集合论

第9章 集合

- 第9章到第12章介绍集合论．主要介绍集合论的基本概念和结论，这包含集合、运算、关系、函数和基数．对概念和定理的介绍将以数理逻辑的谓词逻辑为工具来描述，体现了这两个数学分支之间的联系，且可使集合论的研究既简练又严格，还将简要介绍集合论公理系统．这个公理系统又称公理集合论，是数理逻辑的一个分支．

9.1 集合的概念和表示方法

9.1.1 集合的概念

- 集合是集合论中最基本的概念，但很难给出精确的定义．集合是集合论中唯一不给出定义的概念，但它是容易理解和掌握的．
- 集合是一些确定的、可以区分的事物汇聚在一起组成的一个整体，组成—个集合的每个事物称为该集合的一个元素．或简称—个元．
- 如果a是集合A的一个元素，就说a属于A，或者说a在A中，记作$a\in A$
- 如果b不是集合A的—个元素，就说b不属于A．或者说b不在A中,记作$b\notin A$．
- 集合概念是很简单的，但准确理解其含义却是十分重要的．

- 特别应注意下列几点:
  - 集合的元素可以是任何事物，也可以是另外的集合(以后将说明，集合的元素不能是该集合自身)．
  - 一个集合的各个元素是可以互相区分开的．这意味着，在一个集合中不会重复出现相同的元素．
  - 组成一个集合的各个元素在该集合中是无次序的．
  - 任—事物是否属于一个集合，回答是确定的，也就是说。对一个集合来说，任一事物或者是它的元素或者不是它的元素，二者必居其一而不可兼而有之，且结论是确定的．
- 下面将用实例说明这些含义．

9.1.2 集合的表示方法

- 我们一般用不同的大写字母表示不同的集合．并用不同的小写字母表示集合中不同的元素，但是因为某个集合的一个元素可能是另一个集合．所以这种约定不是绝对的．
- 本书中规定，用几个特定的字母表示几个常用的集合．约定
  - N表示全体自然数组成的集合,
  - Z表示全体整数组成的集合,
  - Q表示全体有理数组成的集合,
  - R表示全体实数组成的集合,
  - C表示全体复数组成的集合．
- 本书中,规定0是自然数,即$0 \in N$．但在另一些书中,规定0不是自然数．

- 通常表示集合的方法有两种．

  一种方法是外延表示法．这种方法一一列举出集合的 全体元素．例如

  $$A=\{7,\ 8,\ 9\},$$

  $$N=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\},$$

  表示集合A有三个元素7，8，9．集合N的元素是0，1，2，3，…，集合N就是自然数的集合，N的表示式中使用了省略符号，这表示N中有无限多个元素4，5，6，7等．有限集合中也可以使用省略符号，例如

  $$\{a,\ b,\ c,\ldots,\ y,\ z\}$$

  表示由26个小写英文字母组成的集合．

- 另一种方法是内涵表示法，这种方法是用谓词来描述 集合中元素的性质．上述的集合A和N可以分别表示为
  - A = {x|x是整数且6<x<l0},
  - N = {x|x是自然数}
- 一般情况，如果P(x)表示一个谓词，那么就可以用{x|P(x)}或{x:P(x)}表示—个集合．{x|P(x)}是使P(x)为 真的所有元素组成的集合．也就是说，若P(a)为真， 则a属于该集合；若P(a)为假，则a不属于该集合．在 表示式中的|和：是一个分隔符号．在它前向的x是集 合中元素的形式名称(如集合A中元素的形式名称是x， 但实际名称是7，8，9.常用x，y，z表示形式名称)．在 分隔符号后面的P(x)是仅含自由变元x的谓词公式．

9.1.3 集合的实例

- 例1　　B={9，8，8，7}，
  - 集合B中的两个8应看作B中的同一个元素，　所以B中只有三个元素．集合B就是{9，8，　7}．它与上述的集合A是同样的集合，因　为元素之间没有次序．
- 例2　　D＝{x |x∉B}．
  - 集合D是用集合B来定义的．若x∉B，则 x∈D：若x∈B，则x∉D．集合D中的元素是除7，8，9外的一切事物．
- 例3　　F={7，{8，{9}}}．
  - 集合F和集合B不同。7∈F，但8∉F，9∉F．只有8∈{8，{9}}和9∈{9}．集合F 仅含有两个元素7和{8，{9}}，这两个元素由表示F的最外层花括号包围，并由逗号分隔开．对于以集合为元素的集合(即有多层花括号的集合)，应注意集合的层次．

- 例4 $G=\{x|x=1 \vee (\exists y)(y\in G \wedge x=\{y\})\}$．
  - 集合G是用递归方法定义的．这个定义是构造性的，可以由该定义求G的每个元素，从而构造出G．构造G的过程是
  - 由$1\in G$，有$\{1\}\in G$，
  - 由$\{1\}\in G$，有$\{\{1\}\}\in G$，
  - …
  - 这个构造过程是无止境的，因此G的元素有无限多个．

- 例5　$H=\{x|x$是一个集合$\wedge x\notin x\}$．
  - 可用反证法证明集合H是不存在的．假设存在这样的集合H，下面将证明，对某一具体事物y，无法确定y是否属于H．我们以H本身作为这个具体事物y，证明中y就是H.对于集合H，必有$y\in H$或$y\notin H$，下面分别考虑之．
  - (1)若$y\in H$．由于y是H的元素,y就具有H中元素的性质$y\notin y$.考虑到y就是H，所以$y\notin H$．这与$y\in H$矛盾．
  - (2)由于y不是H的元素，y就没有H中元素的性质，因此$y\in y$．又因y就是H，则$y\in H$．这与$y\notin H$矛盾．两种情况都存在矛盾，所以$y\in H$和$y\notin H$都不成立，集合H不存在．问题的根源在于，集合论不能研究“所有集合组成的集合”．这是集合论中的一个悖论，称为Rusell悖论．

9.2 集合间的关系和特殊集合

9.2.1 集合间的关系

- 在实数之间可以定义关系=、<、≤，>、≥．类似地，在集合之间可以定义关系 = 、⊆ 、 ⊂、⊇ 、 ⊃.

- 定义9.2.1 两个集合是相等的，当且仅当它们有相同的元素．若两个集合A和B相等，则记作A＝B；若A和B不相等，则记作A≠B，这个定义也可以写成
  - $A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \longleftrightarrow x\in B)$，
  - $A\neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x\in A \longleftrightarrow x\in B) = \neg (\forall x)(x\in A \longleftrightarrow x\in B)$．
- 这个定义就是集合论中的外延公理，也叫外延原理．它实质上是说“一个集合是由它的元素完全决定的”．因此，可以用不同的表示方法(外延的或内涵的)，用不同的性质、条件和内涵表示同一个集合．例如
  - $\{7, 8, 9\}$，
  - $\{x \mid x$是整数$\wedge 6<x<10\}$，
  - $\{x \mid (x-7)(x-8)(x-9)=0\}$，

表示同—个集合，即三个集合相等．

- 定义9.2.2 对任意两个集合A和B，若A的每个元素都是B的元素，就称A为B的子集合，或称B包含A，或称B是A的超集合，记作

  $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$．这个定义也可以写成

  $A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A\rightarrow x\in B)$．

  当A不是B的子集合时，即$A\subseteq B$不成立时，记作$A \nsubseteq B$。

- 注意区分$\subseteq$和$\in$．例如

  $\{a\} \nsubseteq \{\{a\},b\}$ 但 $\{a\}\in\{\{a\}, b\}$，

  $\{a, b\}\subseteq\{a, b, \{a\}\}$ 但 $\{a, b\}\notin\{a, b, \{a\}\}$．

  $A\in B$表示A是B的一个元素，$A\subseteq B$表示A的每个元素都是B的元素．此外，$\in$是集合论的原始符号，这是一个基本概念；但是$\subseteq$是由$\in$定义出来的概念．

下面给出有关=的两个主要结论，

- 定理9.2.1　两个集合相等的充要条件是它们互为子集，　即$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.
- 证明

$$
\begin{aligned}
& A = B \\
& \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B) \\
& \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)) \\
& \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A) \\
& \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A .
\end{aligned}
$$

这个定理很重要，以后证明两个集合相等时，主要使 用这个定理，判定两个集合互为子集 .

- 定理9.2.2 对任意的集合A，B和C;

  (1) $A\subseteq A$.

