第九章 集合

马汝辉 副研究员、博导
上海交通大学
2025 年 11 月

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

集合

第 9 章到第 12 章介绍集合论。主要介绍集合论的基本概念和结论，这包含集合、运算、关系、函数和基数。对概念和定理的介绍将以数理逻辑的谓词逻辑为工具来描述，体现了这两个数学分支之间的联系，且可使集合论的研究既简练又严格，还将简要介绍集合论公理系统。这个公理系统又称公理集合论，是数理逻辑的一个分支。

集合的概念

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

- 集合是集合论中最基本的概念，但很难给出精确的定义。集合是集合论中唯一不给出定义的概念，但它是容易理解和掌握的。
- 集合是一些确定的、可以区分的事物汇聚在一起组成的一个整体，组成一个集合的每个事物称为该集合的一个元素，或简称一个元。
- 如果 a 是集合 A 的一个元素，就说 a 属于 A，或者说 a 在 A 中，记作 $a \in A$。
- 如果 b 不是集合 A 的一个元素，就说 b 不属于 A。或者说 b 不在 A 中，记作 $b \notin A$。
- 集合概念是很简单的，但准确理解其含义却是十分重要的。

集合的概念

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

特别应注意下列几点：

- 集合的元素可以是任何事物，也可以是另外的集合（以后将说明，集合的元素不能是该集合自身）。
- 一个集合的各个元素是可以互相区分开的。这意味着，在一个集合中不会重复出现相同的元素。
- 组成一个集合的各个元素在该集合中是无次序的。
- 任一事物是否属于一个集合，回答是确定的，也就是说。对一个集合来说，任一事物或者是它的元素或者不是它的元素，二者必居其一而不可兼而有之，且结论是确定的。

集合的表示方法

- 我们一般用不同的大写字母表示不同的集合，并用不同的小写字母表示集合中不同的元素，但是因为某个集合的一个元素可能是另一个集合的元素，所以这种约定不是绝对的。
- 本书中规定，用几个特定的字母表示几个常用的集合。约定：
  - $\mathbb{N}$ 表示全体自然数组成的集合，
  - $\mathbb{Z}$ 表示全体整数组成的集合，
  - $\mathbb{Q}$ 表示全体有理数组成的集合，
  - $\mathbb{R}$ 表示全体实数组成的集合，
  - $\mathbb{C}$ 表示全体复数组成的集合。
- 本书中，规定 0 是自然数，即 $0 \in \mathbb{N}$。但在另一些书中，规定 0 不是自然数。

集合的表示方法

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

通常表示集合的方法有两种。
一种方法是外延表示法。这种方法一一列举出集合的全体元素。例如

$$A = \{7, 8, 9\},$$
$$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

表示集合 A 有三个元素 7, 8, 9。集合 N 的元素是 0, 1, 2, 3, ..., 集合 N 就是自然数的集合，N 的表示式中使用了省略符号，这表示 N 中有无限多个元素 4, 5, 6, 7 等。有限集合中也可以使用省略符号，例如

$$\{a, b, c, \ldots, y, z\}$$

表示由 26 个小写英文字母组成的集合。

集合的表示方法

另一种方法是内涵表示法，这种方法是用谓词来描述集合中元素的性质。上述的集合 A 和 N 可以分别表示为

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \mid x\text{是整数且}6 < x < 10\},\\
N &= \{x \mid x\text{是自然数}\}.
\end{aligned}
$$

一般情况，如果 P(x) 表示一个谓词，那么就可以用 $\{x \mid P(x)\}$ 或 $\{x : P(x)\}$ 表示一个集合。$\{x \mid P(x)\}$ 是使 P(x) 为真的所有元素组成的集合。也就是说，若 P(a) 为真，则 a 属于该集合；若 P(a) 为假，则 a 不属于该集合。在表示式中的 “|” 和 “:” 是一个分隔符号。在它前面的 x 是集合中元素的形式名称（如集合 A 中元素的形式名称是 x，但实际名称是 7, 8, 9。常用 x, y, z 表示形式名称）。在分隔符号后面的 P(x) 是仅含自由变元 x 的谓词公式。

例 1 $B = \{9, 8, 8, 7\}$

集合 B 中的两个 8 应看作 B 中的同一个元素，所以 B 中只有三个元素。集合 B 就是 $\{9, 8, 7\}$。它与上述的集合 A 是同样的集合，因为元素之间没有次序。

例 2 $D = \{x \mid x \notin B\}$

集合 D 是用集合 B 来定义的。若 $x \in B$，则 $x \in D$；若 $x \notin B$，则 $x \notin D$。集合 D 中的元素是除 7, 8, 9 外的一切事物。

例 3 $F = \{7, \{8, \{9\}\}\}$

集合 F 和集合 B 不同。$7 \in F$，但 $8 \notin F$，$9 \notin F$。只有 $8 \in \{8, \{9\}\}$ 和 $9 \in \{9\}$。集合 F 仅含有两个元素 7 和 $\{8, \{9\}\}$，这两个元素由表示 F 的最外层花括号包围，并由逗号分隔开。对于以集合为元素的集合（即有多层花括号的集合），应注意集合的层次。

例 4 $G = \{x \mid x = 1 \vee (\exists y)(y \in G \wedge x = \{y\})\}$.

集合 G 是用递归方法定义的。这个定义是构造性的，可以由该定义求 G 的每个元素，从而构造出 G。构造 G 的过程是：

- 由 $1 \in G$，有 $\{1\} \in G$，
- 由 $\{1\} \in G$，有 $\{\{1\}\} \in G$，
- …

这个构造过程是无止境的，因此 G 的元素有无限多个。

例 5 $H=\{x \mid x\text{是一个集合且}x\notin x\}$.

可用反证法证明集合 H 是不存在的。假设存在这样的集合 H，下面将证明，对某一具体事物 y，无法确定 y 是否属于 H。我们以 H 本身作为这个具体事物 y，证明中 y 就是 H。对于集合 H，必有 $y\in H$ 或 $y\notin H$，下面分别考虑之。

- 若 $y\in H$。由于 y 是 H 的元素，y 就具有 H 中元素的性质 $y\notin y$。考虑到 y 就是 H，所以 $y\notin H$。这与 $y\in H$ 矛盾。
- 若 $y\notin H$。由于 y 不是 H 的元素，y 就没有 H 中元素的性质，因此 $y\in y$。又因 y 就是 H，则 $y\in H$。这与 $y\notin H$ 矛盾。

两种情况都存在矛盾，所以 $y\in H$ 和 $y\notin H$ 都不成立，集合 H 不存在。问题的根源在于，集合论不能研究 “所有集合组成的集合”。这是集合论中的一个悖论，称为 Russell 悖论。

