离散数学第四次习题课

蔡子诺
zinuocai@gmail.com

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

注意事项

1. 补交作业
2. 考试复习：答案可能存在问题，有问题及时和助教沟通

- **集合论参考答案** 更新时间 2022/1/4 15:38
- **数理逻辑参考答案** 更新时间 2022/1/4 12:31
- **2021年秋离散数学复习题集合论**
- **2021年秋离散数学复习题数理逻辑**

3. 集合论部分的习题不完整，请大家整理归纳书上要点

第一章 命题逻辑基本概念

1. 命题判断
2. 重言式、永假式、可满足式判断 (1.2)
3. 命题形式化 (1.4)
   - 注意“除非”的表达
   - 或与异或的区别
   - 蕴含词的多种表达
4. 波兰表达式与逆波兰表达式 (1.8)

- 蕴含式P→Q可以用多种方式陈述:

P是Q的充分条件	**Q是P的必要条件**
若**P,** 则**Q**	除非**Q,** 才**P**
只要**P,**就**Q**	只有**Q,** 才**P**
Q每当**P**	**P**仅当**Q**
	除非**Q,** 否则非**P**

第二章 命题逻辑的等值和推理演算

1. 使用与非或者或非改写命题 (2.8)
2. 联结词的完备集、最小完备集判断 (2.1)

不完备集

- $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$不是完备的
  因为$\neg$不能仅由该集合的联结词表达出
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$不是完备的
- $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$的任何子集都是不完备的
  $\{\neg, \leftrightarrow\}$的任何子集也是不完备的
  (如果一个联结词的集合是不完备的，那么它的任何子集都是不完备的)
- $\{\vee, \wedge\}$不是完备的

3. 对偶式的改写 (2.4)
4. 主合取范式与主析取范式 (2.13，填空题可以尝试真值表法)

第二章 命题逻辑的等值和推理演算

5. 根据等值公式判断公式是否等值 (2.6)
6. 判断推理公式是否正确 (2.4)
7. 自然语句形式化+推理公式证明 (2.5)

第四章 谓词逻辑的基本概念

1. 自由变元与约束变元 (4.5)
2. 量词辖域的判断 (4.5)
3. 合式公式的判断 (暂无)
4. 含有量词的自然语句形式化 (4.7)
    - 所有的有理数都是实数
    - 有的实数是有理数
    - 没有无理数是有理数
    - 有的实数不是有理数
5. 有限域下的任意与存在量词改写 (4.2)
6. 判断公式是否普遍有效 (4.8)

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

1. 等值演算
   - 否定型
   - 量词对合取、析取、蕴含词的分配
2. 前束范式与 Skolem 标准型
   - Skolem 标准型与原式是不等值的
   - 步骤：化联结词→否定词内移→量词左移→变元易名
3. 自然语句形式化+推理公式证明

集合总结

- 集合
  - 概念和表示方法
    - 集合的概念
  - 集合间关系和特殊集合
    - 基本关系
    - 特殊集合
  - 运算
    - 基本运算
    - **广义并/交**
    - **幂集**
    - **笛卡尔积**
    - 优先权
  - 图形表示法
    - **文氏图**
    - 幂集图表示
    - 笛卡尔积图表示
  - **运算的性质和证明**
    - 基本性质
      - **11条基本性质**
      - 差集的性质
      - 对称差的性质
      - 包含关系的性质
    - 幂集的性质
      - 幂集的基本性质
      - 传递集合
    - 广义并/交的性质
    - 笛卡尔积的性质
  - 有限集合的基数
    - 有限集合基数
    - **幂集和笛卡尔积基数**
    - 基本运算的基数

例： 以下各项中正确的选项为？

A. $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \emptyset$

B. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$

C. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

D. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \emptyset = \{\{\emptyset\}\}$

例： 以下( )不是集合？

A. $\emptyset \times P(\emptyset)$

B. $\{x | x$是整数且$|x|$是素数$\}$

C. $\{x | x$是包含1的集合$\}$

D. $\{x | x$包含1且$x \subseteq R\}$

例： 以下各项中正确的选项为？

A. $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \emptyset$ $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

B. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$

C. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$

D. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \emptyset = \{\{\emptyset\}\}$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \emptyset = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