  (2) $(A\subseteq B \wedge B\subseteq A) \Rightarrow A=B$

  (3) $(A\subseteq B \wedge B\subseteq C) \Rightarrow A\subseteq C$

- 在这个定理中，(1)是自反性，(2)是反对称性(这是定理9.2.1的一部分)，(3)是传递性．定理9.2.2说明包含关系$\subseteq$具有这3个性质(实数间的$\leq$关系也有这3个性质)．

- 应该指出，$\in$没有这3个性质．

  (1)以后将证明，对任意的集合A，$A\notin A$．

  (2)以后将证明，对任意的集合A和B，$\neg(A\in B \wedge B\in A)$．

  (3)对任意的集合A、B和C，当$A\in B$和 $B\in C$时，不一定有$A\in C$．以后将指出，C为传递集合时 才能推出$A\in C$

- 定义9.2.3 对任意两个集合A和B，若 $A \subseteq B$且$A \neq B$，就称A为B的真子集，或称B 真包含A，或称B是A的真超集合，记作
  - $A \subset B$或$B \supset A$，
- 这个定义也可以写成
  - $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B) = (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\exists x)\neg(x \in A \leftarrow\rightarrow x \in B)$ ．，
- 定义9.2.4 若两个集合A和B没有公共元素，就称A和B是不相交的．这个定义也可以写成
  - A和B不相交$\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$ ．
- 若A和B不是不相交的，就称A和B是相交的． 例如
  - $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$，
  - $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$，
  - $\{1, 2\}$和$\{3, 4, 5\}$不相交，
  - $\{1, 2\}$和$\{2, 3, 4\}$相交。

9.2.2 特殊集合

空集和全集是两个特殊集合．它们的概念相简单，但在集合论中的地位却很重要．下面介绍这两个集合．

- 定义9.2.5 不含任何元素的集合称为空集，记作Φ．空集的定义也可以写成
  - $\Phi = \{x|x\neq x\}$．
  - 显然，$(\forall x)(x\notin\Phi)$为真．
  - $A=\Phi \Leftrightarrow \{x|x\neq x\}$
  - $A\neq\Phi \Leftrightarrow \{x|(\exists y)(y\in x)\}$

下面介绍有关空集的两个重要结论．

- 定理9.2.3　对任意的集合A，$\Phi \subseteq A$．
  - 证明　假设存在集合A，使$\Phi \nsubseteq A$，则存在x，使$x \in \Phi$且$x \notin A$．这与空集Φ的定义矛盾，所以定理得证．
- 推论9．2．1　空集是唯一的，
  - 证明留作思考题(只要假设有两个空集Φ和Φ，证明$\Phi = \Phi$即可)，

- 定义9.2.6 在给定的问题中，所考虑的所有事物的集合称为全集，记作E. 全集的定义也可以写成
  - $E = \{x|x = x\}$.
- 全集的概念相当于谓词逻辑的论域．对不同的问题，往往使用不同的论域，例如在研究有关实数的问题时，就以R为全集．

9.3 集合的运算

- 运算是数学上常用的手段．两个实数进行加法运算可以得到一个新的实数．类似地，两个集合也可以进行运算，得到交集、并集等新的集合．集合的运算是由已知集合构造新集合的一种方法．我们经常从若干简单集合出发，用运 算构造大量新集合，这类似于用逻辑联结词构造出大量合式公式．集合的运算式子也是表示这些新集合的一种方法，而且往往是更简捷的表示方法．所以，集合的运算式子是表示集合的第三种方法．这种表示方法不仅简捷，而且可利用运算的性质简化一些证明问题．

9.3.1 集合的基本运算

下面介绍的5种运算是集合论中的基本运算，

- 定义9.3.1 对集合A和B，

(1) 并集AUB

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$，

(2) 交集 $A \cap B$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

(3) 差集(又称B对A的相对补集，补集)

$A-B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge \neg (x \in B)\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in -B\}$
$= A \cap -B = A-(A \cap B)$.

(4) 余集(又称A的绝对补集)-A定义为

$-A = E-A = \{x \mid x \notin A\} = \{x \mid \neg (x \in A)\}$，

(其中E为全集．A的余集就是A对E的相对补 集．)

(5) 对称差$A \oplus B$定义为

$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = \{x \mid x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}$.

9.3.2 广义并和广义交

- 广义并和广义交是一元运算，是对一个集合的集合A进行的运算．它们分别求A中所有元素的并和交，A中可以有任意多个元素，它们就可以求任意个元素的并和交．A中若有无限多个元素，它们就可以求无限多个元素的并和交．广义并和广义交是并集和交集的推广．
- 定义9.3.2 若集合A的元素都是集合，则把A的所有元素的元素组成的集合称为A的广义并，记作∪A；把A的所有元素的公共元素组成的集合称为A的广义交，记作∩A．这个定义也可以写成（A的元素是集合）
  - $\cup A=\{x|(\exists z)(z\in A \wedge x\in z)\}$,
  - $\cap A=\{x|(\forall z)(z\in A\rightarrow x\in z)\}$,
- 此外，规定$\cup\Phi=\Phi$，规定 $\cap\ \Phi$无意义。

9.3.3 幂集

- 集合的幂集是该集合所有子集组成的集合，幂集是由一个集合构造的新集合，它也是集合的一元运算， 但是幂集与原集合的层次有所不同．
- 定义9.3.3 若A是集合，则把A的所有子集组成的集合称为A的幂集，记作P(A)（有2^n个元素）．
- 这个定义也可以写成
  - $P(A)=\{x|x\subseteq A\}$ (幂集的元素是集合)
  - 推论——$x\subseteq A \Leftrightarrow x\in P(A)$ （$\in$， $\subseteq$之间转换的桥梁）
  - 例 $P(\Phi)=\{\Phi\}$,
  - $P(\{\Phi\})=\{\Phi, \{\Phi\}\}$,
  - $P(\{a, b\})=\{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
- 对任意的集合A，有$\Phi\subseteq A$和$A\subseteq A$，因此有$\Phi\in P(A)$和 $A\in P(A)$．

9.3.4 笛卡尔积

- 笛卡儿积也是一种集合二元运算，两个集合的 笛卡儿积是它们的元素组成的有序对的集合， 笛卡儿积是与原集合层次不同的集合．笛卡儿 积是下一章介绍关系概念的基础．下面先介绍 有序对，再介绍笛卡儿积．
- 两个元素x和y(允许x＝y)按给定次序排列组成 的二元组合称为一个有序对，记作<x，y>．其中x是它的第一元素，y是它的第二元素．
- 有序对<x，y>应具有下列性质：
  - $x\neq y \Rightarrow \langle x,y\rangle\neq\langle y, x\rangle$
  - $\langle x, y\rangle = \langle u,v\rangle \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$．
- 在平面直角坐标系上一个点的坐标就是一个有序对．

下面用集合定义有序对，使之具有上述的性质，

- 定义9.3.4 有序对<x，y>定义为$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$（和集合间桥梁）
- 由集合元素无序入手，到笛卡尔积元素有序

- 定理 9.3.1
  (1) $<x, y> = <u, v> \Leftrightarrow x=u \wedge y=v$.
  (2) $x \neq y \Rightarrow <x,y> \neq <y, x>$
- 证明 (1) , (2)留作思考题
  设$x=u \wedge y=v$，则显然有
  $\{\{x\}, \{x, y\}\}=\{\{u\}, \{u, v\}\}$，
  于是$<x, y> = <u, v>$.
  设$<x, y> = <u, v>$，
  则有$\{\{x\},\{x, y\}\}=\{\{u\}, \{u, v\}\}$.
  分别考虑$x=y$和$x \neq y$两种情况.
  - 当$x=y$时，$<x, y> = \{\{x\}\}$，于是$\{x\}=\{u\}=\{u, v\}$，则 $x=u=v=y$.
  - 当$x \neq y$时，显然$\{u\} \neq \{x, y\}$. 于是$\{u\} \neq \{x\}$ 且$\{x, y\}=\{u, v\}$. 则$x=u$. 显然$y \neq u$，于是$y=v$. 两种情况都可得到$x=u \wedge y=v$

- 可以推广有序对的概念，定义由有序的n个元 素组成的n元组．n元组是用递归方法定义的．
- 定义9.3.5 若$n \in N$且$n>1$，x_1，x_2，…，x_n是n 个元素，则n元组<x1…xn>定义为
  - 当n＝2时，二元组是有序对<x1，x2>，
  - 当$n \neq 2$时，$<x_1, \ldots, x_n> = <<x_1, \ldots, x_{n-1}>, x_n>$．

- 例4 <a，b，c，d>=<<<a，b>，c>， d>．

  按照这个定义，有序对就是二元组，n元组就是多重有序对．

- 定义9.3.6 集合A和B的笛卡儿积(又称卡氏积、乘积、直积)
- $A\times B$定义为

$$A\times B=\{z|x\in A\wedge y\in B\wedge z=<x, y>\}$$或简写为

$$A\times B=\{<x, y>|x\in A\wedge y\in B\}.$$

- 例5 已知集合A和B为$A=\{a, b\}$，$B=\{0, 1, 2\}$.

- $A\times B=\{<a, 0>, <a, 1>, <a, 2>, <b, 0>, <b, 1>, <b, 2>\}$
- $B\times A=\{<0, a>, <0, b>, <1, a>, <1, b>, <2, a>, <2, b>\}$
- $A\times A=\{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>\}$. 在A=B时，可把$A\times A$简写为$A^2$.

