



第十章 关系

马汝辉 副研究员、博导
上海交通大学
2025 年 12 月



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

关系

关系是在集合上定义的一个常用的概念。例如，在自然数之间可以定义相等关系和小于关系，在命题公式之间可以定义等价关系和永真蕴涵关系，在集合 A 的各子集之间可以定义相等关系和包含关系。此外，在学生和课程之间存在选课关系，在课程表上反映了课程、班级、教师、教室、时间等之间的关系。关系就是联系，也就是映射。在数据库的一种重要类型关系数据库中保存了各数据项之间的关系，关系数据库中的数据结构就是按照本章所定义的关系设计的。

10.1 二元关系

10.2 关系矩阵和关系图

10.3 关系的逆、合成、限制和象

10.4 关系的性质

10.5 关系的闭包

10.6 等价关系和划分

10.7 相容关系和覆盖

10.8 偏序关系



10.1.1 二元关系的定义

定义 10.1.1

对集合 A 和 B , $A \times B$ 的任一子集称为 A 到 B 的一个二元关系, 一般记作 R 。若 $\langle x, y \rangle \in R$, 可记作 xRy ; 若 $\langle x, y \rangle \notin R$, 可记作 $x \not R y$ 。在 $A = B$ 时, $A \times A$ 的任一子集称为 A 上的一个二元关系。二元关系可简称关系。

从形式上说, 二元关系是笛卡儿积的子集, 换句话说, 它是有序对的集合。从语义上说, 二元关系是集合 A 和 B 元素之间的联系。从下面的例子可以看出这种联系。

例 1

设 $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b\}$, 则

$$R_1 = \{\langle 0, a \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, a \rangle\}$$

是 A 到 B 的两个二元关系。

$$R_3 = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$$

$$R_4 = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$$

是 A 上的两个二元关系。

例 2

设 $X = \{1, 2, 3\}$, 定义 X 上的关系 D_X 和 L_X 为

$$D_X = \{\langle x, y \rangle \mid x \in X \wedge y \in X \wedge x \text{ 整除 } y\}$$

$$L_X = \{\langle x, y \rangle \mid x \in X \wedge y \in X \wedge x \leq y\}$$

于是, D_X 是

$$D_X = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$$

L_X 关系是

$$L_X = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

例 3

对任意的集合 A , 在 $P(A)$ 上的包含关系 R_1 和真包含关系 R_2 定义为

$$R_1 = \{\langle x, y \rangle \mid x \in P(A) \wedge y \in P(A) \wedge x \subseteq y\}$$

$$R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid x \in P(A) \wedge y \in P(A) \wedge x \subset y\}$$

若 $A = \{\emptyset\}$, 则 $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $P(A)$ 上的 R_1 和 R_2 是

$$R_1 = \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \{\emptyset\} \rangle, \langle \{\emptyset\}, \{\emptyset\} \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle \emptyset, \{\emptyset\} \rangle\}$$

n 元关系



二元关系是二元组的集合。推广这个概念，可以用 n 元组的集合定义 n 元关系。

定义 10.1.2

若 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n > 1$, A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个集合, 则 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的任一子集称为从 A_1 到 A_n 上的一个 n 元关系。



10.1.2 特殊的关系

下面定义三个 A 上的特殊的关系。

定义 10.1.3

对任意的集合 A :

- ① A 上的恒等关系 I_A 定义为

$$I_A = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\},$$

- ② A 上的全域关系（全关系） E_A 定义为

$$E_A = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A\},$$

- ③ \emptyset 是 A 上的空关系。

例 4

设 $A = \{a, b\}$, 则

$$I_A = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\},$$

$$E_A = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}.$$

10.1.3 定义域和值域



定义 10.1.4

对 A 到 B 的一个关系 R , 可以定义

- ① R 的定义域 $\text{dom}(R)$ 为 $\text{dom}(R) = \{x \mid (\exists y)(\langle x, y \rangle \in R)\}$
- ② R 的值域 $\text{ran}(R)$ 为 $\text{ran}(R) = \{y \mid (\exists x)(\langle x, y \rangle \in R)\}$
- ③ R 的域 $\text{fld}(R)$ 为 $\text{fld}(R) = \text{dom}(R) \cup \text{ran}(R)$

例 5

设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, A 到 B 的关系 $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$, 则

$$\text{dom}(R) = \{a, b\},$$

$$\text{ran}(R) = \{b, c, d\},$$

$$\text{fld}(R) = \{a, b, c, d\}.$$

定理 10.1.1

对 A 到 B 的关系 R , 如果 $\langle x, y \rangle \in R$, 则 $x \in \bigcup \bigcup R$, $y \in \bigcup \bigcup R$.

证明: 已知 $\langle x, y \rangle \in R$, 即 $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in R$. 因 $\{x, y\}$ 是 R 的元素的元素, 故 $\{x, y\} \in \bigcup R$. 因 x 和 y 是 $\bigcup R$ 的元素的元素, 故 $x \in \bigcup \bigcup R$, $y \in \bigcup \bigcup R$.

定理 10.1.2

对 A 到 B 的关系 R , 则 $\text{fld}(R) = \bigcup \bigcup R$.

证明: 对任意的 x , 若 $x \in \text{fld}(R)$, 则 $x \in \text{dom}(R)$ 或 $x \in \text{ran}(R)$ 。则存在 y , 使 $\langle x, y \rangle \in R$ 或 $\langle y, x \rangle \in R$ 。这时都有 $x \in \bigcup \bigcup R$ 。

对任意的 t , 若 $t \in \bigcup \bigcup R$ 。因为 R 的元素的形式是 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, 所以必存在 u , 使

$$\{\{t\}, \{t, u\}\} \in R$$

或

$$\{\{u\}, \{u, t\}\} \in R.$$

也就是 $t \in \text{fld}(R)$ 。

10.1 二元关系

10.2 关系矩阵和关系图

10.3 关系的逆、合成、限制和象

10.4 关系的性质

10.5 关系的闭包

10.6 等价关系和划分

10.7 相容关系和覆盖

10.8 偏序关系

10.2 关系矩阵和关系图



描述关系的方法有三种：集合表达式、关系矩阵和关系图，关系的定义使用了集合表达式，这一节介绍后两种方法，对有限集合上的关系，采用关系矩阵和关系图的方法，不仅使分析更加方便，而且有利于使用计算机处理。



10.2.1 关系矩阵

定义 10.2.1

设集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 。

① 若 R 是 X 到 Y 的一个关系, 则 R 的关系矩阵是 $m \times n$ 的矩阵

$$M(R) = (r_{ij})_{m \times n}$$

矩阵元素是 r_{ij} , 且

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } \langle x_i, y_j \rangle \in R \\ 0, & \text{当 } \langle x_i, y_j \rangle \notin R \end{cases}$$

其中 $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

② 若 R 是 X 上的一个关系, 则 R 的关系矩阵是 $m \times m$ 的矩阵

$$M(R) = (r_{ij})_{m \times m}$$

矩阵元素是 r_{ij} , 且

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } \langle x_i, x_j \rangle \in R \\ 0, & \text{当 } \langle x_i, x_j \rangle \notin R \end{cases}$$

其中 $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$

关系矩阵



A 到 B 的关系 R 是 $A \times B$ 的子集, $A \times B$ 有 $m \times n$ 个有序对。矩阵 $M(R)$ 有 m 行 (行为横向)、 n 列 (列为竖向), 共有 $m \times n$ 个元素。因此, $M(R)$ 的每个元素恰好对应 $A \times B$ 的一个有序对。用 $M(R)$ 中元素 r_{ij} 的值表示有序对 $\langle x_i, y_j \rangle$ 是否在 R 中, 因为只有 \in 和 \notin 两种情况, 所以 r_{ij} 只取值 0 和 1 是合理的。

例 1

设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, X 到 Y 的关系 R 为

$$R = \{\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_1, y_3 \rangle, \langle x_2, y_3 \rangle, \langle x_4, y_2 \rangle\}$$

则 R 的关系矩阵是

$$M(R) = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

关系矩阵



在矩阵右方和下方标注了 X 和 Y 的元素，标注表明， x_1 对应第 1 行， x_2 对应第 2 行， y_1 对应第 1 列，依此类推。因此，第 1 行第 3 列交点的 $r_{13} = 1$ 表示 $\langle x_1, y_3 \rangle \in R$ ，而第 3 行第 1 列的 $r_{31} = 0$ 表示 $\langle x_3, y_1 \rangle \notin R$ 。在使用关系矩阵时，集合 X 和 Y 中的元素分别进行了排序。这时就不必在矩阵上标注这些元素，而且也不难确定一个矩阵元素对应的有序对。

例 2

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, A 上的 $>$ 关系定义为

$$> = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}$$

则关系矩阵是

$$\mathbf{M}(>) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



10.2.2 关系图

定义 10.2.2

设集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 。

- ① 若只是 X 到 Y 的一个关系, 则 R 的关系图是一个有向图 $G(R) = \langle V, E \rangle$, 它的顶点集是 $V = X \cup Y$, 边集是 E , 从 x_i 到 y_j 的有向边 $e_{ij} \in E$, 当且仅当 $\langle x_i, y_j \rangle \in R$ 。
- ② 若 R 是 X 上的一个关系, 则 R 的关系图是一个有向图 $G(R) = \langle V, E \rangle$, 它的顶点集是 $V = X$, 边集是 E , 从 x_i 到 x_j 的有向边 $e_{ij} \in E$ 当且仅当 $\langle x_i, x_j \rangle \in R$ 。

关系图中一条有向边 e_{ij} 对应 R 中的一个有序对 $\langle x_i, y_j \rangle$, 二者一一对应。图形表示形象直观, 易于理解。

1

10.1 二元关系

2

10.2 关系矩阵和关系图

3

10.3 关系的逆、合成、限制和象

4

10.4 关系的性质

5

10.5 关系的闭包

6

10.6 等价关系和划分

7

10.7 相容关系和覆盖

8

10.8 偏序关系

定义



定义 10.3.1

对 X 到 Y 的关系 R , Y 到 Z 的关系 S , 定义:

- ① R 的逆 R^{-1} 为 Y 到 X 的关系

$$R^{-1} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R\},$$

- ② R 与 S 的合成 $S \circ R$ 为 X 到 Z 的关系

$$S \circ R = \{\langle x, y \rangle \mid (\exists z)(\langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in S)\}.$$