集合间的关系

- 在实数之间可以定义关系 $=$、$<$、$\leq$、$>$、$\geq$。类似地，在集合之间可以定义关系 $=$、$\subseteq$、$\subset$、$\supseteq$、$\supset$。

定义 9.2.1

两个集合是相等的，当且仅当它们有相同的元素。若两个集合 A 和 B 相等，则记作 $A = B$；若 A 和 B 不相等，则记作 $A \neq B$，这个定义也可以写成

- $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$
- $A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B) = \neg(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

这个定义就是集合论中的外延公理，也叫外延原理。它实质上是说"一个集合是由它的元素完全决定的"。因此，可以用不同的表示方法（外延的或内涵的），用不同的性质、条件和内涵表示同一个集合。例如

$$\{7, 8, 9\}, \{x \mid x\text{是整数且}6 < x < 10\}, \{x \mid (x-7)(x-8)(x-9) = 0\},$$

表示同一个集合，即三个集合相等。

定义 9.2.2

对任意两个集合 A 和 B，若 A 的每个元素都是 B 的元素，就称 A 为 B 的子集合，或称 B 包含 A，或称 B 是 A 的超集合，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$。这个定义也可以写成 $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B)$.

当 A 不是 B 的子集合时，即 $A \subseteq B$ 不成立时，记作 $A \nsubseteq B$。

注意区分 $\subseteq$ 和 $\in$。例如

$$\{a\} \nsubseteq \{\{a\}, b\} \quad \text{但} \quad \{a\} \in \{\{a\}, b\},$$

$$\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a\}\} \quad \text{但} \quad \{a, b\} \notin \{a, b, \{a\}\}.$$

$A \in B$ 表示 A 是 B 的一个元素，$A \subseteq B$ 表示 A 的每个元素都是 B 的元素。此外，$\in$ 是集合论的原始符号，这是一个基本概念；但是 $\subseteq$ 是由 $\in$ 定义出来的概念。

下面给出有关 $=$ 和 $\subseteq$ 的两个主要结论。

定理 9.2.1

两个集合相等的充要条件是它们互为子集，即

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$

证明：

$$\begin{aligned}
&A = B \\
&\quad \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B) \\
&\quad \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)) \\
&\quad \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A) \\
&\quad \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.
\end{aligned}$$

这个定理很重要，以后证明两个集合相等时，主要使用这个定理，判定两个集合互为子集。

定理 9.2.2

对任意的集合 A, B 和 C:

1. $A \subseteq A$。
2. $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A = B$。
3. $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$。

在这个定理中，(1) 是自反性，(2) 是反对称性（这是定理 9.2.1 的一部分），(3) 是传递性。定理 9.2.2 说明包含关系 $\subseteq$ 具有这 3 个性质（实数间的 $\leq$ 关系也有这 3 个性质）。

应该指出，$\in$ 没有这 3 个性质。

- 以后将证明，对任意的集合 A，$A \notin A$。
- 以后将证明，对任意的集合 A 和 B，$\neg(A \in B \wedge B \in A)$。
- 对任意的集合 A、B 和 C，当 $A \in B$ 和 $B \in C$ 时，不一定有 $A \in C$。以后将指出，C 为传递集合时才能推出 $A \in C$。

定义 9.2.3

对任意两个集合 A 和 B，若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，就称 A 为 B 的真子集，或称 B 真包含 A，或称 B 是 A 的真超集合，记作

$$A \subset B \text{ 或} B \supset A,$$

定义也可以写成

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B) = (\forall x)(x \in A \to x \in B) \wedge (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

定义 9.2.4

若两个集合 A 和 B 没有公共元素，就称 A 和 B 是不相交的。这个定义也可以写成

$$A \text{ 和 } B \text{ 不相交} \Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B).$$

若 A 和 B 不是不相交的，就称 A 和 B 是相交的。例如

- $\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$
- $\{1,2\} \subseteq \{1,2\}$
- $\{1,2\}$和$\{3,4,5\}$不相交
- $\{1,2\}$和$\{2,3,4\}$相交

特殊集合

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY 上海交通大学

空集和全集是两个特殊集合。它们的概念相简单，但在集合论中的地位却很重要。下面介绍这两个集合。

定义 9.2.5

不含任何元素的集合称为空集，记作 Φ。空集的定义也可以写成

$$\Phi = \{x \mid x \neq x\}.$$

显然，$(\forall x)(x \notin \Phi)$ 为真。
$A = \Phi$ 当且仅当

$$\{x \mid x \neq x\}.$$

$A \neq \Phi$ 当且仅当

$$\{x \mid (\exists y)(y \in x)\}.$$

特殊集合

下面介绍有关空集的两个重要结论。

定理 9.2.3

对任意的集合 A, $\Phi \subseteq A$。

证明假设存在集合 A，使得 $\Phi \nsubseteq A$。则存在 x，使得 $x \in \Phi$ 且 $x \notin A$。这与空集中的定义矛盾，因为空集不包含任何元素，所以不存在这样的 x。因此，假设不成立，定理得证。

推论 9.2.1

空集是唯一的。

证明留作思考题（只要假设有两个空集 Φ_1 和 Φ_2，证明 $\Phi_1 = \Phi_2$ 即可）。

特殊集合

定义 9.2.6

在给定的问题中，所考虑的所有事物的集合称为全集，记作 E。全集的定义也可以写成

$$E = \{x \mid x = x\}.$$

全集的概念相当于谓词逻辑的论域。对不同的问题，往往使用不同的论域，例如在研究有关实数的问题时，就以 $\mathbb{R}$ 为全集。

集合的运算

集合的运算

运算是数学上常用的手段。两个实数进行加法运算可以得到一个新的实数。类似地，两个集合也可以进行运算，得到交集、并集等新的集合。集合的运算是由已知集合构造新集合的一种方法。我们经常从若干简单集合出发，用运算构造大量新集合，这类似于用逻辑联结词构造出大量合式公式。集合的运算式子也是表示这些新集合的一种方法，而且往往是更简捷的表示方法。所以，集合的运算式子是表示集合的第三种方法。这种表示方法不仅简捷，而且可利用运算的性质简化一些证明问题。

集合的基本运算

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

下面介绍的 5 种运算是集合论中的基本运算。

定义 9.3.1

对集合 A 和 B，

1. 并集 $A \cup B$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

2. 交集 $A \cap B$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

3. 差集（又称 B 对 A 的相对补集，补集）
$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in -B\}$$
$$= A \cap -B = A - (A \cap B).$$

集合的基本运算

定义 9.3.1

对集合 A 和 B,

❹ 余集（又称 A 的绝对补集）$-A$ 定义为

$$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\} = \{x \mid \neg(x \in A)\}.$$

其中 E 为全集。A 的余集就是 A 对 E 的相对补集。

❺ 对称差 $A \oplus B$ 定义为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x | x \in A \bar{\vee} x \in B\}.$$

