1 对任意的公式 A, B, C:

(1) 如果 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$，是否有 $A \Leftrightarrow B$?

(2) 如果 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$，是否有 $A \Leftrightarrow B$?

(3) 如果 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$，是否有 $A \Leftrightarrow B$?

答:

(1). 当C是一个永真式，即C的真值恒为1时，$A \vee C$和$B \vee C$的真值都恒为1，也即这时$A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$，但显然这时$A$不一定与$B$等值；

(2). 类似地，当C是一个矛盾式，即C的真值恒为0时，$A \wedge C$和$B \wedge C$的真值都恒为0，也即这时$A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$，但显然这时$A$不一定与$B$等值；

(3). 若$\neg A \Leftrightarrow \neg B$，则按公式等值的定义有，对任意的真值赋值函数$t$，都有$t(\neg A) = t(\neg B)$，而根据否定联结词的定义，$t(A) = 1$当且仅当$t(\neg A) = 0$，这就说明，对任意的真值赋值函数$t$，也都有$t(A) = t(B)$，因此$A \Leftrightarrow C$。

2 使用等值演算方法求与下面公式等值的析取范式和合取范式（请注意写清楚等值演算中所用的基本等值式）:

$$(1)\ (p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q)$$
$$(2)\ p \rightarrow (\neg p \wedge q \wedge r)$$
$$(3)\ \neg(p \vee \neg q) \wedge (s \rightarrow t)$$

答:

(1)

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q) &\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q) && // \text{德摩根律} \\ &\Leftrightarrow (p \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q) && // \text{分配律} \\ &\Leftrightarrow p \vee \neg p && // \text{排中律、同一律} \end{aligned}$$

因此$(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q)$是永真式，与它等值的析取范式和合取范式都可取公式$p \vee \neg p$。

(2)

$$\begin{aligned} p \rightarrow (\neg p \wedge q \wedge r) &\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg p \wedge q \wedge r) && // \text{蕴涵等值式} \\ &\Leftrightarrow \neg p && // \text{吸收律} \end{aligned}$$

因此与$p \rightarrow (\neg p \wedge q \wedge r)$等值的合取范式和析取范式都可取公式$\neg p$。

(3)

$$\begin{aligned} \neg(p \vee \neg q) \wedge (s \rightarrow t) &\Leftrightarrow \neg(p \vee \neg q) \wedge (\neg s \vee t) && // \text{蕴涵等值式} \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge (\neg s \vee t) && // \text{德摩根律} \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge t) && // \text{分配律} \end{aligned}$$

因此与$\neg(p \vee \neg q) \wedge (s \rightarrow t)$等值的析取范式是:

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge t)$$

而与它等值的合取范式是$\neg p \wedge q \wedge (\neg s \vee t)$。

3 A,B,C,D 四人要派两个人出差，按下述三个条件有几种派法？如何派？(a) 若 A 去，则 C 和 D 中要去且仅去一人；(b)B 和 C 不能都去；(c) 若 C 去，则 D 不能去.

解：设：(i) 用p表示派A出差；(ii) 用q表示派B出差；(iii) 用r表示派C出差；(iv) 用s表示派D出差。从而上述条件符号化为：

(a) 若A去，则C和D中要去且仅去一人，符号化为：

$$p \rightarrow ((r \wedge \neg s) \vee (s \wedge \neg r)) \Leftrightarrow \neg p \vee ((r \vee s) \wedge (\neg s \vee \neg r)) \Leftrightarrow (\neg p \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg s \vee \neg r)$$

(b) B和C不能都去，符号化为：

$$\neg(q \wedge r) \Leftrightarrow \neg q \vee \neg r$$

(c) 若C去，则D不能去，符号化为：

$$r \rightarrow \neg s \Leftrightarrow \neg r \vee \neg s$$

也即选派方案必须满足的条件是：

$$F \Leftrightarrow (\neg p \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee \neg s)$$

上述公式是合取范式，我们使用编码方式将上式扩展为主合取范式。

(1) 公式$\neg p \vee r \vee s$的编码为$1-00$，它扩展出的极大项编码应该是1000和1100，即M_8和M_{12}；

(2) 公式$\neg p \vee \neg r \vee \neg s$的编码为$1-11$，它扩展出的极大项编码应该是1011和1111，即M_{11}和M_{15}；

(3) 公式$\neg q \vee \neg r$的编码为$-11-$，它扩展出的极大项编码应该是$0110, 0111, 1110$和1111，即M_6, M_7, M_{14}, M_{15}；

(4) 公式$\neg r \vee \neg s$的编码为$--11$，它扩展出的极大项编码应该是$0011, 0111, 1011$和1111，即M_3, M_7, M_{11}, M_{15}。

因此F的主合取范式是：

$$F \Leftrightarrow M_3 \wedge M_6 \wedge M_7 \wedge M_8 \wedge M_{11} \wedge M_{12} \wedge M_{14} \wedge M_{15}$$

从而F的主析取范式是：

$$F \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_9 \vee m_{10} \vee m_{13}$$

对应的成真赋值分别是$0000, 0001, 0010, 0100, 0101, 1001, 1010, 1101$，进一步根据题意要派两个人出差，因此真正的成真赋值只能取$0101, 1001, 1010$，即q, t为真，或p, t为真，或者p, s为真，即选派方案有三个：

派B和D出差 或者 派A和D出差 或者 派A和C出差

4 已知：如果国家不对农产品给予补贴，那么国家就要对农产品进行控制. 如果对农产品进行控制，农产品就不会短缺. 或者农产品短缺或者农产品过剩. 求证：若事实上农产品不过剩. 则国家对农产品给予了补贴.

