数理逻辑

课程XI

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

第11章 函 数

- 上一章研究了关系的自反，传递、对称等性质，并针对这些性质研究了一些特殊的关系，如等价关系、偏序关系．这一章研究的各类函数是另外一些特殊的关系，这是从它们的单值性、定义域和值域的性质来讨论的．函数是一个基本的数学概念．通常的实函数是在实数集合上讨论的．这里推广了实函数概念，讨论在任意集合上的函数．

目录

- 11.1 函数和选择公理
- 11.2 函数的合成与函数的逆
- 11.3 函数的性质
- 11.4 开集与并集
- 11.5 模糊子集

11.1.1 函数定义

- 定义11.1.1 对集合A到集合B的关系f，若满足下列条件：

  (1) 对任意的x∈dom(f)，存在唯一的y∈ran(f)，使xfy成立；

  (2) dom(f)=A

则称f为从A到B的函数，或称f把A映射到B(有的书称f为全函数、映射、变换)

- 一个从A到B的函数f，可以写成f：A→B，这时若xfy，则可记作f：x|→y或f(x)=y.
- 若A到B的关系f只满足条件(1)，且有dom(f)⊂A，则称f为从A到B的部分函数(有的书上称f为函数)，

- 函数的两个条件可以写成

  (1)$(\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)((xf\, y_1 \wedge xf\, y_2) \rightarrow y_1 = y_2)$,

  (2)$(\forall x)(x \in A \rightarrow (\exists y)(y \in B \wedge xfy))$.

- 函数的第一个条件是单值性，定义域中任一x与B中唯一的y有关系，因此，可以用f(x)表示这唯一的y．第二个条件是A为定义域，A中任一x都与B中某个y有关系.注意不能把单值性倒过来，对A到B的函数f，当$x_1$fy且$x_2$fy成立时，不一定$x_1 = x$ ；因此，函数的逆关系不一定是函数．
- 如果一个关系是函数，则它的关系矩阵中每行恰好有一个1，其余为0。它的关系图中每个A中的顶点恰好发出一条有向边．

- 例1 对实数集R，R上的关系f为

  $f=\{\langle x, y\rangle \mid y=x^3\}$

  f是从R到R的函数，记作f：$R\rightarrow R$，并记作f：$x\mapsto x^3$或$f(x)=x^3$．

- 例2 集合$A=\{1, 2, 3\}$上的两个关系

  $g=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$

  和 $h=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

  都不是从A到A的函数．

- 因为g没有单值性，即$\langle 3, 1\rangle\in g$且有$\langle 3, 2\rangle\in g$，而对关系h，$dom(h)=\{1, 2\}\neq A$．但是，h是从$\{1, 2\}$到A的函数．

- 定义11.1.2 对集合A和B，从A到B的所有函数的集合记为A_B(有的书记为B^A)．于是，$A_B=\{f|f: A\rightarrow B\}$．
- 例3 对$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{a, b\}$．从A到B的函数有8个：

$f1=\{<1, a>, <2, a>, <3, a>\}$

$f2=\{<1, a>, <2, a>, <3, b>\}$

$f3=\{<1, a>, <2, b>, <3, a>\}$

$f4=\{<1, a>, <2, b>, <3, b>\}$

$f5=\{<1, b>, <2, a>, <3, a>\}$

$f6=\{<1, b>, <2, a>, <3, b>\}$

$f7=\{<1, b>, <2, b>, <3, a>\}$

$f8=\{<1, b>, <2, b>, <3, b>\}$

于是 $A_B=\{f1, f2, f3, \ldots, f8\}$

- 若A和B是有限集合，且$|A| = m$，$|B| = n$，则$|A^B| = n^m$．从Φ到Φ的函数只有$f = \Phi$，从Φ到B的函数只有$f = \Phi$．若$A \neq \Phi$，从A到Φ的函数不存在．因此，$\Phi_\Phi = \Phi_B = \{\Phi\}$，$A_\Phi = \Phi$ (对$A \neq \Phi$)．

- 定义11.1.3 设f：A→B，A1⊆A，定义A1在f下的象f[A1]为$f[A1]=\{y|(\exists x)(x\in A1 \wedge y=f(x))\}$，把f[A]称为函数的象，
- 设B1⊆B，定义B1在f下的完全原象$f^{-1}[B1]$为

  $f^{-1}[B1]=\{x|x\in A \wedge f(x)\in B1\}$
- 注意，在上一章f^{-1}表示f的逆关系．这个定义中的$f^{-1}[B1]$表示完全原象，可以认为其中的f^{-1}是f的逆关系，因为函数的逆关系不一定是函数，所以f^{-1}一般只表示逆关系，不是逆函数(除非特别说明)．

例4： $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & \text{当 } x \text{ 为偶数}\\ \frac{x-1}{2}, & \text{当 } x \text{ 为奇数}\end{cases}$$

则

$$f[\mathbf{N}]=\mathbf{N}, f[\{-1,0,1\}]=\{-1,0\},$$
$$f^{-1}[\{2,3\}]=\{4,5,6,7\}.$$

特别地

$$f[\varnothing]=f^{-1}[\varnothing]=\varnothing.$$

11.1. 2 特殊的函数

- 等价关系利函数都是特殊的关系．同样可以定义一些特殊的函数，它们是具有某种性质的函数，
- 定义11．1．4 设f：A→B．

(1)若ran(f)＝B，则称f是满射的，或称f是A到B上的，

(2)若对任意的x1，x2∈A，x1≠x2，都有f(x1)≠f(x2)，则称f是单射的，或内射的，或—对一的，

(3)若f是满射的又是单射的，则称f是双射的，或一对一A到B上的．简称双射．

- 如果f：A→B是满射的，则对任意的y∈B，存在x∈A，使f(x)＝y．如果f：A→B是单射的，则对任意的y∈ran(f)，存在唯一的x∈A，使f(x)＝y．

- 例5 $f:\{1,2\}\rightarrow\{0\}$，$f(1)=f(2)=0$，是满射的，不是单射的．$f: N\rightarrow N$，$f(x)=2x$，是单射的，不是满射的．$f: Z\rightarrow Z$，$f(x)=x+1$，是双射的．特别地，$\Phi: \Phi\rightarrow B$是单射的，$\Phi: \Phi\rightarrow\Phi$是双射的．
- 给定两个集合A和B，是否存在从A到B的双射函数?怎样构造从A到B的双射函数?这是两个很重要的问题．第一个问题在下一章讨论．下面举例说明第二个问题，

- 例6 对下列的集合A和B，分别构造从A到B的双射函数：

  (1) $A = R$， $B = R$， R是实数集 .

  (2) $A=R$， $B=R_+=\{x|x\in R \wedge x>0\}$.

  (3) $A = [0，1)$， $B=(1/4,1/2]$都是实数区间 .

  (4) $A = N \times N$， $B = N$.