例： 以下( )不是集合？

A. $\emptyset \times P(\emptyset) = \emptyset$

B. $\{x|x$是整数且$|x|$是素数$\}$ 子集公理，$\mathbb{Z}$的子集

C. $\mathrm{A} = \{x|x$是包含1的集合$\}$ $A_0 = \{1\} \cup A \Rightarrow A_0 \in A_0$

D. $\{x|x$包含1且$x \subseteq R\}$ 子集公理，$P(\mathbb{R})$的子集

例： 证明$A \times A \in P\left(P\left(P(A)\right)\right)$

例： 证明$A \times A \in P\left(P\left(P(A)\right)\right)$

9.7 证明：(根据定义证明)

$$A \times A = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A\} = \{\{\{x,y\},\{x\}\} \mid x,y \in A\}.$$

$$\{x\} \in P(A),\ \{x,y\} \in P(A)$$

$$\Rightarrow \{\{x\},\{x,y\}\} \subseteq P(A)$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle \subseteq P(A)$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in PP(A)$$

$$\Rightarrow A \times A \subseteq PP(A)$$

$$\Rightarrow A \times A \in PPP(A).$$

例： 假设$A \subseteq B$，下列说法错误的是?

A. $\cup A \subseteq \cup B$

B. $\cap A \subseteq \cap B$

C. $P(A) \subseteq P(B)$

D. $A - B \subseteq B - A$

例： 对于有限集合A、B，$P(P(A) \times B)$的基数为__________

例： 假设$A \subseteq B$，下列说法错误的是?

A. $\cup A \subseteq \cup B$ 广义并的性质

B. $\cap A \subseteq \cap B$ 广义交的性质：$\cap B \subseteq \cap A$

C. $P(A) \subseteq P(B)$ 幂集的性质

D. $A - B \subseteq B - A$ 空集的性质

例： 对于有限集合A、B，$P(P(A) \times B)$的基数为$2^{|B|2^{|A|}}$

$|P(P(A) \times B)| = 2^{|P(A) \times B|}$

$|P(A) \times B| = |P(A)||B| = |B|2^{|A|}$

关系总结

- 关系
  - 二元关系
    - 定义
    - 特殊关系
    - 定义域和值域
  - 关系矩阵/图
    - 关系矩阵
    - 关系图
  - 逆、合成限制、象
    - 定义
    - $S\circ R$的关系矩阵
    - 基本性质
  - 关系的性质
    - **自反性**
    - **对称性**
    - **传递性**
    - 相关结论
  - 关系的闭包
    - 多个关系的合成
    - 闭包的定义
    - 闭包的性质
    - **闭包的构造方法**
      - 三种闭包的基本构造法
      - Warshall算法
  - 等价关系和划分
    - **等价关系**
    - 划分
  - 相容关系和覆盖
    - **相容关系**
    - 覆盖
  - 偏序关系
    - **偏序关系和拟序关系**
    - 哈斯图
    - 上确界和下确界
    - 全序关系和链
    - 良序关系

几种关系

	自反	对称	传递	相关概念
等价关系	自反	对称	传递	划分
相容关系	自反	对称	——	覆盖
偏序关系	自反	反对称	传递	最大元，极大元，上界，上确界
拟序关系	非自反	反对称(非必要条件)	传递	
全序关系	链、反链			
良序关系				

例： 给定A $= \{1,2,3,4\}$和A上的关系$R = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle\}$，求其三种闭包。

例： 给定$A=\{1,2,3,4\}$和A上的关系$R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$，求其三种闭包。

$r(R)=R\cup I_A=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4$

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},M(R^2)=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},M(R^3)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

其实仔细观察会发现R自身就是传递的。

$t(R)=R$

例： 给定$A = \{1,2,3,4\}$，求A 上的等价关系数量。

例： 给定$A = \{1,2,3,4\}$，求A 上的等价关系数量。

A 上的等价关系数量等于A上划分的数量。

分4个：1/1/1/1:1

分3个：2/1/1: $C_4^2 = 6$

分2个：2/2: $C_4^2/2 = 3$

3/1: $C_4^3 = 4$

分1个：4: 1

1+6+3+4+1=15

例： 设R是A中的对称关系且$R^2 \subseteq R$，证明$R \cup I_A$是等价关系。

例： 设R是A中的对称关系且$R^2 \subseteq R$，证明$R \cup I_A$是等价关系。

先证明自反性

$\langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in I_A \cup R \Rightarrow xSx$ 得证.

再证明对称性

$xSy \Leftrightarrow xRy \vee xI_Ay \Leftrightarrow yRx \vee yI_Ax \Leftrightarrow ySx$

最后是传递.

$(xSy) \wedge (ySz)$

$\Leftrightarrow (xI_Ay \vee xRy) \wedge (yI_Az \vee yRz)$

$\Leftrightarrow (xI_Ay \wedge yI_Az) \vee (xI_Ay \wedge yRz)$

$\vee (xRy \wedge yI_Az) \vee (xRy \wedge yRz)$

$\Leftrightarrow (xI_Az) \vee (xRz) \vee (xRz) \vee (xR^2z)$

$\Rightarrow xSz.$

例： 下面四个关系中（）是拟序关系?