此外, 对任意的集合 A , 还可定义

③ R 在 A 上的限制 $R \upharpoonright A$ 为 A 到 Y 的关系

$$R \upharpoonright A = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \wedge x \in A\},$$

④ A 在 R 下的象 $R[A]$ 为集合

$$R[A] = \{y \mid (\exists x)(x \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R)\}.$$

上海交通大学

注意, X 到 Y 的关系 R 和 Y 到 Z 的关系 S 合成为 $S \circ R$, 而不写成 $R \circ S$ (注: 有的书写为 $R \circ S$ 。) $S \circ R$ 是 X 到 Z 的关系。为了求 $S \circ R$, 应把 R 中每个有序对与 S 中每个有序对一一配合, 以此确定 $S \circ R$ 的每个有序对。

$R \upharpoonright A$ 是关系 R 的子集, 其中每个有序对 $\langle x, y \rangle$ 满足 $x \in A$ 。可以说 $R \upharpoonright A$ 是 A 到 Y 的关系。也可以说是 X 到 Y 的关系。当 $\text{dom}(R) \subseteq A$ 时, $R \upharpoonright A = R$ 。 $R[A]$ 是一个集合, 它实质上是只 $R \upharpoonright A$ 的值域。

例 1

设集合 A 上的关系 R 为

$$A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\},$$

$$R = \{\langle a, \{a\} \rangle, \langle \{a\}, \{\{a\}\} \rangle\}.$$

$$R^{-1} = \{\langle \{a\}, a \rangle, \langle \{\{a\}\}, \{a\} \rangle\}$$

$$R \circ R = \{\langle a, \{\{a\}\} \rangle\}$$

$$R \upharpoonright \{a\} = \{\langle a, \{a\} \rangle\}$$

$$R \upharpoonright \{\{a\}\} = \{\langle \{a\}, \{\{a\}\} \rangle\}$$

$$R^{-1} \upharpoonright \{a\} = \emptyset$$

$$R[\{a\}] = \{\{a\}\}$$

$$R[\{\{a\}\}] = \{\{\{a\}\}\}$$

例 2

设集合 N 上的关系 R 和 S 为

$$R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\},$$

$$S = \{\langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 5, 4 \rangle\}.$$

则

$$R^{-1} = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\},$$

$$S \circ R = \{\langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle\},$$

$$R \circ S = \Phi.$$

10.3.2 $S \circ R$ 的关系矩阵



R^{-1} 的关系矩阵 $M(R^{-1})$ 就是 R 的关系矩阵的转置矩阵。也就是说, 把 $M(R)$ 中每一对 r_{ij} 和 r_{ji} ($i \neq j$) 互换就得到 $M(R^{-1})$, 下面介绍求 $S \circ R$ 的关系矩阵的方法。如果 A 是有限集合, $|A| = n$ 。关系 R 和 S 都是 A 上的关系, R 和 S 的关系矩阵 $M(R) = (r_{ij})$ 和 $M(S) = (s_{ij})$ 都是 $n \times n$ 的方阵。于是 $S \circ R$ 的关系矩阵 $M(S \circ R) = (w_{ij})$, 可以用下述的矩阵逻辑乘法计算 (类似于矩阵乘法)。可以写为

$$M(S \circ R) = M(R)M(S),$$

例 3

设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, A 上的关系

$$R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\},$$

$$S = \{\langle 4, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$$

则

$$\mathbf{M}(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

10.3.2 $S \circ R$ 的关系矩阵

$$\mathbf{M}(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}(R \circ S) = \mathbf{M}(S)\mathbf{M}(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} w_{14} &= (s_{11} \wedge r_{14}) \vee (s_{12} \wedge r_{24}) \vee (s_{13} \wedge r_{34}) \vee (s_{14} \wedge r_{44}) \\ &= (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ &= 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{21} &= (s_{21} \wedge r_{11}) \vee (s_{22} \wedge r_{21}) \vee (s_{23} \wedge r_{31}) \vee (s_{24} \wedge r_{41}) \\ &= (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) = 0 \end{aligned}$$

此外

$$\mathbf{M}(S \circ R) = \mathbf{M}(R)\mathbf{M}(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10.3.3 性质

定理 10.3.1

对 X 到 Y 的关系 R 和 Y 到 Z 的关系 S , 则

- ① $\text{dom}(R^{-1}) = \text{ran}(R)$,
- ② $\text{ran}(R^{-1}) = \text{dom}(R)$,
- ③ $(R^{-1})^{-1} = R$,
- ④ $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$,

证明

- ① 对任意的 x , 有

$$\begin{aligned} x \in \text{dom}(R^{-1}) &\Leftrightarrow (\exists y)(\langle x, y \rangle \in R^{-1}) \\ &\Leftrightarrow (\exists y)(\langle y, x \rangle \in R) \Leftrightarrow x \in \text{ran}(R), \end{aligned}$$

所以, $\text{dom}(R^{-1}) = \text{ran}(R)$.

② 类似于 (1).

③ 对任意的 $\langle x, y \rangle$, 有

$$\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (R^{-1})^{-1}$$

所以, $(R^{-1})^{-1} = R$ 。

④ 对任意的 $\langle x, y \rangle$, 有

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in (S \circ R)^{-1} &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in S \circ R \\ &\Leftrightarrow (\exists z)(\langle y, z \rangle \in R \wedge \langle z, x \rangle \in S) \\ &\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x, z \rangle \in S^{-1} \wedge \langle z, y \rangle \in R^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1} \circ S^{-1}. \end{aligned}$$

所以, $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$ 。

定理 10.3.2

对 X 到 Y 的关系 Q , Y 到 Z 的关系 S , Z 到 W 的关系 R , 则

$$(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q).$$

证明对任意的 $\langle x, y \rangle$ 有

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in (R \circ S) \circ Q \\ \Leftrightarrow & (\exists u)(\langle x, u \rangle \in Q \wedge \langle u, y \rangle \in (R \circ S)) \\ \Leftrightarrow & (\exists u)(\langle x, u \rangle \in Q \wedge (\exists v)(\langle u, v \rangle \in S \wedge \langle v, y \rangle \in R)) \\ \Leftrightarrow & (\exists v)(\exists u)(\langle x, u \rangle \in Q \wedge \langle u, v \rangle \in S \wedge \langle v, y \rangle \in R) \\ \Leftrightarrow & (\exists v)(\langle x, v \rangle \in (S \circ Q) \wedge \langle v, y \rangle \in R) \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in R \circ (S \circ Q). \end{aligned}$$

关系的合成是关系的运算。定理表明, 这个运算满足结合律。但是它不满足交换律, 一般 $S \circ R \neq R \circ S$ 。

定理 10.3.3

对 X 到 Y 的关系 R_2 和 R_3 , Y 到 Z 的关系 R_1 , 有

$$\textcircled{1} R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = R_1 \circ R_2 \cup R_1 \circ R_3,$$

$$\textcircled{2} R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3,$$

对 X 到 Y 的关系 R_3 , Y 到 Z 的关系 R_1 、 R_2 , 有

$$\textcircled{3} (R_1 \cup R_2) \circ R_3 = R_1 \circ R_3 \cup R_2 \circ R_3,$$

$$\textcircled{4} (R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteq R_1 \circ R_3 \cap R_2 \circ R_3,$$

(注意, 规定关系合成符优先于集合运算符。)

证明只证 (2), 其他留作思考题。

② 对任意的 $\langle x, y \rangle$, 可得

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle &\in R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \\
 &\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x, z \rangle \in (R_2 \cap R_3) \wedge \langle z, y \rangle \in R_1) \\
 &\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x, z \rangle \in R_2 \wedge \langle x, z \rangle \in R_3 \wedge \langle z, y \rangle \in R_1) \\
 &\Rightarrow (\exists z)(\langle x, z \rangle \in R_2 \wedge \langle z, y \rangle \in R_1) \wedge (\exists z)(\langle x, z \rangle \in R_3 \wedge \langle z, y \rangle \in R_1) \\
 &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (R_1 \circ R_2) \wedge \langle x, y \rangle \in (R_1 \circ R_3) \\
 &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)
 \end{aligned}$$

所以, $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$ 。

定理 10.3.4

对 X 到 Y 的关系 R 和集合 A, B , 有

- ① $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$,
- ② $R[\bigcup A] = \bigcup \{R[B] \mid B \in A\}$,
- ③ $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$,
- ④ $R[\bigcap A] \subseteq \bigcap \{R[B] \mid B \in A\}$, $A \neq \emptyset$,
- ⑤ $R[A] - R[B] \subseteq R[A - B]$.

只证 (2), (3), 其他留作思考题。

② 对任意的 y , 可得

$$y \in R[\bigcup A] \Leftrightarrow y \in \text{ran}(R \upharpoonright \bigcup A)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(x \in \bigcup A \wedge \langle x, y \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists B)(B \in A \wedge x \in B \wedge \langle x, y \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow (\exists B)(B \in A \wedge (\exists x)(x \in B \wedge \langle x, y \rangle \in R))$$

$$\Leftrightarrow (\exists B)(B \in A \wedge y \in R[B])$$

$$\Leftrightarrow (\exists B)(y \in R[B] \wedge R[B] \in \{R[B] \mid B \in A\})$$

$$\Leftrightarrow y \in \bigcup \{R[B] \mid B \in A\}$$

所以, $R[\bigcup A] = \bigcup \{R[B] \mid B \in A\}$ 。

③ 对任意的 y , 可得

$$y \in R[A \cap B] \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \cap B \wedge \langle x, y \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \in B \wedge \langle x, y \rangle \in R)$$

$$\Rightarrow (\exists x)(x \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge \langle x, y \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow y \in R[A] \wedge y \in R[B]$$

$$\Leftrightarrow y \in R[A] \cap R[B]$$

所以, $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$ 。

例 4

设整数集合 Z 上的关系为 R

$$R = \{\langle x, y \rangle \mid x \in Z \wedge y \in Z \wedge y = x^2\}$$

集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, -1, -2\}$ 。

于是, $R[A] = \{1, 4\}$, $R[B] = \{0, 1, 4\}$, $R[A] \cap R[B] = \{1, 4\}$ 。但是, $A \cap B$ 是 \emptyset , $R[A \cap B] = \emptyset$ 。