(2) 方法一：

令P:国家对农产品给予补贴

Q:国家就要对农产品进行控制

R:农产品短缺

S:农产品过剩.

证$\neg P\to Q, Q\to\neg R, (R\wedge\neg S)\vee(\neg R\wedge S), \neg S\Rightarrow P$

即证$\neg P\to Q, Q\to\neg R, R\vee S, \neg R\vee\neg S, \neg S\Rightarrow P$

① $\neg P\to Q$	前提引入
② $Q\to\neg R$	前提引入
③ $\neg P\to\neg R$	①②三段论
④ $R\to P$	③置换
⑤ $R\vee S$	前提引入
⑥ $\neg S\to R$	⑤置换
⑦ $\neg S\to P$	④⑥三段论
⑧ $\neg S$	前提引入
⑨ P	⑦⑧分离

方法二：

令P:国家对农产品给予补贴

Q:国家就要对农产品进行控制

R:农产品短缺.

即证$\neg P\to Q, Q\to\neg R$，　$R\Rightarrow P$

① $\neg P\to Q$	前提引入
② $Q\to\neg R$	前提引入
③ $\neg P\to\neg R$	①②三段论
④ $R\to P$	③置换
⑤ R	前提引入
⑥ P	④⑤分离

5 给出下列各公式的合取范式、析取范式、主合取范式和主析取范式. 并给出所有使公式为真的解释.

$$(1)\ P \land (Q \lor (\neg P \land R))$$
$$(2)\ P \leftrightarrow (Q \to (Q \to P))$$
$$(3)\ P \to (Q \land (\neg P \leftrightarrow Q))$$

(1)

合取范式：

$$P\land(Q\lor(\neg P\land R))=P\land(\underline{Q\lor\neg P})\land(Q\lor R)=P\land \underline{Q}\land(Q\lor R)=P\land Q$$

析取范式： $P\land(Q\lor(\neg P\land R))=P\land Q=(P\land Q\land R)\lor(P\land Q\land\neg R)$

主合取范式： $P\land(Q\lor(\neg P\land R))=\lor_{6,7}=\land_{2,3,4,5,6,7}$

主析取范式： $P\land(Q\lor(\neg P\land R))=P\land Q=(P\land Q\land R)\lor(P\land Q\land\neg R)=\lor_{6,7}$

在 $\begin{cases}P=T\\Q=T\\R=T\end{cases}$, $\begin{cases}P=T\\Q=T\\R=F\end{cases}$ **两种解释下该式为真.**

(2)

合取范式： $P\leftrightarrow(Q\to(Q\to P))=P\lor Q$

析取范式：

$$\begin{aligned}&P\leftrightarrow(Q\to(Q\to P))\\&=(P\land(\neg Q\lor(\neg Q\lor P)))\lor(\neg P\land\neg(\neg Q\lor(\neg Q\lor P)))\\&=(P\land(\neg Q\lor P))\lor(\neg P\land\neg(\neg Q\lor P))\\&=(P\land(\neg Q\lor P))\lor(\neg P\land Q\land\neg P)\\&=(P\land\neg Q)\lor P\lor(\neg P\land Q)\\&=(P\land\neg Q)\lor P\lor Q\\&=P\lor Q\end{aligned}$$

主合取范式： $P\leftrightarrow(Q\to(Q\to P))=P\lor Q=\land_3$

主析取范式： $P\leftrightarrow(Q\to(Q\to P))=\land_3=\lor_{1,2,3}$

在 $\begin{cases}P=T\\Q=T\end{cases}$, $\begin{cases}P=T\\Q=F\end{cases}$, $\begin{cases}P=F\\Q=T\end{cases}$ **三种解释下该式为真.**

(3)

合取范式：$P \rightarrow (Q \wedge (\neg P \leftrightarrow Q)) = \neg P$

析取范式：

$$
\begin{aligned}
& P \rightarrow (Q \wedge (\neg P \leftrightarrow Q)) \\
= & \neg P \vee (Q \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) = \neg P \vee (Q \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \\
= & \neg P \vee (Q \wedge \neg P) = \neg P
\end{aligned}
$$

主合取范式：$P \rightarrow (Q \wedge (\neg P \leftrightarrow Q)) = \vee_{0,1} = \wedge_{0,1}$

主析取范式：$P \rightarrow (Q \wedge (\neg P \leftrightarrow Q)) = \neg P = \vee_{0,1}$

在 $\begin{cases} P = \mathrm{F} \\ Q = \mathrm{T} \end{cases}$, $\begin{cases} P = \mathrm{F} \\ Q = \mathrm{F} \end{cases}$ 两种解释下该式为真.