- 上面用有序对定义了笛卡儿积．A和B的笛卡儿积，就是由$x \in A$和$y \in B$构成的有序对<x，y>的 全体组成的集合．可以推广这个概念，用n元组定义n阶笛卡儿积．
- 定义 9.3.7 若$n \in N$且$n>1$，而A_1，$A_2, \ldots$，A_n是n个集合，它们的n阶笛卡儿积记作 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，并定义为

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{<x1, \ldots xn> \mid x1 \in A1 \wedge \ldots \wedge xn \in An\}.$$

当A1＝A2=…＝An=A时，它们的n阶笛卡儿积 可以简写为A_1^n．

9.3.5 优先权

- 集合可以由集合运算符连接构成新集合，如 $A \cap B$和$-A$．两个集合可以由集合关系符连接，构成一个命题，如$A \cap B \subseteq A$和$A \neq B$．这种命题可以由逻辑联结词连接，构成复合命题，如 $(A \subseteq B \wedge A \neq B)$．两个命题可以由逻辑关系符连接，如$A = B \Rightarrow A \subseteq B$．
- 在集合论中，当描述问题和证明问题时，往往在一个式子中同时使用上述四类连接符号．为了简单、确定地表示各类连接符号的优先次序，下面规定各类连接符号的优先权，

一元运算符(-A，P(A)，∩A，∪A)

优先于 二元运算符(-，∩，∪，⊕，×)

优先于 集合关系符(=，⊆，⊂，∈)

优先于 一元联结词(¬)

优先于 二元联结词(∧，∨，→，←→)

优先于 逻辑关系符(<=>，=>)．

此外，还使用数学上惯用的括号表示优先权方法、从左到右的优先次序．规定

(1)括号内的优先于括号外的；

(2)同一层括号内，按上述优先权，

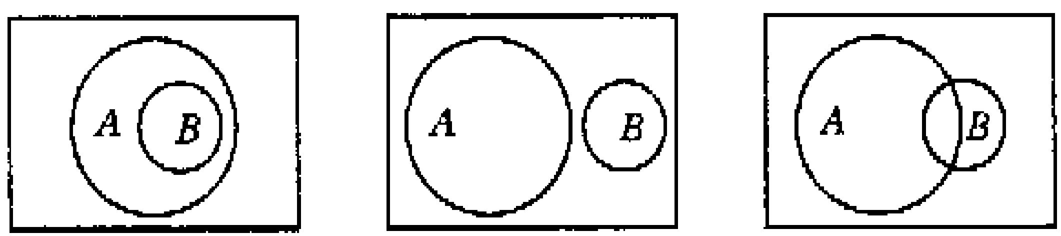
(3)同一层括号内，同一优先级的，按从左到右的优先次序．

9.4 集合的图形表示法

- 前面已介绍了表示集合的三种方法：外延表示法，内涵表示法和使用运算的表示法，图形表示法是第四种表示法．图形表示法是数学上常用的方法，它的优点是形象直观、易于理解，　缺点是理论基础不够严谨，因此只能用于说明，　不能用于证明．
- 下述的三种图形表示法分别适于表示不同类型 的集合运算．不仅可以表示集合运算的概念，　而且可以表示一些性质和结论．

9.4.1 文氏图

- 在文氏图中，矩形内部的点表示全集的所有元素．在矩形内画不同的圆表示不同的集合，用圆内部的点表示相应集合的元素．文氏图可以表示集合间的关系和集合的5种基本运算．
- 图9.4.1 中各图表示集合的关系，各图中的A 和B间具有相应的关系，图9.4.2 中各图表示 5种基本运算，各图中斜线区表示经相应运算得到的集合．



$A \subset B$　　A与B不相交　　A与B相交且$A \not\subset B$

图 9.4.1　文氏图

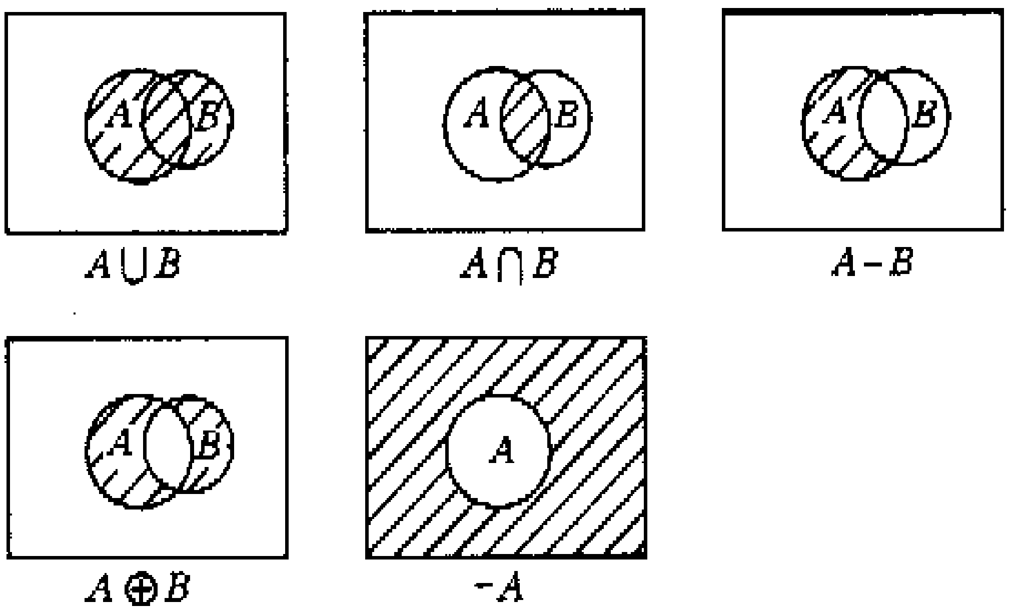


图 9.4.2　文氏图

9.4.2 幂集的图示法

- 可以用一个网络图中的各结点表示幂集的各元素．设A={0, 1, 2}, 则P(A)的各元素 在图9.4.3 中表示．图中结点间的连 、线表示二者之间有包含关系．这种图就是下一章介绍的哈斯图．

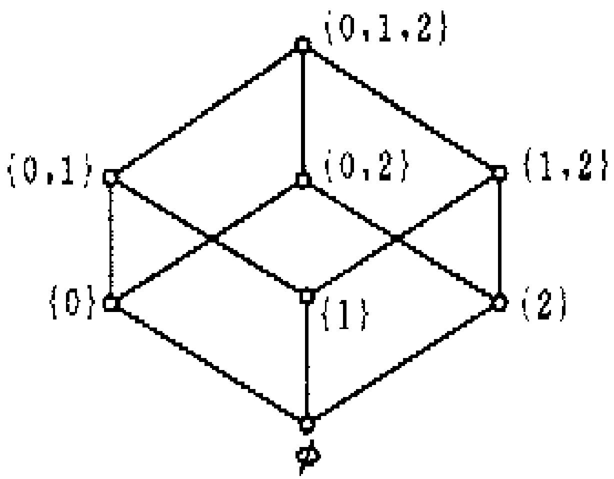


图 9.4.3 幂集

9.4.3 笛卡尔积的图示法

- 在平面直角坐标系上， 如果用x轴上的线段表示集合A，并用y轴 上的线段表示集合B，则由两个线段画出的 矩形就可以表示笛卡儿积A×B，如图 9.4.4 所示，

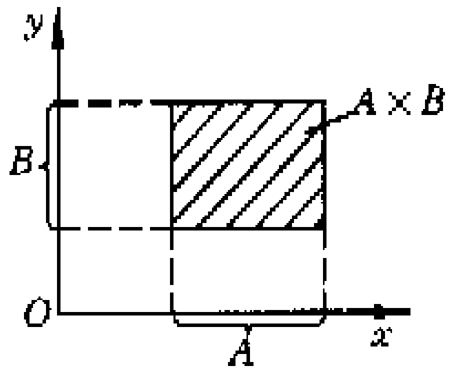


图 9.4.4 笛卡儿积

9.5 集合运算的性质和证明

9.5.1 基本运算的性质

- 集合的三种运算AUB，A∩B，-A分别是用逻辑 连接词V，^，￢定义的，因此它们具有和V，^，￢类似的性质．下面给出它们满足的一些基本规律，
- 定理 9.5.1 对任何的集合 A，B 和 C，有

（1）交换律

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

（2）结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

（3）分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

（4）幂等律

$$A \cup A = A,$$
$$A \cap A = A.$$

（5）吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A,$$
$$A \cap (A \cup B) = A.$$

（6）摩根律

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C),$$
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C),$$
$$-(B \cup C) = -B \cap -C,$$
$$-(B \cap C) = -B \cup -C.$$

(7) 同一律

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap \mathrm{E} = A.$$

(8) 零律

$$A \cup E = E,$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing.$$

(9) 补余律

$$A \cup -A = E,$$
$$A \cap -A = \varnothing.$$

(10)

$$-\varnothing = E,$$
$$-E = \varnothing.$$

(11) 双补律

$$-(-A) = A.$$

谓词法

- 下面仅证（3）和（5）

求证（3） $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

证明 对于任意的 x 可得

$$
\begin{aligned}
& x \in A \cup (B \cap C) \\
& \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \\
& \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\
& \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\
& \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \\
& \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

于是结论得证.