此外, $A - B = \{1, 2\}$, $R[A - B] = \{1, 4\}$ 。但是 $R[A] - R[B] = \emptyset$ 。

1

10.1 二元关系

2

10.2 关系矩阵和关系图

3

10.3 关系的逆、合成、限制和象

4

10.4 关系的性质

5

10.5 关系的闭包

6

10.6 等价关系和划分

7

10.7 相容关系和覆盖

8

10.8 偏序关系

关系的性质



在实际问题中，我们感兴趣的往往不是一般的关系，而是具有某些特殊性质的关系。为了更好地处理这些关系，有必要深入研究关系的性质。对 A 上的关系来说，主要的性质有：自反性、非自反性、对称性、反对称性、传递性。这一节定义这些性质，并给出若干结论。

10.4.1 定义

定义 10.4.1

对 A 上的关系 R , 若对任意的 $x \in A$ 都有 xRx , 则称 R 为 A 上自反的关系, 若对任意的 $x \in A$ 都有 $x \not R x$, 则称 R 为 A 上非自反的关系。

这个定义也可以写成:

$$R \text{ 是 } A \text{ 上自反的} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow xRx),$$

$$R \text{ 是 } A \text{ 上非自反的} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \not R x),$$

例 1

在非空集合 A 上的恒等关系 I_A 和全关系 E_A 都是自反的。在集合 $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \wedge x \neq 0\}$ 上的整除关系 D_B 和小于等于关系 L_B 都是自反的。在集合 A 的幂集 $P(A)$ 上的包含关系 \subseteq 和相等关系 $=$ 都是自反的，这些关系都不是非自反的。

例 2

在非空集合 A 上的空关系 \emptyset 是非自反的。在集合 \mathbb{N} 上的小于关系 $<$ 是非自反的。在集合 A 的幂集 $P(A)$ 上的真包含关系 \subset 是非自反的。这些关系都不是自反的。

例 3

在集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系 $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$ 不是自反的，也不是非自反的。但是在非空集合 A 上，不存在一个关系，它是自反的又是非自反的。

如果 R 是 A 上自反的，则关系矩阵 $M(R)$ 的主对角线元素都是 1（即 r_{ii} 都是 1），关系图 $G(R)$ 的每个顶点都有自圈。如果 R 是 A 上非自反的，则 $M(R)$ 的主对角线元素都是 0， $G(R)$ 的每个顶点都没有自圈。

定义 10.4.2

R 为 A 上的关系, 对任意的 $x, y \in A$, 若 $xRy \rightarrow yRx$, 则称 R 为 A 上对称的关系; 若 $(xRy \wedge yRx) \rightarrow (x = y)$, 则称 R 为 A 上反对称的关系。

这个定义也可以写成

$$R \text{ 是 } A \text{ 上对称的} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy) \rightarrow yRx)$$

$$R \text{ 是 } A \text{ 上反对称的} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y)$$

反对称性还有另一种等价的定义

$$R \text{ 是 } A \text{ 上反对称的} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge x \neq y \wedge xRy) \rightarrow y \not R x),$$

例 4

在非空集合 A 上的全关系是对称的，不是反对称的。

例 5

在 $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \neq 0\}$ 上的整除关系、小于等于关系、小于关系都是反对称的。且不是对称的。

例 6

在非空集合 A 上的恒等关系和空关系都是对称的，也都是反对称的。

例 7

在集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系

$$R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$$

不是对称的，也

不是反对称的。

例 6 和 例 7 说明，对称性和反对称性既可以同时满足，也可以都不满足。

如果 R 是 A 上对称的, 则 $M(R)$ 是对称矩阵。

对任意的 i 和 j , $r_{ij} = r_{ji}$ 。在 $G(R)$ 中, 任意两个顶点之间或者没有有向边, 或者互有有向边 e_{ij} 和 e_{ji} (不会只有 e_{ij} 没有 e_{ji})。如果 R 是 A 上反对称的, 则 $M(R)$ 是反对称矩阵 (对任意的 $i \neq j$, 若 $r_{ij} = 1$ 则 $r_{ji} = 0$), 在 $G(R)$ 中, 任意两个顶点之间或者没有有向边, 或者仅有一条有向边 (不会同时有 e_{ij} 和 e_{ji})。

定义 10.4.3

R 为 A 上的关系, 对任意的 $x, y, z \in A$, 若 $(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$, 则称 R 为 A 上传递的关系。

这个定义也可以写成

$$R \text{ 是 } A \text{ 上传递的} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$$

例 8

在集合 A 上的全关系、恒等关系、空关系都是传递的。

在 $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \neq 0\}$ 上的整除关系、小于等于关系、小于关系都是传递的。

例 9

在集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系

$$R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

不是传递的关系。因为 $\langle 1, 2 \rangle \in R$, $\langle 2, 3 \rangle \in R$ 。但是 $\langle 1, 3 \rangle \notin R$ 。



10.4.2 几个结论

定理 10.4.1

如果 R_1 和 R_2 是集合 A 上的自反关系, 则 R_1^{-1} , $R_1 \cap R_2$, 和 $R_1 \cup R_2$ 也是 A 上的自反关系。

证明: 对于任意的 $x \in A$, 我们有

$$\begin{aligned} x \in A &\implies \langle x, x \rangle \in R_1 \wedge \langle x, x \rangle \in R_2 \\ &\implies \langle x, x \rangle \in R_1 \cap R_2 \end{aligned}$$

因此, $R_1 \cap R_2$ 是 A 上的自反关系。

对于 R_1^{-1} 和 $R_1 \cup R_2$ 的证明是类似的。

定理 10.4.2

如果 R_1 和 R_2 是集合 A 上的对称关系, 则 R_1^{-1} , $R_1 \cap R_2$, 和 $R_1 \cup R_2$ 也是 A 上的对称关系。

证明: 对于任意的 $\langle x, y \rangle$, 我们有

$$\langle x, y \rangle \in R_1 \cup R_2 \iff \langle x, y \rangle \in R_1 \vee \langle x, y \rangle \in R_2$$

$$\implies \langle y, x \rangle \in R_1 \vee \langle y, x \rangle \in R_2$$

$$\iff \langle y, x \rangle \in R_1 \cup R_2$$

因此, $R_1 \cup R_2$ 是 A 上的对称关系。

对于 R_1^{-1} 和 $R_1 \cap R_2$ 的证明是类似的。

定理 10.4.3

如果 R_1 和 R_2 是集合 A 上的传递关系, 则 R_1^{-1} 和 $R_1 \cap R_2$ 也是 A 上的传递关系。

证明: 对于任意的 $\langle x, y \rangle$ 和 $\langle y, z \rangle$, 我们有

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \wedge \langle y, z \rangle \in R_1^{-1} \\ \iff \langle y, x \rangle \in R_1 \wedge \langle z, y \rangle \in R_1 \\ \implies \langle z, x \rangle \in R_1 \\ \iff \langle x, z \rangle \in R_1^{-1} \end{aligned}$$

因此, R_1^{-1} 是 A 上的传递关系。

对于 $\langle x, y \rangle \in R_1 \cap R_2$ 和 $\langle y, z \rangle \in R_1 \cap R_2$, 我们有

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in R_1 \cap R_2 \wedge \langle y, z \rangle \in R_1 \cap R_2 \\ \iff \langle x, y \rangle \in R_1 \wedge \langle x, y \rangle \in R_2 \wedge \langle y, z \rangle \in R_1 \wedge \langle y, z \rangle \in R_2 \\ \implies \langle x, z \rangle \in R_1 \wedge \langle x, z \rangle \in R_2 \end{aligned}$$

注意： $R_1 \cup R_2$ 不一定是传递的。

例 10

在集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系 $R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle\}$, $R_2 = \{\langle 2, 3 \rangle\}$ 都是 A 上的传递关系。但是, $R_1 \cup R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ 不是 A 上的传递关系。

定理 10.4.4

如果 R_1 和 R_2 是集合 A 上的反对称关系, 则 R_1^{-1} 和 $R_1 \cap R_2$ 也是 A 上的反对称关系。

证明: 为了证明方便, 把反对称性的充要条件等价改写为:

$$(\forall x)(\forall y)(x \neq y \rightarrow (\langle x, y \rangle \notin R \vee \langle y, x \rangle \notin R))。$$

对于任意的 $x, y \in A$, 我们有

$$x \neq y \rightarrow (\langle x, y \rangle \notin R_1 \vee \langle y, x \rangle \notin R_1)$$

$$\iff x \neq y \rightarrow (\langle y, x \rangle \notin R_1^{-1} \vee \langle x, y \rangle \notin R_1^{-1})$$

因此, R_1^{-1} 是 A 上的反对称关系。

对于 $R_1 \cap R_2$, 我们有

$$x \neq y \rightarrow (\langle x, y \rangle \notin R_1 \vee \langle y, x \rangle \notin R_1) \wedge (\langle x, y \rangle \notin R_2 \vee \langle y, x \rangle \notin R_2)$$

$$\implies x \neq y \rightarrow (\langle x, y \rangle \notin R_1 \cap R_2 \vee \langle y, x \rangle \notin R_1 \cap R_2)$$

所以, R_1^{-1} 是 A 上反对称的。

$$\begin{aligned}
 & (x \neq y \rightarrow (\langle x, y \rangle R_1 \vee \langle y, x \rangle R_1)) \wedge \\
 & (x \neq y \rightarrow (\langle x, y \rangle R_2 \vee \langle y, x \rangle R_2)) \\
 \Leftrightarrow & x \neq y \rightarrow ((\langle x, y \rangle R_1 \vee \langle y, x \rangle R_1) \wedge (\langle x, y \rangle R_2 \vee \langle y, x \rangle R_2)) \\
 \Rightarrow & x \neq y \rightarrow (\langle x, y \rangle R_1 \vee \langle y, x \rangle R_1 \vee \langle x, y \rangle R_2 \vee \langle y, x \rangle R_2) \\
 \Leftrightarrow & x \neq y \rightarrow (\neg(\langle x, y \rangle \in R_1 \wedge \langle x, y \rangle \in R_2) \vee \neg(\langle y, x \rangle \in R_1 \wedge \langle y, x \rangle \in R_2)) \\
 \Leftrightarrow & x \neq y \rightarrow (\langle x, y \rangle R_1 \cap R_2 \vee \langle y, x \rangle R_1 \cap R_2)
 \end{aligned}$$