集合的基本运算

例 1

已知集合 A, B 和全集 E 为

$$A = \{a, b, c, d\}, B = \{e, f, a, d\},$$

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g\},$$

则有

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\} = B \cup A,$$
$$A \cap B = \{a, d\} = B \cap A,$$
$$A - B = \{b, c\}, \quad B - A = \{e, f\},$$
$$-A = \{e, f, g\}, \quad -B = \{b, c, g\},$$
$$A \oplus B = \{b, c, e, f\} = B \oplus A.$$

广义并和广义交

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

广义并和广义交是一元运算，是对一个集合的集合 A 进行的运算。它们分别求 A 中所有元素的并和交，A 中可以有任意多个元素，它们就可以求任意个元素的并和交。A 中若有无限多个元素，它们就可以求无限多个元素的并和交。广义并和广义交是并集和交集的推广。

定义 9.3.2

若集合 A 的元素都是集合，则把 A 的所有元素的元素组成的集合称为 A 的广义并，记作 $\cup A$；把 A 的所有元素的公共元素组成的集合称为 A 的广义交，记作 $\cap A$。这个定义也可以写成（A 的元素是集合）：

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

此外，规定 $\cup\Phi = \Phi$，规定 $\cap\Phi$ 无意义。

广义并和广义交

例 2

已知集合 A 为

$$A = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\},$$

则有

$$\cup A = \{a, b, c, d\},$$

$$\cap A = \{b\}.$$

可以用广义并和广义交分别定义并集和交集

$$A \cup B = \cup\{A, B\},$$

$$A \cap B = \cap\{A, B\}.$$

幂集

集合的幂集是该集合所有子集组成的集合，幂集是由一个集合构造的新集合，它也是集合的一元运算，但是幂集与原集合的层次有所不同。

定义 9.3.3

若 A 是集合，则把 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$（有 2^n 个元素）。

这个定义也可以写成

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$ （幂集的元素是集合）

幂集

例 3

$$
\begin{aligned}
P(\varnothing) &= \{\varnothing\}, \\
P(\{\varnothing\}) &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \\
P(\{a, b\}) &= \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.
\end{aligned}
$$

对任意的集合 A，有 $\varnothing \subseteq A$ 和 $A \subseteq A$，因此有 $\varnothing \in P(A)$ 和 $A \in P(A)$。

笛卡尔积

- 笛卡尔积也是一种集合二元运算，两个集合的笛卡儿积是它们的元素组成的有序对的集合，笛卡儿积是与原集合层次不同的集合。笛卡儿积是下一章介绍关系概念的基础。下面先介绍有序对，再介绍笛卡儿积。
- 两个元素 x 和 y（允许 $x = y$）按给定次序排列组成的二元组合称为一个有序对，记作 $\langle x, y\rangle$。其中 x 是它的第一元素，y 是它的第二元素。
- 有序对 $\langle x, y\rangle$ 应具有下列性质：
  - $x \neq y \Longrightarrow \langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$
  - $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \Longleftrightarrow x = u \wedge y = v$
- 在平面直角坐标系上一个点的坐标就是一个有序对。

下面用集合定义有序对，使之具有上述的性质，

定义 9.3.4

有序对 $\langle x, y\rangle$ 定义为 $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

笛卡尔积

定理 9.3.1

1. $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \Leftrightarrow x = u \wedge y = v.$
2. $x \neq y \Rightarrow \langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$

证明 (1) 设 $x = u \wedge y = v$，则显然有 $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$。于是 $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$。

设 $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$，则有 $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$。

分别考虑 $x = y$ 和 $x \neq y$ 两种情况。

- 当 $x = y$ 时，$\langle x, y\rangle = \{\{x\}\}$，于是 $\{x\} = \{u\} = \{u, v\}$，则 $x = u = v = y$。
- 当 $x \neq y$ 时，显然 $\{u\} \neq \{x, y\}$。于是 $\{u\} \neq \{x\}$ 且 $\{x, y\} = \{u, v\}$。则 $x = u$。显然 $y \neq u$，于是 $y = v$。两种情况都可得到 $x = u \wedge y = v$。

笛卡尔积

可以推广有序对的概念，定义由有序的 n 个元素组成的 n 元组。n 元组是用递归方法定义的。

定义 9.3.5

若 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n > 1$，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是 n 个元素，则 n 元组 $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ 定义为

- 当$n = 2$ 时，二元组是有序对$\langle x_1, x_2 \rangle$
- 当$n \neq 2$ 时，$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$

例 4

$\langle a, b, c, d \rangle = \langle \langle \langle a, b \rangle, c \rangle, d \rangle$.

按照这个定义，有序对就是二元组，n 元组就是多重有序对。

笛卡尔积

定义 9.3.6

集合 A 和 B 的笛卡儿积（又称卡氏积、乘积、直积）$A \times B$ 定义为

$$A \times B = \{z \mid \exists x \in A \wedge \exists y \in B \wedge z = \langle x, y \rangle\}$$ 或简写为

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

例 5

已知集合 A 和 B 为 $A = \{a, b\}, B = \{0, 1, 2\}$。

- $A \times B = \{\langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}$
- $B \times A = \{\langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle\}$
- $A \times A = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$

笛卡尔积

在 $A = B$ 时，可把 $A \times A$ 简写为 A^2。
上面用有序对定义了笛卡儿积。A 和 B 的笛卡儿积，就是由 $x \in A$ 和 $y \in B$ 构成的有序对 $\langle x, y \rangle$ 的全体组成的集合。可以推广这个概念，用 n 元组定义 n 阶笛卡儿积。

定义 9.3.7

若 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n > 1$，而 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 n 个集合，它们的 n 阶笛卡儿积记作 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，并定义为

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \land \ldots \land x_n \in A_n\}$$

当 $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ 时，它们的 n 阶笛卡儿积可以简写为 A^n。

优先权

- 集合可以由集合运算符连接构成新集合，如 $A \cap B$ 和 $-A$。两个集合可以由集合关系符连接，构成一个命题，如 $A \cap B \subseteq A$ 和 $A \neq B$。这种命题可以由逻辑联结词连接，构成复合命题，如 $(A \subseteq B \wedge A \neq B)$。两个命题可以由逻辑关系符连接，如 $A = B \Longrightarrow A \subseteq B$。
- 在集合论中，当描述问题和证明问题时，往往在一个式子中同时使用上述四类连接符号。为了简单、确定地表示各类连接符号的优先次序，下面规定各类连接符号的优先次序，

