

# 第二章 道路与回路

## 2.1道路与回路

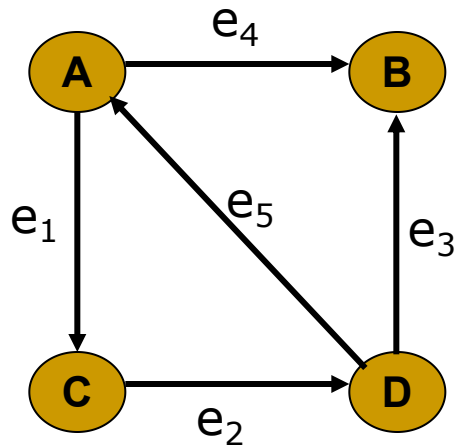
### ■ 定义2.1.1

有向图 $G=(V,E)$ 中,若边序列 $P=(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_q})$ ,其中 $e_{i_k}=(v_i, v_j)$  满足 $v_i$ 是 $e_{i_{k-1}}$ 的终点,  $v_j$  是 $e_{i_{k+1}}$ 的始点, 就称 $P$ 是 $G$ 的一条有向道路.如果 $e_{i_q}$ 的终点也是 $e_{i_1}$ 的始点, 则称 $P$ 是 $G$ 的一条有向回路

# 道路与回路

- 如果 $P$ 中的边没有重复出现, 则分别称为简单有向道路和简单有向回路
- 进而, 如果 $P$ 中结点也不重复出现, 又分别称它们是初级有向道路和初级有向回路, 简称为路和回路
- 显然, 初级有向道路(回路)一定是简单有向道路(回路)

# 有向道路



**(e1, e2, e5, e1)** 有向道路，不是简单有向道路

**(e1, e2, e5, e4)** 简单有向道路，不是初级有向道路**(A)**

**(e1, e2, e3)** 初级有向道路

**(e1, e2, e5)** 初级有向回路

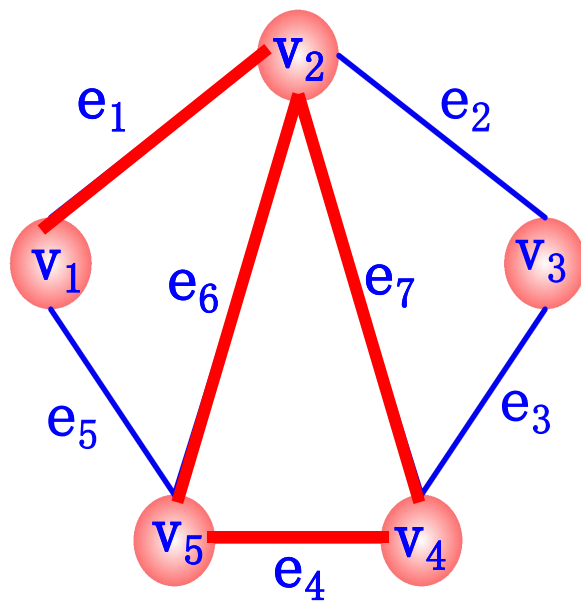
# 道路与回路

## ■ 定义2.1.2

无向图 $G=(V, E)$ 中, 若点边交替序列 $P=(v_{i1}, e_{i1}, v_{i2}, e_{i2}, \dots, e_{iq-1}, v_{iq})$ 满足 $v_{ik}, v_{ik+1}$ 是 $e_{ik}$ 的两个端点, 则称 $P$ 是 $G$ 中的一条链或道路. 如果 $v_{iq}=v_{i1}$ , 则称 $P$ 是 $G$ 中的一个圈或回路, 其长度为边数 ( $q-1$ )

- 如果 $P$ 中没有重复出现的边, 称之为简单道路或简单回路, 若其中结点也不重复, 又称之为初级道路或初级回路

# 例



$v_1$ 到 $v_2$ 的简单道路

# 道路与回路

## ■ 定义2.1.3

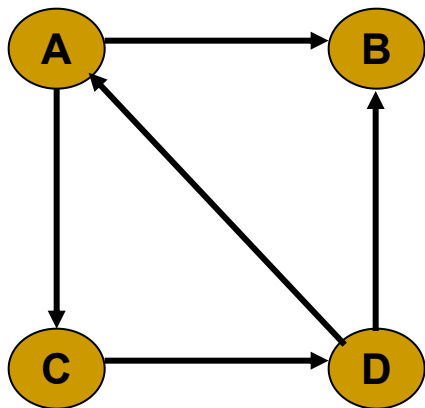
1. 设 $G$ 是无向图, 若 $G$ 的任意两结点之间都存在道路, 就称 $G$ 是连通图, 否则称为非连通图
2. 如果 $G$ 是有向图, 不考虑其边的方向, 即视为无向图, 若它是连通的, 则称 $G$ 是连通图
3. 若连通子图 $H$ 不是 $G$ 的任何连通子图的真子图, 则称 $H$ 是 $G$ 的极大连通子图或称连通支

显然 $G$ 的每个连通支都是它的导出子图

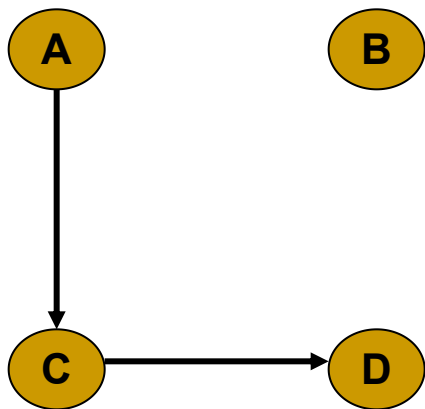
# 道路与回路

- 在有向图 $G$ 中，如果两个顶点 $u$ ， $v$ 间有一条从 $u$ 到 $v$ 的有向路径，同时还有一条从 $v$ 到 $u$ 的有向路径，则称两个**顶点强连通**。
- 如果有向图 $G$ 的每两个顶点都强连通，称 $G$ 是一个**强连通图**。
- 有向非强连通图的极大强连通子图，称为**强连通分量**。

# 连通图



连通图



非连通图

两个连通分支  **$\{B\}$** ,  **$\{A, C, D\}$**



# 道路与回路

## ■ 定义2.1.4

设 $C$ 是简单图 $G$ 中含结点数大于3的一个初级回路，如果结点 $v_i$ 和 $v_j$ 在 $C$ 中不相邻，而边 $(v_i, v_j) \in E(G)$ ，则称 $(v_i, v_j)$ 是 $C$ 的一条弦。

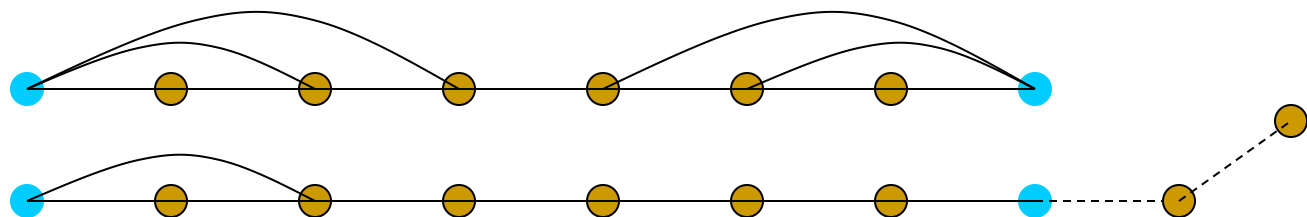
# 极长初级道路

- 极长初级道路：在简单图 $G = \langle V, E \rangle$ 中,  $E \neq \emptyset$ , 设 $\Gamma_1 = v_0 v_1 \dots v_l$ 为 $G$ 中一条初级道路, 若路径的两个端点 $v_0$ 和 $v_l$ 不与初级道路本身以外的任何结点相邻, 这样的初级道路称为极长初级道路 (有向图中, 初级道路起点的前驱集 (内邻集), 终点的后继集 (外邻集), 都在初级道路本身上)