所以, $R_1 \cap R_2$ 是 A 上反对称的。

注意：这时 $R_1 \cup R_2$ 不一定是反对称的。

例 11

：在集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系 $R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle\}$, $R_2 = \{\langle 2, 1 \rangle\}$ 都是 A 上的反对称关系。但是, $R_1 \cup R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ 不是 A 上的反对称关系。

定理 10.4.5

对于集合 A 上的关系 R , 我们有

- (1) R 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$ 。
- (2) R 是反对称的 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ 。

证明 (1): 首先假设 R 是对称的。对于任意的 $\langle x, y \rangle$, 我们有

$$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R \iff \langle x, y \rangle \in R^{-1}$$

因此, $R = R^{-1}$ 。

现在假设 $R = R^{-1}$ 。对于任意的 $\langle x, y \rangle$, 我们有

$$\langle x, y \rangle \in R \iff \langle x, y \rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$$

因此, R 是对称的。

(2) 首先假设 R 是反对称的。对于任意的 $\langle x, y \rangle$, 我们有

$$\langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1} \iff \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1}$$

$$\iff \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R$$

$$\implies x = y \implies \langle x, y \rangle \in I_A$$

因此, $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ 。

现在假设 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ 。对于任意的 $\langle x, y \rangle$, 我们有

$$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R$$

$$\iff \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1}$$

$$\iff \langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1}$$

$$\implies \langle x, y \rangle \in I_A \implies x = y$$

因此, R 是反对称的。

10.1 二元关系

10.2 关系矩阵和关系图

10.3 关系的逆、合成、限制和象

10.4 关系的性质

10.5 关系的闭包

10.6 等价关系和划分

10.7 相容关系和覆盖

10.8 偏序关系

10.5 关系的闭包



我们经常希望关系具有自反性、对称性和传递性。对于不具有这些性质的关系，可以扩充这个关系为更大的关系（原关系的超集合），使新关系有这些性质。这种作法就是闭包思想。闭包是数学上常用的概念，下面先介绍多个关系的合成，再介绍闭包的定义、性质和构造方法。

10.5.1 多个关系的合成

在 10.3 节介绍了两个关系的合成，下面推广到多个关系的合成。

定义 10.5.1 对于集合 A 上的关系 R , $n \in \mathbb{N}$, 关系 R 的 n 次幂 R^n 定义如下:

$$(1) R^0 = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\} = I_A,$$

$$(2) R^{n+1} = R^n \circ R \quad (n \geq 0).$$

注意, n 个关系 R 的合成简写为 R^n , n 个集合 A 的笛卡儿积经常也简写为 A^n . 二者的概念不同, 却使用了相同的表示。应该注意应用的情况, 以免理解错误。

例 1

集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的关系 R 定义为

$$R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle\}.$$

则 R^0 、 R^1 、 R^2 、 R^3 、 R^4 、 R^5 的关系图如下:

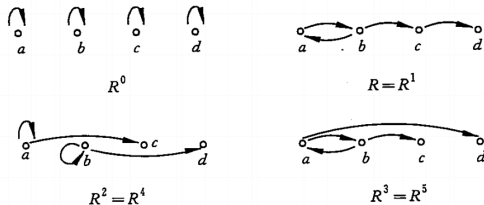


图 10.5.1

在例 1 中有一种有意义的现象, $R^2 = R^4 = R^6 = \dots$ 和 $R^3 = R^5 = R^7 = \dots$ 。这种现象是否普遍存在呢? 下面考虑这个问题。

定理 10.5.1

设 A 是有限集合, $|A| = n$, R 是 A 上的关系, 则存在自然数 s 和 t , $s \neq t$, 使得 $R^s = R^t$ 。

证明: 对于 $i \in \mathbb{N}$, R^i 都是 A 上的关系, 它们都是 $P(A \times A)$ 的元素。因为 $|A| = n$, 所以 $|A \times A| = n^2$, $|P(A \times A)| = 2^{n^2}$ 。列出 R 的各次幂, $R^1, R^2, R^3, \dots, R^{2n^2}, \dots$ 。由鸽巢原理, 至少有两个幂是相等的, 即存在自然数 s 和 t , $s \neq t$, 使得 $R^s = R^t$ 。(注: 鸽巢原理是组合学的基本原理。它指出: 如果 $n+1$ 个物体放入 n 个盒子里, 则有一个盒子中有两个物体。)

定理 10.5.2

设 A 是有限集合, R 是 A 上的关系, m 和 n 是非零自然数, 则

$$(1) R^m \circ R^n = R^{m+n},$$

$$(2) (R^m)^n = R^{mn}.$$

证明

(1) 对任意的 m , 对 n 施归纳。

当 $n = 1$ 时, $R^m \circ R^1 = R^{m+1}$ 。

假设 $n = k$ ($k \geq 1$) 时结论成立, 即有 $R^m \circ R^k = R^{m+k}$ 。令 $n = k + 1$, 则

$$R^m \circ R^{k+1} = R^m \circ (R^k \circ R) = (R^m \circ R^k) \circ R = R^{m+k} \circ R = R^{m+k+1}$$

结论得证。

(2) 对任意的 m , 对 n 施归纳。

当 $n = 1$ 时, $(R^m)^1 = R^m = R^{m \cdot 1}$ 。

假设 $n = k$ ($k \geq 1$) 时有 $(R^m)^k = R^{mk}$, 令 $n = k + 1$, 则

$$(R^m)^{k+1} = (R^m)^k \circ (R^m) = R^{mk} \circ R^m = R^{mk+m} = R^{m(k+1)}$$

所以, 结论得证。

定理 10.5.3

设 A 是有限集合, R 是 A 上的关系, 若存在自然数 s 和 t , $s < t$, 使得 $R^s = R^t$, 则

- (1) $R^{s+k} = R^{t+k}$, 其中 k 为自然数;
- (2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, k 和 i 为自然数, $p = t - s$;
- (3) 令 $B = \{R^0, R^1, \dots, R^{t-1}\}$, 则 R 的各次幂均为 B 的元素, 即对任意的自然数 q , 有 $R^q \in B$ 。

证明 (1) $R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$ 。

(2) 对 k 施归纳。当 $k = 0$ 时, $R^{s+0+i} = R^{s+i}$ 。假设 $k = n$ 时有 $R^{s+np+i} = R^{s+i}$, 其中 $p = t - s$ 。令 $k = n + 1$, 则

$$R^{s+(n+1)p+i} = R^{s+np+p+i} = R^{s+np+i} \circ R^p = R^{s+i} \circ R^p = R^{s+p+i} = R^{s+i}.$$

所以, 结论得证。

(3) 若 $q < t$, 由 B 的定义, $R^q \in B$ 。

若 $q \geq t$, 则 $q - s > 0$ 。一定存在自然数 k 和 i , 使得

$$q = s + kp + i, \quad \text{其中 } 0 \leq i \leq p - 1.$$

于是,

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}.$$

此外, $s + i \leq s + p - 1 = t - 1$ 。所以,

$$R^q = R^{s+i} \in B.$$

例 2: 对例 1 中的关系 R , $R^2 = R^4$, 于是对应的 $s = 2$, $t = 4$ 。

$B = \{R^0, R^1, R^2, R^3\}$ 。 R 的幂中不相同的只有以上 4 种。



10.5.2 闭包的定义

设 R 是 A 上的关系，有时希望给 R 增加一些有序对构成新关系 R' （显然 $R \subseteq R'$ ），使得 R' 具有自反性或对称性或传递性。但不希望 R' 太大，希望增加的有序对尽量少。这就是建立 R 的闭包的基本思想。

定义 10.5.2

对于非空集合 A 上的关系 R ，如果有 A 上另一个关系 R' ，满足：

- (1) R' 是自反的（对称的，传递的），
 - (2) $R \subseteq R'$ ，
 - (3) 对 A 上任何自反的（对称的，传递的）关系 R'' ，如果 $R \subseteq R''$ 则 $R' \subseteq R''$ ，
- 则称关系 R' 为 R 的自反（对称，传递）闭包，记作 $r(R)$ ($s(R)$, $t(R)$)。

这一个定义中定义了三个闭包：自反闭包 $r(R)$ ，对称闭包 $s(R)$ ，传递闭包 $t(R)$ 。直观上说， $r(R)$ 是有自反性的 R 的“最小”超集合， $s(R)$ 是有对称性的 R 的“最小”超集合， $t(R)$ 是有传递性的 R 的“最小”超集合。

例 3

对例 1 中的关系 R , R 的自反闭包 $r(R)$, 对称闭包 $s(R)$, 传递闭包 $t(R)$ 的关系图如图 10.5.2 所示。

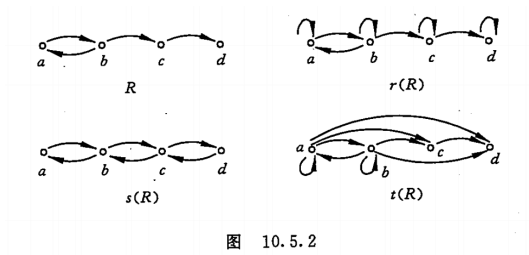


图 10.5.2



10.5.3 闭包的性质

定理 10.5.4

对非空集合 A 上的关系 R , 有

- ① R 是自反的 $\Leftrightarrow r(R) = R$,
- ② R 是对称的 $\Leftrightarrow s(R) = R$,
- ③ R 是传递的 $\Leftrightarrow t(R) = R$.

证明:

(1) 先设 R 是自反的。因为 $R \subseteq R$, 且任何包含 R 的自反关系 R'' , 有 $R \subseteq R''$ 。所以, R 满足 $r(R)$ 的定义, $r(R) = R$ 。

再设 $r(R) = R$ 。由 $r(R)$ 的定义, R 是自反的。

(2) 和 (3) 的证明类似。

定理 10.5.5

对非空集合 A 上的关系 R_1, R_2 , 若 $R_1 \subseteq R_2$, 则

- ① $r(R_1) \subseteq r(R_2)$,
- ② $s(R_1) \subseteq s(R_2)$,
- ③ $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

- 证明留作思考题。

定理 10.5.6

对非空集合 A 上的关系 R_1, R_2 , 则

- ① $r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$,
- ② $s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$,
- ③ $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$.