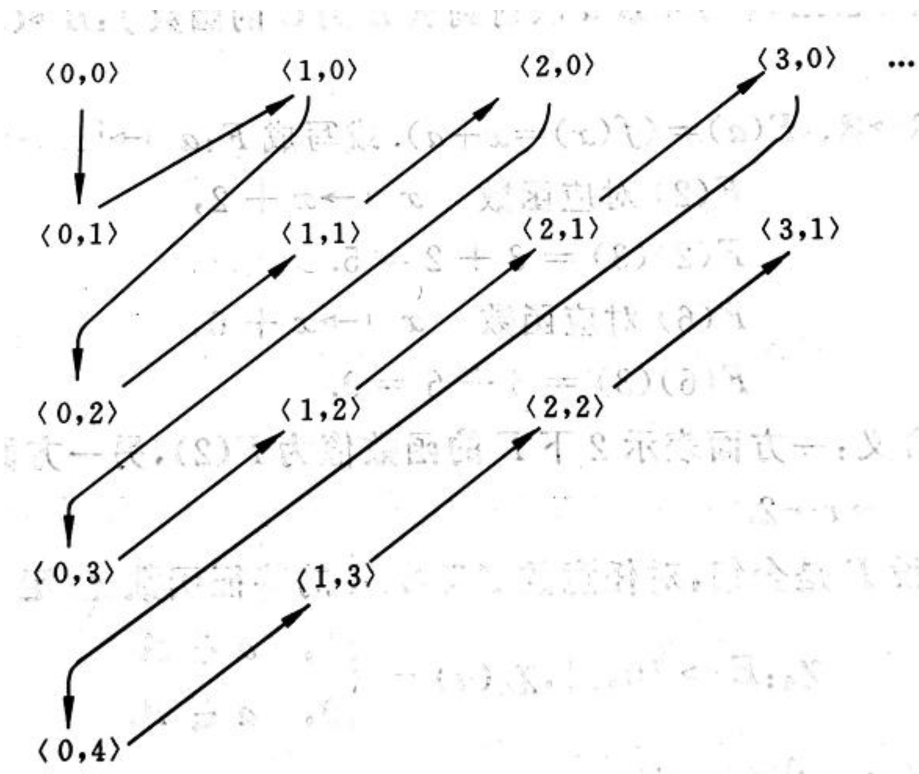
解

(1) 令f： $R\rightarrow R$， $f(x) = x$

(2) 令f： $R\rightarrow R_+$， $f(x) = e^x$.

(3) 令 $f:[0，1)\rightarrow(1/4,1/2]$， $f(x) = 1/2-x/4$

- (4) NXN是由自然数构成的所有有序对的集合．这些有序对可以排列在直角坐标系一个象限中，构成一个无限的点阵．如图所示．构造要求的双射函数，就是在点阵中有序对与N的元素间建立一一对应，也就是把点阵中有序对排成一列并依次编号0，1，2，…．



NXN中元素的排列次序是：<0，0>，<0，1>，<1，0>，<0，2>，<1，1>，<2，0>，<0，3>，….图中用箭头表示次序．这相当于f(<0，0>)=0，f(<0，1>)＝1，f(<1，0>)＝2，f(<0，2>)＝3，….显然，(m，n)所在的斜线上有m+n+1个点．在此斜线上方，各行元素分别有1，2，…，m+n个，这些元素排在<m，n>以前．在此斜线上，m个元素排在<m，n>以前．排在<m，n>以前的元素共有[1+2+…+(m+n)]+m个．于是，双射函数f：NXN→N为

$$f(<m, n>) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$$

对无限集合A，若存在从A到N的双射函数，就可仿照这种方法，把A中元素排成一个有序图形，按次序数遍A中元素．这就构造了从A到N的双射函数．

11 . 1 . 3 常用的函数

- 定义11.1.5 设f：A→B，如果存在一个y∈B，使得对所有的x∈A，有f(x)＝y，即有f[A]＝{y}，则称f：A→B为常函数 .
- 定义11 . 1. 6 A上的恒等关系I_A：A→A称为恒等函数．于是，对任意的x∈A，有 $I_A(x)=x$.
- 定义11.1. 7 对实数集R，设f：R→R，如果(x≤y)→(f(x)≤f(y))，则称f为单调递增的；如果(x<y)→(f(x)<f(y))，则称f为严格单调递增的．类似可定义单凋递减和严格单调递减的函数 .

- 定义11．1.8 对集合A，n∈N，把函数f：$A^n \to A$ 称为A上的n元运算．

  运算是算术运算概念的推广．在代数结构课程中将对运算作深入研究，运算的例子有数字的运算，集合的运算，关系的运算，逻辑联结词是在{T，F}上的运算．

- 定义11．1．9 设A，B，C是集合，Bc为从B到C的所有函数的集合，则F：A→ B_C称为一个泛函(有时G： B_C →A称为一个泛函)．

  泛函F也是函数，它把A的元素a映射到从B到C的函数f:B→C．即函数值F(a)是函数f：B→C．

- 例7 泛函F： $R \to R_R$， $F(a)=(f(x)=x+a)$ ．或写成F： $a \mapsto [x \mapsto x+a]$.于是

  $F(2)$对应函数 $x \mapsto x+2$,

  $F(2)(3)=3+2=5$ ．

  $F(6)$对应函数 $x \mapsto x+6$,

  $F(6)(3)=3+6=9$ ．

  泛函值$F(2)$有双重含义：一方面表示2下F的函数值为$F(2)$，另一方面这个值是一个函数$F(2)$： $R \to R$, $F(2)$： $x \mapsto x+2$ ．

定义 11.1.10 设 E 是全集，随任意的 $A \subseteq E$，A 的特征函数 χ_A 定义为：

$$\chi_A : E \to \{0,1\}, \chi_A(a) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

例8 设 $E = \{a,b,c\}, A = \{a,c\}$，则

$$\chi_A(a) = 1, \chi_A(b) = 0, \chi_A(c) = 1$$

- 特征函数是集合的另一种表示方法，模糊集合论就是参照特征函数的思想，用隶属函数定义模糊集合．

- 定义11．1.11 设R是A上的等价关系，令

$g: A \to A/R$，$g(a)=[a]_R$，则称g为从A到商集A／R的典型映射或自然映射．

- 例9 设A={1，2，3}，R是A上的等价关系，它诱导的等价类是{1，2}，{3}则从A到A／R的自然映射g为

  $g: \{1, 2, 3\} \to \{\{1, 2\}, \{3\}\}$,

  $g(1)=\{1, 2\}$，$g(2)=\{1, 2\}$，$g(3)=\{3\}$,

11．1．4 选择公理

- 选择公理(形式1) 对任意的关系R，存在函数f，使得f⊆R且dom(f)=dom(R)．
- 选择公理是一个重要的数学公理，有时记作AC．选择公理还有其他的等价形式．这里的形式最直观，最容易理解．
- 一般的关系R不是函数，因为R不是单值的．也就是对某些x∈dom(R)，有多于一个y1，y2,...，使y1∈ran(R)，y2∈ran(R),...，且<x，y1>∈R，<x,y2>∈R，…，这时x有多个值y1，y2，…与之对应.为了构造函数f，只要对任意的x∈dom(R)，从<x，y1>，<x，y2>，…中任取一个放入f中．则f是单值的，f⊆R，且有dom(f)＝dom(R)，f是函数f：dom(R)→ran(R)．因为多个有序对中可任选其一，所以构造的f可以有多个．

- 例10 设关系$R=\{<1, a>, <1, b>, <2, b>\}$，则$f1=\{<1, a>, <2, b>\}$和$f2=\{<1, b>, <2, b>\}$都是满足条件的函数．