- 一元运算符 $(-A, P(A), \cap A, \cup A)$ 优先于
- 二元运算符 $(-, \cap, \cup, \oplus, \times)$ 优先于
- 集合关系符 $(=, \subseteq, \subset, \in)$ 优先于
- 一元联结词 $(\neg)$ 优先于
- 二元联结词 $(\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ 优先于
- 逻辑关系符 $(\Leftrightarrow, \Rightarrow)$。
- 此外，还使用数学上惯用的括号表示优先权方法、从左到右的优先次序。规定
  1. 括号内的优先于括号外的；
  2. 同一层括号内，按上述优先权，
  3. 同一层括号内，同一优先级的，按从左到右的优先次序。

例 6

$$-A \oplus B \subseteq C \cup \cap D$$

表示

$$((-A) \oplus B) \subseteq (C \cup (\cap D))$$

$$\neg A \cap B \in C \to D \subseteq E$$

表示

$$(\neg((A \cap B) \in C) \to (D \subseteq (\cap E))$$

$$A \subseteq B \wedge A \neq B \Leftrightarrow A \subset B$$

表示

$$((A \subseteq B) \wedge (A \neq B)) \Leftrightarrow (A \subset B)$$

集合的图形表示法

- 前面已介绍了表示集合的三种方法：外延表示法，内涵表示法和使用运算的表示法，图形表示法是第四种表示法。图形表示法是数学上常用的方法，它的优点是形象直观、易于理解，缺点是理论基础不够严谨，因此只能用于说明，不能用于证明。
- 下述的三种图形表示法分别适于表示不同类型的集合运算。不仅可以表示集合运算的概念，而且可以表示一些性质和结论。

文氏图

- 在文氏图中，矩形内部的点表示全集的所有元素。在矩形内画不同的圆表示不同的集合，用圆内部的点表示相应集合的元素。文氏图可以表示集合间的关系和集合的 5 种基本运算。
- 图 9.4.1 中各图表示集合的关系，各图中的 A 和 B 间具有相应的关系，图 9.4.2 中各图表示 5 种基本运算，各图中斜线区表示经相应运算得到的集合。

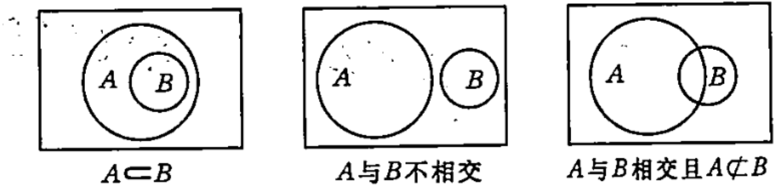

图 9.4.1 文氏图

文氏图

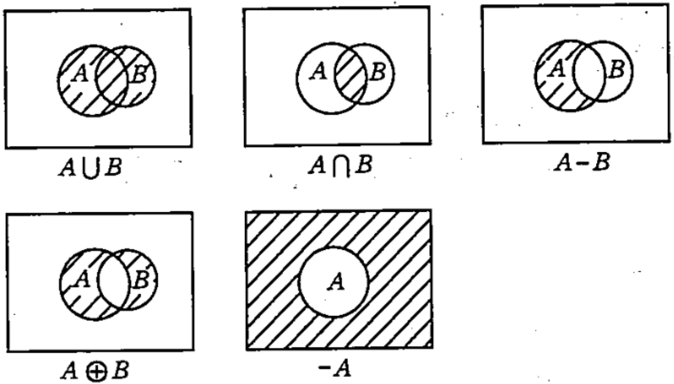

图 9.4.2 文氏图

幂集的图示法

- 可以用一个网络图中的各结点表示幂集的各元素。设 $A = \{0, 1, 2\}$，则 $P(A)$ 的各元素在图 9.4.3 中表示。图中结点间的连线表示二者之间有包含关系。这种图就是下一章介绍的哈斯图。

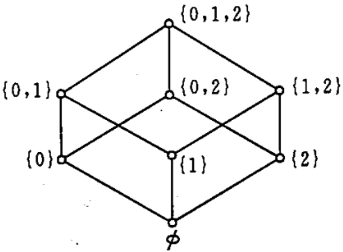

图 9.4.3　幂集

笛卡尔积的图示法

上海交通大學 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

- 在平面直角坐标系上，如果用 x 轴上的线段表示集合 A，并用 y 轴上的线段表示集合 B，则由两个线段画出的矩形就可以表示笛卡儿积 $A \times B$，如图 9.4.4 所示。

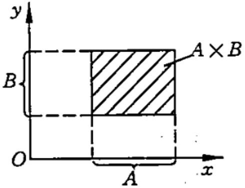

图 9.4.4 笛卡儿积

基本运算的性质

集合的三种运算 $A \cup B$, $A \cap B$, $\neg A$ 分别是用逻辑连接词 $\vee$, $\wedge$, $\neg$ 定义的，因此它们具有和 $\vee$, $\wedge$, $\neg$ 类似的性质。下面给出它们满足的一些基本规律，

定理 9.5.1 对任何的集合 A, B 和 C，有

1. 交换律

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

2. 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

定理 9.5.1 对任何的集合 A, B 和 C，有

3. **分配律**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. **幂等律**

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

5. **吸收律**

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

定理 9.5.1 对任何的集合 A, B 和 C，有

6. 摩根律

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

$$-(B\cup C)=-B\cap -C$$

$$-(B\cap C)=-B\cup -C$$

7. 同一律

$$A\cup\varnothing=A,\quad A\cap E=A$$

定理 9.5.1 对任何的集合 A, B 和 C，有

8. 零律

$$A \cup E = E, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$$

9. 补余律

$$A \cup -A = E, \quad A \cap -A = \varnothing$$

10.

$$-\varnothing = E, \quad -E = \varnothing$$

11. 双补律

$$-(-A) = A$$

谓词法

下面仅证 (3) 和 (5)
求证 (3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
证明 对于任意的 x 可得

$$
\begin{aligned}
& x \in A \cup (B \cap C) \\
& \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \\
& \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\
& \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\
& \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \\
& \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

于是结论得证。

集合法

求证 (5) $A \cap (A \cup B) = A$.

