



# 第十一章 函数

马汝辉 副研究员、博导  
上海交通大学  
2025 年 12 月



上海交通大学  
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

# 函数



上一章研究了关系的自反、传递、对称等性质，并针对这些性质研究了一些特殊的关系，如等价关系、偏序关系。这一章研究的各类函数是另外一些特殊的关系，这是从它们的单值性、定义域和值域的性质来讨论的。函数是一个基本的数学概念。通常的实函数是在实数集合上讨论的。这里推广了实函数概念，讨论在任意集合上的函数。

1

## 11.1 函数和选择公理

2

## 11.2 函数的合成与函数的逆



## 11.1.1 函数定义

### 定义 11.1.1

对集合  $A$  到集合  $B$  的关系  $f$ , 若满足下列条件:

- ① 对任意的  $x \in \text{dom}(f)$ , 存在唯一的  $y \in \text{ran}(f)$ , 使  $xfy$  成立;
- ②  $\text{dom}(f) = A$

则称  $f$  为从  $A$  到  $B$  的函数, 或称  $f$  把  $A$  映射到  $B$  (有的书称  $f$  为全函数、映射、变换)。

- 一个从  $A$  到  $B$  的函数  $f$ , 可以写成  $f: A \rightarrow B$ 。这时若  $xfy$ , 则可记作  $f: x \mapsto y$  或  $f(x) = y$ 。
- 若  $A$  到  $B$  的关系  $f$  只满足条件 (1), 且有  $\text{dom}(f) \subset A$ , 则称  $f$  为从  $A$  到  $B$  的部分函数 (有的书上称  $f$  为函数)。

## 11.1.1 函数定义

- 函数的两个条件可以写成

$$(1) \quad (\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)((xfy_1 \wedge xfy_2) \rightarrow y_1 = y_2),$$

$$(2) \quad (\forall x)(x \in A \rightarrow (\exists y)(y \in B \wedge xfy)).$$

- 函数的第一个条件是单值性，定义域中任一  $x$  与  $B$  中唯一的  $y$  有关系。因此可以用  $f(x)$  表示这唯一的  $y$ 。第二个条件是  $A$  为定义域， $A$  中任一  $x$  都与  $B$  中某个  $y$  有关系。注意不能把单值性倒过来。对  $A$  到  $B$  的函数  $f$ ，当  $x_1fy$  且  $x_2fy$  成立时，不一定  $x_1 = x_2$ 。因此，函数的逆关系不一定是函数。
- 如果一个关系是函数，则它的关系矩阵中每行恰好有一个 1，其余为 0，它的关系图中每个  $A$  中的顶点恰好发出一条有向边。

## 例 1

对实数集  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  上的关系  $f$  为

$$f = \{\langle x, y \rangle \mid y = x^3\}$$

$f$  是从  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}$  的函数, 记作  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 并记作  $f: x \mapsto x^3$  或  $f(x) = x^3$ .

## 例 2

集合  $A = \{1, 2, 3\}$  上的两个关系

$$g = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$$

和

$$h = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

都不是从  $A$  到  $A$  的函数.

因为  $g$  没有单值性, 即  $\langle 3, 1 \rangle \in g$  且有  $\langle 3, 2 \rangle \in g$ , 而对关系  $h$ ,  $\text{dom}(h) = \{1, 2\} \neq A$ . 但是,  $h$  是从  $\{1, 2\}$  到  $A$  的函数.

### 定义 11.1.2

对集合  $A$  和  $B$ , 从  $A$  到  $B$  的所有函数的集合记为  $A_B$  (有的书记为  $B^A$ )。于是,  $A_B = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$ 。

### 例 3

对  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$ 。从  $A$  到  $B$  的函数有 8 个:

$$f_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\},$$

$$f_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\},$$

$$f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\},$$

$$f_4 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\},$$

$$f_5 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\},$$



$$\begin{aligned}f_6 &= \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}, \\f_7 &= \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\}, \\f_8 &= \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\}.\end{aligned}$$