目录

11.2 函数的合成与函数的逆

- 函数是特殊的关系，所以关于关系合成与关系的逆的定理，都适用于函数．下面讨论函数的一些特殊性质．

11．2．1 函数的合成

- 定理11．2．1 设g：A→B，f：B→C，则

  (1) $f\circ g$是函数$f\circ g$：A→C，

  (2) 对任意的x∈A，有($f\circ g$)(x)=f(g(x))．

证明

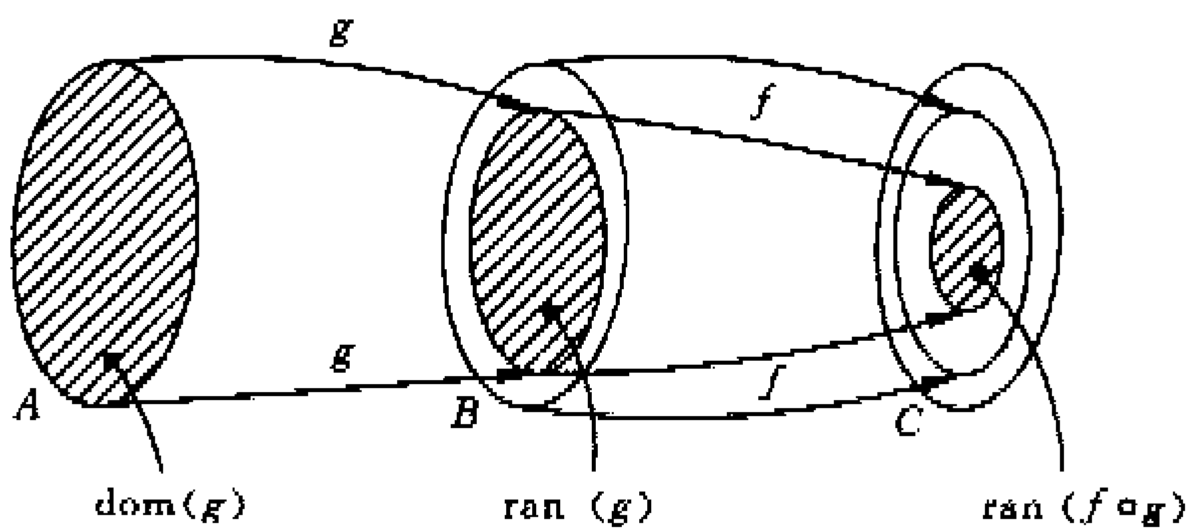
(1) 因为g：A→B，则(∀x)(x∈A→(∃y)(y∈B^<x,y>∈g))．又因f：B→C，则(∀y)(y∈B→(∃z)(z∈C^<y，z>∈f))，由任意的x∈A，存在y∈B有<x，y>∈g，对y∈B存在z∈C有<y，z>∈f，因此对x∈A存在z∈C使<x，y>∈g^<y，z>∈f，使<x，z>∈$f\circ g$．所以dom($f\circ g$)＝A，

假设对任意的x∈A，存在y1和y2，使得<x，y1>∈$f\circ g$且<x，y2>∈$f\circ g$．则(∃t1)(∃t2)((xgt1^t1fy1)^(xgt2^t2fy2))．

因为g是函数，则t1＝t2，又因f是函数，则y1＝y2．所以$f\circ g$是函数．

(2) 对任意的$x \in A$，因为$<x, g(x)> \in g$，$<g(x), f(g(x))> \in f$，故$<x, f(g(x))> \in f \circ g$. 又因$f \circ g$是函数，则可写为$(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

函数的合成可以用图表示．从图中可见$dom(g)=A$，$ran(g) \subseteq B=dom(f)$，$ran(f) \subseteq C$. 而$dom(f \circ g) = A$，$ran(f \circ g) \subseteq C$.



- 定理11．2．2 设g：A→B，f：B→C，则有

 (1)若f，g是满射的，则$f\circ g$是满射的，

 (2)若$f\circ g$是单射的，则$f\circ g$是单射的，

 (3)若$f\circ g$是双射的，则$f\circ g$是双射的．

证明

 (1)对任意的z∈C，因为f是满射的，故∃y∈B，使f(y)＝z．对这个y∈B，因为g是满射的，故∃x∈A，使g(x)=y.所以，z＝f(y)＝f(g(x))=($f\circ g$)(x)，$f\circ g$是满射的．

(2)对任意的z∈ran($f\circ g$)，若存在x1，x2，使($f\circ g$)(x1)=z且($f\circ g$)(x2) = z．则存在y1，y2，使x1gy1^y1fz且x2gy2^y2fz．因为f是单射的，故y1 = y2;又因g是单射的，故x1=x2。所以，$f\circ g$是单射的．

(3)由(1)、(2)得证．

- 这个定理的逆定理是否成立呢?请看下列定理．

- 定理11.2.3 设g：A→B，f：B→C，则有

  (1) 若$f\circ g$是满射的，则f是满射的，

  (2) 若$f\circ g$是单射的，则g是单射的，

  (3) 若$f\circ g$是双射的，则f是满射的，g是单射的．

证明

(1) 对任意的z∈C，因为$f\circ g$是满射的，故∃x∈A，使x($f\circ g$)z．则∃y∈B，使xgy^yfz．则∃y∈B，使f(y)＝z．f是满射的．

(2) 对任意的$y\in ran(g)$，若存在$x1$，$x2\in A$，使$x1gy \wedge x2gy$，即$g(x1) = y = g(x2)$．对这个$y\in B$，(因$ran(g)\subseteq B$)，存在$z\in C$，使得$f(y)=z$．则$f(g(x1)) = z = f(g(x2))$，于是$x1(f\circ g)z \wedge x2(f\circ g)z$．因为$f\circ g$是单射的，故$x1=x2$．所以g是单射的．

(3) 由(1)，(2)得证．

- 注意，当$f\circ g$是满射的，g不一定是满射的；当$f\circ g$是单射的，f不一定是单射的．

- 例1 设g：A→B，f：B→C，A＝{a}，B＝{b，d}，C={c}．且g＝{<a，b>}，f＝{<b，c>，<d，c>}，则$f \circ g$={<a，c>}．$f \circ g$是满射的，但是g不是满射的．
- 例2 设g：A→B，f：B→C，A＝{a}，B＝{b，d}，C＝{c}，且g＝{<a，b>}，f＝{<b，c>，<d，c>}，则$f \circ g$＝{<a，c>}，$f \circ g$是单射的，但是f不是单射的．

- 定理11. 2 . 4 设f: A→B, 则 $f = f \circ I_A = I_B \circ f$
- 证明留作思考题 .

11．2．2 函数的逆

- 一个关系的逆不一定是函数，一个函数的逆也不一定是函数．
- 例3 对A＝{a，b，c}．A上的关系R为

  R= {<a，b>，<a，c>，<a，a>}，

  从A到A的函数f为

  f＝{<a，c>，<b，c>，<c，a>}．

  则它们的逆为

  R^{-1}={<b，a>，<c，a>，<a，a>}是A到A的函数，

  f^{-1}={<c，a>，<c，b>，<a，c>}不是A到A的函数．

- 定理11．2．5 若f: $A\rightarrow B$是双射的，则f^{-1}是函数f^{-1}: $B\rightarrow A$

证明 对任意的$y\in B$，因为f是双射的，所以存在$x\in A$，使$<x, y>\in f$，$<y, x>\in f^{-1}$．所以，$dom(f^{-1})=B$．

对任意的$y\in B$，若存在$x1$，$x2\in A$，使得$<y, x1>\in f^{-1}$且$<y, x2>\in f^{-1}$，则$<x1, y>\in f$且

$<x2, y>\in f$．因为f是双射的，故$x1=x2$.所以，f^{-1}是函数f^{-1}: $B\rightarrow A$．

- 定义11．2．1 设f：$A \to A$是双射的，则称f^{-1}：$B \to A$为f的反函数．
- 定理11．2．6 若f：$A \to B$是双射的，则f^{-1}：$B \to A$是双射的．

证明 对任意的$x \in A$，因为f是从A到B的函数，故存在$y \in B$，使$\langle x, y\rangle \in f$, $\langle y, x\rangle \in f^{-1}$．所以，$f^{-1}$是满射的．

对任意的$x \in A$，若存在$y1$，$y2 \in B$，使得$\langle y1, x\rangle \in f^{-1}$且$\langle y2, x\rangle \in f^{-1}$，则有$\langle x, y1\rangle \in f$且$\langle x, y2\rangle \in f$．因为$f$是函数，则$y1 = y2$所以，$f^{-1}$是单射的，它是双射的，

- 例4 f：$[-\pi/2,\pi/2]\to[-1，1]$，$f(x)=\sin x$是双射函数．所以，

f^{-1}：$[-1，1]\to[-\pi/2,\pi/2]$，$f^{-1}(y)=\arcsin y$是f的反函数．

对实数集合R，正实数集合R_+.g：$R\to R_+$，$g(x)=2^x$是双射的．所以，g^{-1}：$R_+\to R$，$g^{-1}(y)=\log_2 y$是g的反函数．

- 定理11．2．7 若f：A→B是双射的，则对任意的$x\in A$，有$f^{-1}(f(x))=x$，对任意的$y\in B$，有$f(f^{-1}(y))=y$。

证明 对任意的$x\in A$，因为f是函数，则有$<x, f(x)>\in f$，有$<f(x), x>\in f^{-1}$，因为f^{-1}是函数，则可写为$f^{-1}(f(x))=x$.

