

$$(7) (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \\ \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$$

$$(8) (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$$

$$(9) (\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$$

$$(10) (\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$$

注：这些推理公式或称推理定理的逆一般是不成立的，所以正确地理解这些定理的前提与结论的不同是重要的

## 5.4.3 基本推理公式的说明

- 仅就其中的2, 3和10来讨论

$$(2)(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

这定理在 $\{1, 2\}$ 域上是成立的, 已在5.2.3节作了说明, 再从语义上讨论

如果个体域是某班学生,  $P(x)$ 表 $x$ 是高材生.  $Q(x)$ 表 $x$ 是运动健将, 那么 $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ 表这个班上有一个学生既是高材生又是运动健将.

而 $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$ 只是说这个班上有一个高材生而且有一个运动健将, 但不要求高材生和运动健将是同一个学生

$$(2)(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

- 显然推理式是成立的，其结论比前提明显地要求弱了。从而这推理式的逆是不成立
- 不难给出解释性的证明

设解释I下有 $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) = T$ 。

即有 $x_0 \in D$ 使 $P(x_0) \wedge Q(x_0) = T$

从而有 $P(x_0) = T$ ， $Q(x_0) = T$

也即 $(\exists x)P(x) = T$ ， $(\exists x)Q(x) = T$

从而有 $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) = T$

---

$$(3)(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

- 从语义上讨论. 论域仍是某班的学生.
  - 为使 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = T$ , 论域内学生分布只有两种可能, 一是班上所有学生都是高材生又都是运动健将; 一是班上有的学生不是高材生, 但凡高材生必是运动健将。这两种情况下都有 $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) = T$
  - 然而这推理式的逆是不成立的, 仅当班上有的高材生不是运动健将, 而且又有的学生不是高材生时, 有 $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) = T$ . 而 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = F$
-



$$(3)(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

■ 解释性的证明

设在一解释I下，有

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = T$$

从而对任一  $x \in D$ ,  $P(x) \rightarrow Q(x) = T$ .

必能保证  $(\forall x)P(x) = T$  时有  $(\forall x)Q(x) = T$

从而有

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) = T$$

$$(10)(\exists x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$$

- 这定理在 $\{1, 2\}$ 域上是成立的, 已在4.5. 2节作了说明, 从语义上讨论
- 如论域为实数域上的区间 $[-1, 1]$ , 而 $P(x, y)$ 表示 $x \cdot y = 0$ .

这时 $(\exists x)(\forall y)P(x, y) = T$ . 因为取 $x = 0$ , 对所有的 $y$ 都有 $x \cdot y = 0$ .

自然有 $(\forall y)(\exists x)P(x, y) = T$ , 因对所有的 $y$ , 均取 $x = 0$ 便有 $x \cdot y = 0$ 成立

- 这定理的逆是不成立的  
如取 $P(x, y)$ 表示 $x + y = 0$ , 这时  
 $(\forall y)(\exists x)P(x, y) = T$ , 而  $(\exists x)(\forall y)P(x, y) = F$

$$(10)(\exists x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$$

### ■ 解释性的证明

设一解释I下，有 $(\exists x)(\forall y)P(x, y)=T$ ，于是有 $x_0 \in D$ ，使对一切的 $y \in D$ 都有

$$P(x_0, y)=T.$$

从而对一切的 $y \in D$ ，都有一个 $x$ (均选为 $x_0$ )使 $P(x, y)=T$ ，即 $(\forall y)(\exists x)P(x, y)=T$

## 5.5 推理演算

- 命题逻辑中引入推理规则的推理演算，可推广到谓词逻辑，有关的推理规则都可直接移入到谓词逻辑，除此之外还需介绍4条有关量词的消去和引入规则
- 代入规则需补充说明：  
包括命题变项、自由个体变项和谓词变项的代入，要求保持合式公式和普遍有效性不被破坏

## 5.5.1 推理规则

### (1) 全称量词消去规则

- $(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$ , 其中 $y$ 是论域中一个个体  
意指如果所有的 $x \in D$ 都具有性质 $P$ , 那么 $D$ 中任一个体 $y$ 必具有性质 $P$ .
- 当 $P(x)$ 中不再含有量词和其他变项时, 这条规则明显成立.