于是

$$A_B = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_8\}.$$

- 若  $A$  和  $B$  是有限集合, 且  $|A| = m$ ,  $|B| = n$ , 则  $|A_B| = n^m$ 。从  $\emptyset$  到  $\emptyset$  的函数只有  $f = \emptyset$ , 从  $\emptyset$  到  $B$  的函数只有  $f = \emptyset$ 。若  $A \neq \emptyset$ , 从  $A$  到  $\emptyset$  的函数不存在。因此,  $\emptyset_\emptyset = \emptyset_B = \{\emptyset\}$ ,  $A_\emptyset = \emptyset$  (对  $A \neq \emptyset$ )。

## 定义 11.1.3

设  $f: A \rightarrow B$ ,  $A_1 \subseteq A$ , 定义  $A_1$  在  $f$  下的象  $f[A_1]$  为

$$f[A_1] = \{y \mid (\exists x)(x \in A_1 \wedge y = f(x))\}.$$

把  $f[A]$  称为函数的象。

设  $B_1 \subseteq B$ , 定义  $B_1$  在  $f$  下的完全原象  $f^{-1}[B_1]$  为

$$f^{-1}[B_1] = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}.$$

注意, 在上一章中  $f^{-1}$  表示  $f$  的逆关系。这个定义中的  $f^{-1}[B_1]$  表示完全原象, 可以认为其中的  $f^{-1}$  是  $f$  的逆关系。因为函数的逆关系不一定是函数, 所以  $f^{-1}$  一般只表示逆关系, 不是逆函数 (除非特别说明)。

## 例 4

函数  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  定义为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{当 } x \text{ 为偶数} \\ \frac{x-1}{2}, & \text{当 } x \text{ 为奇数} \end{cases}$$

则

$$f[\mathbb{N}] = \mathbb{N},$$

$$f[\{-1, 0, 1\}] = \{-1, 0\},$$

$$f^{-1}[\{2, 3\}] = \{4, 5, 6, 7\}.$$

特别地

$$f[\emptyset] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset.$$

- 等价关系和函数都是特殊的关系。同样可以定义一些特殊的函数，它们是具有某种性质的函数，

### 定义 11.1.4

设  $f: A \rightarrow B$ 。

- ① 若  $\text{ran}(f) = B$ ，则称  $f$  是满射的，或称  $f$  是  $A$  到  $B$  上的；
- ② 若对任意的  $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ ，都有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，则称  $f$  是单射的，或内射的，或一对一的；
- ③ 若  $f$  是满射的又是单射的，则称  $f$  是双射的，或一对一  $A$  到  $B$  上的，简称双射。

如果  $f: A \rightarrow B$  是满射的，则对任意的  $y \in B$ ，存在  $x \in A$ ，使  $f(x) = y$ 。如果  $f: A \rightarrow B$  是单射的，则对任意的  $y \in \text{ran}(f)$ ，存在唯一的  $x \in A$ ，使  $f(x) = y$ 。

## 例 5

函数  $f: \{1, 2\} \rightarrow \{0\}$ , 定义为  $f(1) = f(2) = 0$ , 是满射的, 不是单射的。函数  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 定义为  $f(x) = 2x$ , 是单射的, 不是满射的。函数  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , 定义为  $f(x) = x + 1$ , 是双射的。

特别地,  $\emptyset: \emptyset \rightarrow B$  是单射的,  $\emptyset: \emptyset \rightarrow \emptyset$  是双射的。

- 给定两个集合  $A$  和  $B$ , 是否存在从  $A$  到  $B$  的双射函数? 怎样构造从  $A$  到  $B$  的双射函数? 这是两个很重要的问题。第一个问题在下一章讨论。下面举例说明第二个问题。

## 例 6

对下列的集合  $A$  和  $B$ , 分别构造从  $A$  到  $B$  的双射函数:

- ①  $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, \mathbb{R}$  是实数集。
- ②  $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$ 。
- ③  $A = [0, 1), B = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  都是实数区间。
- ④  $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, B = \mathbb{N}$ 。

解

- ① 令  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ 。
- ② 令  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = e^x$ 。
- ③ 令  $f: [0, 1) \rightarrow (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$ 。

- ④  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  是由自然数构成的所有有序对的集合。这些有序对可以排列在直角坐标系一个象限中，构成一个无限的点阵。如图 11.1.1 所示。构造要求的双射函数，就是在点阵中有序对与  $\mathbb{N}$  的元素间建立一一对应，也就是把点阵中有序对排成一列并依次编号  $0, 1, 2, \dots$ 。