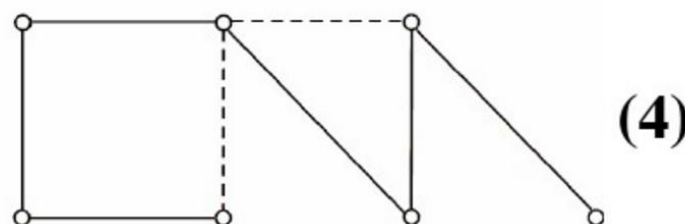
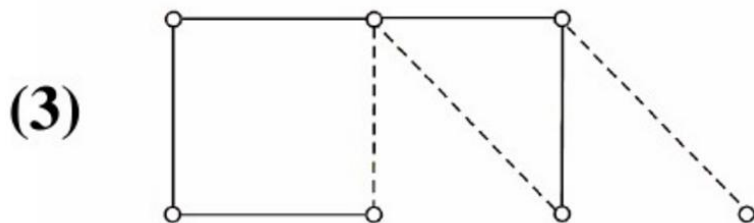
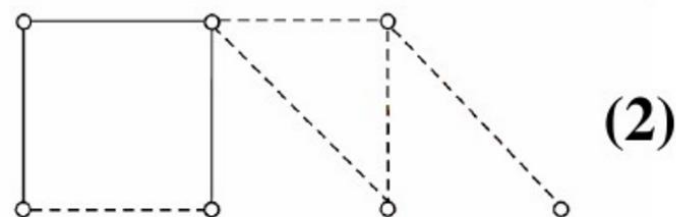
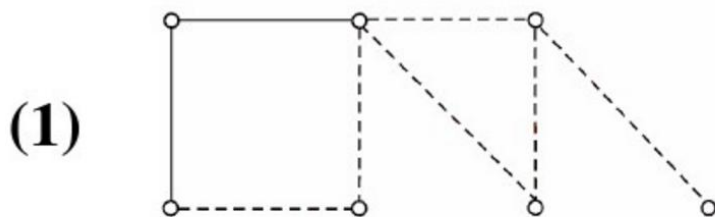


# 扩大初级道路法

- **扩大初级道路法**：任何一条初级道路，如果不是极长初级道路，则至少有一个端点与初级道路本身以外的结点相邻，则将该结点及其相关联的边扩到新的初级道路中来，得到更新的初级道路。继续上述过程，直到变成极长初级道路为止



# 极长初级道路 实例



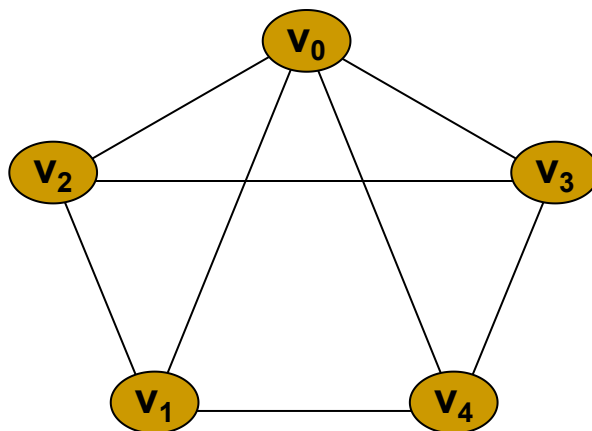
- 由某条道路扩大出来的极长初级道路不唯一，可以说，极长初级道路不是图中最长的道路
- (1) 中的实线边所示为长度为2的初级道路，而 (2) (3) (4) 为扩大后的极长初级道路

# 道路与回路

- 证明：若对简单图 $G$ 中每一个 $v_k \in V(G)$ ，都有 $d(v_k) \geq 3$ ，则 $G$ 中必含带弦的回路。

证明：在 $G$ 中构造一条极长的初级道路 $P=(v_0, e_{i1}, v_1, e_{i2}, \dots, v_{l-1}, e_{il}, v_l)$ 。由于 $P$ 是极长的初级道路，所以 $v_0$ 和 $v_l$ 的邻接点都在该道路 $P$ 上。由已知条件， $d(v_0) \geq 3$ ，不妨设 $\Gamma(v_0)=\{v_1, v_{ij}, v_{ik}, \dots\}$ ，其中 $1 < j < k$ ，这时 $(v_0, v_1, \dots, v_{ik}, v_0)$ 是一条初级回路，而 $(v_0, v_{ij})$ 就是该回路中的一条弦。

# 带弦回路



1. 构造极长初级道路

$(v_0, v_1), (v_0, v_1, v_2), (v_0, v_1, v_2, v_3), (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$

2.  $\Gamma(v_0) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

3.  $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$  即为所求的初级回路,

而  $(v_0, v_2)$  就是该回路的一条弦

# 道路与回路

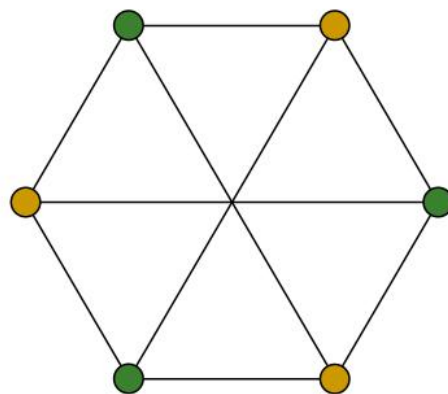
## 二分图

- 定义5.1.4: 如果图 $G$ 的顶点集 $V(G)$ 能够分成两个不相交的非空子集 $V_1$ 和 $V_2$ , 使得 $G$ 的每条边的两个端点分别在 $V_1$ 和 $V_2$ 中, 则称 $G$ 为二分图。记为 $G=\langle V_1, V_2 \rangle$ 。
- 二分图 $G$ 的二划分子集 $V_1$ 、 $V_2$ 可能不唯一。
- 若二分图 $G=\langle V_1, V_2 \rangle$ 中 $V_1$ 的每个顶点与 $V_2$ 的每个顶点都邻接, 则称 $G$ 为完全二分图, 记为 $K_{m, n}$ , 其中,  $|V_1|=m$ ,  $|V_2|=n$ 。