集合法

求证（5）$A \cap (A \cup B) = A.$

证明

$$
\begin{aligned}
A \cap (A \cup B) &= (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) \\
&= A \cup (\varnothing \cap B) \\
&= A \cup \varnothing \\
&= A
\end{aligned}
$$

- 这里采用了两种证明方法．一种是利用谓词演 算的方法，另一种是利用已知的集合恒等式．一部分基本规则只能用谓词逻辑来证明．其他规律和集合恒等式可能用两种方法来证，
- 可以用文氏图说明集合恒等式．图9.5.1用文氏图说明A-(B∩C)＝(A-B)∪(A-C)从图中看出，等式两边对应图中同一个区域，因此应该相等．这种图形表示法只能说明问题，不能证明问题

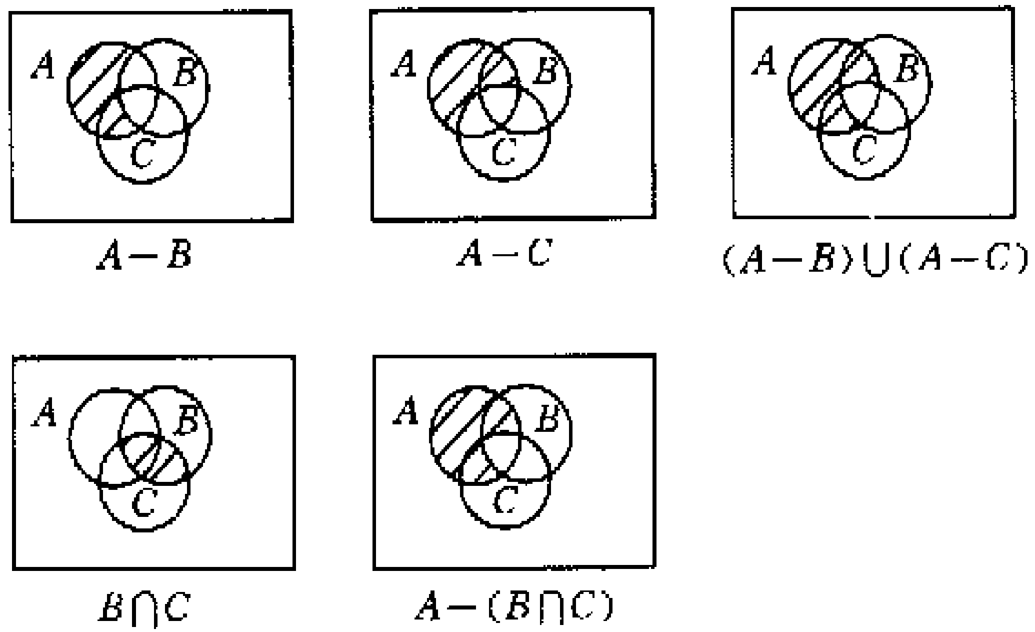


图 9.5.1

下面给出差集的性质．

- 定理9.5.2 对任意的集合A，B和C，有
  - (1)$A-B = A-(A\cap B)$
  - (2)$A-B = A\cap -B$
  - (3)$A\cup(B-A) = A\cup B$
  - (4)$A\cap(B-C) = (A\cap B)-C$

证明：（1）添项谓词法 （2）不属于谓词法

（1）对任意的 x

$$
\begin{aligned}
&x \in A-(A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \cap B) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \\
&\Leftrightarrow F \vee (x \in A-B) \Leftrightarrow x \in A-B
\end{aligned}
$$

（2）对任意的 x

$$
\begin{aligned}
&x \in A-B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in -B \Leftrightarrow x \in A \cap -B
\end{aligned}
$$

（3）分配集合法（4）差/结合

$$(3)\ A\cup(B-A)=A\cup(B\cap -A)$$
$$=(A\cup B)\cap(A\cup -A)=(A\cup B)\cap E$$
$$=A\cup B$$
$$(4)\ A\cap(B-C)=A\cap(B\cap -C)$$
$$=(A\cap B)\cap -C=(A\cap B)-C$$

- 定理中的(2)是很有用的结论，它可以用A∩B代 入式中的A-B，从而消去差集算符，利用定理 9.5.1的规律．这类似于命题逻辑中消去联结词“→”．

- 对称差的性质类似于并集，下面给出一些基本性质
- 定理9.5.3 对任意的集合A，B和C，有

(1) 交换律 $A \oplus B = B \oplus A$.

(2) 结合律 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

(3) 分配律 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.

(4) 同一律 $A \oplus \varnothing = A$.

(5) 零律 $A \oplus A = \varnothing$.

(6) $A \oplus (A \oplus B) = B$.

添项法

- 证明(3)如下

$$
\begin{aligned}
(3)\ & A\cap(B\oplus C) \\
&= A\cap((B-C)\cup(C-B)) \\
&= A\cap((B\cap -C)\cup(C\cap -B)) \\
&= (A\cap B\cap -C)\cup(A\cap C\cap -B) \\
&= ((A\cap B\cap -C)\cup(A\cap B\cap -A)) \\
&\quad \cup((A\cap C\cap -B)\cup(A\cap C\cap -A)) \\
&= ((A\cap B)\cap(-C\cup -A))\cup((A\cap C)\cap(-B\cup -A)) \\
&= ((A\cap B)\cap -(A\cap C))\cup((A\cap C)\cap -(A\cap B)) \\
&= (A\cap B)\oplus(A\cap C)
\end{aligned}
$$

- 集合间的$\subseteq$关系类似于实数间的$\le$关系，性质如下

定理 9.5.4 对任意的集合 A,B,C 和 D，有

(1) $A\subseteq B \Rightarrow (A\cup C)\subseteq(B\cup C)$.

(2) $A\subseteq B \Rightarrow (A\cap C)\subseteq(B\cap C)$.

(3) $(A\subseteq B)\wedge(C\subseteq D)\Rightarrow(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$.

(4) $(A\subseteq B)\wedge(C\subseteq D)\Rightarrow(A\cap C)\subseteq(B\cap D)$.

(5) $(A\subseteq B)\wedge(C\subseteq D)\Rightarrow(A-D)\subseteq(B-C)$.

(6) $C\subseteq D\Rightarrow(A-D)\subseteq(A-C)$.

- 例1　对任意的集合A和B，有$(A\cup B=B)\Leftrightarrow(A\subseteq B)\Leftrightarrow(A\cap B=A)\Leftrightarrow(A-B=\Phi)$．
  - 证明　本例要求证明4个命题互相等价．设命题(1)是 $A\cup B=B$， 命题(2)是$A\subseteq B$， 命题(3)是$A\cap B=A$， 命题 (4)是$A-B=\Phi$ 。只要证明(1)=>(2)，(2)=>(3)，(3)=>(4)，(4)=>(1)即可
- (1)=>(2):
  - 已知$A\cup B=B$．对任意的x，得$x\in A\Rightarrow x\in A\vee x\in B\Leftrightarrow x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in B$．因此$A\subseteq B$．
- (2)=>(3):
  - 已知$A\subseteq B$．对任意的x，得 $x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in A$, $x\in A\Leftrightarrow x\in A\cap x\in A\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Leftrightarrow x\in A\cap B$. 因此$A\cap B=A$．

- (3)=>(4):
  - 已知$A \cap B = A$，故 $A-B = A \cap -B = (A \cap B) \cap -B = A \cap (B \cap -B) = \Phi$.
- (4)=>(1):
  - 已知$A-B = \Phi$，故

$$
\begin{aligned}
& A \cup B \\
&= B \cup A \\
&= B \cup (A-B) \\
&(\text{由定理}9.5.2) = B \cup \Phi = B
\end{aligned}
$$

- 例2　对任意的集合A，B和C，有$A\cup B=A\cup C$，$A\cap B=A\cap C \Rightarrow B=C$．
  - 证明
  - 方法1：

    $B=B\cap(A\cup B)$(吸收律)

    $=B\cap(A\cup C)=(B\cap A)\cup(B\cap C)$

    $=(A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C=(A\cup C)\cap C=C$．
  - 方法2：（反证法）

    假设$B\neq C$．不妨设存在x，使$x\in B\wedge x\notin C$．如果$x\in A$，　则$x\in A\cap B$且$x\notin A\cap C$与已知矛盾．如果$x\notin A$，则 $x\in A\cup B$且$x\notin A\cup C$,也与已知矛盾．因此$B=C$．
- 由$A\cup B=A\cup C$能否推出$B=C$呢?能否由$A\cap B=A\cap C$推出$B=C$呢? 请思考

- 例3　对任意的集合A，B和C，给出$(A-B)\oplus(A-C)=\Phi$成立的充要条件．
- 解　$(A-B)\oplus(A-C)=\Phi$

  $\Leftrightarrow((A-B)-(A-C))\cup((A-C)-(A-B))=\Phi$

  $\Leftrightarrow((A-B)-(A-C))=\Phi\wedge((A-C)-(A-B))=\Phi$

  $\Leftrightarrow(A-B)\subseteq(A-C)\wedge(A-C)\subseteq(A-B)$　　(例1)

  $\Leftrightarrow A-B=A-C.$

  于是，充要条件是$A-B=A-C$．

- 充要条件的证明,集合法用=

幂集合的性质和传递集合

- 定理9．5．5

对任意的集合 A 和 B，有:

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

(2) $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

证明

(1) 先设 $A \subseteq B$ 成立，对任意的 x，有

$$x \in P(A) \quad \Leftrightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq B \text{（定理 9.2.2）}$$
$$\Leftrightarrow x \in P(B)$$

于是，$P(A) \subseteq P(B)$.

