2021 年秋《离散数学》图论测试

姓名: ______　　　　　　　　学号: ______　　　　　　　　成绩: ______

一. 不定项选择题: 本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。 每小题有多个选项符合题意, 全部选对的得 4 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错或不答的得 0 分。

B.D　1. 下列关于图的基本概念的说法中，正确的有 ______。

A. 一个包含 5 个节点的图中，节点的度数可能是 (3,4,2,2,4) 。度之和为偶数

B. 已知图 $G=(V,E)$，图 $G'=(V',E')$。 如果 G' 是 G 的支撑子图，那么 $V=V'$。

C. 无向图 G 和 G' 如图 1 所示，G' 是 G 的导出子图。未包含所有边

D. 如果 G 和 G' 不存在同构的导出子图，则 G 和 G' 一定不同构。

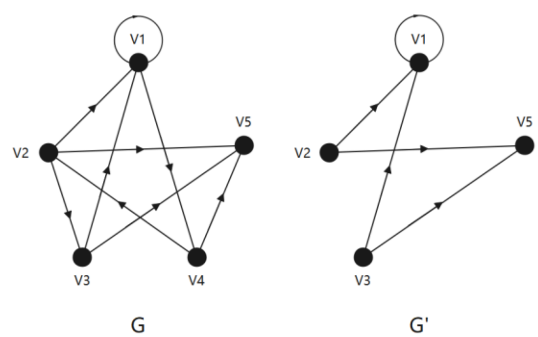


图 1

C.D　2. 下列关于图的代数表示的说法中，正确的有 ______。

邻接矩阵

A. 关联矩阵中能够表示自环和重边。√

B. 有向图的邻接矩阵一定不是对称矩阵。

C. 如**图 1** 所示，有向图 G 的邻接矩阵表示为　无向图是一个对称矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D. 有向图的关联矩阵第 i 行元素和是节点 v_i 的正度和负度之差，非零元素个数则是节点 v_i 的度。

A.B.C.D　3. 下列关于道路与回路的说法中，正确的有 ______。

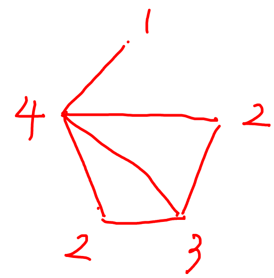
A. 在有向图 G 中，如果回路 L 是一条简单有向回路，那么在 L 中不存在重复出现的边，但是可以出现重复的节点。

定理2.3.1 判断节点的度

B. 在**图 2** 中，如果将 G 看作无向图，则其存在欧拉道路，但不存在欧拉回路。

C. 一个包含 5 个节点的简单图中，节点的度数为 (2,3,1,2,4)，那么此图中包含哈密顿道路但是不包含哈密顿回路。(有节点的度为1)

D. 在**图 2** 中，有向图 G 包含 3 个强连通分量。



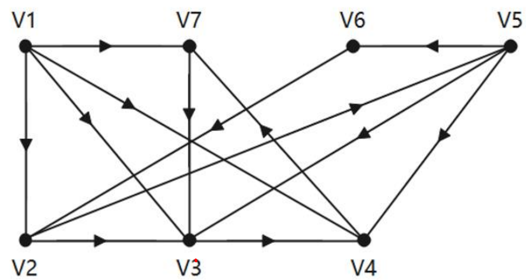
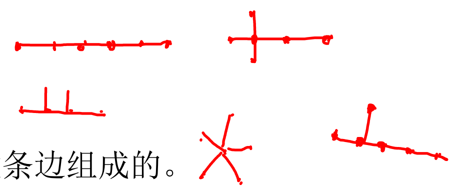


图 2



A

4. 下列说法中，正确的有 ______。

A. 如果二分图 G 中存在回路，则它们都是由偶数条边组成的。

B. 哈密顿图是有哈密~~顿通~~路的图。

C. 空图是只有一个结点的图。边集为空

D. 6 个结点的完全图 G，其不同构的生成树的个数为~~5~~。6

A.D

5. 下列关于树的说法中，正确的有 ______。

A. 含有 n 个结点的树，所有结点的度数之和为 $2(n-1)$。

B. 如果 T 是图 G 的~~导出~~子图, 而且又是一棵树, 则称 T 是 G 的一棵支撑树，简称 G 的树。

支撑/生成

C. 完~~全~~二叉树所有的叶结点都出现在最低的两层上。

D. 满二叉树中的任一结点，如果其右子树的高度为 k，则其左子树的高度为 k 或 $k-1$。

二. 填空题: 本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。

6. 有向图 G 的关联矩阵为

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

则 G 中节点个数为 __5__，所有节点的度数和为 __14__，图 G 中 __不存在__（存在/不存在/无法判断）重边。
(0也算对)

7. **图 3** 中的两有向图，它们 __构成__ (构成/不构成) 同构关系，如果构成，请指出结点间的映射关系；如果不构成，请说明理由 __$u_1 \to v_3$__。$u_2 \to v_4$，$u_3 \to v_2$，$u_4 \to v_1$