证明:

(1) 因为 $r(R_1)$ 和 $r(R_2)$ 都是 A 上自反的关系, 所以 $r(R_1) \cup r(R_2)$ 是 A 上自反的关系。由 $R_1 \subseteq r(R_1)$ 和 $R_2 \subseteq r(R_2)$, 有 $R_1 \cup R_2 \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$ 。所以 $r(R_1) \cup r(R_2)$ 是包含 $R_1 \cup R_2$ 的自反关系。由自反闭包定义, $r(R_1 \cup R_2) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$ 。

因为 $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$, 有 $r(R_1) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$ 。类似地 $r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$ 。则

$$r(R_1) \cup r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2).$$

(2) 和 (3) 的证明留作思考题。

- 注意, 定理的结论 (3) 是包含关系, 不是相等关系。下面是真包含的例子。

例 4

集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系 R_1 和 R_2 为, $R_1 = \{\langle a, b \rangle\}$, $R_2 = \{\langle b, c \rangle\}$. 于是, $t(R_1) = R_1 = \{\langle a, b \rangle\}$, $t(R_2) = R_2 = \{\langle b, c \rangle\}$. 则有 $t(R_1) \cup t(R_2) = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$. 但是 $R_1 \cup R_2 = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$, $t(R_1 \cup R_2) = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}$. 显然 $t(R_1) \cup t(R_2) \subsetneq t(R_1 \cup R_2)$.

10.5.4 闭包的构造方法

- 下面介绍如何求出已知关系 R 的三种闭包。

定理 10.5.7

对非空集合 A 上的关系 R , 有

$$r(R) = R \cup R^0.$$

定理 10.5.8

对非空集合 A 上的关系 R , 有

$$s(R) = R \cup R^{-1}.$$

证明

对任意的 $\langle x, y \rangle$, 可得

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle \in R \cup R^{-1} &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R \vee \langle x, y \rangle \in R^{-1} \\ &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R^{-1} \vee \langle y, x \rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \cup R^{-1}\end{aligned}$$

所以, $R \cup R^{-1}$ 是 A 上对称的关系。

显然有 $R \subseteq R \cup R^{-1}$ 。

- 对 A 上任意的包含 R 的对称关系 R'' , 对任意的 $\langle x, y \rangle$, 若 $\langle x, y \rangle \in R \cup R^{-1}$, 则 $\langle x, y \rangle \in R$ 或 $\langle x, y \rangle \in R^{-1}$ 。当 $\langle x, y \rangle \in R$, 由 $R \subseteq R''$ 有 $\langle x, y \rangle \in R''$ 。当 $\langle x, y \rangle \in R^{-1}$, 则 $\langle y, x \rangle \in R$, $\langle y, x \rangle \in R''$, 因 R'' 是对称的, 故 $\langle x, y \rangle \in R''$ 。两种情况都有 $\langle x, y \rangle \in R''$, 则 $R \cup R^{-1} \subseteq R''$ 。
- 总之, $R \cup R^{-1}$ 满足 $s(R)$ 的定义, 所以 $s(R) = R \cup R^{-1}$ 。
- 由定理可知, 很容易构造 R 的对称闭包, 只要对任何 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, x \rangle \notin R$ 把 $\langle y, x \rangle$ 加入 R 中。

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle \in R^{k+1} &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^k \circ R \\
 &\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in R^k) \\
 &\Rightarrow (\exists z)(\langle x, z \rangle \in t(R) \wedge \langle z, y \rangle \in t(R)) \\
 &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in t(R)
 \end{aligned}$$

所以, $R^{k+1} \subseteq t(R)$ 。由归纳法, 对 $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, 有 $R^n \subseteq t(R)$ 。于是 $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \subseteq t(R)$ 。

再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$ 。对任意的 $\langle x, y \rangle$ 和 $\langle y, z \rangle$, 可得

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \wedge \langle y, z \rangle \in R \cup R^2 \cup \cdots \\
 \Leftrightarrow (\exists s)(\langle x, y \rangle \in R^s) \wedge (\exists t)(\langle y, z \rangle \in R^t)
 \end{aligned}$$

其中 s 和 t 是非零自然数,

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow (\exists s)(\exists t)(\langle x, z \rangle \in R^s \circ R^t) \\
 &\Leftrightarrow (\exists s)(\exists t)(\langle x, z \rangle \in R^{s+t}) \\
 &\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots
 \end{aligned}$$

所以, $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$ 是传递的, 此外它包含 R 。所以

$$t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots.$$

总之，

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots.$$

通常简写为

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots,$$

而且

$$R^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k = R^0 \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots.$$

- 定理 10.5.3 指出, 在 R, R^2, \dots 中只有有限个不同的合成关系。所以在计算 $t(R) = R^+$ 时, 可以只用有限个合成关系。

定理 10.5.10

设 A 为非空有限集合, $|A| = n$, R 是 A 上的关系, 则存在一个正整数 $k \leq n$, 使得

$$t(R) = R^+ = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k.$$

证明

设有 $\langle x, y \rangle \in R^+$, 则存在整数 $p > 0$, 使得 $\langle x, y \rangle \in R^p$, 即存在序列 $x_0 = x, x_1, x_2, \dots, x_{p-1} = y$, 有 $\langle x_0, x_1 \rangle \in R, \langle x_1, x_2 \rangle \in R, \dots, \langle x_{p-1}, x_p \rangle \in R$. 设满足上述条件的最小的 p , 有 $p > n$, 则 $p+1$ 个元素 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p$ 都是 A 中的 n 个元素, $p+1$ 个元素中必有两个相等, 即有 $0 \leq i < q \leq p$ 使 $x_i = x_q$, 因此序列可以去掉中间一段成为 $\langle x_0, x_1 \rangle \in R, \dots, \langle x_{t-1}, x_t \rangle \in R$, 和 $\langle x_t, x_{q+1} \rangle \in R, \dots, \langle x_{p-1}, x_p \rangle \in R$ 两段。第一段有 t 个有序对, 第二段有 $p-q$ 个有序对。因此, $\langle x_0, x_p \rangle = \langle x, y \rangle \in R^k$, 其中 $k = t + p - q = p - (q - t) < p$. 这与 p 为最小的假设矛盾。故 $p > n$ 不成立。

- 由此定理可知, 这时的 R^+ 不妨写成

$$R^+ = t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^n.$$

例 5

集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系 R 为

$$R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle\}.$$

则

$$\begin{aligned} r(R) &= R \cup R^\circ \\ &= \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle\}. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} s(R) &= R \cup R^{-1} \\ &= \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle, \langle a, c \rangle\}. \end{aligned}$$

由

$$M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M(R^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M(R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} t(R) &= R \cup R^2 \cup R^3 \\ &= \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle\}. \end{aligned}$$

- 当有限集合 A 的元素较多时, 用矩阵运算求 A 上的关系 R 的传递闭包仍很复杂。1962 年 Warshall 提出了一种有效的算法。

Warshall 算法

令 $B[j, i]$ 表示矩阵 B 第 j 行第 i 列的元素

- 令矩阵 $B = M(R)$,
- 令 $i = 1, n = |A|$,
- 对 $1 \leq j \leq n$, 如果 $B[j, i] = 1$, 则对 $1 \leq k \leq n$, 令

$$B[j, k] = B[j, k] \vee B[i, k],$$

- i 加 1,
- 若 $i \leq n$, 则转到 (3), 否则停止, 且

$$M(R^+) = B.$$

例 6

A 上的关系 R 的关系矩阵为

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $B = M(R)$.

当 $i = 1$ 时，第 1 列只有 $B[1, 1] = 1$ ，将第 1 行与第 1 行各对应元素作逻辑加，仍记于第 1 行。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $i = 2$ 时，第 2 列中 $B[1, 2] = 1$ ，将第 1 行与第 2 行各对应元素作逻辑加，记于第 1 行。第 2 列还有 $B[4, 2] = 1$ ，将第 4 行与第 2 行对应加，记于第 4 行。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

当 $i = 3$ 时, 第 3 列全是 0, B 不变。

当 $i = 4$ 时, 第 4 列中 $B[1,4] = B[2,4] = B[4,4] = 1$, 将 1, 2, 4 这 3 行分别与第 4 行对应元素逻辑加, 分别记于 1, 2, 4 这 3 行。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这就是 $M(R^+)$

- 有时希望所求的闭包具有两种或三种性质。应该先作哪种闭包运算呢？下面分析这个问题。

定理 10.5.11

对非空集合 A 上的关系 R ，有

- ① 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 是自反的，
- ② 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 是对称的，
- ③ 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 是传递的。

只证 (2), 其他留作思考题。

(2) 先证 $r(R)$ 是对称的。对任意的 $x, y \in A$, 如果 $x = y$, 则

$$\langle x, y \rangle \in r(R) \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in r(R),$$

如果 $x \neq y$, 则

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in r(R) &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R \cup R^0 \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \\ &\Rightarrow \langle y, x \rangle \in R \\ &\Rightarrow \langle y, x \rangle \in R \cup R^0 \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in r(R). \end{aligned}$$

总之, $r(R)$ 是对称的。

再证 $t(R)$ 是对称的。为此先证, 若 R 对称, 则对非零自然数 n , 有 R^n 是对称的。
施归纳于 n 。

当 $n = 1$ 时, $R^1 = R$ 是对称的。

假设 $n = k (k \geq 1)$ 时 R^k 是对称的。令 $n = k + 1$, 对任意的 $\langle x, y \rangle$, 可得

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in R^{k+1} &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^k \circ R \\ &\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in R^k) \\ &\Rightarrow (\exists z)(\langle z, x \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R^k) \\ &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \circ R^k \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R^{k+1} \end{aligned}$$

则 R^{k+1} 是对称的。对非零自然数 n , 有 R^n 是对称的。

对任意的 $\langle x, y \rangle$, 可得

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle \in t(R) &\Leftrightarrow (\exists n)(\langle x, y \rangle \in R^n) \\ &\Rightarrow (\exists n)(\langle y, x \rangle \in R^n) \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in t(R)\end{aligned}$$

所以, $t(R)$ 是对称的。

定理 10.5.12

对非空集合 A 上的关系 R , 有

① $rs(R) = sr(R)$,

② $rt(R) = tr(R)$,

③ $st(R) \subseteq ts(R)$.