证明

$$
\begin{aligned}
A \cap (A \cup B) &= (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) \\
&= A \cup (\varnothing \cap B) \\
&= A \cup \varnothing \\
&= A
\end{aligned}
$$

- 这里采用了两种证明方法。一种是利用谓词演算的方法，另一种是利用已知的集合恒等式。一部分基本规则只能用谓词逻辑来证明。其他规律和集合恒等式可能用两种方法来证。
- 可以用文氏图说明集合恒等式。图 9.5.1 用文氏图说明 $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$。从图中看出，等式两边对应图中同一个区域，因此应该相等。这种图形表示法只能说明问题，不能证明问题。

9.5.1 基本运算的性质

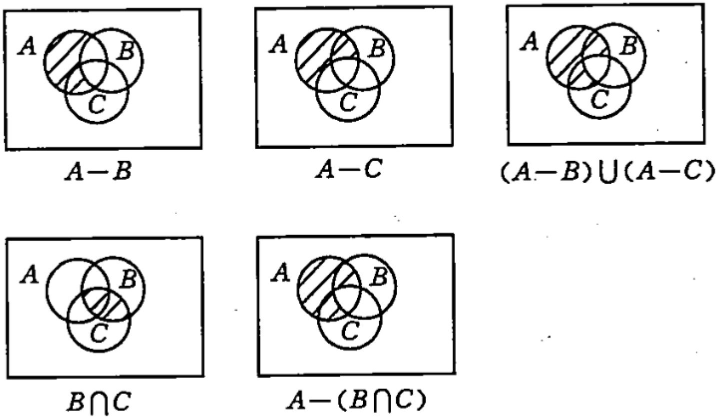

图 9.5.1

基本运算的性质

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

下面给出差集的性质。

定理 9.5.2

对任意的集合 A, B 和 C，有

1. $A - B = A - (A \cap B)$
2. $A - B = A \cap -B$
3. $A \cup (B - A) = A \cup B$
4. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

证明：（1）添项谓词法（2）不属于谓词法

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY 上海交通大学

(1) 对任意的 x

$$
\begin{aligned}
& x \in A-(A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \cap B) \\
& \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \\
& \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\
& \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \\
& \Leftrightarrow F \vee (x \in A-B) \Leftrightarrow x \in A-B
\end{aligned}
$$

(2) 对任意的 x

$$
\begin{aligned}
& x \in A-B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \\
& \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in -B \Leftrightarrow x \in A \cap -B
\end{aligned}
$$

(3) 分配集合法 (4) 差/结合

(3)

$$
\begin{aligned}
&A \cup (B - A) = A \cup (B \cap -A) \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup -A) = (A \cup B) \cap E \\
&= A \cup B
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&A \cap (B - C) = A \cap (B \cap -C) \\
&= (A \cap B) \cap -C = (A \cap B) - C
\end{aligned}
$$

定理中的 (2) 是很有用的结论，它可以用 $A \cap B$ 代入式中的 $A - B$，从而消去差集算符，利用定理 9.5.1 的规律。这类似于命题逻辑中消去联结词 $\rightarrow$。

基本运算的性质

对称差的性质类似于并集，下面给出一些基本性质。

定理 9.5.3

对任意的集合 A，B 和 C，有

1. 交换律 $A \oplus B = B \oplus A$.
2. 结合律 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.
3. 分配律 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.
4. 同一律 $A \oplus \varnothing = A$.
5. 零律 $A \oplus A = \varnothing$.
6. $A \oplus (A \oplus B) = B$.

添项法

证明 (3) 如下

$$
\begin{aligned}
&A \cap (B \oplus C) \\
&= A \cap ((B - C) \cup (C - B)) \\
&= A \cap ((B \cap -C) \cup (C \cap -B)) \\
&= (A \cap B \cap -C) \cup (A \cap C \cap -B) \\
&= ((A \cap B \cap -C) \cup (A \cap B \cap -A)) \cup ((A \cap C \cap -B) \cup (A \cap C \cap -A)) \\
&= ((A \cap B) \cap (-C \cup -A)) \cup ((A \cap C) \cap (-B \cup -A)) \\
&= ((A \cap B) \cap -(A \cap C)) \cup ((A \cap C) \cap -(A \cap B)) \\
&= (A \cap B) \oplus (A \cap C)
\end{aligned}
$$

基本运算的性质

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

集合间的 $\subseteq$ 关系类似于实数间的 $\leq$ 关系，性质如下

定理 9.5.4

对任意的集合 A, B, C 和 D，有

1. $A \subseteq B \Longrightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$
2. $A \subseteq B \Longrightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$
3. $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Longrightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$
4. $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Longrightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$
5. $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Longrightarrow (A - D) \subseteq (B - C)$
6. $C \subseteq D \Longrightarrow (A - D) \subseteq (A - C)$

例 1 对任意的集合 A 和 B，有
$(A \cup B = B) \Longleftrightarrow (A \subseteq B) \Longleftrightarrow (A \cap B = A) \Longleftrightarrow (A - B = \varnothing)$。

- 证明本例要求证明 4 个命题互相等价。设命题 (1) 是 $A \cup B = B$，命题 (2) 是 $A \subseteq B$，命题 (3) 是 $A \cap B = A$，命题 (4) 是 $A - B = \varnothing$。只要证明 (1) $\Rightarrow$ (2)，(2) $\Rightarrow$ (3)，(3) $\Rightarrow$ (4)，(4) $\Rightarrow$ (1) 即可。
- $(1) \Rightarrow (2)$: 已知 $A \cup B = B$. 对任意的 x, 得 $x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B$. 因此 $A \subseteq B$.
- $(2) \Rightarrow (3)$: 已知 $A \subseteq B$. 对任意的 x, 得 $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A, x \in A \Rightarrow x \in A \cap x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$. 因此 $A \cap B = A$.

- $(3) \Rightarrow (4)$：已知 $A \cap B = A$，故 $A - B = A \cap -B = (A \cap B) \cap -B = A \cap (B \cap -B) = \varnothing$。
- $(4) \Rightarrow (1)$：
  - 已知 $A - B = \varnothing$，故

$$\begin{aligned} & A \cup B \\ & = B \cup A \\ & = B \cup (A - B) \\ (\text{由定理 9.5.2}) & = B \cup \varnothing = B \end{aligned}$$

例 2

对任意的集合 A, B 和 C，有 $A\cup B=A\cup C$，$A\cap B=A\cap C\Rightarrow B=C$。

证明

方法 1:

$$
\begin{aligned}
B &= B\cap(A\cup B) \quad \text{(吸收律)}\\
&= B\cap(A\cup C)\\
&= (B\cap A)\cup(B\cap C)\\
&= (A\cap C)\cup(B\cap C)\\
&= (A\cup B)\cap C\\
&= (A\cup C)\cap C = C.
\end{aligned}
$$

方法 2:(反证法) 假设 $B \neq C$。不妨设存在 x，使 $x \in B \wedge x \notin C$。如果 $x \in A$，则 $x \in A \cap B$ 且 $x \notin A \cap C$ 与已知矛盾。如果 $x \notin A$，则 $x \in A \cup B$ 且 $x \notin A \cup C$，也与已知矛盾。因此 $B = C$。

由 $A \cup B = A \cup C$ 能否推出 $B = C$ 呢？能否由 $A \cap B = A \cap C$ 推出 $B = C$ 呢？请思考。

例 3 对任意的集合 A, B 和 C，给出 $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$ 成立的充要条件。