A. R中的>关系

B. $\mathbb{N}-\{0\}$中的整除关系

C. $\mathbb{N}-\{0\}$中的互素关系

D. $R=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)被5整除, x,y\in\mathbb{Z}\}$

例： 设R是A中的一个关系$I_A\subseteq R$，若有$\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle a,c\rangle\in R\Rightarrow\langle b,c\rangle\in R$，则下列说法最准确的是:

A. R是等价关系

B. R是相容关系

C. R是偏序关系

D. R是拟序关系

例： 下面四个关系中（）是拟序关系?

A. R中的>关系　非自反、反对称、传递

B. $\mathbb{N}-\{0\}$中的整除关系　自反、反对称、传递

C. $\mathbb{N}-\{0\}$中的互素关系　非自反、对称、不传递

D. $R=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)\text{被5整除}, x,y\in\mathbb{Z}\}$　自反、对称、传递

例： 设R是A中的一个关系$I_A\subseteq R$，若有$\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle a,c\rangle\in R\Rightarrow\langle b,c\rangle\in R$，则下列说法最准确的是:

A. R是等价关系　主要是证明对称性：设$\langle a,b\rangle\in R$，由于$I_A\subseteq R$，故$\langle a,a\rangle\in R$，故$\langle b,a\rangle\in R$

B. R是相容关系　$\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in R\Rightarrow\langle b,a\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in R\Rightarrow\langle a,c\rangle\in R$

C. R是偏序关系

D. R是拟序关系

例： R_1, R_2均为A中的关系，下面结论正确的是（）。

A. 若R_1, R_2均为对称关系，则$R_1 \circ R_2$为对称关系；

B. 若R_1是偏序关系，则R_1^{-1}也为偏序关系

C. $t(R_1) \cup t(R_2) = t(R_1 \cup R_2)$

D. $st(R_1) = ts(R_1)$

例： R_1, R_2均为A中的关系，下面结论正确的是（）。

A. 若R_1, R_2均为对称关系，则$R_1 \circ R_2$为对称关系； $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\} \circ \{\langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\} = \{\langle 3,1\rangle\}$

B. 若R_1是偏序关系，则R_1^{-1}也为偏序关系； 自反、反对称、传递

C. $t(R_1) \cup t(R_2) = t(R_1 \cup R_2)$； $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}, \{\langle 3,4\rangle, \langle 4,5\rangle\}$

D. $st(R_1) = ts(R_1)$。 $st(R_1) \subseteq ts(R_1)$

函数总结

- 函数
  - 函数和选择公理
    - 函数定义
      - 单值性
      - 定义域A
      - 函数的集合
      - 函数的象
    - 特殊函数
      - 满射
      - 单射
      - 双射
    - 常用函数
      - 常函数
      - 恒等函数
      - 单调递增
      - n元函数
      - 泛函
      - 特征函数
      - 典型映射
    - 选择公理
  - 函数的合成函数的逆
    - 函数的合成
      - 合成的定义
      - 合成的性质
    - 函数的逆
      - 逆函数的性质

例： 函数$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x^2 + x$是（）

A. 满射但不是单射的

B. 单射但是不满射的

C. 双射的

D. 既不是满射也不是单射的

例： 设f, g为函数若g不是单射，则（）

A. $f \circ g$不是单射

B. $g \circ f$不是单射

C. A,B都不对

D. 不一定

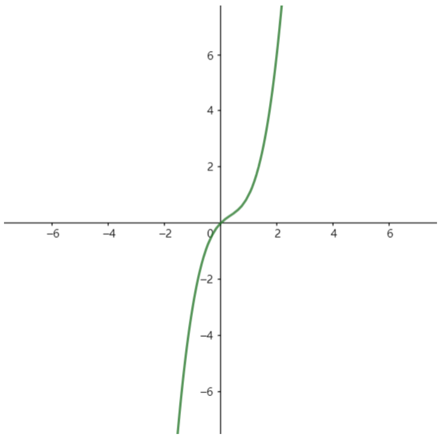
例： 函数$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x^2 + x$是（）

A. 满射但不是单射的

B. 单射但是不满射的

C. 双射的

D. 既不是满射也不是单射的



例： 设f, g为函数若g不是单射，则（）

A. $f \circ g$不是单射 $g(a) = g(b), f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) \Rightarrow f \circ g(a) = f \circ g(b)$

B. $g \circ f$不是单射 $f(x) = x \ (x > 0), g(x) = |x| \ (x \in R)$

C. A,B都不对

D. 不一定

谢谢！