对任意的$y\in B$，类似可证$f(f^{-1}(y))=y$．

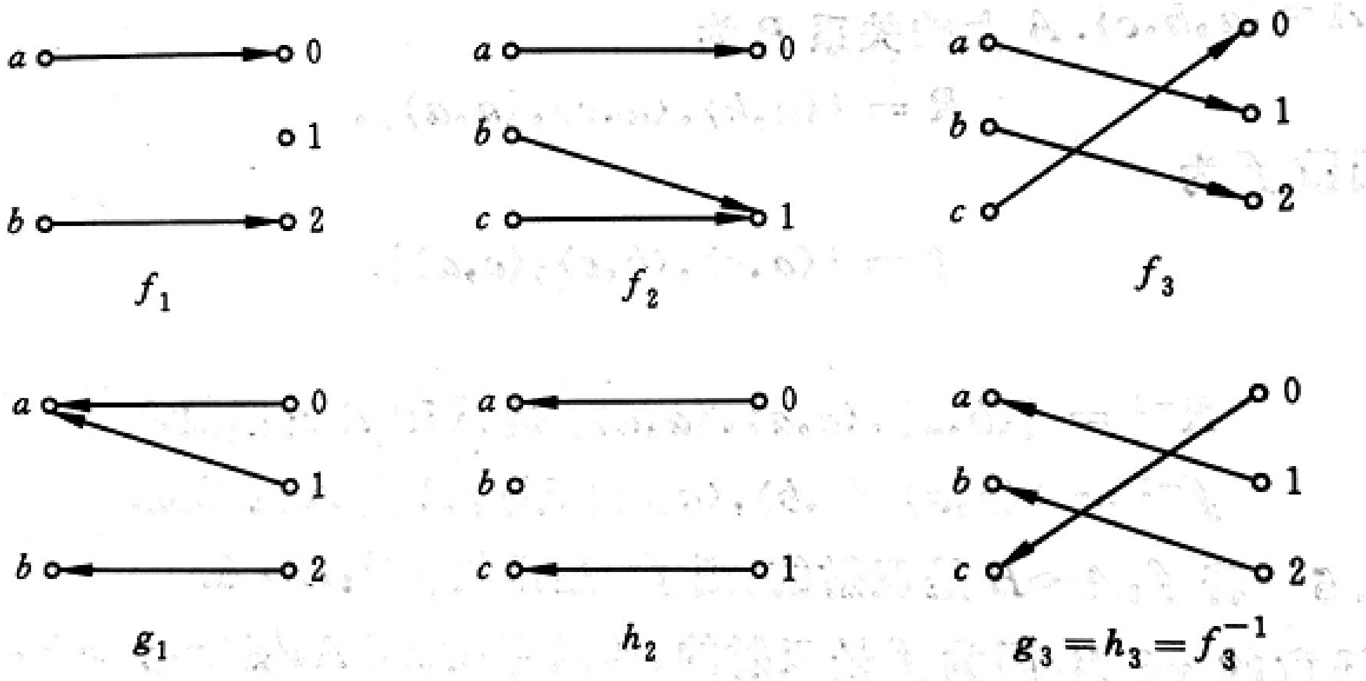
- 由定理，对任意的$x\in A$，$f^{-1}(f(x))=x$，则$(f^{-1}\circ f)(x)=x$，于是$f^{-1}\circ f=I_A$.同理也有，$f\circ f^{-1}=I_B$．对非双射的函数f：A→B，是否存在函数g：B→A使$g\circ f=I_A$呢?是否存在函数h：B→A使$f\circ h=I_B$呢?

- 定义11．2．2 设f：A→B，g：B→A，如果$g \circ f = I_A$，则称g为f的左逆；如果$f \circ g = I_B$，则称g为f的右逆．
- 例5 设 f1：{a，b}→{0，1，2}，

  f2：{a，b，c}→{0，1}，

  f3：{a，b，c}→{0，1，2}，

  如图所示，则f1存在左逆g1，不存在右逆．f2存在右逆h2，不存在左逆．f3即存在左逆g3，又存在右逆h3，且g3=h3=$f3^{-1}$．如图所示．



f_1 f_2 f_3

g_1 h_2 $g_3 = h_3 = f_3^{-1}$

- 定理11．2．8 设$f: A\to B$，$A\neq\Phi$，则

  (1)f存在左逆，当且仅当f是单射的；

  (2)f存在右逆，当且仅当f是满射的；

  (3)f存在左逆又存在右逆，当且仅当f是双射的；

  (4)若f是双射的，则f的左逆等于右逆．

证明

(1)先证必要性．设存在$x1$，$x2\in A$，使得$f(x1)=f(x2)$．设g为f的左逆，则$x1=(g\circ f)(x1)=g(f(x1))=g(f(x2))=(g\circ f)(x2)=x2$

所以，f是单射的．

再证充分性．因为f是单射的，所以f：A→ran(f)是双射的，则f^{-1}：ran(f)→A也是双射的．已知A≠Φ，则∃a∈A，构造g：B→A为

$$g(y)=\begin{cases} f-1(y), & \text{当 } y\in \mathbf{ran}(f) \\ a, & \text{当 } y\in B-ran(f) \end{cases}$$

显然，g是函数g：B→A．对任一x∈A，有(g∘f)(x)＝g(f(x))＝f^{-1}(f(x))=x，所以，g∘f＝I_A，g的构造如图，实箭头表示g，虚箭头表示f．

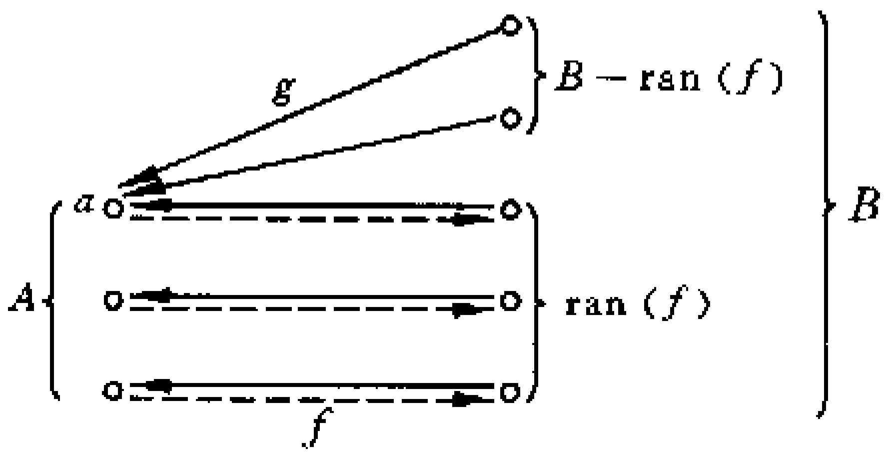


图 11.2.3 f 的左逆 g

(2)先证必要性．设f的右逆为h：$B \to A$，有$f \circ h = I_B$.则对任意的$y \in B$，存在$x \in A$，使$h(y)=x$，则$y = I_B(y) = (f \circ h)(y) = f(h(y)) = f(x)$，所以，f是满射的．

- 再证充分性，(注意，不能取$h=f^{-1}$，因为f^{-1}不一定是函数，只是关系，)因为f是满射的，所以ran(f)=dom(f-1)＝B．依据选择公理，对关系f^{-1}，存在函数$h\subseteq f^{-1}$，且有$dom(h)=dom(f^{-1})=B$，且$ran(h)\subseteq ran(f^{-1})=A$．即$h:B\to A$，对任意的$y\in B$，存在$x\in A$，使$h(y)=x$且$f(x)=y$．则

$(f\circ h)(y)=f(h(y))=f(x)=y$．

所以，$f\circ h=I_B$，h是f的右逆．h的构造如图，实箭头表示h，虚箭头表示f.