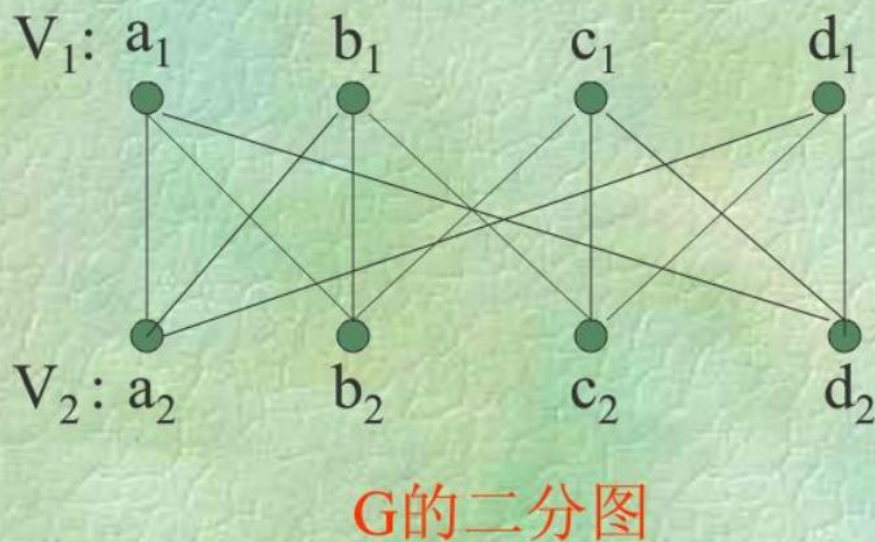
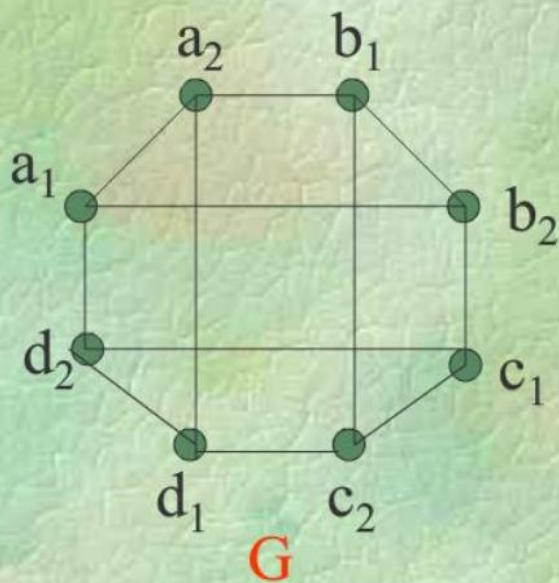


# 道路与回路

## ■ 完全二分图 $K_{3,3}$



## ■ 下面是图G及其二分图:





# 道路与回路

- 含有 $K_3$ 子图的图一定不是二分图
- $K_n$ 不是二分图 ( $n \geq 3$ )

# 道路与回路

- 证明：如果二分图 $G$ 中存在回路，则它们都是由偶数条边组成的。

证明：设 $C$ 是二分图 $G$ 的任一条回路，不妨设 $v_0 \in X$ 是 $C$ 的始点，由于 $G$ 是二分图，所以沿回路 $C$ 必须经过偶数条边才能达到某结点 $v_i \in X$ ，因而只有经过偶数条边才能回到 $v_0$ 。

# 补图

- 定义5.1.5：如果简单图 $G$ 和简单图 $H$ 满足：

(1)  $V(H)=V(G)=V$ ；（顶点集相等）

(2) 对  $\forall u, v \in V$ ,  $u \neq v$ ,  $uv \in E(H)$ , 当且仅当  $uv \notin E(G)$ ,  
（边集互补）

则称 $H$ 为 $G$ 的补图，（是边的补集）记为 $H=\bar{G}$ 。

- 两个简单图互为补图的例子：



# 道路与回路

- 证明：设 $G$ 是简单图，当 $m > (n-1)(n-2)/2$ 时， $G$ 是连通图。

证明：假定 $G$ 是非连通图，则它至少含有2个连通分支。

设分别是 $G_1=(V_1, E_1)$ ,  $G_2=(V_2, E_2)$ 。其中

$$|V_1(G_1)|=n_1, |V_2(G_2)|=n_2, n_1+n_2=n,$$

$|E_1(G_1)|+|E_2(G_2)|=m$ 。由于 $G$ 是简单图，因此

$$|E_1(G_1)| \leq \frac{1}{2} n_1 (n_1 - 1),$$

$$|E_2(G_2)| \leq \frac{1}{2} n_2 (n_2 - 1),$$

$$m \leq \frac{1}{2} n_1 (n_1 - 1) + \frac{1}{2} n_2 (n_2 - 1).$$

# 道路与回路

由于  $1 \leq n_1 \leq n-1$ ,  $1 \leq n_2 \leq n-1$

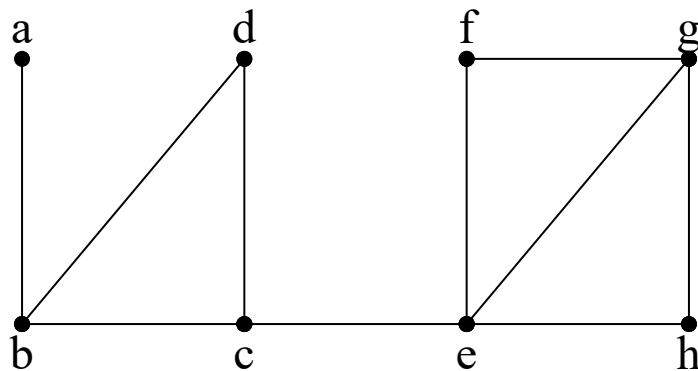
所以

$$m \leq \frac{1}{2}(n-1)(n_1-1+n_2-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

与已知条件矛盾，故 **G** 是连通图。

# 道路与回路

- $n$ 个结点的连通图的边数一定  $\geq n-1$
- 两点间距离：若 $u$ 与 $v$ 连通，则 $u$ 与 $v$ 之间最短道路长度称为 $u$ 与 $v$ 的距离
- 割点：去掉该点（及关联边后），图的连通分支数上升
- 割边（桥）：去掉该边后，图的连通分支数上升