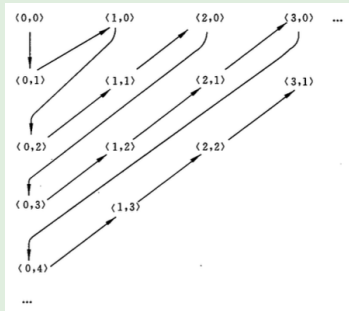


图: 11.1.1

在  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  中, 元素的排列次序是:  $\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \dots$ 。图中用箭头表示次序, 这相当于  $f(\langle 0, 0 \rangle) = 0, f(\langle 0, 1 \rangle) = 1, f(\langle 1, 0 \rangle) = 2, f(\langle 0, 2 \rangle) = 3, \dots$ 。

显然,  $\langle m, n \rangle$  所在的斜线上有  $m + n + 1$  个点。在此斜线上方, 各行元素分别有  $1, 2, \dots, m + n$  个, 这些元素排在  $\langle m, n \rangle$  以前。在此斜线上,  $m$  个元素排在  $\langle m, n \rangle$  以前。排在  $\langle m, n \rangle$  以前的元素共有  $[1 + 2 + \dots + (m + n)] + m$  个。于是, 双射函数  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  为

$$f(\langle m, n \rangle) = \frac{(m + n)(m + n + 1)}{2} + m.$$

- 对无限集合  $A$ , 若存在从  $A$  到  $\mathbb{N}$  的双射函数, 就可仿照这种方法, 把  $A$  中元素排成一个有序图形, 按次序数遍  $A$  中元素。这就构造了从  $A$  到  $\mathbb{N}$  的双射函数。



### 定义 11.1.5

设  $f: A \rightarrow B$ , 如果存在一个  $y \in B$ , 使得对所有的  $x \in A$ , 有  $f(x) = y$ , 即有  $f[A] = \{y\}$ , 则称  $f: A \rightarrow B$  为常函数。

### 定义 11.1.6

$A$  上的恒等关系  $I_A: A \rightarrow A$  称为恒等函数。于是, 对任意的  $x \in A$ , 有

$$I_A(x) = x.$$

### 定义 11.1.7

对实数集  $\mathbb{R}$ , 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 如果  $(x \leq y) \rightarrow (f(x) \leq f(y))$ , 则称  $f$  为单调递增的; 如果  $(x < y) \rightarrow (f(x) < f(y))$ , 则称  $f$  为严格单调递增的。类似可定义单调递减和严格单调递减的函数。

## 定义 11.1.8

对集合  $A, n \in \mathbb{N}$ , 把函数  $f: A^n \rightarrow A$  称为  $A$  上的  $n$  元运算。

运算是算术运算概念的推广。在代数结构课程中将对运算作深入研究。运算的例子有数字的运算, 集合的运算, 关系的运算, 逻辑联结词是在  $\{T, F\}$  上的运算。

## 定义 11.1.9

设  $A, B, C$  是集合,  $B_C$  为从  $B$  到  $C$  的所有函数的集合, 则  $F: A \rightarrow B_C$  称为一个泛函 (有时  $G: B_C \rightarrow A$  称为一个泛函)。

泛函  $F$  也是函数, 它把  $A$  的元素  $a$  映射到从  $B$  到  $C$  的函数  $f: B \rightarrow C$ 。即函数值  $F(a)$  是函数  $f: B \rightarrow C$ 。

## 例 7

泛函  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathbb{R}}$ ,  $F(a) = (f(x) = x + a)$ 。或写成  $F: a \mapsto [x \mapsto x + a]$ 。于是

- $F(2)$  对应函数  $x \mapsto x + 2$ ,
- $F(2)(3) = 3 + 2 = 5$ .
- $F(6)$  对应函数  $x \mapsto x + 6$ ,
- $F(6)(3) = 3 + 6 = 9$ .