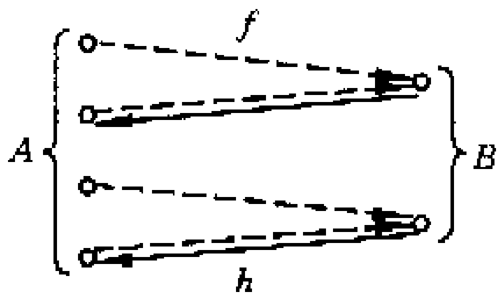


图 11.2.4 f 的右逆 h

(3) 由(1)，(2)得证．

(4) 设f的左逆为g：$B \rightarrow A$，右逆为h：$B \rightarrow A$，则$g \circ f = I_A$，$f \circ h = I_B$．

$$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I_A \circ h = h$$

所以，$g = h$．

目录

11．3．1 函数的相容性

- 定义11.3．1 设f：A→B，g：C→D，如果对任意的x∈A∩C，都有f(x)=g(x)，就说f和g是相容的．
- 定义11．3．2 设C是由一些函数组成的集合，如果C中任意两个函数f和g都是相容的，就说C是相容的．
- 例1 设C：{f，g，h)，其中

f：{a，b)→{1，2}，f={<a，1>，<b，2>}，

g：{a，c}→{1，2}，g={<a，1>，<c，2>}，

h：{b，c}→{1，2}，h＝{<b，2>，<c，1>}．

f与g相容，f与h相容，但g与h不相容．所以C不是相容的．

- 定理11．3．1 设$f: A\rightarrow B$，$g: C\rightarrow D$，则f和g是相容的当且仅当$f\cup g$是函数，

证明 先假设f和g是相容的．对任意的$x\in(A\cup C)-(A\cap C)$，

有$(x\in A\wedge x\notin C)$或$(x\notin A\wedge x\in C)$．对于$x\in A\wedge x\notin C$，有$(f\cup g)(x)=f(x)$，$\langle x, f(x)\rangle\in f\cup g$，并对任意的$y$，若$y\neq f(x)$，则$\langle x, y\rangle\notin f\cup g$.对于$x\notin A\wedge x\in C$，类似地有$\langle x, g(x)\rangle\in f\cup g$．并对任意的$z$，若$z\neq g(x)$，则$\langle x, z\rangle\notin f\cup g$．此外，对于$x\in A\wedge x\in C$，由相容性

$f(x)=g(x)$，故$\langle x, f(x)\rangle\in f\cup g$，并对任意的$u$，若$u\neq f(x)=g(x)$，则$\langle x, u\rangle\notin f\cup g$．

对任意的$x\in A\cup C$，有$x\in A \vee x\in C$．当$x\in A$，存在$f(x)$，使$<x, f(x)>\in f$，$<x, f(x)>\in f\cup g$．当$x\in C$，存在$g(x)$，使$<x, g(x)>\in g$，使$<x, g(x)>\in f\cup g$．所以，$f\cup g$是函数．

其次假设$f\cup g$是函数．而f与g不是相容的，则存在$x\in A\cap C$，使$f(x)\neq g(x)$．

于是有$<x, f(x)>\in f$，$<x, f(x)>\in f\cup g$；又有$<x, g(x)>\in g$，$<x, g(x)>\in f\cup g$，然而$f(x)\neq g(x)$，这与$f\cup g$是函数矛盾，所以，f与g是相容的．

- 定理11．3．2 设f：A→B，g：C→D，则f与g是相容的当且仅当

$$f \upharpoonright (A \cap C) = g \upharpoonright (A \cap C)$$

证明可以由定义11.3.1得到．

- 定理11．3．3 对函数的集合C，若C是相容的，且F=∪C，则F是函数F：dom(F)→ran(F)，且dom(F) = ∪{dom(f)|f∈C}，

证明 先证F是一个关系．对任意的u∈∪C，存在f∈C，且u∈f．因为u是函数f的元素，所以u是有序对，所以F是一个关系．

再证F是一个函数．对任意的x，$y1$，$y2$，若$<x, y1>\in F$且$<x, y2>\in F$，则存在$f1\in C$和$f2\in C$，使$<x, y1>\in f1$且$<x, y2>\in f2$．因为C是相容的，则f1与f2是相容的，且有$x\in dom(f1)\cap dom(f2)$，所以$y1=f1(x)=f2(x)=y2$．所以，$F: dom(F)\rightarrow ran(F)$．

最后是关于定义域的证明．首先，对任意的$x\in dom(F)$，存在y，使$<x, y>\in F$，即$<x,y>\in \cup C$．于是，存在$f\in C$使$<x, y>\in f$．因此，$x\in dom(f)$，$x\in \cup\{dom(f)|f\in C\}$，其次，对任意的$x\in \cup\{dom(f)|f\in C\}$．存在$f\in C$使$x\in dom(f)$．则存在$y$使$<x, y>\in f$．于是，$<x, y>\in \cup C$，$<x, y>\in F$．$x\in dom(F)$，总之，$dom(F)=\cup\{dom(f)|f\in C\}$．

- 定理说明，由一个相容的函数集合C，可以构造一个函数F，这个F开拓了C中所有的函数．

11.3.2 函数与等价关系的相容性

- 定义11．3．3 设R是A上的等价关系，且f：A→A，如果对任意的x，y∈A，有<x，x>∈R=><f(x)，f(y)>∈R，则称关系R与函数f是相容的．
- 例2 设A＝{1，2，3}，R是A上的等价关系，商集A／R={{1，2}，{3}}，设f：A→A定义为f(1)＝3，f(2)=3，f(3)＝1．则R与f是相容的．因为，对<1，2>∈R，有<f(1)，f(2)>＝<3，3>∈R；对<3，3>∈R，有<f(3)，f(3)>=<1，1>∈R等．

- 定理11.3.4 设R是A上的等价关系，且f：A→A，如果R与f是相容的，则存在唯一的函数F：A / R→A / R，使$F([x]_R)=[f(x)]_R$；如果R与f不相容，则不存在这样的函数F．

证明

(1)假设R与f是相容的．定义关系

$$F=\{<[x]_R,\ [f(x)]_R>|x\in A\},$$

先证明F是函数．对任意的x，y∈A,

显然$<[x]_R,\ [f(x)]_R>\in F$，$<[y]_R,\ [f(y)]_R>\in F$，

于是

$$[x]_R=[y]_R \Leftrightarrow <x,y>\in R$$

$$\Rightarrow <f(x),f(y)>\in R$$

$$\Leftrightarrow [f(x)]_R=[f(y)]_R$$

此外，由F的定义，$dom(F)=A/R$，且有$ran(F)\subseteq A/R$．因此，$F: A/R\rightarrow A/R$，且 $F([x]_R)=[f(x)]_R$．