其中 $rs(R) = r(s(R))$, 其他类似。

证明

①

$$\begin{aligned}
 sr(R) &= s(R \cup R^0) \\
 &= (R \cup R^0) \cup (R \cup R^0)^{-1} \\
 &= R \cup R^{-1} \cup R^0 \\
 &= (R \cup R^{-1}) \cup (R \cup R^{-1})^0 \\
 &= rs(R).
 \end{aligned}$$

② 先证 $(R \cup R^0)^n = R^0 \cup R \cup \dots \cup R^n$ 。施归纳于 n 。

当 $n = 1$ 时, $(R \cup R^0)^1 = R^0 \cup R$ 。

假设 $n = k (k \geq 1)$ 时有 $(R \cup R^0)^k = R^0 \cup R \cup \dots \cup R^k$ 。令 $n = k + 1$, 则有

$$\begin{aligned}
 (R \cup R^0)^{k+1} &= (R \cup R^0)^k \circ (R \cup R^0) \\
 &= (R^0 \cup R^1 \cup \dots \cup R^k) \circ (R \cup R^0) \\
 &= ((R^0 \cup R^1 \cup \dots \cup R^k) \circ R) \cup ((R^0 \cup R^1 \cup \dots \cup R^k) \circ R^0) \\
 &= (R^1 \cup R^2 \cup \dots \cup R^{k+1}) \cup (R^0 \cup R^1 \cup \dots \cup R^k) \\
 &= R^0 \cup R^1 \cup \dots \cup R^{k+1}.
 \end{aligned}$$

利用这个结论

$$\begin{aligned}
 tr(R) &= t(R \cup R^0) \\
 &= (R \cup R^0) \cup (R \cup R^0)^2 \cup (R \cup R^0)^3 \cup \dots \\
 &= (R^0 \cup R^1) \cup (R^0 \cup R^1 \cup R^2) \cup \dots \\
 &= R^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = R^0 \cup t(R) \\
 &= t(R) \cup (t(R))^0 = rt(R).
 \end{aligned}$$

- ③ 因为 $R \subseteq s(R)$, 所以 $t(R) \subseteq ts(R)$ 和 $st(R) \subseteq sts(R)$ 。因为 $ts(R)$ 是对称的, 所以 $sts(R) = ts(R)$ 。因此 $st(R) \subseteq ts(R)$ 。
- 由定理可知, 若要求出 R 的自反、对称且传递的闭包, 则应先求 $r(R)$, 再求 $sr(R)$, 最后求 $tsr(R)$ 。若先求 $tr(R)$, 再求 $str(R)$, 则 $str(R)$ 不一定是传递的。

1

10.1 二元关系

2

10.2 关系矩阵和关系图

3

10.3 关系的逆、合成、限制和象

4

10.4 关系的性质

5

10.5 关系的闭包

6

10.6 等价关系和划分

7

10.7 相容关系和覆盖

8

10.8 偏序关系

10.6 等价关系和划分



- 在实数之间的相等关系、在集合之间的相等关系、在谓词公式之间的等值关系具有类似的性质。它们都具有自反性、对称性和传递性。下面把具有这三种性质的关系称为等价关系。
- 这是一类很重要的关系，可以用集合上的等价关系把该集合划分成等价类。

10.6.1 等价关系



定义 10.6.1

对非空集合 A 上的关系 R , 如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系。

例 1

在非空集合 A 上的恒等关系 I_A 和全关系 E_A 都是等价关系, 在所有谓词公式的集合上的等值关系也是等价关系。

例 2

集合 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ 上的关系 $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \equiv y \pmod{3}\}$ 。其中 $x \equiv y \pmod{3}$ 表示 $x - y$ 可被 3 整除。

对任意的 $x, y, z \in A$, $x - x$ 可被 3 整除。若 $x - y$ 可被 3 整除, 则 $y - x$ 也可被 3 整除。若 $x - y$ 和 $y - z$ 可被 3 整除, 则 $x - z = (x - y) + (y - z)$ 可被 3 整除。所以, R 具有自反性、对称性和传递性, R 是 A 上的等价关系。

R 的关系图如图所示。在图中, A 的元素被分成三组, 每组中任两个元素之间都有关系, 而不同组的元素之间都没有关系。这样的组称为等价类。

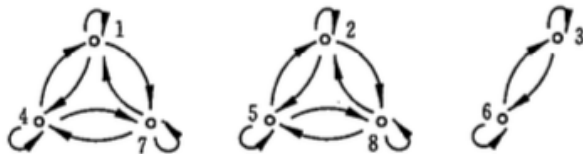


图 10.6.1

- 第 9 章给出了用平面坐标系中的矩形表示笛卡儿积 $A \times B$ 的图形表示法, 显然可以用正方形表示 $A \times A$, 如图 (a) 所示。 A 上的关系是 $A \times A$ 的子集, 因此可以用正方形的子集表示。 A 上的等价关系可以用正方形的一条对角线和线上的若干正方形表示, 如图 (b) 所示。但是图 (c) 所表示的关系不是等价关系。它包括了对角线, 所以有自反性。它以对角线为对称轴, 所以有对称性。但它没有传递性。因为 R 中的 a 和 b 点对应的有序对, 经传递得到 c 点对应的有序对应在 R 中, 但 c 点不在 R 中。

10.6.1 等价关系

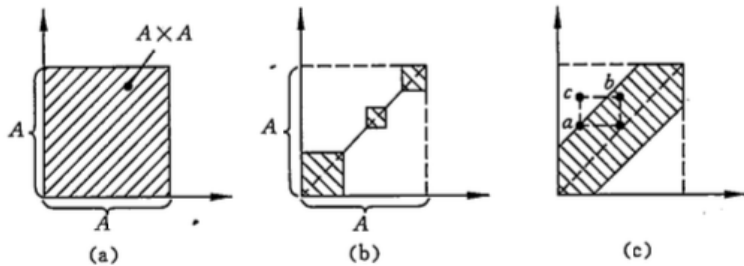


图 10.6.2

定义 10.6.2

R 是非空集合 A 上的等价关系, 对任意的 $x \in A$, 令 $[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge x R y\}$, 则称集合 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类, 简称 x 的等价类, 也可记作 $[x]$ 或 \bar{x} .

例 3

对例 2 的等价关系 R , 有三个不同的等价类:

$$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R,$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R,$$

$$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R.$$

A 的 8 个元素各有一个等价类。各等价类之间, 或者相等, 或者不相交, 而且所有等价类的并集就是 A 。

定理 10.6.1

R 是非空集合 A 上的等价关系, 对任意的 $x, y \in A$, 成立

- ① $[x]_R \neq \emptyset$ 且 $[x]_R \subseteq A$,
- ② 若 $x R y$, 则 $[x]_R = [y]_R$,
- ③ 若 $x \not R y$, 则 $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$,
- ④ $\bigcup \{[x]_R \mid x \in A\} = A$.

证明

- ① 对任意的 $x \in A$, $x R x$, 则 $x \in [x]_R$, 因此 $[x]_R \neq \emptyset$. 由等价类定义, 显然 $[x]_R \subseteq A$.
- ② 对任意的 $x_0 \in [x]_R$, 有 $x R x_0$. 由对称性, 有 $x_0 R x$. 由 $x R y$ 和传递性, 有 $x_0 R y, y R x_0$, 所以 $x_0 \in [y]_R$. 类似可证 $x_0 \in [y]_R \rightarrow x_0 \in [x]_R$. 因此, $[x]_R = [y]_R$.

- ③ 假设 $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ 。则存在 x_0 , 使得 $x_0 \in [x]_R$ 且 $x_0 \in [y]_R$ 。即 $x R x_0$ 且 $y R x_0$, 由对称性 $x_0 R y$, 由传递性 $x R y$ 。与已知矛盾。
- ④ 对任意的 $x \in A$, $[x]_R \subseteq A$ 。则有 $\bigcup\{[x]_R \mid x \in A\} \subseteq A$ 。反之, 对任意的 $x \in A$, $x \in [x]_R$, 则有 $x \in \bigcup\{[x]_R \mid x \in A\}$ 。所以, $A \subseteq \bigcup\{[x]_R \mid x \in A\}$ 。因此 $\bigcup\{[x]_R \mid x \in A\} = A$ 。
- 由定理可知, 对 A 上的等价关系 R , 所有等价类的集合具有很好的性质。

定义 10.6.3

对非空集合 A 上的关系 R , 以 R 的不相交的等价类为元素的集合称为 A 的商集, 记作 A/R 。

这个定义也可以写成

$$A/R = \{y \mid (\exists x)(x \in A \wedge y = [x]_R)\}.$$

例 4

对例 2 中的 A 和 R , 商集是

$$\begin{aligned} A/R &= \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\} \\ &= \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}. \end{aligned}$$

10.6.2 划分



定义 10.6.4

对非空集合 A ，若存在集合 π 满足下列条件：

- ① $(\forall x)(x \in \pi \rightarrow x \subseteq A)$,
- ② $\emptyset \notin \pi$,
- ③ $\bigcup \pi = A$,
- ④ $(\forall x)(\forall y)((x \in \pi \wedge y \in \pi \wedge x \neq y) \rightarrow x \cap y = \emptyset)$,

则称 π 为 A 的一个划分，称 π 中的元素为 A 的划分块。

- A 的一个划分 π ，是 A 的非空子集的集合（即 $\pi \subseteq P(A)$ 且 $\emptyset \notin \pi$ ）， A 的这些子集互不相交，且它们的并集为 A 。

例 5

对集合 $A = \{a, b, c, d\}$, 则

$$\pi_1 = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$$

和

$$\pi_2 = \{\{a, b, c, d\}\}$$

都是 A 的划分。 $\{a\}, \{b, c\}, \{d\}$ 为 π_1 的划分块。但是

$$\pi_3 = \{\{a, b\}, \{c\}, \{a, d\}\}$$

和

$$\pi_4 = \{\{a, b, d\}\}$$

都不是 A 的划分。

定理 10.6.2

对非空集合 A 上的等价关系 R , A 的商集 A/R 就是 A 的划分, 它称为由等价关系 R 诱导出来的 A 的划分, 记作 π_R 。

- 证明可以由定义 10.6.3、定义 10.6.4 和定理 10.6.1 直接得到。
- 上面说明, 由 A 上的等价关系 R 可以诱导出 A 的一个划分。下面考虑, 由 A 的一个划分如何诱导出 A 上的一个等价关系。