泛函值  $F(2)$  有双重含义: 一方面表示 2 下  $F$  的函数值为  $F(2)$ , 另一方面这个值是一个函数  $F(2): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(2): x \mapsto x + 2$ 。

**定义 11.1.10**

设  $E$  是全集, 对任意的  $A \subseteq E$ ,  $A$  的特征函数  $\chi_A$  定义为:

$$\chi_A : E \rightarrow \{0, 1\}, \chi_A(a) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

**例 8**

设  $E = \{a, b, c\}$ ,  $A = \{a, c\}$ , 则

$$\chi_A(a) = 1, \chi_A(b) = 0, \chi_A(c) = 1.$$

- 特征函数是集合的另一种表示方法。模糊集合论就是参照特征函数的思想, 用隶属函数定义模糊集合。

**定义 11.1.11**

设  $R$  是  $A$  上的等价关系, 令  $g: A \rightarrow A/R$ ,  $g(a) = [a]_R$ , 则称  $g$  为从  $A$  到商集  $A/R$  的典型映射或自然映射。

**例 9**

设  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $R$  是  $A$  上的等价关系, 它诱导的等价类是  $\{1, 2\}$ ,  $\{3\}$  则从  $A$  到  $A/R$  的自然映射  $g$  为

$$g: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{\{1, 2\}, \{3\}\},$$

$$g(1) = \{1, 2\}, g(2) = \{1, 2\}, g(3) = \{3\}.$$

## 选择公理 (形式 1)

对任意的关系  $R$ , 存在函数  $f$ , 使得  $f \subseteq R$  且  $\text{dom}(f) = \text{dom}(R)$ 。

- 选择公理是一个重要的数学公理, 有时记作  $AC$ 。选择公理还有其他的等价形式, 这里的形式最直观, 最容易理解。
- 一般的关系  $R$  不是函数, 因为  $R$  不是单值的。也就是对某些  $x \in \text{dom}(R)$ , 有多于一个  $y_1, y_2, \dots$ , 使  $y_1 \in \text{ran}(R), y_2 \in \text{ran}(R), \dots$ , 且  $\langle x, y_1 \rangle \in R, \langle x, y_2 \rangle \in R, \dots$ 。这时  $x$  有多个值  $y_1, y_2, \dots$  与之对应。为了构造函数  $f$ , 只要对任意的  $x \in \text{dom}(R)$ , 从  $\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle, \dots$  中任取一个放入  $f$  中。则  $f$  是单值的,  $f \subseteq R$ , 且有  $\text{dom}(f) = \text{dom}(R)$ 。  $f$  是函数  $f: \text{dom}(R) \rightarrow \text{ran}(R)$ 。因为多个有序对中可任选其一, 所以构造的  $f$  可以有多个。

**例 10**

设关系  $R = \{\langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle\}$ , 则  $f_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle\}$  和  $f_2 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle\}$  都是满足条件的函数。



## 11.1 函数和选择公理



## 11.2 函数的合成与函数的逆



## 11.2 函数的合成与函数的逆



函数是特殊的关系，所以关于关系合成与关系的逆的定理，都适用于函数。下面讨论函数的一些特殊性质



## 11.2.1 函数的合成

### 定理 11.2.1

设  $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$ , 则

- ①  $f \circ g$  是函数  $f \circ g: A \rightarrow C$ ,
- ② 对任意的  $x \in A$ , 有  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .

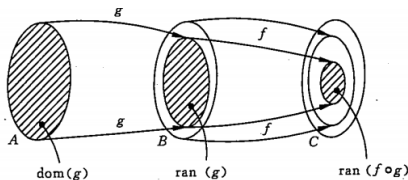
证明

- ① 因为  $g: A \rightarrow B$ , 则  $(\forall x)(x \in A \rightarrow (\exists y)(y \in B \wedge \langle x, y \rangle \in g))$ . 又因  $f: B \rightarrow C$ , 则  $(\forall y)(y \in B \rightarrow (\exists z)(z \in C \wedge \langle y, z \rangle \in f))$ . 由任意的  $x \in A$ , 存在  $y \in B$  有  $\langle x, y \rangle \in g$ , 对  $y \in B$  存在  $z \in C$  有  $\langle y, z \rangle \in f$ , 因此对  $x \in A$  存在  $z \in C$  使  $\langle x, y \rangle \in g \wedge \langle y, z \rangle \in f$ , 使  $\langle x, z \rangle \in f \circ g$ . 所以  $\text{dom}(f \circ g) = A$ , 假设对任意的  $x \in A$ , 存在  $y_1$  和  $y_2$ , 使得  $\langle x, y_1 \rangle \in f \circ g$  且  $\langle x, y_2 \rangle \in f \circ g$ . 则  $(\exists t_1)(\exists t_2)((xgt_1 \wedge t_1fy_1) \wedge (xgt_2 \wedge t_2fy_2))$ . 因为  $g$  是函数, 则  $t_1 = t_2$ , 又因  $f$  是函数, 则  $y_1 = y_2$ . 所以  $f \circ g$  是函数.