再证F是唯一的．假设F1和F2都是这样的函数，对任竟的$x\in A$,

$<[x]_R,[f(x)]_R>\in F1$，则$[x]_R\in A/R$，$[x]_R\in dom(F2)$，于是，$<[x]_R,[f(x)]_R>\in F2$，$F1\subseteq F2$．类似可证$F2\subseteq F1$，于是$F1=F2$．

(2)假设R与f不相容．则存在x，y∈A，使<x，y>∈R且<f(x)，f(y)>∉R．则$[x]_R=[y]_R$，且$[f(x)]_R \neq [f(y)]_R$，但是$F([x]_R)=[f(x)]_R$，$F([y]_R)=[f(y)]_R$，于是F不是函数，与已知矛盾．所以不存在这样的F．

- 例3 设A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, R是A上的等价关系,

商集A / R={{1, 2, 3}, {4, 5}, {6, 7}}．设f: A→A, f={<1, 4>, <2, 5>, <3, 5>, <4, 3>, <5, 2>, <6, 1>, <7, 3>}, 则R与f是相容的．可以构造F: A / R→A / R,

F={<{1, 2, 3}, {4, 5}>, <{4, 5}, {l, 2, 3}>, <{6, 7}, {1, 2, 3}>},

有$F([x]_R)=[f(x)]_R$．

目录

11. 4 开集与闭集

- 开集与闭集是在实数集合上的开区间与闭区间概念的推广，下面先在实数集R上定义距离的概念，再定义R上的开集和闭集．如果在实数集R的n阶笛卡儿积R^n上定义距，也可以建立R^n上的开集和闭集．

11．4．1 距离

- 定义11. 4 ．1 对实数集R，若p：RXR→R定义为p(<x, y>)=|x-y|，其中 ．|x-y|是x-y的绝对值，则称p为R上的距离函数，对任意的<x，y>∈R×R，把p(<x，y>)称为x和y的距离，并可写为p(x，y) = |x-y| ．
- 这里定义的距离就是实轴上两点之间常用的距离 ．
- 对于R的n阶笛卡儿积R^n，可以定义R^n上的距离函数为p：$R^n \times R^n \to R$，$p(<<x1, \ldots, xn>, <y1, \ldots, yn>>)=((x1-y1)^2+\ldots+(xn-yn)^2)^{1/2}$ ．

  其中 <x1，…，xn>∈R^n，<y1，…，yn>∈R^n ．
- 在R2和R3上定义的距离就是在二维平面和三维空间中两点间的直线距离 ．

11. 4 . 2 极限点与闭集

- 定义11 . 4 . 2 对实数集R，<是R上的小于关系，p是R上的距离函数，若x0∈R，ε∈R且ε>0，则集合{x|x∈R^p(x0，x)<e}称为x0的ε邻域 .
- 定义11 . 4 . 3 对实数集R，A⊆R，x0∈R，如果在x0的任一个ε邻域中，都存在不等于x0的元素x，且x∈A，则称x0是A的一个极限点(或凝聚点) .

- 定义的条件可以写成
- $(\forall\varepsilon)((\varepsilon\in R \wedge \varepsilon>0)\rightarrow$
  $(\exists x)(x\in A \wedge x\neq x0 \wedge p<x,\ x0><\varepsilon))$.
- x0是A的极限点意味着，A中的元素可以无限接近x0，即存在一个A的不含有x0的子集，可以排列成极限为x0的序列．直观地说，在x0附近，A的点是稠密的．x0不一定在A中．

- 例1 对$A=(a, b)$，其中$a\in R$，$b\in R$，$a<b$，开区间A中的元素和a、b都是A的极限点，即A的极限点的集合是$[a, b]$．

  对$A=[a, b]$，其中$a\in R$，$b\in R$，$a<b$，闭区间A的极限点的集合是A．
- 例2 对$A=\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$，A的极限点是0，空集没有极限点．有限集合$A\subseteq R$没有极限点．有理数集Q的极限点集合是实数集R，因为在任一实数附近，有理数和无理数都是稠密的．

- 定理11．4．1 对实数集R，A三R，x0∈R，x0是A的极限点当且仅当在A中存在点列

  {xn|x0∈A^xn≠x0^(m≠n→xm≠xn)}，

  使得lim xn＝x0，

- 定理11. 4．2 若A三R是有界无限集，则A具有极限点．

- 例3 设A＝{1，2，3，…}，则A没有极限点．

- 定义11. 4 . 4 对实数集R， $A\subseteq R$， $x0\in A$， 若x0不是A的极限点， 则称x0为A的孤立点 .

  A的极限点可以在A中， 也可不在A中 . A的孤立点一定在A中 . A中的点， 或为A的极限点， 或为A的孤立点 .

- 定义11 . 4 . 5 对实数集R， $A\subseteq R$， A的所有极限点的集合称为A的导集， 记作A' . 如果 $A'\subseteq A$， 则称A为闭集 .
- 对于闭集A， 导集A’是A的子集， 即A的极限点都在A中，

- 例4 对$a \in R$，$b \in R$，$a<b$，则有

$A1=(a, b), A1'=[a, b]$，A1不是闭集．

$A2=[a, b], A2'=[a, b]$，A2是闭集．

$A3=\{1, 2, 3\}$，$A3'=\Phi$，A3是闭集，

$A4=\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$，$A4'=\{0\}$，A4不是闭集，

因为$R'=R$，所以R是闭集．因为$Q'=R$，所以有理数集Q不是闭集．因为$\Phi'=\Phi$，所以Φ是闭集．

- 定理11.4．3 对实数集R，$A\subseteq R$，则A’是闭集，即$(A')'\subseteq A'$，
- 定理11．4．4 任意个闭集的交集是闭集．有限个闭集的并集是闭集．
- 例5 设A＝{A1，A2，A3，...}，其中An＝[1/n,1]都是闭集，但是UA=(0，1]不是闭集．由此可见，无限个闭集的并集不一定是闭集．

11．4．3 内点和开集

- 定义11. 4 ．6 对实数集R，A⊆R，x0∈R，如果存在x0的ε邻域，其中全是A的元素，则称x0为A的一个内点．
- 定义的条件可以写成

  (∃ε)(ε∈R^ε>0^

  (∀x)((x∈R^p(x，x0)<ε)→x∈A))．
- 定义11．4．7 对实数集R，A⊆R，若A的元素都是A的内点，则称A为开集，

- 例6 对$a\in R$，$b\in R$，$a<b$，

  $A1=(a, b)$的内点集合是(a, b)，

  $A2=[a, b]$的内点集合是(a, b)．

  所以，A1是开集，A2不是开集，

- R的内点集合是R，R是开集．⊞也是开集．Q没有内点(因为Q的元素的任一个ε邻域内都有无理数)，所以Q不是开集．
- 值得注意，R和Φ都是开集，也都是闭集；Q和R—Q都不是开集，也都不是闭集．

- 定理11．4．5 任意个开集的并集是开集，有限个开集的交集是开集．
- 例7 设A＝{A1，A2，A3，...}，其中An＝(0，1+1/n)都是开集．但是∩A=(0，1]不是开集．由此可见，无限个开集的交集不一定是开集．
- 定理11．4．6 对实数集R，A⊆R，则