而当允许 $P(x)$ 中可出现量词和变项时, 需限制 $y$ 不在 $P(x)$ 中约束出现(即右侧量不在左侧约束出现)

- 设 $P(x) = (\exists y)(x < y)$ ,  
则 $(\forall x)P(x) = (\forall x)((\exists y)(x < y))$ 在实数上成立  
不应有 $(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$ , 因为 $P(y) = (\exists y)(y < y)$  是矛盾式。  
这时,  $y$ 在 $P(x)$ 中是约束出现了

## (2)全称量词引入规则

- $P(y) \Rightarrow (\forall x)P(x)$ , 其中 $y$ 是论域中任一个体  
意指如果任一个体 $y$ (自由变项)都具有性质 $P$ ,  
那么所有个体 $x$ 都具有性质 $P$
- 仍需限制 $x$ 不在 $P(y)$ 中约束出现(即右侧量不在左侧约束出现)
- 如 $P(y) = (\exists x)(x > y)$ 在实数域上成立,  
 $(\forall x)P(x) = (\forall x)((\exists x)(x > x))$ 是不成立的

### (3)存在量词消去规则

- $(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$ , 其中 $c$ 是论域中的一个个体常项  
意指如果论域中存在有个体具有性质 $P$ , 那么必有某个个体 $c$ 具有性质 $P$
- 需限制 $(\exists x)P(x)$ 中没有自由个体出现  
如实数域上 $(\exists x)P(x) = (\exists x)(x > y)$ 是成立的,  $y$ 是自由个体, 这时不能推导出 $P(c) = c > y$
- 还需限制 $P(x)$ 中不含有 $c$ . 如在实数域上  
 $(\exists x)P(x) = (\exists x)(c < x)$ 是成立的,  $P(c) = c < c$ 不成立
- 思考方式  
先定 $P$ , 再定 $c$ , 最后讨论 $(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$ 的正确性

## (4)存在量词引入规则

- $P(c) \Rightarrow (\exists x)P(x)$ , 其中  $c$  是论域中一个个体常项  
意指如果有个体常项  $c$  具有性质  $P$ , 那么  
 $(\exists x)P(x)$  必真
- 需限制  $x$  不出现在  $P(c)$  中. 如实数域上,  $P(0) = (\exists x)(x > 0)$  成立, 但  $(\exists x)P(x) = (\exists x)(\exists x)(x > x)$  是不成立的



# 推理规则

- 这4条推理规则是基本的，对多个量词下的量词消去与引入规则的使用也已谈到。再明确说明一下
  - $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \Rightarrow (\exists y)P(x, y)$   
的右端，不允许写成  $(\exists y)P(y, y)$
  - $(\forall x)P(x, c) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x, y)$   
的右端，不允许写成  $(\exists x)(\forall x)P(x, x)$

# 推理规则

- $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \Rightarrow (\exists y)P(x, y) \Rightarrow P(x, a)$

但不允许再推演出 $(\forall x)P(x, a)$ 和 $(\exists y)(\forall x)P(x, y)$

原因是 $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ 成立时，所找到的 $y$ 是依赖于 $x$ 的，从而 $P(x, y)$ 的成立是有条件的，不是对所有的 $x$ 对同一个 $y$ 都有 $P(x, y)$ 成立，于是不能再推演出 $(\forall x)P(x, y)$

## 5.5.2 使用推理规则的推理演算举例

- 和命题逻辑相比，在谓词逻辑里使用推理规则进行推理演算同样是方便的，然而在谓词逻辑里，真值表法不能使用，又不存在判明 $A \rightarrow B$ 是普遍有效的一般方法，从而使用推理规则的推理方法已是谓词逻辑的基本推理演算方法
- 推理演算过程
  - 首先是将以自然语句表示的推理问题引入谓词形式化
  - 若不能直接使用基本的推理公式便消去量词
  - 在无量词下使用规则和公式推理
  - 最后再引入量词以求得结论

# 举例

例1 前提  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$

结论  $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$

证明

(1)  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$  前提

(2)  $P(x) \rightarrow Q(x)$  全称量词消去

(3)  $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$  前提

(4)  $Q(x) \rightarrow R(x)$  全称量词消去

(5)  $P(x) \rightarrow R(x)$  (2), (4)三段论

(6)  $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$  全称量词引入

# 举例

例2 所有的人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。

首先引入谓词形式化，令 $P(x)$ 表 $x$ 是人， $Q(x)$ 表 $x$ 是要死的，于是问题可描述为

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(\text{苏格拉底}) \rightarrow Q(\text{苏格拉底})$$