割点为：**b, c**和**e**

桥：**{a, b}**和 **{c, e}**

# 补：等价概念

## 清华教材

- 链/道路
- 简单道路
- 初级道路
- 初级回路
- 二分图

## 曹老师教材

- 通道（依据起点终点是否重合：开/闭）
- 迹（依据起点终点是否重合：开/闭）
- 路
- 圈（依据长度：奇/偶）
- 二部图/偶图

## 2.3 欧拉道路与回路

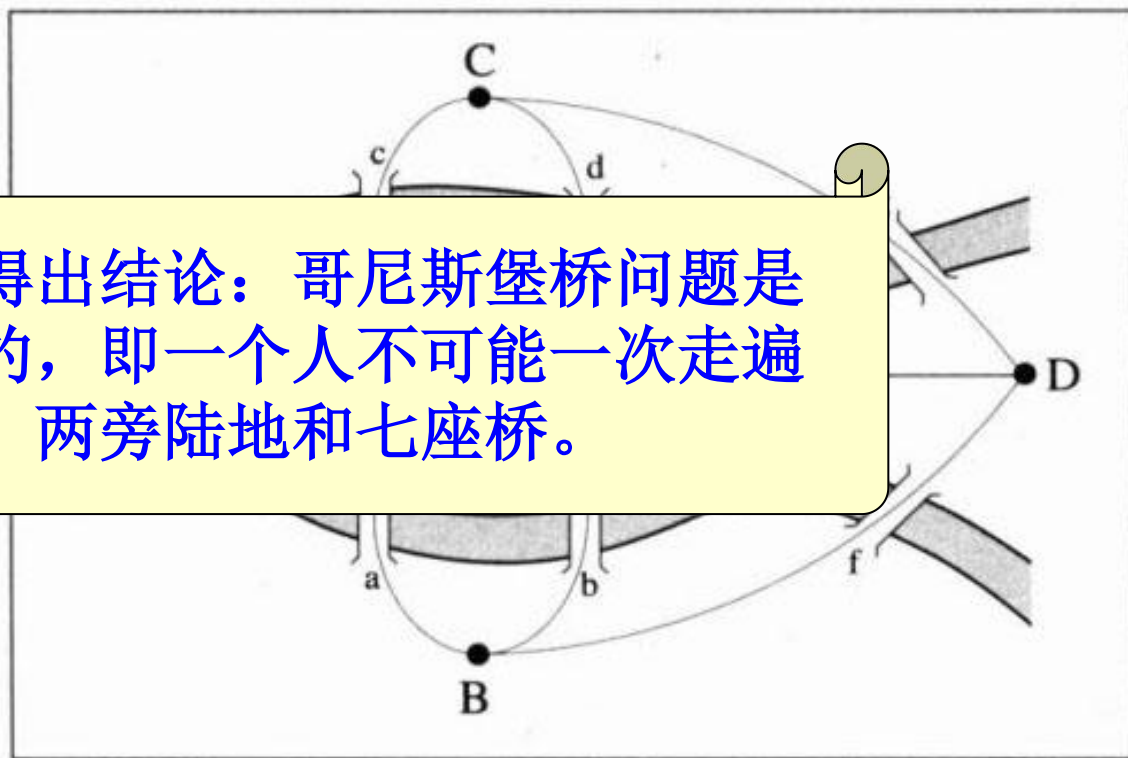
- 1736年瑞士著名数学家欧拉(Leonhard Euler)发表了图论的第一篇论文“哥尼斯堡七桥问题”。成功地回答了，图中是否存在经过每条边一次且仅一次的回路
- 人们普遍认为欧拉是图论的创始人
- 1936年，匈牙利数学家寇尼格(Konig)出版了图论的第一部专著《有限图与无限图理论》，这是图论发展史上的重要的里程碑，它标志着图论将进入突飞猛进发展的新阶段



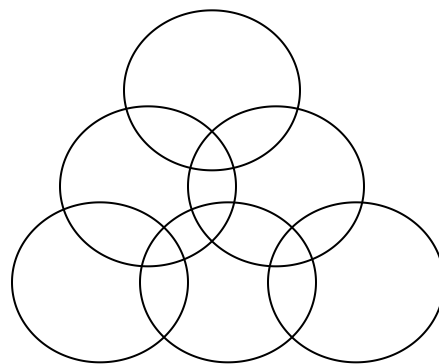
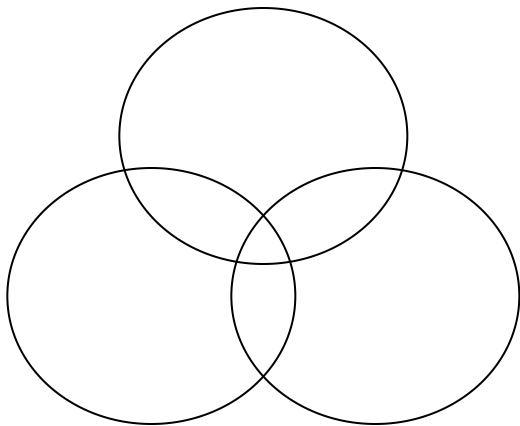
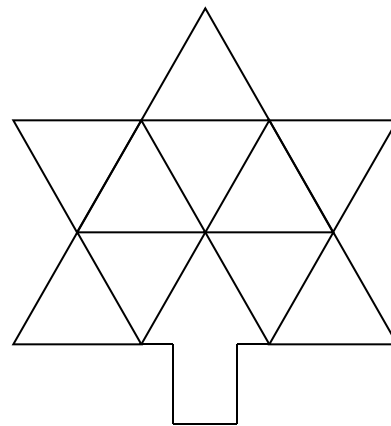
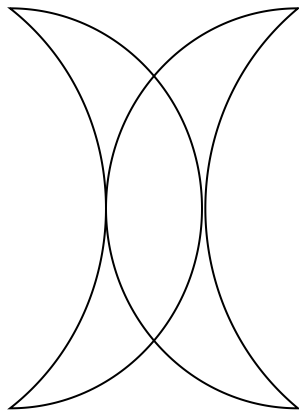
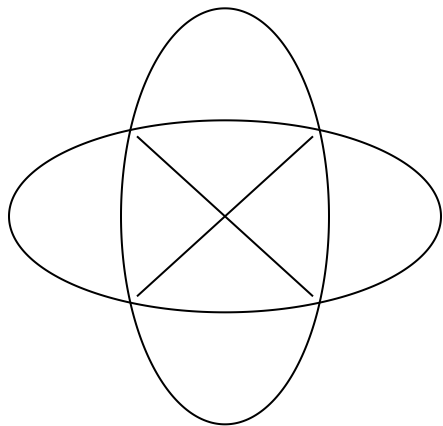
# 哥尼斯堡七桥问题

哥尼斯堡位于普雷格河上，河中有两个岛，两岸和两岛之间有七座桥相连。欧拉将这个问题抽象为一个图形来描述，其中的四块陆地分别用四个点表示，而陆地之间有桥相连者则用连结两个点的边表示。

欧拉得出结论：哥尼斯堡桥问题是无解的，即一个人不可能一次走遍两岛、两旁陆地和七座桥。



# 一笔画



# 欧拉道路与回路（欧拉迹与欧拉闭迹）

## ■ 定义2.3.1

无向连通图 $G=(V, E)$ 中的一条经过所有边的简单回路(道路)称为 $G$ 的欧拉回路(道路)

## ■ 定理2.3.1

无向连通图 $G$ 存在欧拉回路的充要条件是 $G$ 中各结点的度都是偶数

# 欧拉道路与回路

## ■ 定理2.3.1的证明:

1. 必要性: 若 $G$ 中有欧拉回路 $C$ , 则 $C$ 过每条边一次且仅一次. 对任一结点 $v$ 来说, 如果 $C$ 经过 $e_i$ 进入 $v$ , 则一定通过另一条边 $e_j$ 从 $v$ 离开. 因此结点 $v$ 的度是偶数
2. 充分性: 由于 $G$ 是有穷图, 因此可以断定, 从 $G$ 的任一结点 $v_0$ 出发一定存在 $G$ 的一条简单回路 $C$ . 这是因为各结点的度都是偶数, 所以这条简单道路不可能停留在 $v_0$ 以外的某个点, 而不能再向前延伸以致构成回路 $C$

## 定理2.3.1充分性证明

如果 $E(G)=C$ , 则 $C$ 就是欧拉回路, 充分性得证。

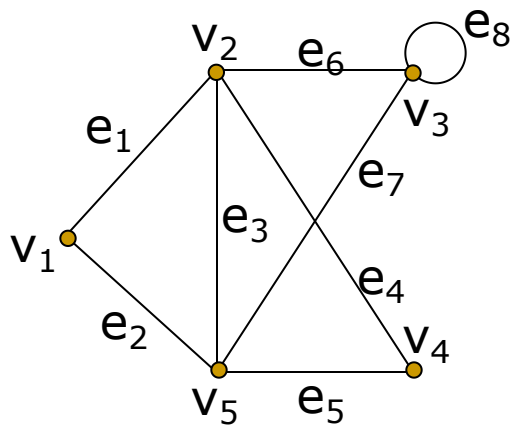
否则在 $G$ 中删去 $C$ 的各边, 得到 $G_1=G-C$ 。

$G_1$ 可能是非连通图, 但是每个结点的度保持为偶数。这时,  $G_1$ 中一定存在某个度非零的结点 $v_i$ , 同时 $v_i$ 也是 $C$ 中的结点。否则 $C$ 的结点与 $G_1$ 的结点之间无边相连, 与 $G$ 是连通图矛盾。