解 $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow ((A-B)-(A-C))\cup((A-C)-(A-B))=\varnothing\\
&\Leftrightarrow ((A-B)-(A-C))=\varnothing\wedge((A-C)-(A-B))=\varnothing\\
&\Leftrightarrow (A-B)\subseteq(A-C)\wedge(A-C)\subseteq(A-B)\\
&\Leftrightarrow A-B=A-C.
\end{aligned}$$

于是，充要条件是 $A-B=A-C$。

充要条件的证明，集合法用 $=$

幂集合的性质和传递集合

上海交通大學 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

定理 9.5.5

对任意的集合 A 和 B，有：

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$
2. $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

证明

1. 先设 $A \subseteq B$ 成立，对任意的 x，有

$$\begin{aligned} x \in P(A) &\Leftrightarrow x \subseteq A \\ &\Rightarrow x \subseteq B \quad (\text{定理 } 9.2.2) \\ &\Leftrightarrow x \in P(B) \end{aligned}$$

于是，$P(A) \subseteq P(B)$。再设 $P(A) \subseteq P(B)$ 成立，对任意的 x，有:

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow \{x\} \subseteq A \\ &\Leftrightarrow \{x\} \in P(A) \\ &\Rightarrow \{x\} \in P(B) \\ &\Leftrightarrow \{x\} \subseteq B \\ &\Leftrightarrow x \in B. \end{aligned}$$

于是 $A \subseteq B$。

2

$$
\begin{aligned}
A = B &\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \\
&\Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B) \wedge P(B) \subseteq P(A) \\
&\Leftrightarrow P(A) = P(B)
\end{aligned}
$$

定理 9.5.6

对任意的集合 A 和 B，有

1. $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$
2. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

证明

1. 对任意的 x，可得

$$\begin{aligned}
x\in P(A)\cap P(B) &\Leftrightarrow x\in P(A)\wedge x\in P(B)\\
&\Leftrightarrow x\subseteq A\wedge x\subseteq B\\
&\Leftrightarrow (\forall y)(y\in x\to y\in A)\wedge(\forall y)(y\in x\to y\in B)\\
&\Leftrightarrow (\forall y)(y\in x\to(y\in A\wedge y\in B))\\
&\Leftrightarrow x\subseteq A\cap B\\
&\Leftrightarrow x\in P(A\cap B).
\end{aligned}$$

2. 对任意的 x，可得

$$
\begin{aligned}
x \in P(A) \cup P(B) &\Leftrightarrow x \in P(A) \vee x \in P(B) \\
&\Leftrightarrow x \subseteq A \vee x \subseteq B \\
&\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A) \vee (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in B) \\
&\Rightarrow (\forall y)((y \in x \rightarrow y \in A) \vee (y \in x \rightarrow y \in B)) \\
&\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow (y \in A \cup B)) \\
&\Leftrightarrow x \subseteq A \cup B \\
&\Leftrightarrow x \in P(A \cup B).
\end{aligned}
$$

- 注意，结论 (2) 不能写成等式。例如，令 $A = \{a\}$，$B = \{b\}$。则 $P(A \cup B) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$，$P(A) \cup P(B) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}\}$。

定理 9.5.8

对任意的集合 A 和 B，有

$$P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\Phi\}.$$

证明 对任意的 x，若 $x \neq \Phi$，则有

$$\begin{aligned}
x \in P(A-B) &\Leftrightarrow x \subseteq A-B \\
&\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A-B) \\
&\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow (y \in A \wedge y \notin B)) \\
&\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A) \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow y \notin B) \\
&\Rightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A) \Leftrightarrow x \subseteq A
\end{aligned}$$

此外

$$\begin{aligned} x \in P(A-B) \wedge x \neq \varnothing &\Leftrightarrow x \subseteq A-B \wedge (\exists y)(y \in x) \\ &\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow (y \in A \wedge y \notin B)) \wedge (\exists y)(y \in x) \\ &\Rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge y \notin B) \quad \text{(用推理规则)} \\ &\Leftrightarrow x \nsubseteq B \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} x \in P(A-B) \wedge x \neq \varnothing &\Rightarrow x \subseteq A \wedge x \nsubseteq B \\ &\Leftrightarrow x \in P(A) \wedge x \notin P(B) \\ &\Rightarrow x \in (P(A) - P(B)) \\ &\Rightarrow P(A-B) \in (P(A) - P(B)) \cup \{\varnothing\} \end{aligned}$$

若 $x = \varnothing$，有 $\varnothing \in P(A-B)$ 且$\varnothing \in (P(A) - P(B)) \cup \{\varnothing\}$.

幂集合的性质和传递集合

- 传递集合是一类特殊的集合。下面给出传递集合的定义，并讨论它和幂集的关系。

定义 9.5.1

如果集合的集合 A 的任一元素的元素都是 A 的元素，就称 A 为传递集合。

- 这个定义也可以写成

$$A\text{是传递集合} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y \in A) \to x \in A),$$

推论 $\Rightarrow x \subseteq A, y \subseteq A$。

- 证明传递集合从定义角度来进行证明。

幂集合的性质和传递集合

例 4

- $A = \{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$ 是传递集合。A 的元素的元素有 Φ 和 $\{\Phi\}$，这些都是 A 的元素。
- $B = \{\{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$ 不是传递集合，B 的元素的元素有 Φ 和 $\{\Phi\}$，但是 $\{\Phi\}$ 不是 B 的元素。

幂集合的性质和传递集合

定理 9.5.9

对集合的集合 A，A 是传递集合 $\Leftrightarrow A \subseteq P(A)$。

证明：

- 先设 A 是传递集合。则对任意的 $y \in A$，若 $y = \Phi$，则 $y \in P(A)$。若 $y \neq \Phi$，对 $(\forall x)(x \in y)$，有 $x \in A$（因为 A 是传递集合），则有 $y \subseteq A$，于是 $y \in P(A)$。总之，由 $y \in A \to y \in P(A)$，有 $A \subseteq P(A)$。
- 再设 $A \subseteq P(A)$，则对任意的 x 和 y，有

$$x \in y \wedge y \in A \Rightarrow x \in y \wedge y \in P(A) \quad \text{（由已知）}$$
$$\Leftrightarrow x \in y \wedge y \subseteq A \Rightarrow x \in A$$

因此，A 是传递集合。

定理 9.5.10

对集合的集合 A，A 是传递集合 $\Leftrightarrow P(A)$ 是传递集合。

- 先设 A 是传递集合。对任意的 x 和 y，有

$$x \in y \wedge y \in P(A) \Leftrightarrow x \in y \wedge y \subseteq A \Rightarrow x \in A$$

$$\Rightarrow x \subseteq A \quad (\text{因为} A \text{ 是传递集合})$$

$$\Rightarrow x \in P(A)$$

  所以 $P(A)$ 是传递集合（证明中利用了传递集合的性质，它的元素一定是它的子集）。

因此，A 是传递集合。

- 再设 $P(A)$ 是传递集合。对任意的 x 和 y，有

$$x \in y \wedge y \in A \Leftrightarrow x \in y \wedge \{y\} \subseteq A$$

$$x \in y \wedge y \in \{y\} \wedge \{y\} \in P(A) \quad \text{（凑传递形式）}$$

$$\Rightarrow x \in y \wedge y \in P(A) \quad \text{（因为} P(A) \text{ 是传递集合）}$$

$$\Rightarrow x \in y \wedge y \subseteq A \Rightarrow x \in A$$

因此，A 是传递集合。

广义并和广义交的性质

定理 9.5.11

对集合的集合 A 和 B，有

1. $A \subseteq B \Rightarrow \cup A \subseteq \cup B$
2. $A \subseteq B \Rightarrow \cap B \subseteq \cap A$，其中 A 和 B 非空.