  (1)若A是开集，则R-A是闭集．

  (2)若A是闭集，则R-A是开集．

目录

11．5模糊子集

- 一个集合表示一个确定的概念，论域中任一元素是否属于一个集合，回答是确定的．例如2∈N和n矗N都是确定的．但在人类知识的领域中，还有很多不确定的概念．年老就是不确定的，一般认为70岁以上是年老的，30岁以下不是年老的，但是对50多岁是否算年老的没有确定的回答．这类概念没有明确的外延，称为模糊概念，可以用模糊集合论研究这类概念．模糊集合论是美国学者L.A．Zaden在1965年创立的．

- 模糊集合论是模糊数学的基础．模糊数学不是让数学变成模糊的东西，而是让数学进入描述模糊现象的领域．模糊数学借用数学工具，通过模仿人类思维，描述和处理模糊概念．这一节简要介绍模糊集合论的基本概念．
- 在模糊集合论中，用隶属函数表示模糊子集，隶属函数模仿了可以表示集合的特征函数，下面先介绍特征函数．

11．5．1 集合的特征函数

- 定义11．1.10已经对集合的特征函数作了规定．设E是全集，对A⊆E，A的特征函数是

$$\chi_A : E \to \{0,1\}, \chi_A(a) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

- 特征函数有下列性质，其中+，-，*是算术加、减、乘法．

- 定理11．5．1 设E是论域，A⊆E，B⊆E，则

(1) $(\forall x)(\chi_A(x)=0)\Leftrightarrow A=\varnothing$，

(2) $(\forall x)(\chi_A(x)=1)\Leftrightarrow A=E$，

(3) $(\forall x)(\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x))\Leftrightarrow A\subseteq B$，

(4) $(\forall x)(\chi_A(x)=\chi_B(x))\Leftrightarrow A=B$，

(5) $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)*\chi_B(x)$，

(6) $\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$，

(7) $\chi_{A-B}(x)=\chi_A(x)-\chi_{A\cap B}(x)$，

(8) $\chi_{-A}(x)=1-\chi_A(x)$.

- 证明 只证(5)，其余留作思考题．

$$
\begin{aligned}
(5)\ \chi_{A\cap B}(x)=1 &\Leftrightarrow x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B \\
&\Leftrightarrow \chi_A(x)=1 \wedge \chi_B(x)=1 \\
&\Leftrightarrow \chi_A(x)*\chi_B(x)=1, \\
\chi_{A\cap B}(x)=0 &\Leftrightarrow x\notin A\cap B \Leftrightarrow x\notin A \vee x\notin B \\
&\Leftrightarrow \chi_A(x)=0 \vee \chi_B(x)=0 \\
&\Leftrightarrow \chi_A(x)*\chi_B(x)=0.
\end{aligned}
$$

- 所以，结论得证．

- 利用特征函数的性质，可以证明集合恒等式，
- 例1 对集合A，B和C，证明

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

证明

$$\begin{aligned}
\chi_{A\cap(B\cup C)}(x) &= \chi_A(x) * \chi_{B\cup C}(x) \\
&= \chi_A(x) * (\chi_B(x) + \chi_C(x) - \chi_{B\cap C}(x)) \\
&= \chi_A(x) * \chi_B(x) + \chi_A(x) * \chi_C(x) \\
&\quad - \chi_A(x) * \chi_B(x) * \chi_A(x) * \chi_C(x) \\
&= \chi_{A\cap B}(x) + \chi_{A\cap C}(x) - \chi_{A\cap B}(x) * \chi_{A\cap C}(x) \\
&= \chi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x).
\end{aligned}$$

- 于是依(4)，结论得证 .

- 定义11．5．1 设E是论城，E上的一个模糊子集A是指μ_A存在一个函数μ_A：$E\rightarrow[0，1]$，并称μ_A为A的隶属函数．
- 定义实质上是说，用隶属函数μ_A表示模糊集合．对任意的$x\in E$，都有唯一的隶属函数值$\mu_A(x)\in[0，1]$，$\mu_A(x)$表示x属于A的程度．$\mu_A(x)=1$表示$x\in A$，$\mu_A(x)=0$表示$x\notin A$.但在$0<\mu_A(x)<1$时，表示x在一定程度上属于A，这时$x\in A$和$x\notin A$都不成立．

- 例2 在图11．5．1中给出了5个图形，它们组成全集E＝{a,b,c,d,e}．

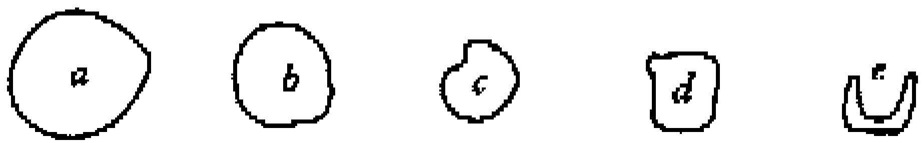


图 11.5.1

- 对E中每个元素给出一个隶属程度：$\mu_A(a)=1$, $\mu_A(b)=0.9$, $\mu_A(c)=0.4$, $\mu_A(d)=0.2$, $\mu_A(e)=0$．
- 这定义了一个隶属函数声A：E→[0，1]，并用μ_A定义了E的一个模糊子集A。A表示了“圆形”这个模糊概念．

在E是有限集合时，可以用3种方法表示μA。

(1)用有序对的集合表示，如

A={<a，1>，<b，0.9>，<c，0.4>，<d，0.2>，<e，0>}

(2)用Zaden的记号表示，如

A=1 / a+0.9 / b+0.4 / c+0.2 / d+0 / e .

(3)用n元组(向量)表示，如

A = <1，0.9，0.4，0.2，0>

3种表示方法中所给的例子，都表示了例2中的A.第3种方法要求E中元素排成对应的n元组，

- 模糊概念由模糊子集表示．模糊子集由其隶属函数来描述，这类似于普通集合由其特征函数来描述．集合的特征函数值是1或是0，这表示一元素是否属于一集合．模糊子集的隶属函数值是在[0，1]区间中，该值表示该元素隶属于该集合的程度．例2就是在5个形状的全集中建立“圆形”这个模糊概念．用E上的这个模糊子集A表示“圆形”这个模糊概念，并用隶属函数$\mu_A(x)$表示这个模糊子集A. $\mu_A(a)=1$表示$a \in A$, $\mu_A(e)=0$表示$e \notin A$，而b，c，d则在不同程度上属于A．

- 对于全集E的一个普通子集A，任一个$a \in E$，有$a \in A \vee$(异或)$a \notin A$，用特征函数值$X_A(a)$取1、取0表示a属于、不属于A．可以用谓词Q(x)表示$x \in A$，则Q(a)或真或假，是二值逻辑中的一个命题．

- 对于E的一个模糊子集A，任一个a∈E，或者a∈A，或者a∉A，或者a只在一定程度上属于A，若以R(x)表示．x∈A，则R(a)可取真，可取假，也可以不真也不假(只在一定程度上真)．这种R(x)是多值逻辑中的谓词，可见模糊集合是与多值逻辑有关的概念，

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

- 注意区别隶属函数和概率．对所有$x \in E$，$\mu_A(x)$之和不是1，这与概率不同，概率反映客观事件发生的可能性，隶属函数反映主观认为隶属程度的大小．
- 当μ_A的值域为{0，1}时，μ_A就蜕化为一个特征函数，A就蜕化为一个普通集合．所以，集合是模糊子集的特例．
- 令F(E)表示E上全体模糊子集组成的集合，P(E)是E的幂集．则$P(E) \subseteq F(E)$．当$A \in (F(E)-P(E))$时，A称为真模糊子集，这时存在$x \in E$，使$\mu_A(x) \notin \{0, 1\}$．

- 例3 以年龄为论域，令E＝{0，1，…，200}．Zaden给出了“年老”O和“年轻”Y这两个模糊子集的隶属函数，见图．

$$\mu_{\underset{\sim}{O}}(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & \text{当 } 50< x\leqslant 200\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & \text{当 } 25< x\leqslant 200.\end{cases}$$