同理, 从 $v_i$ 出发,  $G_1$ 中 $v_i$ 所在连通分支内存在一条简单回路 $C_1$ 。显然,  $C \cup C_1$ 仍然是 $G$ 的一条简单回路, 但它包括的边数比 $C$ 多。

继续以上构造方法, 最终有简单回路 $C' = C \cup C_1 \cup \dots \cup C_k$ , 它包含了 $G$ 的全部边, 即 $C'$ 是 $G$ 的一条欧拉回路

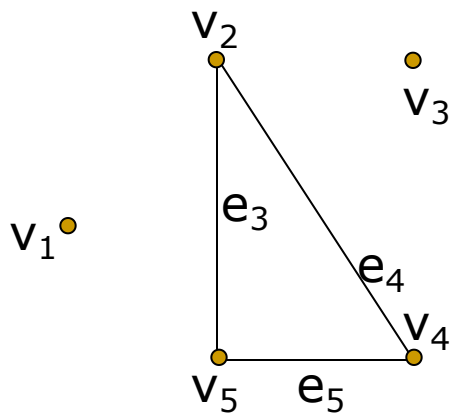
# 构造欧拉回路



$$C = (e_1, e_6, e_8, e_7, e_2)$$

$$C' = (e_3, e_5, e_4)$$

$$C \cup C' = (e_1, e_3, e_5, e_4, e_6, e_8, e_7, e_2) \\ = E(G)$$



# 欧拉道路与回路

## ■ 推论2.3.1

若无向连通图 $G$ 中只有2个度为奇的结点,则 $G$ 存在欧拉道路.

证明: 设 $v_i$ 和 $v_j$ 是两个度为奇数的结点.

作 $G' = G + (v_i, v_j)$ , 则 $G'$ 中各点的度都是偶数. 由定理2.3.1,  $G'$ 有欧拉回路, 它含边 $(v_i, v_j)$ , 删去该边, 得到一条从 $v_i$ 到 $v_j$ 的简单道路, 它恰好经过了 $G$ 的所有边, 亦即是一条欧拉道路

# 欧拉道路与回路

- 结论：七桥问题既不存在欧拉回路也不存在欧拉道路。
- 推论2.3.2  
若有向连通图 $G$ 中各结点的正、负度相等, 则 $G$ 存在有向欧拉回路.  
其证明与定理2.3.1的证明相仿.



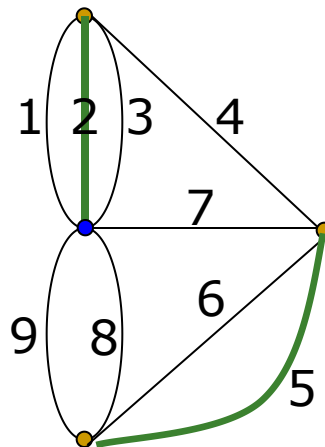
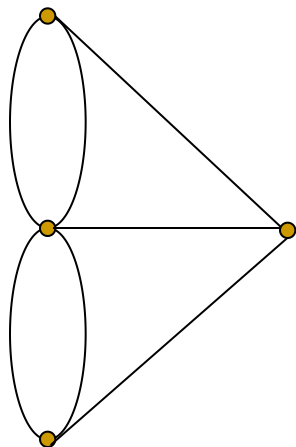
# 欧拉道路与回路

- 例2.3.3 设连通图 $G=(V,E)$ 有 $k$ 个度为奇数的结点，那么 $E(G)$ 可以划分成 $k/2$ 条简单道路。

证明：由性质1.1.2， $k$ 是偶数。在这 $k$ 个结点间增添 $k/2$ 条边，使每个结点都与其中一条边关联，得到 $G'$ ，那么 $G'$ 中各结点的度都为偶数。

由定理2.3.1， $G'$ 包含一个欧拉回路 $C$ 。而新添的 $k/2$ 条边在 $C$ 上都不相邻。所以删去这些边后，我们就得到由 $E(G)$ 划分成的 $k/2$ 条简单道路。

# 举例



- 欧拉回路(1,2,3,4,5,6,7,8,9)
- $2(=4/2)$ 条简单道路(3,4)和(6,7,8,9,1)

# 一笔画

## ■ 某图形是否可以一笔画出

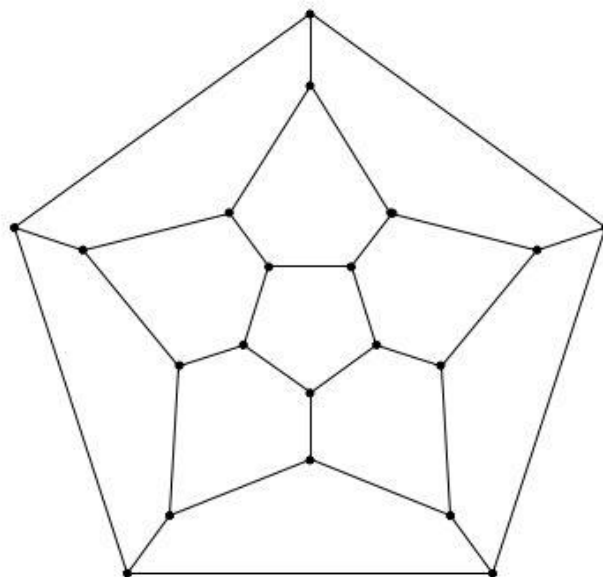
- 凡是由偶点组成的连通图，一定可以一笔画成。画时可以把任一偶点为起点，最后一定能以这个点为终点画完此图
- 凡是只有两个奇点的连通图（其余都为偶点），一定可以一笔画成。画时必须把一个奇点为起点，另一个奇点终点
- 其他情况的图都不能一笔画出，但是奇点数除以二便可算出此图需几笔画成