证明：

1. 设 $A \subseteq B$。对任意的 x，可得

$$x \in \cup A \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in A)$$

$$\Rightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in B) \Leftrightarrow x \in \cup B$$

所以，$\cup A \subseteq \cup B$

❷ 设 $A \subseteq B$。对任意的 x，可得

$$x \in \cap B \Leftrightarrow (\forall y)(y \in B \to x \in y)$$

$$\Rightarrow (\forall y)(y \in A \to x \in y) \quad (\text{由} A \subseteq B)$$

$$x \in \cap A$$

所以，$\cap B \subseteq \cap A$.

定理 9.5.12

对集合的集合 A 和 B，有

1. $\cup(A \cup B) = (\cup A) \cup (\cup B)$
2. $\cap(A \cup B) = (\cap A) \cap (\cap B)$

其中 A 和 B 非空。

证明:

1. 对任意的 x，可得

$$
\begin{aligned}
x \in \cup(A \cup B) &\Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in A \cup B) \\
&\Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge (y \in A \vee y \in B)) \\
&\Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in A) \vee (\exists y)(x \in y \wedge y \in B) \\
&\Leftrightarrow x \in \cup A \vee x \in \cup B \\
&\Leftrightarrow x \in (\cup A) \cup (\cup B)
\end{aligned}
$$

所以，$\cup(A \cup B) = (\cup A) \cup (\cup B)$。

❷ 对任意的 x，可得

$$
\begin{aligned}
x \in \cap(A \cup B) &\Leftrightarrow (\forall y)(y \in A \cup B \to x \in y) \\
&\Leftrightarrow (\forall y)((y \in A \vee y \in B) \to x \in y) \\
&\Leftrightarrow (\forall y)(y \in A \to x \in y) \wedge (\forall y)(y \in B \to x \in y) \\
&\Leftrightarrow x \in \cap A \wedge x \in \cap B \\
&\Leftrightarrow x \in (\cap A) \cap (\cap B)
\end{aligned}
$$

所以，$\cap(A \cup B) = (\cap A) \cap (\cap B)$。

定理 9.5.13

对任意的集合 A，有

$$\cup(P(A)) = A.$$

证明: 对任意的 x，可得

$$x \in \cup(P(A)) \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in P(A))$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \subseteq A) \Leftrightarrow x \in A$$

所以，$\cup(P(A)) = A$。

- 定理说明，广义并是幂集的逆运算。例如，当 $A = \{a, b\}$ 有 $P(A) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$，有 $\cup(P(A)) = \{a, b\}$，但是次序不能颠倒，即 $P(\cup(A)) \neq A$，只有 $A \subseteq P(\cup(A))$。例如，当 $A = \{\{a\}\}$，有 $\cup(A) = \{a\}$，有 $P(\cup(A)) = \{\Phi, \{a\}\}$.

广义并和广义交的性质

下面讨论广义并和广义交对于传递集合的封闭性

定理 9.5.14

若集合 A 是传递集合，则 $\cup A$ 是传递集合。

证明： 对任意的 x 和 y，有

$$x \in y \wedge y \in \cup A \Leftrightarrow x \in y \wedge (\exists z)(y \in z \wedge z \in A)$$

$$\Rightarrow x \in y \wedge y \in A \quad (\text{因为} A \text{ 是传递集合})$$

$$\Leftrightarrow x \in \cup A$$

所以 $\cup A$ 是传递集合。

广义并和广义交的性质

定理 9.5.15

若集合 A 的元素都是传递集合，则 $\cup A$ 是传递集合。

证明: 对任意的 x 和 y，有

$$x \in y \wedge y \in \cup A \Leftrightarrow x \in y \wedge (\exists z)(y \in z \wedge z \in A)$$

$$\Rightarrow (\exists z)(x \in z \wedge z \in A) \quad (\text{因为} z \text{ 是传递集合})$$

$$\Leftrightarrow x \in \cup A$$

所以 $\cup A$ 是传递集合。

广义并和广义交的性质

定理 9.5.16

若非空集合 A 是传递集合，则 $\cap A$ 是传递集合，且 $\cap A = \Phi$。

这个定理的证明要使用正则公理，这里不给出证明。

定理 9.5.17

若非空集合 A 的元素都是传递集合，则 $\cap A$ 是传递集合。

证明： 对任意的 x 和 y，可得

$$
\begin{aligned}
& x \in y \wedge y \in \cap A \Leftrightarrow x \in y \wedge (\forall z)(z \in A \rightarrow y \in z) \\
& \Leftrightarrow (\forall z)(x \in y \wedge (z \notin A \vee y \in z)) \\
& \Leftrightarrow (\forall z)((x \in y \wedge z \notin A) \vee (x \in y \wedge y \in z)) \\
& \Leftrightarrow (\forall z)((x \in y \vee (x \in y \wedge y \in z)) \wedge (z \notin A \vee (x \in y \wedge y \in z))) \\
& \Rightarrow (\forall z)(z \notin A \vee (x \in y \wedge y \in z)) \\
& \Leftrightarrow (\forall z)(z \in A \rightarrow (x \in y \wedge y \in z)) \\
& \Rightarrow (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z) \quad (z \text{ 是传递集合}) \\
& \Leftrightarrow x \in \cap A
\end{aligned}
$$

所以 $\cap A$ 是传递集合。

笛卡尔积的性质

- 笛卡尔积具有下列基本性质：
  1. $A \times \Phi = \Phi \times B = \Phi$
  2. 若 $A \neq \Phi$，$B \neq \Phi$ 且 $A \neq B$，则 $A \times B \neq B \times A$
  3. $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$
- 结论表明，笛卡尔积不满足交换律和结合律。结论 (3) 是因为

$$A \times (B \times C) = \{< a, < b, c >> | \, a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$
$$(A \times B) \times C = \{<< a, b >, c > | \, a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