又因  $f \circ g$  是函数, 则可写为  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .

函数的合成可以用图 11.2.1 表示. 从图中可见

$\text{dom}(g) = A, \text{ran}(g) \subseteq B = \text{dom}(f), \text{ran}(f) \subseteq C$ . 而  
 $\text{dom}(f \circ g) = A, \text{ran}(f \circ g) \subseteq C$ .



**图: 11.2.1**

## 定理 11.2.2

设  $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$ , 则有

- ① 若  $f, g$  是满射的, 则  $f \circ g$  是满射的,
- ② 若  $f, g$  是单射的, 则  $f \circ g$  是单射的,
- ③ 若  $f, g$  是双射的, 则  $f \circ g$  是双射的。

## 证明

- ① 对任意的  $z \in C$ , 因为  $f$  是满射的, 故  $\exists y \in B$ , 使  $f(y) = z$ . 对这个  $y \in B$ , 因为  $g$  是满射的, 故  $\exists x \in A$ , 使  $g(x) = y$ . 所以,  $z = f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ ,  $f \circ g$  是满射的。

② 对任意的  $z \in \text{ran}(f \circ g)$ , 若存在  $x_1, x_2$ , 使  $(f \circ g)(x_1) = z$  且  $(f \circ g)(x_2) = z$ . 则存在  $y_1, y_2$ , 使  $x_1 g y_1 \wedge y_1 f z$  且  $x_2 g y_2 \wedge y_2 f z$ . 因为  $f$  是单射的, 故  $y_1 = y_2$ ; 又因  $g$  是单射的, 故  $x_1 = x_2$ . 所以,  $f \circ g$  是单射的。

③ 由 (1)、(2) 得证。

这个定理的逆定理是否成立呢? 请看下列定理。

### 定理 11.2.3

设  $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$ , 则有

- ① 若  $f \circ g$  是满射的, 则  $f$  是满射的,
- ② 若  $f \circ g$  是单射的, 则  $g$  是单射的,
- ③ 若  $f \circ g$  是双射的, 则  $f$  是满射的,  $g$  是单射的。

#### 证明

- ① 对任意的  $z \in C$ , 因为  $f \circ g$  是满射的, 故  $\exists x \in A$ , 使  $x(f \circ g)z$ . 则  $\exists y \in B$ , 使  $xgy \wedge yfz$ . 则  $\exists y \in B$ , 使  $f(y) = z$ .  $f$  是满射的。

- ② 对任意的  $y \in \text{ran}(g)$ , 若存在  $x_1, x_2 \in A$ , 使  $x_1gy \wedge x_2gy$ , 即  $g(x_1) = y = g(x_2)$ . 对这个  $y \in B$ , (因  $\text{ran}(g) \subseteq B$ ), 存在  $z \in C$ , 使得  $f(y) = z$ . 则  $f(g(x_1)) = z = f(g(x_2))$ , 于是  $x_1(f \circ g)z \wedge x_2(f \circ g)z$ . 因为  $f \circ g$  是单射的, 故  $x_1 = x_2$ . 所以  $g$  是单射的。
- ③ 由 (1), (2) 得证。

注意, 当  $f \circ g$  是满射的,  $g$  不一定是满射的; 当  $f \circ g$  是单射的,  $f$  不一定是单射的。

## 例 1

设  $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$ , 其中  $A = \{a\}, B = \{b, d\}, C = \{c\}$ . 且  $g = \{\langle a, b \rangle\}, f = \{\langle b, c \rangle, \langle d, c \rangle\}$ , 则  $f \circ g = \{\langle a, c \rangle\}$ .  $f \circ g$  是满射的, 但是  $g$  不是满射的。

## 例 2

设  $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$ , 其中  $A = \{a\}, B = \{b, d\}, C = \{c\}$ , 且  $g = \{\langle a, b \rangle\}, f = \{\langle b, c \rangle, \langle d, c \rangle\}$ , 则  $f \circ g = \{\langle a, c \rangle\}$ ,  $f \circ g$  是单射的, 但是  $f$  不是单射的。



### 定理 11.2.4

设  $f: A \rightarrow B$ , 则

$$f = f \circ I_A = I_B \circ f$$

证明留作思考题。

## 11.2.2 函数的逆



一个关系的逆不一定是函数，一个函数的逆也不一定是函数.