定理 10.6.3

对非空集合 A 的一个划分 π , 令 A 上的关系

$$R_\pi = \{\langle x, y \rangle \mid (\exists z)(z \in \pi \wedge x \in z \wedge y \in z)\}$$

则 R_π 为 A 上的等价关系, 它称为划分 π 诱导出的 A 上的等价关系。

- 证明留作思考题。

定理 10.6.4

对非空集合 A 的一个划分 π 和 A 上的等价关系 R , π 诱导 R 当且仅当 R 诱导 π 。

证明: 先证必要性。若 π 诱导 R , 且 R 诱导 π' 。对任意的 $x \in A$, 设 x 在 π 的划分块 B 中, 也在 π' 的划分块 B' 中。对任意的 $y \in A$, 有

$$\begin{aligned} y \in B &\Leftrightarrow x R y \quad (x \in B \text{ 且 } \pi \text{ 诱导 } R) \\ &\Leftrightarrow [x]_R = [y]_R \quad (R \text{ 为等价关系}) \\ &\Leftrightarrow y \in B' \quad (x \in B' \text{ 且 } R \text{ 诱导 } \pi') \end{aligned}$$

所以, $B = B'$ 。由 x 的任意性, $\pi = \pi'$ 。

再证充分性。若 R 诱导 π ，且 π 诱导 R' 。对任意的 $x, y \in A$ ，可得

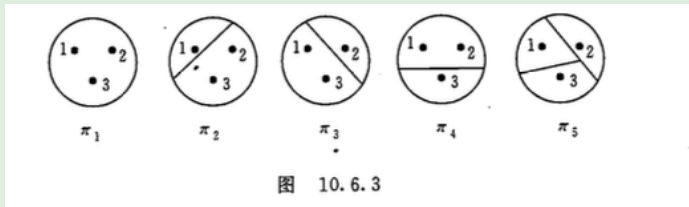
$$\begin{aligned}x R y &\Leftrightarrow [x]_R = [y]_R \\&\Leftrightarrow x \in [x]_R \wedge y \in [x]_R \\&\Leftrightarrow x \text{ 和 } y \text{ 在 } \pi \text{ 的同一划分块中} \\&\Leftrightarrow x R' y\end{aligned}$$

所以， $R = R'$ 。

- 由定理可知，集合 A 的划分和 A 上的等价关系可以建立一一对应。

例 6

在集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上求出尽可能多的等价关系。
先求 A 的所有划分, 如图 10.6.3 所示。



于是可得到 5 个等价关系:

$$R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\},$$

$$R_2 = \{\langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\},$$

$$R_3 = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\},$$

$$R_4 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\},$$

$$R_5 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}.$$

1

10.1 二元关系

2

10.2 关系矩阵和关系图

3

10.3 关系的逆、合成、限制和象

4

10.4 关系的性质

5

10.5 关系的闭包

6

10.6 等价关系和划分

7

10.7 相容关系和覆盖

8

10.8 偏序关系

10.7.1 相容关系

- 相容关系的关系图中，每个顶点都有自圈，而且若一对顶点间有边则有向边成对出现。因此可以简化关系图，可以不画自圈，并用无向边代替一对来回的有向边。对例 1 的 R ，设

$$x_1 = \text{cat}, x_2 = \text{teacher}, x_3 = \text{cold},$$

$$x_4 = \text{desk}, x_5 = \text{knife}, x_6 = \text{by},$$

则关系图可以简化为图 10.7.1。

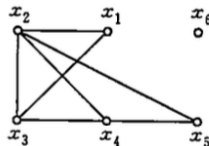


图 10.7.1

定义 10.7.2

对非空集合 A 上的相容关系 R , 若 $C \subseteq A$, 且 C 中任意两个元素 x 和 y 有 $x R y$, 则称 C 是由相容关系 R 产生的相容类, 简称相容类。

这个定义也可以写成

$$C = \{x \mid x \in A \wedge (\forall y)(y \in C \rightarrow x R y)\}.$$

例 2

对例 1 中的相容关系 R , 相容类有 $\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}$ 等。前两个相容类都可以加入其他元素, 构成更大的相容类。如 $\{x_1, x_2\}$ 加入 x_3 得到另一相容类 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 。后两个相容类再加入任何新元素都不是相容类了, 这两个相容类称为最大相容类。

定义 10.7.3

对非空集合 A 上的相容关系 R ，一个相容类若不是任何相容类的真子集，就称为最大相容类，记作 C_R 。

对最大相容类 C_R 有下列性质：

$$(\forall x)(\forall y)((x \in C_R \wedge y \in C_R) \rightarrow x R y)$$

$$(\forall x)(x \in A - C_R \rightarrow (\exists y)(y \in C_R \wedge x R y)).$$

- 在相容关系的简化图中，最大完全多边形是每个顶点与其他所有顶点相连的多边形。这种最大完全多边形的顶点集合，才是最大相容类。此外，一个孤立点的集合也是最大相容类；如果两点连线不是最大完全多边形的边，这两个顶点的集合也是最大相容类。

例 3

对例 1 中的相容关系 R , 最大相容类有 $\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_2, x_4, x_5\}$ 和 $\{x_6\}$ 。

定理 10.7.1

对非空有限集合 A 上的相容关系 R , 若 C 是一个相容类, 则存在一个最大相容类 C_R , 使 $C \subseteq C_R$ 。

证明设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。构造相容类的序列

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots$$

使 $C_0 = C, C_{i+1} = C_i \cup \{a_j\}$, 而 j 是满足 $a_j \notin C_i$ 且 a_j 与 C_i 中各元素有关系 R 的最小下标。

因为 $|A| = n$, 所以至多经过 $n - |C|$ 步, 过程就结束, 而且序列中最后一个相容类是 C_R 。结论得证。

对任意的 $a \in A$, 有相容类 $\{a\}$ 。它必定包含在某个 C_R 中。所以, C_R 的集合覆盖住 A 。

覆盖



定义 10.7.4

对非空集合 A , 若存在集合 Ω 满足下列条件:

- ① $(\forall x)(x \in \Omega \rightarrow x \subseteq A)$,
- ② $\emptyset \notin \Omega$,
- ③ $\bigcup \Omega = A$,

则称 Ω 为 A 的一个覆盖, 称 Ω 中的元素为 Ω 的覆盖块。

- 一个划分是一个覆盖, 但一个覆盖不一定是一个划分。因为划分中各元素不相交, 覆盖中各元素可能相交。

定理 10.7.2

对非空集合 A 上的相容关系 R ，最大相容类的集合是 A 的一个覆盖，称为 A 的完全覆盖，记作 $C_R(A)$ 。而且 $C_R(A)$ 是唯一的。

- 证明从略。

定理 10.7.3

对非空集合 A 的一个覆盖 $\Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, 由 Ω 确定的关系

$$R = A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup \dots \cup A_n \times A_n$$

是 A 上的相容关系。

- 证明从略。
- 由 A 上的一个相容关系 R , 可以确定一个 A 的完全覆盖 $C_R(A)$ 。由 A 的一个覆盖, 也可确定一个 A 上的相容关系。但是不同的覆盖, 可能确定同一个相容关系。

例 4

集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 的两个覆盖

$$\Omega_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$$

$$\Omega_2 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{3, 4\}\}$$

和可以确定相同的相容关系

$$R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \\ \langle 4, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}.$$

1

10.1 二元关系

2

10.2 关系矩阵和关系图

3

10.3 关系的逆、合成、限制和象

4

10.4 关系的性质

5

10.5 关系的闭包

6

10.6 等价关系和划分

7

10.7 相容关系和覆盖

8

10.8 偏序关系

10.8 偏序关系



- 在实数之间的小于等于关系，在集合之间的包含关系具有类似的性质。它们都具有自反性、反对称性和传递性。下面把具有这三种性质的关系称为偏序关系。它和等价关系同为很重要的关系。

10.8.1 偏序关系和拟序关系

定义 10.8.1

对非空集合 A 上的关系 R ，如果 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 为 A 上的偏序关系。

- 在不会产生误解时，偏序关系 R 通常记作 \leq 。当 $x R y$ 时，可记作 $x \leq y$ ，读作 x “小于等于” y 。

例 1

在集合 $\mathbb{N} - \{0\}$ 上的小于等于关系和整除关系，都是偏序关系。对集合 A ，在 $P(A)$ 上的包含关系也是偏序关系。

定义 10.8.2

对非空集合 A 上的关系 R ，如果 R 是非自反的和传递的，则称 R 为 A 上的拟序关系。

- 在不会产生误解时，拟序关系 R 通常记作 $<$ 。当 $x R y$ 时，可记作 $x < y$ ，读作 x “小于” y 。

例 2

在集合 \mathbb{N} 上的小于关系是拟序关系。对集合 A ，在 $P(A)$ 上的真包含关系也是拟序关系。

- 偏序关系又称弱偏序关系，或半序关系。拟序关系又称强偏序关系。

定理 10.8.1

R 为 A 上的拟序关系, 则 R 是反对称的。

证明: 假设 R 不是反对称的。则存在 $x \in A, y \in A, x \neq y$, 使 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, x \rangle \in R$ 。由传递性, $\langle x, x \rangle \in R$ 。与非自反性矛盾。

- 有的书上把反对称性也作为拟序关系定义的一个条件。定理表明, 这是不必要的。

定理 10.8.2

对 A 上的拟序关系 R , $R \cup R^\circ$ 是 A 上的偏序关系。

- 证明从略。

定理 10.8.3

对 A 上的偏序关系 R , $R - R^\circ$ 是 A 上的拟序关系。

- 证明从略。
- 拟序关系和偏序关系的区别只是自反性。由于它们类似，只要把偏序关系搞清，拟序关系也容易搞清。以下只讨论偏序关系。

定义 10.8.3

集合 A 与 A 上的关系 R 一起称为一个结构。集合 A 与 A 上的偏序关系 R 一起称为一个偏序结构，或称偏序集，并记作 $\langle A, R \rangle$ 。

例 3

$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ 和 $\langle P(A), \subseteq \rangle$ 都是偏序集。



10.8.2 哈斯图

- 利用偏序关系的良好性质，可以把它的关系图简化为较简单的哈斯图。首先，由于自反性，每个顶点都有自圈，则可不画自圈。其次，由于反对称性，两个顶点之间至多一条有向边，则可约定箭头指向上方或斜上方并适当安排顶点位置，以便用无向边代替有向边。最后，由于传递性，依传递可得到的有向边可以不画。下面定义盖住关系，并给出作图规则。