## 2.4 哈密顿道路与回路（哈密顿路与圈）

**19**世纪英国数学家哈密顿提出的问题：

一个凸**12**面体，把**20**个顶点比作世界上**20**个城市，**30**条棱表示这些城市间的交通路线。

问：能否周游世界，即从某个城市出发，经过每城一次且只一次最后返回出发地。



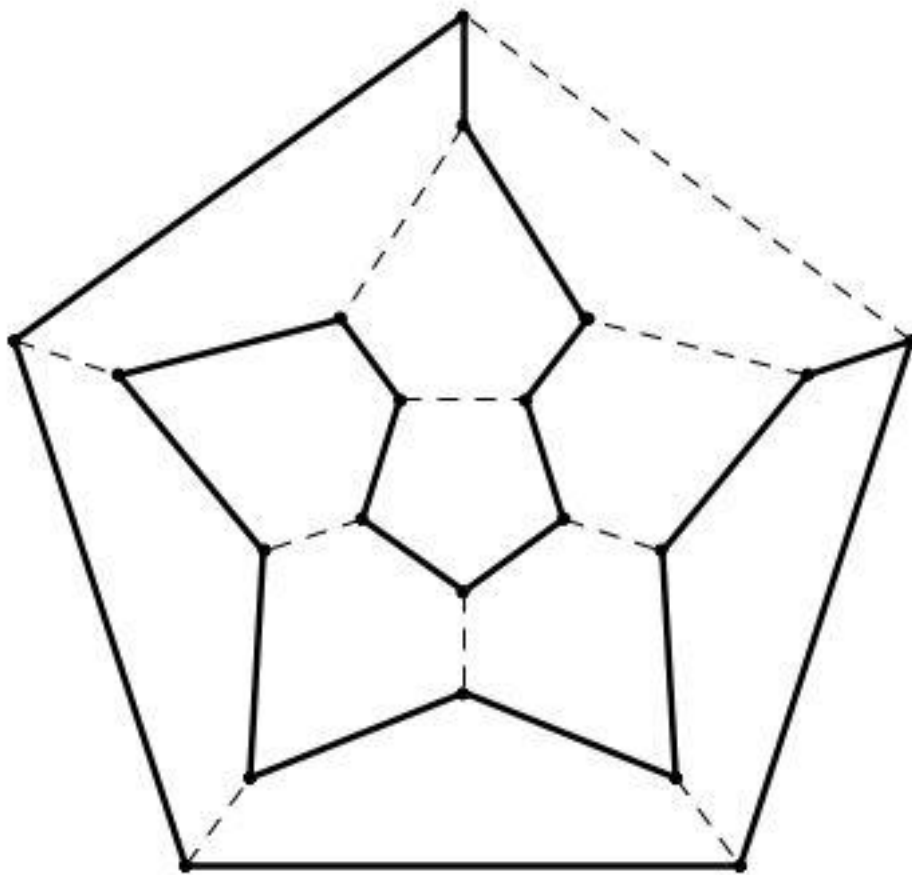
# 作业一

■ P35

1; 2; 3; 6

# 哈密顿道路与回路

答案:



# 哈密顿道路与回路

## ■ 定义2.4.1

无向图的一条过全部结点的初级回路(道路)称为 $G$ 的哈密顿回路(道路),简记为 $H$ 回路(道路)

■ 哈密顿回路是初级回路,是特殊的简单回路,因此它与欧拉回路不同。当然在特殊情况下, $G$ 的哈密顿回路恰好也是其欧拉回路

■ 鉴于 $H$ 回路是初级回路,所以如果 $G$ 中含有重边或自环,删去它们后得到的简单图 $G'$ ,那么 $G$ 和 $G'$ 关于 $H$ 回路(道路)的存在性是等价的。因此,判定 $H$ 回路存在性问题一般是针对简单图的

# 充分条件和必要条件

- 满足充分条件，判断是(是哈密顿图)
- 不满足必要条件，判断否(不是哈密顿图)
- 不满足充分条件，不能判断否(不是哈密顿图)
- 满足必要条件，不能判断是(是哈密顿图)

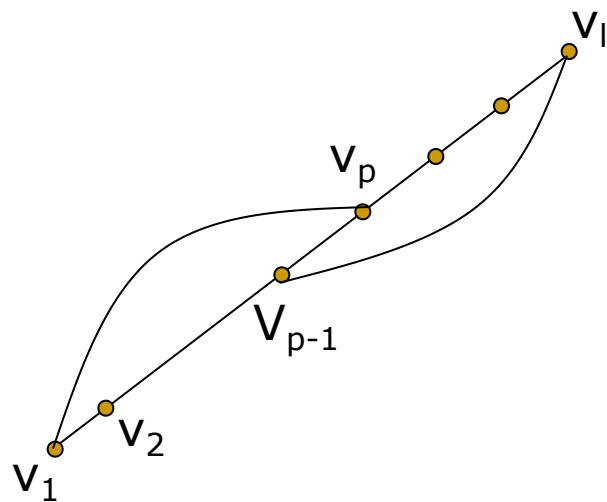


# 哈密顿道路与回路-引理\*

- 引理\*: 设 $P=(v_1, v_2, \dots, v_l)$ 是图 $G$ 中一条极长的初级道路(即 $v_1$ 和 $v_l$ 的邻点都在 $P$ 上)而且 $d(v_1)+d(v_l) \geq l$ , 则 $G$ 中一定存在经过结点 $v_1, v_2, \dots, v_l$ 的初级回路。

证明: 反证法。若边 $(v_1, v_p) \in E(G)$ , 就不能有 $(v_l, v_{p-1}) \in E(G)$ , 不然删除 $(v_p, v_{p-1})$ , 就形成了一条过这个结点的初级回路。于是, 设 $d(v_1)=k$ , 则 $d(v_l) \leq l-k-1$ 。因此 $d(v_1)+d(v_l) \leq l-1$ 。与已知矛盾。所以存在经过结点 $v_1, v_2, \dots, v_l$ 的初级回路 $C$ 。

# 哈密顿道路与回路-引理\*



# 哈密顿道路与回路-充分性定理1

## ■ 定理2.4.1

如果简单图 $G$ 的任意两结点 $v_i, v_j$ 之间恒有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n - 1$$

则 $G$ 中存在哈密顿道路

证明: 先证 $G$ 是连通图。若 $G$ 非连通, 则至少分为2个连通支 $H_1, H_2$ , 其结点数分别为 $n_1, n_2$ 。从中各任取一个结点 $v_i, v_j$ , 则