再设 $P(A) \subseteq P(B)$ 成立，对任意的 x， 有：

$$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x\} \in P(A) \Rightarrow \{x\} \in P(B)$$
$$\Leftrightarrow \{x\} \subseteq B \Leftrightarrow x \in B.$$

于是 $A \subseteq B$

(2)

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$
$$\Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B) \wedge P(B) \subseteq P(A) \Leftrightarrow P(A) = P(B)$$

- 定理9．5，6 对任意的集合A和B，有 (1)$P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$． (2)$P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$．
- 证明

  (1) 对任意的x，可得

  - $x\in P(A)\cap P(B)\Leftrightarrow x\in P(A)\wedge x\in P(B)$
  - $\Leftrightarrow x\subseteq A\wedge x\subseteq B$
  - $\Leftrightarrow(\forall y)(y\in x\rightarrow y\in A)\wedge(\forall y)(y\in x\rightarrow y\in B)$
  - $\Leftrightarrow(\forall y)(y\in x\rightarrow(y\in A\wedge y\in B))$
  - $\Leftrightarrow x\subseteq A\cap B\Leftrightarrow x\in P(A\cap B)$．

- (2)对任意的x，可得

$$x\in P(A)\cup P(B)\Leftrightarrow x\in P(A)\vee x\in P(B)$$
$$\Leftrightarrow \quad x\subseteq A\vee x\subseteq B$$
$$\Leftrightarrow \quad (\forall y)(y\in x\rightarrow y\in A)\vee(\forall y)(y\in x\rightarrow y\in B)$$
$$=> \quad (\forall y)((y\in x\rightarrow y\in A)\vee(y\in x\rightarrow y\in B))$$
$$\Leftrightarrow \quad (\forall y)(y\in x\rightarrow(y\in A\cup B))$$
$$\Leftrightarrow \quad x\subseteq A\cup B\Leftrightarrow x\in P(A\cup B).$$

- 注意，结论(2)不能写成等式．例如，令A={a}，B＝{b}．则P(AUB)＝{Φ，{a}，{b}，{a，b}}，P(A)UP(B)＝{Φ，{a}，{b}}．

- 定理9．5．8 对任意的集合A和B．有
  - $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\Phi\}$．
- 证明 对任意的x,若$x \neq \Phi$，则有
  - $x \in P(A-B) \Leftrightarrow x \subseteq A-B$
- $\Leftrightarrow$ $(\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A-B)$
- $\Leftrightarrow$ $(\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A) \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow y \notin B)$
- $\Rightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A) \Leftrightarrow x \subseteq A$
- 此外 $x \in P(A-B) \wedge x \neq \Phi$
- $\Leftrightarrow$ $x \subseteq A-B \wedge (\exists y)(y \in x)$
- $\Leftrightarrow$ $(\forall y)(y \in x \rightarrow (y \in A \wedge y \notin B)) \wedge (\exists y)(y \in x)$
- $\Rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge y \notin B)$ (用推理规则)

- $\Leftrightarrow \ x \not\subseteq B$
- 于是 $x \in P(A-B) \wedge x \neq \Phi$
  - $=> x \subseteq A \wedge x \not\subseteq B \Leftrightarrow x \in P(A) \wedge x \notin P(B)$
  - $\Leftrightarrow \ x \in (P(A)-P(B))$
  - $=> \ P(A-B) \in (P(A)-P(B)) \cup \{\Phi\}$.
- 若$x=\Phi$,有
  - $\Phi \in P(A-B)$且$\Phi \in (P(A)-P(B)) \cup \{\Phi\}$.

- 传递集合是一类特殊的集合．下面给出传递集 合的定义，并讨论它和幂集的关系，
- 定义9．5．1 如果集合的集合A的任一元素的 元素都是A的元素，就称A为传递集合．
- 这个定义也可以写成
- A是传递集合⇔$(\forall x)(\forall y)((x\in y \wedge y\in A)\rightarrow x\in A)$，

  推论=>$x\subseteq A$, $y\subseteq A$

证明传递集合从定义角度来进行证明

- 例4
  - A={Φ，{Φ}，{Φ，{Φ}}}是传递集合． A的元素的元素有Φ和{Φ}，这些都是A的 元素．
  - B={{Φ}，{Φ，{Φ}}}
  - 不是传递集合，B的元素的元素有Φ和
  - {Φ}，但是Φ不是B的元素．

- 定理9．5．9 对集合的集合A，A是传递集合
  - $\Leftrightarrow A\subseteq P(A)$．

- 证明 先设A是传递集合．则对任意的$y\in A$，若y
  - $=\Phi$则$y\in P(A)$．若$y\neq\Phi$，对$(\forall x)(x\in y)$，有 $x\in A$(A是传递集合)，则有$y\subseteq A$，于是 $y\in P(A)$．总之，由$y\in A\rightarrow y\in P(A)$，有 $A\subseteq P(A)$．
    - 再设$A\subseteq P(A)$，则对任意的x和y，有

$$x\in y\wedge y\in A \Rightarrow x\in y\wedge y\in P(A) \quad (由已知)$$

$$\Leftrightarrow x\in y\wedge y\in\subseteq A \Rightarrow x\in A$$

因此，A是传递集合．

- 定理9．5．10 对集合的集合A，A是传递集合⇔P(A)是传递集 合．
- 证明 先设A是传递集合．对任意的x和y，有
  - $x\in y\wedge y\in P(A)\Leftrightarrow x\in y\wedge y\subseteq A \Rightarrow x\in A$
- => $x\subseteq A$（因为A是传递集合）
- ⇔ $x\in P(A)$
- 所以P(A)是传递集合(证明中利用了传递集合的性质，它的元素一 定是它的子集)．
  - 再设P(A)是传递集合．对任意的x和y,有
  - $x\in y\wedge y\in A\Leftrightarrow x\in y\wedge \{y\}\subseteq A$
- ⇔ $x\in y\wedge y\in\{y\}\wedge \{y\}\in P(A)$ (凑传递形式)
- => $x\in y\wedge y\in P(A)$（P(A)是传递集合）
- ⇔ $x\in y\wedge y\subseteq A \Rightarrow x\in A$
- 所以A是传递集合．

广义并和广义交的性质

- 定理9．5．11　　对集合的集合A和B，有
- (1)$A \subseteq B \Rightarrow \cup A \subseteq \cup B$,
- (2)$A \subseteq B \Rightarrow \cap B \subseteq \cap A$，其中A和B非空．

- 证明 (1)设$A \subseteq B$．对任意的x．可得 $x \in \cup A \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in A)$
- $\Rightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in B) \Leftrightarrow x \in \cup B$
  - 所以，$\cup A \subseteq \cup B$

  - (2)设$A \subseteq B$.对任意的x，可得 $x \in \cap B \Leftrightarrow (\forall y)(y \in B \rightarrow x \in y)$
  - $\Rightarrow (\forall y)(y \in A \rightarrow x \in y)$(由$A \subseteq B$)
  - $\Leftrightarrow x \in \cap A$
  - 所以，$\cap B \subseteq \cap A$．

- 定理9．5．12 对集合的集合A和B，有 (1)$\cup(A\cup B)=(\cup A)\cup(\cup B)$， (2)$\cap(A\cup B)=(\cap A)\cap(\cap B)$，其中A和B非空． 证明 (1)对任意的x，可得 $x\in\cup(A\cup B)\Leftrightarrow(\exists y)(x\in y\wedge y\in A\cup B)$
  - $\Leftrightarrow(\exists y)(x\in y\wedge(y\in A \vee y\in B))$
  - $\Leftrightarrow(\exists y)(x\in y\wedge y\in A)\vee(\exists y)(x\in y\wedge y\in B)$
  - $\Leftrightarrow x\in\cup A \vee x\in\cup B\Leftrightarrow x\in(\cup A)\cup(\cup B)$． 所以，

$\cup(A\cup B)=(\cup A)\cup(\cup B)$．

- (2)对任意的x，可得 $x \in \cap(A\cup B) \Leftrightarrow (\forall y)(y \in A\cup B \rightarrow x \in y)$
  - $\Leftrightarrow (\forall y)((y \in A \vee y \in B) \rightarrow x \in y)$
  - $\Leftrightarrow (\forall y)(y \in A \rightarrow x \in y) \wedge (\forall y)(y \in B \rightarrow x \in y)$
  - $\Leftrightarrow x \in \cap A \wedge x \in \cap B \Leftrightarrow x \in (\cap A) \cap (\cap B)$．所