定义 10.8.4

对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 如果 $x, y \in A, x \leq y, x \neq y$, 且不存在元素 $z \in A$ 使得 $x \leq z$ 且 $z \leq y$, 则称 y 盖住 x . A 上的盖住关系 $\text{cov}A$ 定义为

$$\text{cov}A = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge y \text{ 盖住 } x\}.$$

例 4

集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 上的整除关系 D_A 是 A 上的偏序关系, 则 A 上的盖住关系 $\text{cov}A$ 为

$$\text{cov}A = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 12 \rangle, \langle 6, 12 \rangle\}.$$

- 对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, A 上的盖住关系 $\text{cov} A$ 是唯一的。可以用盖住关系画偏序集的哈斯图。作图规则为:
 - ① 每个顶点代表 A 的一个元素,
 - ② 若 $x \leq y$ 且 $x \neq y$, 则顶点 y 在顶点 x 上方,
 - ③ 若 $\langle x, y \rangle \in \text{cov} A$, 则 x, y 间连无向边。

例 5

例 4 中偏序集的哈斯图如图 10.8.1。

例 6

对 $A = \{a, b, c\}$, $\langle P(A), \subseteq \rangle$ 是偏序集, 它的哈斯图如图 10.8.2。

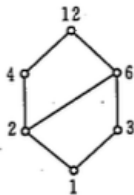


图 10.8.1

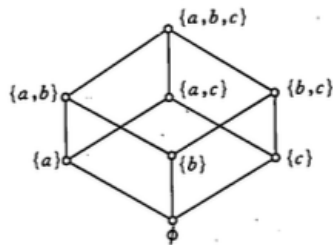


图 10.8.2

10.8.3 上确界和下确界



定义 10.8.5

对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 且 $B \subseteq A$, 进一步

- ① 若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow y \leq x))$, 则称 y 为 B 的最小元,
- ② 若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \leq y))$, 则称 y 为 B 的最大元,
- ③ 若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)((x \in B \wedge x \leq y) \rightarrow x = y))$, 则称 y 为 B 的极小元,
- ④ 若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)((x \in B \wedge y \leq x) \rightarrow x = y))$, 则称 y 为 B 的极大元.

例 7

在例 4 的偏序集 $\langle A, D_A \rangle$ 的哈斯图中。令 $B_1 = \{2, 4, 6, 12\}$ ，则 B_1 的最大元和极大元是 12，最小元和极小元是 2。令 $B_2 = \{2, 3, 4, 6\}$ ，则 B_2 的极大元是 4 和 6，极小元是 2 和 3，没有最大元和最小元。

- 注意区别最小元与极小元。 B 的最小元应小于等于 B 中其他各元。 B 的极小元应不大于 B 中其他各元（它小于等于 B 中一些元，并与 B 中另一些元无关系）。最小元（最大元）不一定存在，若存在必唯一。在非空有限集合 B 中，极小元（极大元）必存在，不一定唯一。

定义 10.8.6

对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 且 $B \subseteq A$, 进一步

- ① 若 $(\exists y)(y \in A \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \leq y))$, 则称 y 为 B 的上界,
- ② 若 $(\exists y)(y \in A \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow y \leq x))$, 则称 y 为 B 的下界,
- ③ 若集合 $C = \{y \mid y \text{ 是 } B \text{ 的上界}\}$, 则 C 的最小元称为 B 的上确界或最小上界,
- ④ 若集合 $C = \{y \mid y \text{ 是 } B \text{ 的下界}\}$, 则 C 的最大元称为 B 的下确界或最大下界.

例 8

集合 $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$, A 上的整除关系 D_A 是偏序关系。偏序集 $\langle A, D_A \rangle$ 的哈斯图如图 10.8.3 所示。

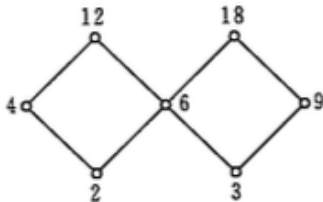


图 10.8.3

- $B_1 = \{2, 4\}$ 的上界是 4 和 12，上确界是 4，下界和下确界是 2。 $B_2 = \{4, 6, 9\}$ 没有上下界，没有上下确界。 $B_3 = \{2, 3\}$ 的上界是 6, 12, 18，上确界是 6，没有下界和下确界。
- B 的上下界和上下确界可能在 B 中，可能不在 B 中，但一定在 A 中。上界（下界）不一定存在，不一定唯一。上确界（下确界）不一定存在，若存在必唯一。

10.8.4 全序关系和链



定义 10.8.7

对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 对任意的 $x, y \in A$, 若有 $x \leq y$ 或 $y \leq x$, 则称 x 和 y 是可比的

定义 10.8.8

对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 如果对任意的 $x, y \in A$, x 和 y 都可比, 则称 \leq 为 A 上的全序关系, 或称线序关系。并称 $\langle A, \leq \rangle$ 为全序集。

例 9

\mathbb{N} 上的小于等于关系是全序关系, 所以 $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ 是全序集。 $\mathbb{N} - \{0\}$ 上的整除关系不是全序关系。对非空集合 A , $P(A)$ 上的包含关系不是全序关系。

定义 10.8.9

对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 且 $B \subseteq A$, 进一步

- ① 如果对任意的 $x, y \in B$, x 和 y 都是可比的, 则称 B 为 A 上的链, B 中元素个数称为链的长度。
- ② 如果对任意的 $x, y \in B$, x 和 y 都不是可比的, 则称 B 为 A 上的反链, B 中元素个数称为反链的长度。

例 10

对例 8 中的偏序集。 $\{2, 4, 12\}, \{3, 6, 18\}, \{3, 9\}, \{18\}$ 都是链。
 $\{4, 6, 9\}, \{12, 18\}, \{4, 9\}$ 都是反链。

- 对全序集 $\langle A, \leq \rangle$, 显然 A 是链。 A 的任何子集都是链。

定理 10.8.4

对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ ，设 A 中最长链的长度是 n ，则将 A 中元素分成不相交的反链，反链个数至少是 n 。

证明：施归纳于 n 。

当 $n = 1$ 时， A 本身就是一条反链，定理结论成立。（这时 \leq 是恒等关系）

假设对于 $n = k$ ，结论成立。考虑 $n = k + 1$ 的情况。当 A 中最长链的长度为 $k + 1$ 时，令 M 为 A 中极大元的集合，显然 M 是一条反链。而且 $A - M$ 中最长链的长度为 k 。由归纳假设，可以把 $A - M$ 分成至少 k 个不相交的反链，加上反链 M ，则 A 可分成至少 $k + 1$ 条反链。

- 这个定理称为偏序集的分解定理，这是组合学三大存在性定理之一，有广泛的应用。

定理 10.8.5

对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 若 A 中元素为 $mn + 1$ 个, 则 A 中或者存在一条长度为 $m + 1$ 的反链, 或者存在一条长度为 $n + 1$ 的链。

10.8.5 良序关系



定义 10.8.10

对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 如果 A 的任何非空子集都有最小元, 则称 \leq 为良序关系, 称 $\langle A, \leq \rangle$ 为良序集。

例 11

$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ 是全序集, 也是良序集。 $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ 是全序集, 不是良序集。其中 \mathbb{Z} 是整数集。因为 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$, 但是 \mathbb{Z} 没有最小元。

定理 10.8.6

一个良序集一定是全序集。

证明： 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是良序集。对任意的 $x, y \in A$ ，可构成 $\{x, y\} \subseteq A$ ，它有最小元。该最小元或为 x 或为 y ，则 $x \leq y$ 或 $y \leq x$ 。所以， $\langle A, \leq \rangle$ 是全序集。

定理 10.8.7

一个有限的全序集一定是良序集。

证明： 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，且 $\langle A, \leq \rangle$ 是全序集。假设 $\langle A, \leq \rangle$ 不是良序集，则存在非空子集 $B \subseteq A$ ， B 中没有最小元。因为 B 是有限集合，所以存在 $x, y \in B$ ，使 x 和 y 无关系。与全序集矛盾。

- 对一个非良序的集合，可以定义集合上的一个全序关系，使该集合成为良序集。
例如， $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ 不是良序集。在 \mathbb{Z} 上定义全序关系 R 为：对 $a, b \in \mathbb{Z}$ ，若 $|a| \leq |b|$ ，则 aRb ；若 $a > 0$ ，则 $-aRa$ 。于是
- $0R-1, -1R1, 1R-2, -2R2, \dots$ 这样， \mathbb{Z} 的最小元是 0， \mathbb{Z} 的子集都有最小元。
 $\langle \mathbb{Z}, R \rangle$ 是良序集。这个定义 R 的过程称为良序化。

定理 10.8.8 (良序定理)

任意的集合都是可以良序化的。

- 良序定理可以由 Zorn 引理证明，它们都是选择公理的等价形式。这里不给出证明。
- 设 R 是实数集合， \leq 是 R 上的小于等于关系。显然， $\langle R, \leq \rangle$ 是全序集，不是良序集。可以在 $\langle R, \leq \rangle$ 上定义常用的区间。

定义 10.8.11

在全序集 $\langle R, \leq \rangle$ 上, 对于 $a, b \in R, a \neq b, a \leq b$, 则

- ① $[a, b] = \{x \mid x \in R \wedge a \leq x \leq b\}$, 称为从 a 到 b 的闭区间,
- ② $(a, b) = \{x \mid x \in R \wedge a \leq x \leq b \wedge x \neq a \wedge x \neq b\}$, 称为从 a 到 b 的开区间,
- ③ $[a, b) = \{x \mid x \in R \wedge a \leq x \leq b \wedge x \neq b\}$, $(a, b] = \{x \mid x \in R \wedge a \leq x \leq b \wedge x \neq a\}$ 都称为从 a 到 b 的半开区间,
- ④ 还可以定义下列区间

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \in R \wedge x \leq a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x \in R \wedge x \leq a \wedge x \neq a\},$$

$$[a, \infty) = \{x \mid x \in R \wedge a \leq x\},$$

$$(a, \infty) = \{x \mid x \in R \wedge a \leq x \wedge x \neq a\},$$

$$(-\infty, \infty) = R.$$

谢谢



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