证明

$$(1)(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

前提

$$(2)P(\text{苏格拉底}) \rightarrow Q(\text{苏格拉底})$$

全称量词消去

$$(3)P(\text{苏格拉底})$$

前提

$$(4)Q(\text{苏格拉底})$$

(2), (3)分离

# 举例

例3 前提  $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x))$ ,  $(\exists x)P(x)$   
结论  $(\exists x)(\exists y)(R(x) \wedge R(y))$

证明

(1)  $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x))$

前提

(2)  $(\exists x)P(x)$

前提

(3)  $(\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x))$

(1), (2) 分离

(4)  $P(c)$

(2) 存在量词消去

(5)  $P(c) \vee Q(c) \rightarrow R(c)$

(3) 全称量词消去

(6)  $P(c) \vee Q(c)$

(4)

(7)  $R(c)$

(5), (6) 分离

(8)  $(\exists x)R(x)$

(7) 存在量词引入

(9)  $(\exists y)R(y)$

(7) 存在量词引入

(10)  $(\exists x)R(x) \wedge (\exists y)R(y)$

(8), (9)

(11)  $(\exists x)(\exists y)(R(x) \wedge R(y))$

(10) 置换

# 举例

例4 分析下述推理的正确性

- |  |                      |
|--|----------------------|
| (1)( $\forall x$ )( $\exists y$ )( $x > y$ ) | 前提                   |
| (2)( $\exists y$ )( $z > y$ )                | 全称量词消去, $y$ 与 $z$ 有关 |
| (3) $z > b$                                  | 存在量词消去, $b$ 依赖 $z$   |
| (4)( $\forall z$ )( $z > b$ )                | 全称量词引入, $b$ 不依赖 $z$  |
| (5) $b > b$                                  | 全称量词消去               |
| (6)( $\forall x$ )( $x > x$ )                | 全称量词引入               |

推理(1)到(2), 应明确指出 $y$ 是依赖于 $x$ 的, 即(2)中 $y$ 和 $z$ 有关.  
(2)到(3), 其中的 $b$ 是依赖于 $z$ 的, 从而(3)到(4)是不成立的.

又由于 $b$ 是常项, (5)到(6)也是不允许的, 因个体常项不能用全称量词量化

# 举例

例5 有的病人喜欢所有的医生，没有一个病人喜欢某一庸医， 所以没有医生是庸医。

先形式化。令  $P(x)$  表  $x$  是病人，  $Q(x)$  表  $x$  是庸医。  $D(x)$  表  $x$  是医生，  $L(x, y)$  表  $x$  喜欢  $y$ ，

第一句话可描述为

$$(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(x, y)))$$

第二句话可描述为

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$$

或写成

$$\neg(\exists x)(P(x) \wedge (\exists y)(Q(y) \wedge L(x, y)))$$

结论可描述为

$$(\forall x)(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$$

或写成

$$\neg(\exists x)(D(x) \wedge Q(x))$$



# 例5

证明

(1)  $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(x, y)))$  前提

(2)  $P(c) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(c, y))$

(3)  $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$

(4)  $P(c) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(c, y))$

(5)  $P(c)$

(6)  $(\forall y)(D(y) \rightarrow L(c, y))$

(7)  $D(y) \rightarrow L(c, y)$

(8)  $(\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(c, y))$

(9)  $Q(y) \rightarrow \neg L(c, y)$

(10)  $L(c, y) \rightarrow \neg Q(y)$

(11)  $D(y) \rightarrow \neg Q(y)$

(12)  $(\forall y)(D(y) \rightarrow \neg Q(y))$

(13)  $(\forall x)(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$

存在量词消去

前提

全称量词消去

(2)

(2)

全称量词消去

(4), (5)分离

全称量词消去

(9)置换

(7), (10)三段论

全称量词引入

(12)置换

## 5.6 谓词逻辑的归结推理法

- 归结方法可推广到谓词逻辑，困难在于出现了量词、变元。证明过程同命题逻辑，只不过每一步骤都要考虑到有变元，从而带来复杂性
- 使用推理规则的推理演算过于灵活，技巧性强，而归结法较为机械，容易使用计算机来实现