以，$\cap(A\cup B) = (\cap A) \cap (\cap B)$．

- 定理9．5．13 对任意的集合A，有
  - $\cup(P(A))=A$．
  - 证明 对任意的x，可得
  - $x\in\cup(P(A))\Leftrightarrow(\exists y)(x\in y\wedge y\in P(A))$
  - $\Leftrightarrow(\exists y)(x\in y\wedge y\subseteq A)\Leftrightarrow x\in A$
  - 所以，$\cup(P(A))=A$．
- 定理说明，广义并是幂集的逆运算．例如，当$A=\{a,$
  - $b\}$有$P(A)=\{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$，
    - 有$\cup P(A)=\{a, b\}$．但是次序不能颠倒，即$P(\cup A)\neq A$，只有$A\subseteq P(\cup A)$．例如，当$A=\{\{a\}\}$,有$\cup A=\{a\}$，有 $P(\cup A)=\{\Phi, \{a\}\}$．

下面讨论广义并和广义交对于传递集合的封闭 性．

- 定理9．5．14 若集合A是传递集合，则∪A是 传递集合．

证明 对任意的x和y，有

$x\in y\wedge y\in\cup A\Leftrightarrow x\in y\wedge(\exists z)(y\in z\wedge z\in A)$

$\Rightarrow x\in y\wedge y\in A$ （A是传递集合）

$\Leftrightarrow x\in\cup A$

所以∪A是传递集合．

- 定理9．5．15 若集合A的元素都是传递 集合，则∪A是传递集合．

证明 对任意的x和y，有

$x \in y \wedge y \in \cup A \Leftrightarrow x \in y \wedge (\exists z)(y \in z \wedge z \in A)$

$\Rightarrow (\exists z)(x \in z \wedge z \in A)$ （z是传递集合）

$\Leftrightarrow x \in \cup A$

所以∪A是传递集合．

- 定理9，5．16 若非空集合A是传递集合，则∩A是传递集合，且∩A＝Φ．
- 这个定理的证明要使用正则公理，这里不给出证明．

- 定理9．5．17 若非空集合A的元素都是传递集合，则∩A是传递 集合．

证明 对任意的x和y，可得

$$x \in y \wedge y \in \bigcap A \Leftrightarrow x \in y \wedge (\forall z)(z \in A \rightarrow y \in z)$$
$$\Leftrightarrow (\forall z)(x \in y \wedge (z \notin A \vee y \in z))$$
$$\Leftrightarrow (\forall z)((x \in y \wedge z \notin A) \vee (x \in y \wedge y \in z))$$
$$\Leftrightarrow (\forall z)((x \in y \vee (x \in y \wedge y \in z)) \wedge (z \notin A \vee (x \in y \wedge y \in z)))$$
$$\Rightarrow (\forall z)(z \notin A \vee (x \in y \wedge y \in z))$$
$$\Leftrightarrow (\forall z)(z \in A \rightarrow (x \in y \wedge y \in z))$$
$$\Rightarrow (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z) \quad (z\text{ 是传递集合})$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcap A$$

所以∩A是传递集合．

9.5.4 笛卡儿积的性质

- 笛卡儿积具有下列基本性质．

(1)$A\times\Phi=\Phi\times B=\Phi$,

(2)若$A\neq\Phi$，$B\neq\Phi$且$A\neq B$，则$A\times B\neq B\times A$,

(3)$A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$

结论表明，笛卡儿积不满足交换律和结合律。

结论(3)是因为

$A\times(B\times C)=\{<a, <b, c>>|a\in A\wedge b\in B\wedge c\in C\}$ $(A\times B)\times C=\{<<a, b>, c>|a\in A\wedge b\in B\wedge c\in C\}$

其中$<<a, b>, c>=<a, b, c>$是三元组，但$<a, <b, c>>$不是三元组．$<<a, b>, c>\neq<a, <b, c>>$

- 定理9．5．18 若A是集合， x∈A,y∈A， 则 <x,y>∈PP(A)．(PP(A)表P(P(A)).)

证明

$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A \Leftrightarrow \{x\} \in P(A)$，且

$$x \in A \wedge y \in A \Leftrightarrow \{x, y\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x, y\} \in P(A)$$

由以上二式可得到：

$$x \in A \wedge y \in A \Leftrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq P(A)$$
$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \subseteq P(A) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in PP(A)$$

- 定理9．5．19 对任意的集合**A，B**和**C**，有

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

(2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

(3) $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$.

(4) $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$.

证明 只证(1)，其余留作思考题 .

对任意的$\langle x,y\rangle$，可得

$$\langle x,y\rangle \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C$$
$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$
$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in A \times B \vee \langle x,y\rangle \in A \times C$$
$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

所以，$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

- 定理9.5.20 对任意的集合A，B和C，若C≠Φ，则

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B).$$

证明 先设 $A \subseteq B$. 若 $y \in C$，则

$$\langle x, y \rangle \in A \times C \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C$$
$$\Rightarrow x \in B \wedge y \in C \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in B \times C.$$

所以，$A \times C \subseteq B \times C$.

再设 $A \times C \subseteq B \times C$. 取 $y \in C$，则

$$x \in A \Rightarrow x \in A \wedge y \in C \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C$$
$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in B \times C \Leftrightarrow x \in B \wedge y \in C \Rightarrow x \in B.$$

所以，$A \subseteq B$.

总之，$A \subseteq B \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times C$.

类似可证，$A \subseteq B \Leftrightarrow C \times A \subseteq C \times B$.

定理9．5．21

对任意的非空集合 A, B, C 和 D, $(A \times B \subseteq C \times D) \Leftrightarrow (A \subseteq C \wedge B \subseteq D)$

证明

先设 $A \times B \subseteq C \times D$，对任意的 $x \in A$，因存在 $y \in B$，则

$$\begin{aligned} & x \in A \wedge y \in B \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \\ & \Rightarrow \langle x, y \rangle \in C \times D \Leftrightarrow x \in C \wedge y \in D \Rightarrow x \in C \end{aligned}$$

所以，$A \subseteq C$，类似有$B \subseteq D$.

再设 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$. 对任意的 x 和 y，有:

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \\ & \Rightarrow x \in C \wedge y \in D \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in C \times D \end{aligned}$$

所以， $A \times B \subseteq C \times D$.

9．6有限集合的基数

- 集合的基数就是集合中元素的个数．这一节介绍有限集合的基数和一些结论．无限集合的基数将在以后介绍．

9.6.1 有限集合的基数

- 定义9.6.1 如果存在$n\in N$，使集合A与集合$\{x|x\in N\wedge x<n\}=\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$的元素个数相同，就说集合A的基数是n，记作$\#(A)=n$或$|A|=n$或$card(A)=n$．空集Φ的基数是0．
- 定义9.6.2 如果存在$n\in N$，使n是集合A的基数．就说A是有限集合．如果不存在这样的n，就说A是无限集合．

9．6．2幂集和笛卡儿积的基数

- 定理9．6．1 对有限集合A,

$$|P(A)| = 2^{|A|}.$$

证明 设 $|A| = n \in \mathbf{N}$.

由 A 的 k 个元素组成的子集的数目是从 n 个元素中取 k 个的组合数

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

A 的有 0 个元素的子集只有 $\varnothing \subseteq A$. 所以

$$|P(A)| = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

又因为

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k},$$

当 $x=y=1$ 时，得

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k,$$

所以

$$|P(A)| = 2^n = 2^{|A|},$$

- 定理9．6．2 对有限集合A和B,

$$|A\times B| = |A|\cdot|B| .$$

9．6．3基本运算的基数

- 定理9．6．3 对有限集合A1和A2，有

  (1) $|A_1 \cup A_2| \leqslant |A_1| + |A_2|$,

  (2) $|A_1 \cap A_2| \leqslant \min(|A_1|, |A_2|)$,

  (3) $|A_1 - A_2| \geqslant |A_1| - |A_2|$,

  (4) $|A_1 \oplus A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|$.

下述定理通常称为包含排斥原理，它有更多的用途．

- 定理9．6．4 对有限集合A1和A2，有

$$|A1 \cup A2| = |A1| + |A2| - |A1 \cap A2|$$

证明 (1)若A1与A2不相交，则$A1 \cap A2 = \Phi$，而且$|A1 \cap A2| = 0$，这时显然成立 $|A1 \cap A2| = |A1| + |A2|$，

(2)若A1与A2相交，则$A1 \cap A2 \neq \Phi$，但有

$|A1| = |A1 \cap -A2| + |A1 \cap A2|$,

$|A2| = |-A1 \cap A2| + |A1 \cap A2|$,

此外

$|A1 \cup A2| = |A1 \cap -A2| + |-A1 \cap A2| + |A1 \cap A2|$,

所以

$|A1 \cup A2| = |A1| + |A2| - |A1 \cap A2|$ ．

下面举例说明定理的应用．

- 例1 在10名青年中有5名是工人，有7名是学生，其中有3名既是工人又是学生，问有几名既不是工人又不是学生?

解　设工人的集合是A，学生的集合是B．则有$|A|=5$，$|B|=7$，$|A\cap B|=3$，又有$|-A\cap -B|+|A\cup B|=10$，于是得

$$|-A\cap -B|=10-|A\cup B|=10-(|A|+|B|-|A\cap B|)$$

$$=1$$

所以有一名既不是工人又不是学生．

- 对3个有限集合A1，A2和A3，可以推广这个定理，得到

  $|A1 \cup A2 \cup A3| = |A1| + |A2| + |A3| - |A1 \cap A2| - |A2 \cap A3| - |A1 \cap A3| + |A1 \cap A2 \cap A3|$

- 例2 30位同学中，15加体育组，8人参加音乐组，6人参加美术组，其中3人同时参加三个组．问至少有多少人没有参加任何小组?