其中 $<< a, b >, c >=< a, b, c >$ 是三元组，但 $< a, < b, c >>$ 不是三元组。
$<< a, b >, c > \neq < a, < b, c >>$

笛卡尔积的性质

定理 9.5.18

若 A 是集合，$x \in A, y \in A$，则 $\langle x, y\rangle \in PP(A)$。($PP(A)$ 表示 $P(P(A))$。)

证明:

$$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x\} \in P(A), \text{且}$$

$$x \in A \wedge y \in A \Leftrightarrow \{x, y\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x, y\} \in P(A)$$

由以上二式可得到:

$$x \in A \wedge y \in A \Leftrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq P(A)$$
$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \subseteq P(A) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in PP(A)$$

笛卡尔积的性质

定理 9.5.19

对任意的集合 A，B 和 C，有

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
4. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

证明: 只证 (1)，其余留作思考题。对任意的 $\langle x, y\rangle$，可得

$$
\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in A \times B \vee \langle x, y\rangle \in A \times C \\
&\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}
$$

所以，$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$。

笛卡尔积的性质

定理 9.5.20

对任意的集合 A，B 和 C，若 $C \neq \Phi$，则

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B).$$

证明:

- 先设 $A \subseteq B$。若 $y \in C$，则

$$\langle x, y\rangle \in A \times C \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C$$

$$\Rightarrow x \in B \wedge y \in C \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in B \times C.$$

  所以，$A \times C \subseteq B \times C$。

- 再设 $A \times C \subseteq B \times C$。取 $y \in C$，则

$$x \in A \Rightarrow x \in A \wedge y \in C \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in A \times C$$
$$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in B \times C \Leftrightarrow x \in B \wedge y \in C \Rightarrow x \in B.$$

  所以，$A \subseteq B$。
  总之，$A \subseteq B \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times C$。
  类似可证，$A \subseteq B \Leftrightarrow C \times A \subseteq C \times B$。

笛卡尔积的性质

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

定理 9.5.21

对任意的非空集合 A, B, C 和 D，有

$$(A \times B \subseteq C \times D) \Leftrightarrow (A \subseteq C \wedge B \subseteq D)$$

证明:

- 先设 $A \times B \subseteq C \times D$，对任意的 $x \in A$，因存在 $y \in B$，则

$$
\begin{aligned}
& x \in A \wedge y \in B \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in A \times B \\
& \Rightarrow \langle x, y\rangle \in C \times D \Leftrightarrow x \in C \wedge y \in D \Rightarrow x \in C
\end{aligned}
$$

  所以，$A \subseteq C$，类似有 $B \subseteq D$。

- 再设 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$。对任意的 x 和 y，有:

$$
\begin{aligned}
& \langle x, y\rangle \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \\
& \Rightarrow x \in C \wedge y \in D \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in C \times D
\end{aligned}
$$

  所以，$A \times B \subseteq C \times D$。

有限集合的基数

- 集合的基数就是集合中元素的个数。这一节介绍有限集合的基数和一些结论。无限集合的基数将在以后介绍。

有限集合的基数

定义 9.6.1

如果存在 $n \in \mathbb{N}$，使集合 A 与集合 $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ 的元素个数相同，就说集合 A 的基数是 n，记作 $\#(A) = n$ 或 $|A| = n$ 或 $\text{card}(A) = n$。空集 $\varnothing$ 的基数是 0。

定义 9.6.2

如果存在 $n \in \mathbb{N}$，使 n 是集合 A 的基数，就说 A 是有限集合。如果不存在这样的 n，就说 A 是无限集合。

幂集和笛卡儿积的基数

- **定理 9.6.1** 对有限集合 A,

$$|P(A)| = 2^{|A|}.$$

- **证明**设 $|A| = n \in \mathbb{N}$。
由 A 的 k 个元素组成的子集的数目是从 n 个元素中取 k 个的组合数

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

A 的有 0 个元素的子集只有 $\varnothing \subseteq A$。所以

$$|P(A)| = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

又因为

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k},$$

- 当 $x = y = 1$ 时，得

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

所以

$$|P(A)| = 2^n = 2^{|A|}.$$

- **定理 9.6.2** 对有限集合 A 和 B，

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

基本运算的基数

- **定理 9.6.3** 对有限集合 A_1 和 A_2，有
  - $|A_1 \cup A_2| \leq |A_1| + |A_2|$,
  - $|A_1 \cap A_2| \leq \min(|A_1|, |A_2|)$,
  - $|A_1 - A_2| \geq |A_1| - |A_2|$,
  - $|A_1 \oplus A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|$.

下述定理通常称为包含排斥原理，它有更多的用途。

- **定理 9.6.4 对有限集合 A_1 和 A_2，有**

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

- **证明**
  - (1) 若 A_1 与 A_2 不相交，则 $A_1 \cap A_2 = \Phi$，而且 $|A_1 \cap A_2| = 0$，这时显然成立 $|A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2|$。
  - (2) 若 A_1 与 A_2 相交，则 $A_1 \cap A_2 \neq \Phi$，但有

$$|A_1| = |A_1 \cap -A_2| + |A_1 \cap A_2|,$$
$$|A_2| = |-A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|,$$

此外

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1 \cap -A_2| + |-A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|,$$

所以

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

例 1

在 10 名青年中有 5 名是工人，有 7 名是学生，其中有 3 名既是工人又是学生，问有几名既不是工人又不是学生？

设工人的集合是 A，学生的集合是 B。则有 $|A|=5$，$|B|=7$，$|A\cap B|=3$，又有 $|-A\cap -B|+|A\cup B|=10$，于是得

$$\begin{aligned} |-A\cap -B| &= 10-|A\cup B| = 10-(|A|+|B|-|A\cap B|) \\ &= 1 \end{aligned}$$

所以有一名既不是工人又不是学生。

- 对 3 个有限集合 A_1，A_2 和 A_3，可以推广这个定理，得到

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

例 2

30 位同学中，15 人加体育组，8 人参加音乐组，6 人参加美术组，其中 3 人同时参加三个组。问至少有多少人没有参加任何小组？设 A_1、A_2、A_3 分别表示体育组、音乐组、美术组成员的集合。则有

$$|A_1| = 15, |A_2| = 8, |A_3| = 6, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3.$$

因此

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 15 + 8 + 6 - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + 3$$

$$= 32 - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3|$$

例 2

而 $|A_1 \cap A_2| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$， $|A_1 \cap A_3| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$，
$|A_2 \cap A_3| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$。
所以 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \leq 32 - 3 - 3 - 3 = 23$。
至多 23 人参加小组，所以至少 7 人不能参加任何小组。

- 这个定理可以推广到 n 个集合的情况。若 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n > 1$，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是有限集合，则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |A_i \cap A_j| +$$

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| .$$

谢谢