$$d(v_i) \leq n_1 - 1, \quad d(v_j) \leq n_2 - 1。$$

故 $d(v_i) + d(v_j) < n - 1$ 。矛盾。

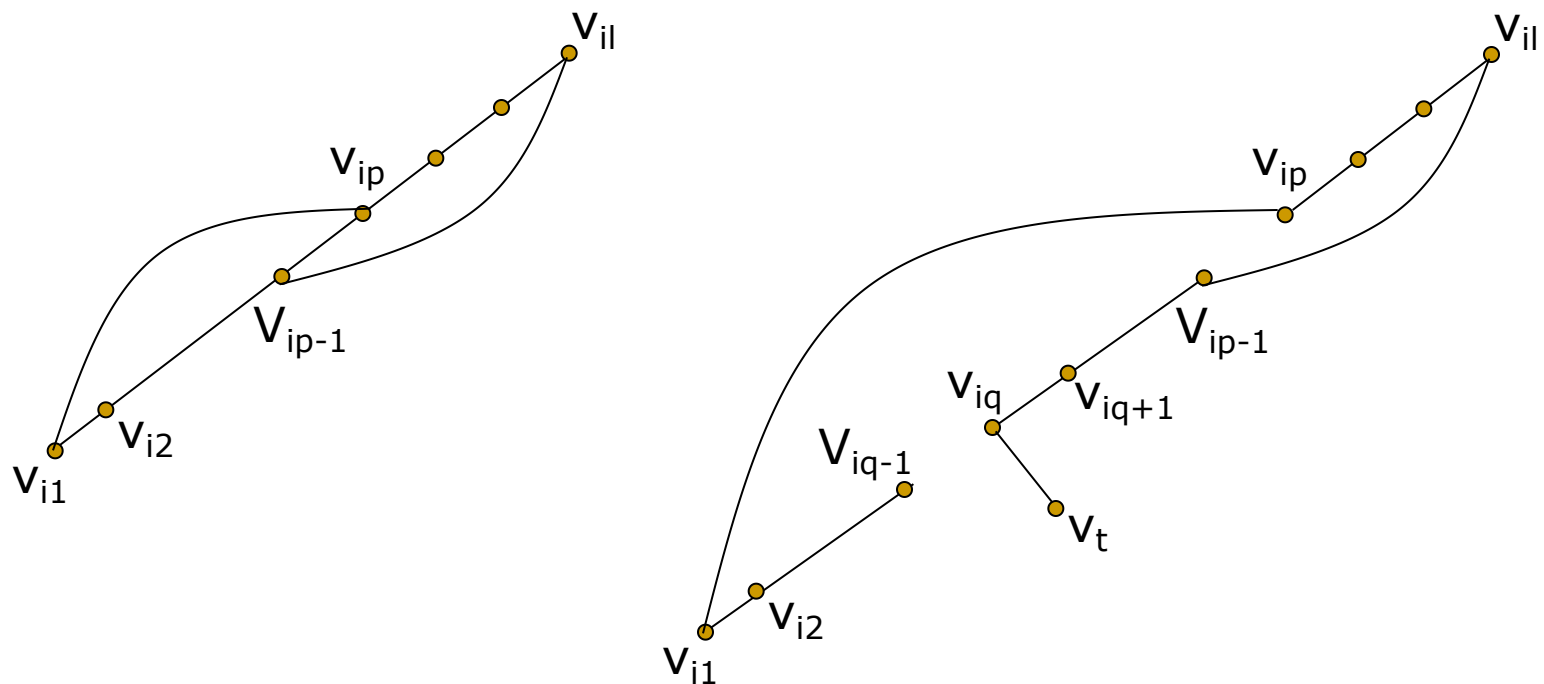
# 哈密顿道路与回路-充分性定理1

- 以下证 $G$ 存在H道路。设 $P=(v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{il})$ 是 $G$ 中一条极长的初级道路，即 $v_{i1}$ 和 $v_{il}$ 的邻点都在 $P$ 上。此时，
  - (1) 若 $l=n$ ,  $P$ 即为一条H道路
  - (2) 若 $l<n$ , 则可以证明 $G$ 中一定存在经过结点 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{il}$ 的初级回路。(CLAIM)  
否则，若边 $(v_{i1}, v_{ip}) \in E(G)$ , 就不能有 $(v_{il}, v_{ip-1}) \in E(G)$ , 不然删除 $(v_{ip}, v_{ip-1})$ , 就形成了一条过这 $l$ 个结点的初级回路。于是，设 $d(v_{i1})=k$ , 则 $d(v_{il}) \leq l-k-1$  (其中减去1表示不能与自身相邻)。因此 $d(v_{i1})+d(v_{il}) \leq l-1 < n-1$ 。与已知矛盾。所以存在经过结点 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{il}$ 的初级回路 $C$ 。

# 哈密顿道路与回路-充分性定理1

由于 $G$ 连通，所以存在 $C$ 之外的结点 $v_t$ 与 $C$ 中某点 $(v_{iq})$ 相邻。删去 $(v_{iq-1}, v_{iq})$ ，则 $P' = (v_t, v_{iq}, \dots, v_{ip-1}, v_{il}, \dots, v_{ip}, v_{i1}, \dots, v_{iq-1})$ 是 $G$ 中一条比 $P$ 更长的初级道路。以 $P'$ 的两个端点 $v_t$ 和 $v_{iq-1}$ 继续扩充，可得到一条新的极长的初级道路。重复上述过程，因为 $G$ 是有穷图，所以最终得到的初级道路一定包含了 $G$ 的全部结点，即是 $H$ 道路。

# 哈密顿道路与回路-充分性定理1



# 哈密顿道路与回路-充分性定理1

## ■ 推论2.4.1

若简单图 $G$ 的任意两结点 $v_i$ 和 $v_j$ 之间恒有

$$d(v_i)+d(v_j)\geq n$$

则 $G$ 中存在哈密顿回路

证明：由定理2.4.1， $G$ 有H道路。设其两端点是 $v_1$ 和 $v_n$ ，若 $G$ 不存在H回路，根据引理\*证明，一定有：若 $d(v_1)=k$ ，则 $d(v_n)\leq n-k-1$ ，那么 $d(v_1)+d(v_n)\leq n-1 < n$ ，与已知矛盾。

## ■ 推论2.4.2

若简单图 $G$ 中每个结点的度都大于等于 $n/2$ ，则 $G$ 有H回路

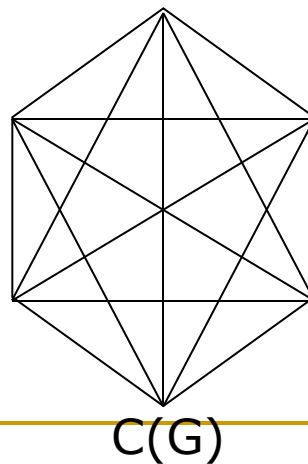
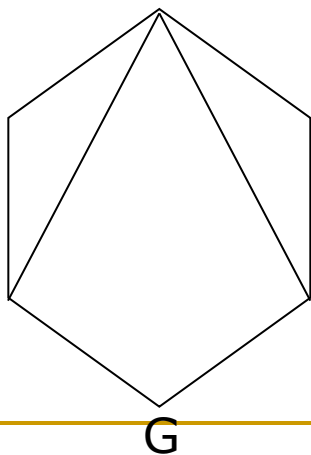
证明：由推论2.4.1可得。

# 哈密顿道路与回路

## ■ 定义2.4.2

若 $v_i$ 和 $v_j$ 是简单图 $G$ 的不相邻结点，且满足

$d(v_i)+d(v_j)\geq n$ ，则令 $G' = G+(v_i, v_j)$ . 对 $G'$  重复上述过程，直至不再有这样的结点对为止. 最终得到的图为 $G$ 的闭合图，记作 $C(G)$ .





# 哈密顿道路与回路

## ■ 引理2.4.1

简单图 $G$ 的闭合图 $C(G)$ 是唯一的。

证明：设 $C_1(G)$ 和 $C_2(G)$ 是 $G$ 的两个闭合图， $L_1=\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ ,  $L_2=\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ 分别是 $C_1(G)$ 和 $C_2(G)$ 中新加入边的集合，可以证明 $L_1=L_2$ ，即 $C_1(G)=C_2(G)$ 。如若不然，不失一般性，设 $e_{i+1}=(u,v) \in L_1$ 是构造 $C_1(G)$ 时第一条不属于 $L_2$ 的边，亦即 $e_{i+1} \notin L_2$ 。令 $H=G \cup \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ ，这时 $H$ 是 $C_1(G)$ 也是 $C_2(G)$ 的子图。由于构造 $C_1(G)$ 时要加入 $e_{i+1}$ ，显然 $H$ 中满足 $d(u)+d(v) \geq n$ ，但是 $(u,v) \notin C_2(G)$ ，与 $C_2(G)$ 是 $G$ 的闭合图矛盾。

# 哈密顿道路与回路

## ■ 引理2.4.2

设 $G$ 是简单图,  $v_i, v_j$ 是不相邻结点, 且满足 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$ . 则 $G$ 存在H回路的充要条件是 $G+(v_i, v_j)$ 有H回路