## 例 3

对  $A = \{a, b, c\}$ .  $A$  上的关系  $R$  为

$$R = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, a \rangle\},$$

从  $A$  到  $A$  的函数  $f$  为

$$f = \{\langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle\}.$$

则它们的逆为

$R^{-1} = \{\langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle, \langle a, a \rangle\}$  是  $A$  到  $A$  的函数,

$f^{-1} = \{\langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle a, c \rangle\}$  不是  $A$  到  $A$  的函数。

**定理 11.2.5**

若  $f: A \rightarrow B$  是双射的, 则  $f^{-1}$  是函数  $f^{-1}: B \rightarrow A$ .

**证明:** 对任意的  $y \in B$ , 因为  $f$  是双射的, 所以存在  $x \in A$ , 使  $\langle x, y \rangle \in f$ ,  $\langle y, x \rangle \in f^{-1}$ . 所以,  $\text{dom}(f^{-1}) = B$ .

对任意的  $y \in B$ , 若存在  $x_1, x_2 \in A$ , 使得  $\langle y, x_1 \rangle \in f^{-1}$  且  $\langle y, x_2 \rangle \in f^{-1}$ , 则  $\langle x_1, y \rangle \in f$  且  $\langle x_2, y \rangle \in f$ . 因为  $f$  是双射的, 故  $x_1 = x_2$ . 所以,  $f^{-1}$  是函数  $f^{-1}: B \rightarrow A$ .

**定义 11.2.1**

设  $f: A \rightarrow B$  是双射的, 则称  $f^{-1}: B \rightarrow A$  为  $f$  的反函数。

**定理 11.2.6**

若  $f: A \rightarrow B$  是双射的, 则  $f^{-1}: B \rightarrow A$  是双射的。

**证明:** 对任意的  $x \in A$ , 因为  $f$  是从  $A$  到  $B$  的函数, 故存在  $y \in B$ , 使  $\langle x, y \rangle \in f$ ,  $\langle y, x \rangle \in f^{-1}$ . 所以,  $f^{-1}$  是满射的。

对任意的  $x \in A$ , 若存在  $y_1, y_2 \in B$ , 使得  $\langle y_1, x \rangle \in f^{-1}$  且  $\langle y_2, x \rangle \in f^{-1}$ , 则有  $\langle x, y_1 \rangle \in f$  且  $\langle x, y_2 \rangle \in f$ . 因为  $f$  是函数, 故  $y_1 = y_2$ . 所以,  $f^{-1}$  是单射的, 它是双射的。

## 例 4

$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \sin x$  是双射函数。所以,

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad f^{-1}(y) = \arcsin y$$

是  $f$  的反函数。

对实数集合  $R$ , 正实数集合  $R_+$ ,  $g : R \rightarrow R_+$ ,  $g(x) = 2^x$  是双射的。所以,

$$g^{-1} : R_+ \rightarrow R, \quad g^{-1}(y) = \log_2 y$$

是  $g$  的反函数。

**定理 11.2.7**

若  $f: A \rightarrow B$  是双射的, 则对任意的  $x \in A$ , 有  $f^{-1}(f(x)) = x$ , 对任意的  $y \in B$ , 有  $f(f^{-1}(y)) = y$ 。

**证明:** 对任意的  $x \in A$ , 因为  $f$  是函数, 则有  $\langle x, f(x) \rangle \in f$ , 有  $\langle f(x), x \rangle \in f^{-1}$ , 因为  $f^{-1}$  是函数, 则可写为  $f^{-1}(f(x)) = x$ 。

对任意的  $y \in B$ , 类似可证  $f(f^{-1}(y)) = y$ 。

由定理, 对任意的  $x \in A$ ,  $f^{-1}(f(x)) = x$ , 则  $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ , 于是  $f^{-1} \circ f = I_A$ 。同理也有,  $f \circ f^{-1} = I_B$ 。对非双射的函数  $f: A \rightarrow B$ , 是否存在函数  $g: B \rightarrow A$  使  $g \circ f = I_A$  呢? 是否存在函数  $h: B \rightarrow A$  使  $f \circ h = I_B$  呢?