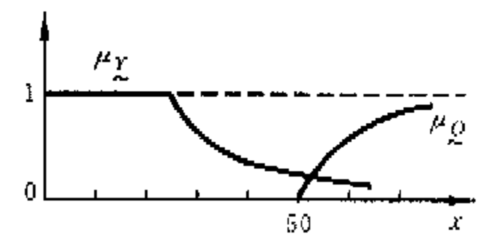


图 11.5.2

11．5．3 模糊子集的运算

- 对模糊子集的运算有不同的定义方法．使用较多的是Zaden给出的下列定义．
- 定义11．5．2 设E是全集，A，B∈F(E)，则AUB，A∩B，-A具有下列隶属函数

$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$,

$\mu_{A\cap B}(x)=\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$,

$\mu_{-A}(x) = 1-\mu_A(x)$．

AUB，A∩B，-A分别称为并集、交集、绝对补集．

例 4 在图 11.5.1 的论域 $E=\{a,b,c,d,e\}$ 上，定义两个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$(圆形)和 $\underset{\sim}{B}$(方形).

$$
\begin{array}{lllllll}
 & & a & b & c & d & e \\
 & \underset{\sim}{A}(\text{圆形}) & =(1, & 0.9, & 0.4, & 0.2, & 0) \\
 & \underset{\sim}{B}(\text{方形}) & =(0.2, & 0.3, & 0.6, & 0.1 & 0) \\
\text{则} & \underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}(\text{或方或圆}) & =(1, & 0.9, & 0.6, & 0.2, & 0) \\
 & \underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}(\text{亦方亦圆}) & =(0.2, & 0.3, & 0.4, & 0.1, & 0) \\
 & \neg\,\underset{\sim}{A}(\text{不圆}) & =(0, & 0.1, & 0.6, & 0.8, & 1).
\end{array}
$$

例 5 对例 3 中的 $\underset{\sim}{O}$ 和 $\underset{\sim}{Y}$,“或年老或年轻”可以表示为

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}\cup\underset{\sim}{O}}(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & \text{当 } 25< x\leqslant 51\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & \text{当 } 51< x\leqslant 200\end{cases}$$

“又年老又年轻”可以表示为

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}\cap\underset{\sim}{O}}(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & \text{当 } 50< x\leqslant 51\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & \text{当 } 51< x\leqslant 200\end{cases}$$

“不年轻”可以表示为

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 25\\ 1-\left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & \text{当 } 25< x\leqslant 200\end{cases}$$

11. 5 . 4 截集和分解定理

- 定义11 . 5 . 3 设E是全集，$A\in F(E)$，对$\lambda\in[0,1]$，集合

  $(A)_{\lambda}=\{x|\mu_A(x)\geqslant\lambda\}$

  称为A的λ截集，$(A)_{\lambda}$可以写作A_{λ} .
- A_{λ}是普通集合，即$A\in P(E)$. 定义说明，给定λ后，可以把模糊子集A转化为集合A_{λ}
- 例6 对例2中的模糊子集A . 有

  $A_1=\{a\}$，$A_{0.9}=A_{0.5}=\{a, b\}$，$A_{0.4}=A_{0.3}=\{a, b, c\}$，

  $A_{0.2}=A_{0.1}=\{a, b, c, d\}$，$A_0=\{a, b, c, d, e\}$.

- 定理11．5．2 设E是全集，A，B∈F(E)，λ∈[0，1]，则

  (1)$(A\cup B)_\lambda=(A)_\lambda \cup (B)_\lambda$，

  (2)$(A\cap B)_\lambda=(A)_\lambda\cap (B)_\lambda$

证明

(1)对任意的$x\in E$，可得

$x\in (A\cup B)_\lambda \Leftrightarrow \mu_{A\cup B}(x)\geqslant\lambda$

$\Leftrightarrow \max(\mu_A(x),\ \mu_B(x))\geqslant\lambda$

$\Leftrightarrow \mu_A(x)\geqslant\lambda \vee \mu_B(x)\geqslant\lambda$

$\Leftrightarrow x\in (A)_\lambda \vee x\in (B)_\lambda \Leftrightarrow x\in (A)_\lambda\cup(B)_\lambda$

(2)证明类似(1)．

- 定理11．5．3 设E是全集， $A\in F(E)$， $\lambda,\sigma\in[0,1]$，则

  (1) $\lambda\leqslant\sigma \Rightarrow A_\sigma\subseteq A_\lambda$，

  (2) $A_0=E$．

证明留作思考题．

- 定理11．5．4(分解定理) 设E是全集， $A\in F(E)$， $\lambda\in[0,1]$， $X_{A\lambda}(u)$是A的特征函数．

  则$\mu_A(u)=\sup_{\lambda\in[0,1]}(\inf(\lambda, X_{A\lambda}(u)))$．(其中sup表示集合的上确界，inf表示集合的下确界．)

证明 $\sup_{\lambda\in[0,1]}(\inf(\lambda,\ X_{A\lambda}(u)))$

$=\max(\sup_{\mu A(u)\leqslant\lambda\leqslant 1}(\inf(\lambda,\ X_{A\lambda}(u))),$

$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant\mu A(u)}(\inf(\lambda,\ X_{A\lambda}(u))))$

当$\mu_A(u)<\lambda\leqslant 1$时，$u\notin A_\lambda$则$X_{A\lambda}(u)=0$,

$\inf(\lambda,\ x_{A\lambda}(u))=0$．所以

$\sup_{\lambda\in[0,1]}(\inf(\lambda,\ X_{A\lambda}(u)))$

$=\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant\mu A(u)}(\inf(\lambda,\ X_{A\lambda}(u)))$

$=\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant\mu A(u)}(\inf(\lambda,\ 1))$ (因$u\in A_\lambda$)

$=\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant\mu A(u)}\lambda$ (因$\lambda\leqslant 1$)

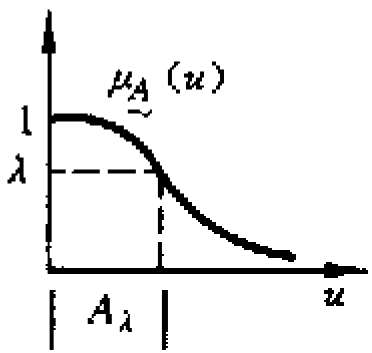
$=u_A(u)$

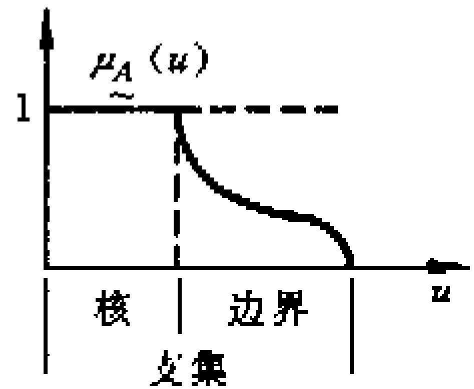
- 截集概念和分解定理是联系普通集合与模糊子集的桥梁．
- 定义11.5．4 设E是全集，$A \in F(E)$，则

  $suppA = \{u|A(u)>0\}$

  称为A的支集，截集A_1称为A的核，$(suppA)-A_1$称为A的边界．
- 核A_1的元素完全隶属于A．若$A_1 \neq \Phi$，就称A为正规模糊集，

- 截集、支集、核和边界如图所示．





- 当众由1下降到趋于0(但不达到0)，A_λ就由A的核扩大到A的支集，截集的集合$\{A_\lambda|0<\lambda\leqslant 1\}$包含着边界游移的集合．