## 5.6.1 归结证明过程

- 为证明 $A \rightarrow B$ 是定理( $A, B$ 为谓词公式), 即 $A \Rightarrow B$ , 等价的是证明 $A \wedge \neg B = G$ 是矛盾式, 这是归结法的出发点(反证法)
- 建立子句集 $S$ 。如何消去 $G$ 中的量词, 特别是存在量词, 是建立子句集 $S$ 的关键。办法是
  - 先将 $G$ 化成等值的前束范式, 进而将这前束形化成Skolem标准形, 消去存在量词(以常项代替如 $a$ ), 得仅含全称量词的公式 $G'$ (曾指出 $G$ 与 $G'$ 在不可满足的意义下是一致的, 从而对 $G$ 的不可满足性. 可由 $G'$ 的不可满足性来求得)
  - 再将 $G'$ 中的全称量词省略,  $G'$ 母式(已合取范式化)中的合取词 $\wedge$ 以“,”表示, 使得 $G$ 的子句集 $S$ . 而 $S$ 与 $G$ 是同时不可满足的,  $S$ 中的变元视作有全称量词作用着

# 归结过程

- 对S作归结

设 $C_1, C_2$ 是S中的两个子句:

- (1)、若 $C_1, C_2$ 有互补对, 消去互补对, 得到新的归结式放入S中;
- (2)、若 $C_1, C_2$ 没有互补对, 且它们无共同个体变元, 不妨设 $L_1, L_2$ 分别是 $C_1, C_2$ 中的文字, 如果 $L_1$ 和 $\neg L_2$ 有合一置换 $\sigma$ , 则

$$(C_1\sigma - \{L_1\sigma\}) \cup (C_2\sigma - \{L_2\sigma\})$$

称作子句 $C_1, C_2$ 的归结式.

如  $C_1 = P(x) \vee Q(x), C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$

$P(x)$ 与 $\neg P(a)$ , 在合一置换 $\{x / a\}$ 下将变元 $x$ 换成 $a$ , 便为互补对可作归结了, 有归结式

$$R(C_1, C_2) = Q(a) \vee R(y).$$

对子句集S的任两子句作归结(如果可作归结). 并将归结式仍放入S中. 重复这过程.

- 直至归结出空子句“ $\square$ ”, 得到矛盾, 证明结束

## 5.6.2 归结法证明举例

例1  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$

首先写出公式G

$$G = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \wedge \neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$$

为求G的子句集S，可分别对 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ ， $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$ ， $\neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$ 作子句集，然后求并集来作为G的“子句集”（这个“子句集”不一定是S，但与S同时是不可满足的，而且较之来得简单，于是为方便可将这个“子句集”视作S）

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ 的子句集为 $\{\neg P(x) \vee Q(x)\}$

$(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$ 的子句集为 $\{\neg Q(x) \vee R(x)\}$

$$\begin{aligned}\neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x)) &= (\exists x) \neg(\neg P(x) \vee R(x)) \\ &= (\exists x)(P(x) \wedge \neg R(x))\end{aligned}$$

Skolem化，得子句集 $\{P(a), \neg R(a)\}$

于是G的子句集

$$S = \{\neg P(x) \vee Q(x), \neg Q(x) \vee R(x), P(a), \neg R(a)\}$$

## 例1

$$S = \{ \neg P(x) \vee Q(x), \neg Q(x) \vee R(x), P(a), \neg R(a) \}$$

证明S是不可满足的，有归结过程：

(1)  $\neg P(x) \vee Q(x)$

(2)  $\neg Q(x) \vee R(x)$

(3)  $P(a)$

(4)  $\neg R(a)$

(5)  $Q(a)$

(6)  $R(a)$

(7)  $\square$

(1)(3)归结

(2)(5)归结

(4)(6)归结

## 例2

$$A_1 = (\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(x, y)))$$

$$A_2 = (\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$$

$$B = (\forall x)(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$$

求证  $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$

证明: 不难建立

$A_1$  的子句集为  $\{P(a), \neg D(y) \vee L(a, y)\}$

$A_2$  的子句集为  $\{\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x, y)\}$

$\neg B$  的子句集为  $\{D(b), Q(b)\}$ ,

求并集得子句集  $S$ , 进而建立归结过程:

(1)  $P(a)$

(2)  $\neg D(y) \vee L(a, y)$

(3)  $\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x, y)$

(4)  $D(b)$

(5)  $Q(b)$

(6)  $L(a, b)$

(2)(4)归结

(7)  $\neg Q(y) \vee \neg L(a, y)$

(1)(3)归结

(8)  $\neg L(a, b)$

(5)(7)归结

(9)  $\square$

(6)(8)归结



# 作业二

P84 习题五

■  $3(7, 8, 9, 10, 11, 12)$

■  $5(1, 2, 3, 4)$