解 设A1、A2、A3分别表示体育组、音乐组、美术组成员的集合．则有
$|A1|=15,|A2|=8,|A3|=6, |A1\cap A2\cap A3|=3.$

因此
$|A1\cup A2\cup A3|=15+8+6-|A1\cap A2|-|A2\cap A3|-|A1\cap A3|+3=32-|A1\cap A2|-|A2\cap A3|-|A1\cap A3|$

而 $|A1\cap A2|\geq|A1\cap A2\cap A3|=3$

$|A1\cap A3|\geq|A1\cap A2\cap A3|=3$

$|A2\cap A3|\geq|A1\cap A2\cap A3|=3$

所以$|A1\cup A2\cup A3|\leq 32-3-3-3=23$

至多23人参加小组，所以至少7人不能参加任何小组.

- 这个定理可以推广到n个集合的情况。若n∈N且n>1,A1,A2,…,An是有限集合，则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| +$$

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

9．7集合论公理系统

- 在9．1．3例5中，用谓词定义集合时产生了悖论。防止悖论的方法是使集合论公理化，也就是建立集合论公理系统．
- 集合论公理系统是一阶谓词公理系统的扩展，它包括一阶谓词公理系统和几个集合论公理．集合论公理系统可以推出一阶谓词的所有定理，也可以推出集合论的概念和定理，它防止了集合论中的悖论．

- 在一阶谓词公理系统中，公理和定理都是永真公式．在集合论公理中，少数公理是描述集合性质的，多数公理是构造合法集合的，也就是判定集合存在性的．有的公理构造基本集合，另一些公理由已知集合构造新的集合．利用这些公理，可以构造所有的集合(公理系统中的合法集合)，这就是证明定理．在公理系统中的集合，都是由公理得到的合法集合，以前介绍的外延法和内涵法都不能构造出集合．可以说，集合论公理系统的主要目的是构造出所有合法的集合，即判定集合的存在性、合法性．

- 集合论公理系统的一个基本思想是认为“任一集合的所有元素都是集合”，集合论的研究对象只是集合．除集合外的其他对象(如有序对、数字、字母)都要用集合定义．于是对这些对象的研究也就转化为对集合的研究．在定义9．3．4中，已经用集合定义了有序对．以后将用集合定义自然数．其他数字和字母也可以用集合定义．因为集合的元素都是集合，所以集合最内层的元素只能是空集．例如集合{Φ，{Φ}，{{Φ}，Φ}}，因此，空集是最基本、最重要的集合．公理系统构造的第一个集合就是空集，

9.7.1 集合论公理

- 下面介绍ZF公理系统，它包括10条集合论公理。下面依次介绍这10条公理，然后重点说明其中几条．对每条公理都给出一阶谓词公式，论域包含所有集合．

  (1) 外延公理 两个集合相等的充要条件是它们恰好具有同样的元素．

  $$(\forall x)(\forall y)(x=y \longleftrightarrow (\forall z)(z\in x \longleftrightarrow z\in y))$$

  (2) 空集合存在公理 存在不含任何元素的集合(空集Φ)．

  $$(\exists x)(\forall y)(y\notin x) \quad x\text{是空集}\Phi$$

  这个公理定义了集合论中第一个集合，空集Φ，由外延公理可知，空集是唯一的．

(3)无序对集合存在公理　对任意的集合x和y，存在一个集合z，它的元素恰好为x和y.

$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \longleftrightarrow ((u = x) \vee (u = y)))$

在x = y时，这个公理构造出恰好有一个元素的集合，如{Φ}和{{Φ}}．在x≠y时，这个公理构造出两个元素的集合，如{Φ，{Φ}}和{{Φ}，{Φ，{Φ}}}．

(4)并集合公理 对任意的集合x，存在一个集合y，它的元素恰好为x的元素的元素，

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y\longleftrightarrow(\exists u)(z\in u\wedge u\in x))$$

这个公理可以由集合{{Φ，{Φ}}，{Φ，{{Φ}}}}构造集合{Φ，{Φ}，{{Φ}}}．它解决了广义并的存在性(集合的广义并是集合)．由无序对集合存在公理和并集合公理，可以解决两个集合并集的存在性(并集是集合)．

(5)子集公理模式(分离公理模式）对于任意的谓词公式P(z)，对任意的集合x，存在一个集合y，它的元素z恰好既是x的元素又使P(z)为真，

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \longleftrightarrow (z \in x \wedge P(z)))$$

对一个具体的谓词(谓词常项)P(z)，子集公理模式就是一条公理，对不同的P(z)，它是不同的公理．所以，子集公理模式不是一条公理，而是无限多条有同样模式的公理．因此称为公理模式．在9．7．2节将介绍用子集公理模式解决交集、差集、广义交和笛卡儿积的存在性(集合经这些运算得到的都是集合)，

(6)幂集合公理　对任意的集合x，存在一个集合y，它的元素恰好是x的子集，

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y\longleftrightarrow(\forall u)(u\in z\rightarrow u\in x))$$

公理指出幂集的存在性(集合的幂集是集合)．

(7)正则公理　对任意的非空集合x，存在x的一个元素，它和x不相交．

$$(\forall x)(x \neq \Phi \rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge (x \cap y = \Phi)))$$

正则公理将在9．7．3中说明．它排除了奇异集合，防止发生悖论．

(8)无穷公理　存在一个由所有自然数组成的集合．

$$(\exists x)(\Phi \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow (y \cup \{y\}) \in x))$$

式中的x是自然数集合N.在9．7．4中将说明自然数的定义和无穷公理．这个公理构造了第一个无限集合．

- (9)替换公理模式 对于任意的谓词公式P(x,y)，如果对 任意的x存在唯一的y使得P(x,y)为真，那么对所有的 集合t就存在一个集合s，使s中的元素y恰好是t中元 素x所对应的那些y.

$$(\forall x)(\exists ! y)P(x,y) \to (\forall t)(\exists s)(\forall u)(u \in s \leftrightarrow (\exists z)(z \in t \wedge P(z,u)))$$

其中$(\forall x)(\exists ! y)P(x,y)$表示

$$(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \wedge (\forall z)(P(x,z) \to z = y))$$

符号$(\exists ! y)$表示存在唯一的一个y.

这也是公理模式，它包括无限多条公理，对一个具体的P(x，y)，就有一条替换公理，

(10)选择公理 对任意的关系R，存在一个函数F，F是R的子集，而且F和R的定义域相等．

$$(\forall x)(((\forall y)(y \in x \to y \neq \varnothing)$$
$$\land (\forall y)(\forall z)((y \in x \land z \in x \land y \neq z) \to (y \cap z = \varnothing)))$$
$$\to (\exists u)(\forall y)(y \in x \to (\exists ! t)(t \in y \land t \in u)))$$

也可以简写成

(∀关系R)(∃函数F)(F∈R∧dom(R)=dom(F))

这是有关函数的公理，将在第11章介绍，

- 在10条公理中，外延公理和正则公理是描述集合性质的公理，其他公理都是判定集合存在的公理，也就是构造集合的公理，空集合存在公理和无穷公理不以其他集合的存在为前提，是直接构造基本的集合．它们称为无条件的存在公理．无序对集合存在公理，并集合公理、幂集合公理、子集公理模式、替换公理模式和选择公理是有条件的存在公理．这6条公理都是由已知集合构造新集合的公理．其中前5条公理构造的集合是唯一的，而选择公理没有给出构造新集合的方法，它只判定了新集合的存在性．实际上可能存在多个满足要求的新集合(即存在多个要求的函数)．

- 建立公理系统时，总希望公理是彼此独立的．但在这10条公理中，无序对集合存在公理和子集公理模式可以由其它公理推出．加入这两条公理是为了使用方便．下面给出由其它公理导出这两个公理的简单证明．

- 已知u和v是集合，下面证明{u，v}也是集合，由空集公理，Φ是集合．由幂集公理，P(Φ)＝{Φ}是集合，P({Φ})＝{Φ，{Φ}}也是集合，令集合t={Φ，{Φ}}，定义P(x，y)为P(Φ，u)＝T，P({Φ}，v)＝T，则t和P(x，y)满足替换公理的前提，由替换公理得到，存在由u和v构成的集合s＝{u,v}，

- 替换公理模式中，令P(x，y)是p(x)^(x=y)．显然对任意的x存在唯一的y使p(x)^(x＝y)成立．所以替换公理模式的前提成立，则有

$(\forall t)(\forall s)(\forall u)(u\in s\longleftrightarrow(\exists z)(z\in t\wedge p(z)\wedge(z=u)))$

即 $(\forall t)(\exists s)(\forall u)(u\in s\longleftrightarrow(u\in 9\wedge p(u)))$

这就是子集公理模式，因此它是替换公理模式的特例．

9.7.2 子集公理模式

- 子集公理模式是

  $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y\longleftrightarrow(z\in x\wedge p(z)))$