### 例 5

设

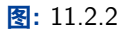
$$f_1 : \{a, b\} \rightarrow \{0, 1, 2\},$$

$$f_2 : \{a, b, c\} \rightarrow \{0, 1\},$$

$$f_3 : \{a, b, c\} \rightarrow \{0, 1, 2\},$$

如图 11.2.2 所示, 则  $f_1$  存在左逆  $g_1$ , 不存在右逆。 $f_2$  存在右逆  $h_2$ , 不存在左逆。 $f_3$  即存在左逆  $g_3$ , 又存在右逆  $h_3$ , 且  $g_3 = h_3 = f_3^{-1}$ 。如图 11.2.2 所示。





## 定理 11.2.8

设  $f: A \rightarrow B, A \neq \Phi$ , 则

- ①  $f$  存在左逆, 当且仅当  $f$  是单射的;
- ②  $f$  存在右逆, 当且仅当  $f$  是满射的;
- ③  $f$  存在左逆又存在右逆, 当且仅当  $f$  是双射的;
- ④ 若  $f$  是双射的, 则  $f$  的左逆等于右逆。

## 证明

- ① 先证必要性。设存在  $x_1, x_2 \in A$ , 使得  $f(x_1) = f(x_2)$ . 设  $g$  为  $f$  的左逆, 则

$$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2.$$

所以,  $f$  是单射的。

## 11.2.2 函数的逆

再证充分性。因为  $f$  是单射的, 所以  $f: A \rightarrow \text{ran}(f)$  是双射的, 则  $f^{-1}: \text{ran}(f) \rightarrow A$  也是双射的。已知  $A \neq \Phi$ , 则  $\exists a \in A$ , 构造  $g: B \rightarrow A$  为

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & \text{当 } y \in \text{ran}(f) \\ a, & \text{当 } y \in B - \text{ran}(f) \end{cases}$$

显然,  $g$  是函数  $g: B \rightarrow A$ . 对任一  $x \in A$ , 有  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ , 所以,  $g \circ f = I_A$ ,  $g$  的构造如图, 实箭头表示  $g$ , 虚箭头表示  $f$ .

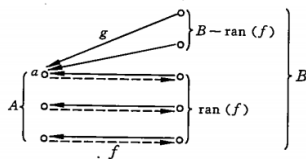


图: 11.2.3

- ② 先证必要性。设  $f$  的右逆为  $h: B \rightarrow A$ , 有  $f \circ h = I_B$ . 则对任意的  $y \in B$ , 存在  $x \in A$ , 使  $h(y) = x$ , 则

$$y = I_B(y) = (f \circ h)(y) = f(h(y)) = f(x),$$

所以,  $f$  是满射的。

### 11.2.2 函数的逆

再证充分性。(注意, 不能取  $h = f^{-1}$ , 因为  $f^{-1}$  不一定是函数, 只是关系。) 因为  $f$  是满射的, 所以  $\text{ran}(f) = \text{dom}(f^{-1}) = B$ . 依据选择公理, 对关系  $f^{-1}$ , 存在函数  $h \subseteq f^{-1}$ , 且有  $\text{dom}(h) = \text{dom}(f^{-1}) = B$ , 且  $\text{ran}(h) \subseteq \text{ran}(f^{-1}) = A$ . 即  $h: B \rightarrow A$ , 对任意的  $y \in B$ , 存在  $x \in A$ , 使  $h(y) = x$  且  $f(x) = y$ . 则

$$(f \circ h)(y) = f(h(y)) = f(x) = y.$$

所以,  $f \circ h = I_B$ ,  $h$  是  $f$  的右逆。 $h$  的构造如图 11.2.4, 实箭头表示  $h$ , 虚箭头表示  $f$ .

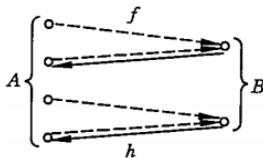


图: 11.2.4

- ① 由 (1), (2) 得证.
- ② 设  $f$  的左逆为  $g: B \rightarrow A$ , 右逆为  $h: B \rightarrow A$ , 则  $g \circ f = I_A$ ,  $f \circ h = I_B$ .

$$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I_A \circ h = h$$

所以,  $g = h$ .

# 谢谢



上海交通大学  
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