证明: 必要性显然。现证充分性。假定 $G$ 不存在H回路, 则 $G+(v_i, v_j)$ 的H回路一定经过边 $(v_i, v_j)$ , 删去 $(v_i, v_j)$ , 即 $G$ 中存在一条以 $v_i, v_j$ 为端点的H道路, 这时又有 $d(v_i)+d(v_j) < n$ , 与已知矛盾。

# 哈密顿道路与回路-充分性定理2

## ■ 定理2.4.2

简单图 $G$ 存在哈密顿回路的充要条件是其闭合图存在哈密顿回路

证明：设 $C(G)=G \cup L_1$ ,  $L_1=\{e_1, e_2, \dots, e_t\}$ ,

由引理2.4.1和引理2.4.2,

$G$ 有H回路 $\Leftrightarrow G+e_1$ 有H回路 $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow G \cup L_1$ 有H回路

由于 $C(G)$ 是唯一的, 故定理得证。

## ■ 推论2.4.3

设 $G(n \geq 3)$ 是简单图, 若 $C(G)$ 是完全图 $K_n$ ,  $G$ 有H回路

说明: $d(v_i)+d(v_j)=(n-1)+(n-1)=n+(n-2)$

# 哈密顿道路与回路

- 举例：设 $n(\geq 3)$ 个人中，任两个人合在一起都认识其余 $n-2$ 个人。证明这 $n$ 个人可以排成一队，使相邻者都互相认识。

证明：每个人用一个结点表示，相互认识则用边连接相应的结点，于是得到简单图 $G$ 。若 $G$ 中有 $H$ 道路，则问题得证。

由已知条件，对任意两点 $v_i, v_j \in V(G)$ ，都有 $d(v_i) + d(v_j) \geq n-2$ 。此时，

(1) 若 $v_i$ 和 $v_j$ 相识，即 $(v_i, v_j) \in E(G)$ ，则 $d(v_i) + d(v_j) \geq n$

(2) 若 $v_i$ 和 $v_j$ 不相识，必存在 $v_k \in V(G)$ ，满足 $(v_i, v_k), (v_j, v_k) \in E(G)$ 。否则，设 $(v_i, v_k) \notin E(G)$ ，就出现 $v_k, v_j$ 合在一起不认识 $v_i$ ，与已知矛盾。因此也有 $d(v_i) + d(v_j) \geq n-1$

综上由定理2.4.1， $G$ 中存在 $H$ 道路。

# 哈密顿道路与回路-必要性定理

## ■ 必要性定理:

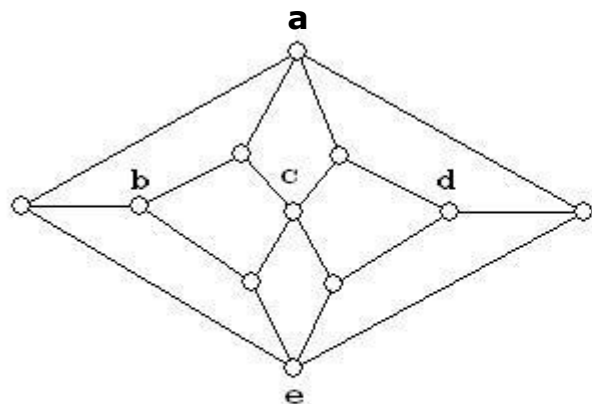
若 $G$ 是 $H$ -图, 则对于 $V$ 的每个非空真子集 $S$ , 均有 $W(G-S) \leq |S|$ , 其中 $W(G-S)$ 是 $G-S$ 中连通分支数。

证明: 设 $C$ 是 $G$ 的 $H$ -回路, 则对于 $V$ 的每个非空真子集 $S$ 均有 $W(C-S) \leq |S|$ 。而 $C-S$ 是 $G-S$ 的生成子图, 故 $W(G-S) \leq W(C-S)$ , 因此 $W(G-S) \leq |S|$ 。

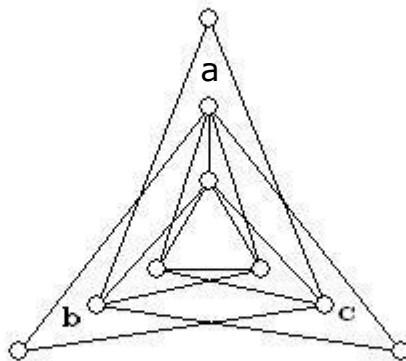
以 $K_4$ 为例。

# 哈密尔顿图

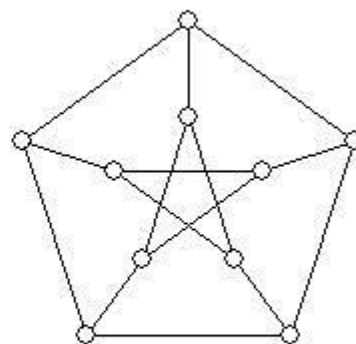
例 判定下面三个图是否是哈密尔顿图.



$G_1$



$G_2$



$G_3$

# 哈密尔顿图

- 在 $G_1$ 中, 令 $S=\{a,b,c,d,e\}$ , 则 $W(G_1-S)=6$ , 由必要性定理知,  $G$ 不是哈密尔顿图。
- 在 $G_2$ 中令 $S=\{a,b,c\}$ , 则 $W(G_2-S)=4$ , 所以 $G_2$ 也不是哈密尔顿图。
- $G_3$ 称为彼得森图。可以证明它不是哈密尔顿图, 但对它的任意顶点子集 $S$ , 有 $W(G_3-S)\leq |S|$ 。这说明必要性定理中的条件, 只是哈密尔顿图的一个必要条件, 而不是充分条件
  - 与彼得森图同构的图也一定不是哈密尔顿图

# 充分条件和必要条件

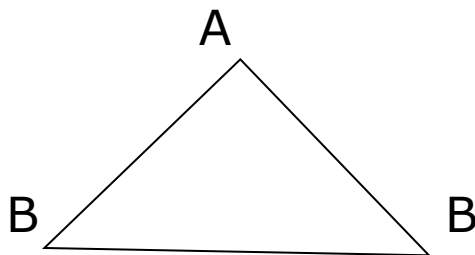
- 满足充分条件，判断是(是哈密顿图)
- 不满足必要条件，判断否(不是哈密顿图)
- 不满足充分条件，不能判断否(不是哈密顿图)
- 满足必要条件，不能判断是(是哈密顿图)



- 推论:哈密顿图没有割点.
- 定理:有奇数个顶点的二部图必不是哈密顿图.

# 哈密尔顿图

- 对于一个H-图，如果可以用A, B交替标记所有的顶点（即：从任一结点开始，给其标以A，它的邻接点标以B，B的邻接点再标以A，如此继续下去，直至G中所有结点被标完），则有 $|A|=|B|$ （即A,B个数相同）
- 对于一个图如果无法用A, B交替标记顶点，也无法判断是否是H-图。例如：



# 哈密尔顿图 难点

对于哈密顿图，需要注意以下几点：

1. 仅有哈密顿通路而无哈密顿回路的图不是哈密顿图。
2. 还没有判断图中是否存在哈密顿通路、哈密顿回路的简单判定定理，只能对节点较少的图凭经验判定。
3. 在哈密顿图中有些定理仅是判别的必要条件，必要条件正方面的叙述无法用来判断一个图是否是哈密顿图，此时该定理是毫无用处的，但必要条件的等价逆否命题却非常重要，可以用来判断一个图不是哈密顿图。

# 作业二

■ P36

8, 9, 10