  子集公理模式是说，对任意的集合x，存在x的子集y，y的元素z使p(z)为真．它主要用于下列情况．已知若干满足条件p(z)的元素，但不知这些元素能否组成一个集合．这时只要找到一个集合A，使这些满足条件的元素都有z∈A，这样就可以由A和p(x)用分离公理得到集合

  $\{x|x\in A\wedge p(x)\}$

  这就是那些元素组成的集合．

下面用子集公理模式证明交集、差集、广义交和笛卡儿积的存在性．

- 定理9．7．1 对任意的集合A和B，交集A∩B是集合，

证明 对集合A，选取x∈B为子集公理模式中的p(x)．由子集公理存在集合

$$A0=\{x|x\in A \wedge x\in B\},$$

所以，A0＝A∩B是集合，

- 定理9．7．2 对任意的集合A和B，差集A-B是集合．

证明 由集合A和谓词公式x $\notin$ B，依据子集公理，存在集合

$$A0=\{x|x\in A \wedge x\notin B)$$．

所以，A0=A-B是集合．

- 定理9．7．3 对任意的非空集合A，广义交∩A是集合，

证明 对非空集合A，存在$A_1 \in A$．选取公式$(\forall y)(y \in A \rightarrow x \in y)$为$p(x)$．依据子集公理，对集合$A_1$和上述公式，存在集合

$$A_0 = \{x \mid x \in A_1 \wedge (\forall y)(y \in A \rightarrow x \in y)\},$$

此外 $\cap A = \{x \mid (\forall y)(y \in A \rightarrow x \in y)\}$．

由$A_1 \in A$和$(\forall y)(y \in A \rightarrow x \in y)$可以推出$x \in A_1$，所以$A_0 = \cap A$，$\cap A$是集合．

- 定理9．7．4 对任意的集合A和B，笛卡儿积A×B是集合．

证明 对任意的<x, y>，有

$$x \in A \wedge y \in B$$
$$\Rightarrow x \in A \cup B \wedge y \in A \cup B$$
$$\Rightarrow \langle x,y \rangle \in PP(A \cup B) \quad (\text{定理 } 9.5.18)$$

显然 $PP(A \cup B)$是集合，选取公式 $p(z)$为

$$z = \langle x,y \rangle \wedge x \in A \wedge y \in B$$

可以构造它的子集

$$\{z \mid z \in PP(A \cup B) \wedge z = \langle x,y \rangle \wedge x \in A \wedge y \in B\}$$

这就是 $A \times B$，所以 $A \times B$ 是集合．

下面用子集公理证明一个重要结论．

- 定理9.7.5 不存在集合A,使任一集合都是A的元素．

证明 假设存在集合A，任一集合是A的元素．选p(x)为x各x，依据子集公理，存在集合

$$A_0 = \{x \mid x \in A \wedge x \notin x\},$$

即

$$x \in A_0 \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin x.$$

取 $x = A_0$，则有

$$A_0 \in A_0 \Leftrightarrow A_0 \in A \wedge A_0 \notin A_0.$$

如果 $A_0 \in A$，就有 $A_0 \in A_0 \Leftrightarrow A_0 \notin A_0$，这是不可能的．所以 $A_0 \notin A$，与假设矛盾，定理得证。

- 下面说明，为什么以前规定$\cap\Phi$不存在?

  假设$\cap\Phi$是集合，则由广义交的定义，

  $$x\in\cap\Phi\Leftrightarrow(\forall y)(y\in\Phi\rightarrow x\in y).$$

  因为$y\in\Phi$永假，所以右式永真．于是左式$x\in\cap\Phi$对所有x永真，于是$\cap\Phi$是所有集合的集合，与定理9．7．5矛盾．因此规定$\cap\Phi$不存在，

9．7．3 正则公理和奇异集合

首先定义非空集合的极小元．

- 定义9．7．1 对任意的集合A和B，当有$A\in B$且$A\cap B=\Phi$，就称A为B的一个极小元．
- 例如集合$B=\{\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$，则$A1=\{\Phi\}$是B的极小元，$A2=\{\Phi,\{\Phi\}\}$不是B的极小元．
- 正则公理是说任一非空集合都有极小元．
  $(\forall x)(x\neq\Phi\rightarrow(\exists y)(y\in x \wedge x\cap y=\Phi))$
- 正则公理又称为基础公理或限制公理．由这个公理可以推出集合的一些重要性质．

- 定理9．7．6 对任意的集合A，$A \notin A$．

证明 假设存在集合A，使$A \in A$，可以构造集合$\{A\}$，有$A \in \{A\}$．由正则公理，$\{A\}$有极小元，这只能是$\{A\}$的唯一元素A，因此，$A \cap \{A\} = \Phi$．但是，由假设$A \in A$，则A与$\{A\}$有公共元A，即$A \cap \{A\} \neq \Phi$．产生矛盾．所以，$A \notin A$．

- 定理9．7．7 对任意的集合A1和A2有

$$\neg(A1 \in A2 \wedge A2 \in A1).$$

证明留作思考题，

- 定理9．7．8 对任何非空的传递集合A，有$\Phi \in A$．

证明 假设存在非空传递集合A，有$\Phi \notin A$，由正则公理，A中有极小元y，使$y \in A$且$y \cap A = \Phi$，由假设$\Phi \notin A$，则$y \neq \Phi$．由正则公理，非空集合y有极小元z，使$z \in y$且$z \cap y = \Phi$，因为A是传递集合，且$z \in y$和$y \in A$，所以$z \in A$，再考虑$z \in y$，则$y \cap A \neq \Phi$，产生矛盾．结论得证．

- 由定理结论$\Phi \in A$，可以进一步推出$\cap A = \Phi$，因而$\cap A$是传递集合．这是定理9.5.16的结论，

下面讨论奇异集合的有关问题．

- 定义9．7．2 如果集合A中有集合的序列$A_0 \in A$，$A_1 \in A$，…，$A_n \in A$，…，使得…，$A_{n+l} \in A_n$，$A_n \in A_{n-1}$，…，$A_1 \in A_0$，或简写为 $\ldots \in A_{n+1} \in A_n \in A_{n-1} \in \ldots \in A_2 \in A_1 \in A_0$，

 就称A为奇异集合，

- 定理9．7．9　奇异集合不满足正则公理，

证明　设A为奇异集合，则A中的—些元素满足

$$\ldots \in A_{n+1} \in A_n \in A_{n-1} \in \ldots \in A_2 \in A_1 \in A_0$$

于是可以构造A的非空子集

$B=\{A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots\}$，

假设B中有极小元Ai(i≥0．)，则$Ai \in B$且$Ai \cap B = \Phi$．然而，因为$Ai+l \in Ai$和$Ai+l \in B$，所以$Ai \cap B \neq \Phi$，产生矛盾．因此B没有极小元，不满足正则公理．奇异集合A不是集合．

- 定理9．7．10 若非空集合A不是奇异集合，则A满足正则公理．

证明 假设A中没有极小元．则对任一个$A_0 \in A$，都存在A_1，使$A_1 \in A_0$且$A_1 \in A$．A_1也不是A的极小元，应存在A_2，使$A_2 \in A_1$且$A_2 \in A$．依此类推，A中应有元素A_0，A_1，…，A_n,…，使得 $\ldots \in A_{n+1} \in A_n \in A_{n-1} \in \ldots \in A_1 \in A_0$

因此且是奇异集合，与已知矛盾．所以A中有极小元，A满足正则公理．

- 定理指出，若存在奇异集合，则不满足正则公理；若存在正则公理，则不存在奇异集合．正则公理是限制性的，它排除了奇异集合的存在，1908年提出的集合论公理中没有正则公理，1917年提出了奇异集合问题．1925年提出了正则公理，解决了奇异集合问题。

9．7．4无穷公理和自然数集合

- 无穷公理给出自然数集合的存在性．下面先定义自然数，再说明无穷公理．
- 定义9．7．3 对任意的集合A，可以定义集合A^+=AU{A}，把A+称为A的后继，A称为A^+的前驱．
- 定义9．7．4 集合0＝廖是一个自然数，若集合n是一个自然数，则集合n+1=n+也是一个自然数．

- 按照这个定义，可以列出各自然数

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\} \\
2 &= 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0,1\} \\
3 &= 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0,1,2\} \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

对任一个自然数 $n+1$，则

$$n+1 = n^+ = \{0,1,\cdots,n\}.$$

- 0没有元素，1有一个元素，2有两个元素，所以。这样定义自然数是合理的，很容易定义自然数间的大小关系，

- 下面讨论自然数的三歧性．
- 定义9．7．6 对集合A，如果对任意的集合$A1\in A$和$A2\in A$，使

$$A1\in A2, A1=A2 \text{和} A2\in A1$$

三式中恰好有一个成立，就称集合A有三歧性。

- 例如集合3={0，1，2}．因为$0\in 1$，$0\in 2$，$1\in 2$，所以3有三歧性，
- 定理9．7．11 集合N有三歧性．每个自然数都有三歧性．对任意的自然数m和n，有

$$m<n \vee m=n \vee m>n .$$