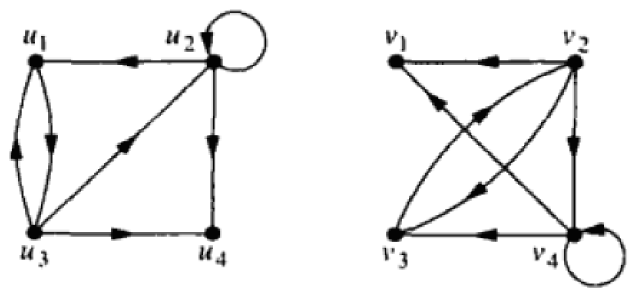
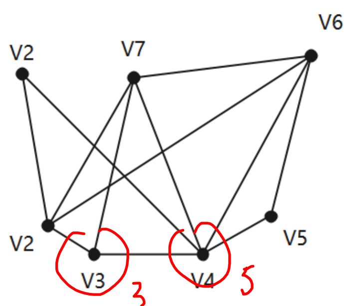


图 3

8. **图 4** 无向图 G 中 __不存在__（存在/不存在）欧拉回路，__存在__（存在/不存在）哈密顿道路。



G

图 4

9. 高度为 k 的完全二叉树，叶子结点的数量为 $2^{k-2}+m$，m 的范围是 __$[0, 2^{k-2}]$__，最低一层的叶子结点的数量为 ______。
$\begin{cases} 1, & m=0 \\ 2m \text{ if } 2m+1 \text{ else} \\ 2^{k-2}, & m=2^{k-1} \end{cases}$

10. 使用哈夫曼树对字符串 "ilovediscretemathematics" 进行编码，得到的哈夫曼树的带权路径总长为 __86__。

三. 证明和解答题: 本题共 5 小题，每题 8 分，共 40 分。

11. 画出**图 5** 中无向图 G_1, G_2 的交、并、对称差。

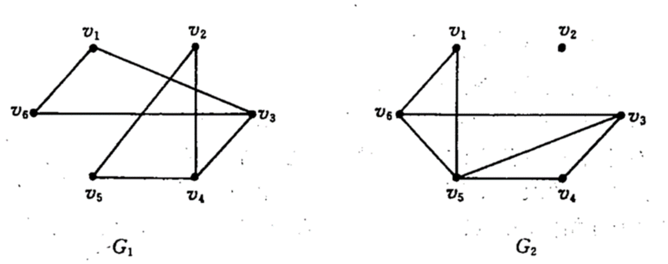
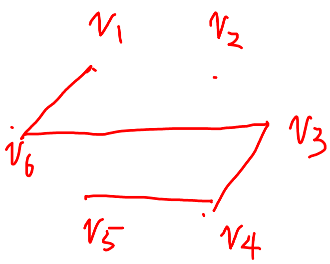
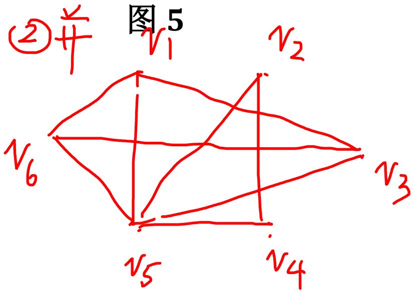


图 5

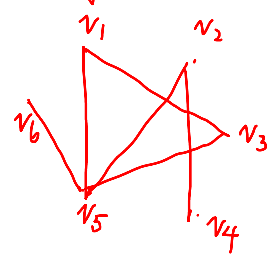
①交



②并



③对称差



12. 已知无向图 G 的关联矩阵为

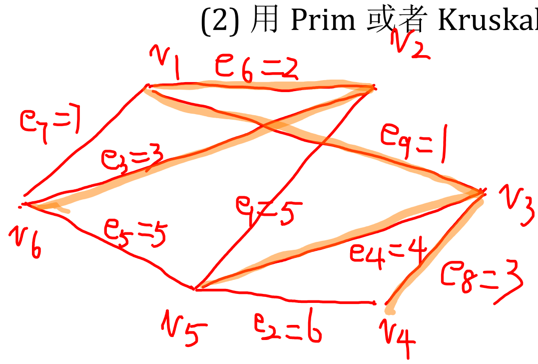
$$
\begin{array}{c}
v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9
\end{bmatrix}
$$

给其各边赋值权重 $w(e_1) = 5, w(e_2) = 6, w(e_3) = 3, w(e_4) = 4, w(e_5) = 5, w(e_6) = 2, w(e_7) = 7, w(e_8) = 3, w(e_9) = 1$。

(1) 写出图 G的邻接矩阵。

(2) 用 Prim 或者 Kruskal 算法得到其最短树，并计算该树中所有边的权值之和。

(1)



$$
\begin{array}{c}
v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6 \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6
\end{array}
$$

(2) Kruskal $1 \to 2 \to 3 \to 3 \to 4$ 最短树为13

13. 若无向简单图 G 是欧拉图，证明或反驳：

(1) 当 G 的顶点数是奇数时，若补图 $\overline{G}$ 是连通的，则 $\overline{G}$ 中存在欧拉通路。

(2) 当 G 的顶点数是偶数时，若补图 $\overline{G}$ 是连通的，则 $\overline{G}$ 中存在欧拉通路。

(1) 欧拉图 → 度为偶点

G的顶点为奇数 → G的完全图度为偶数

$\Rightarrow$ $\overline{G}$ 度为偶数

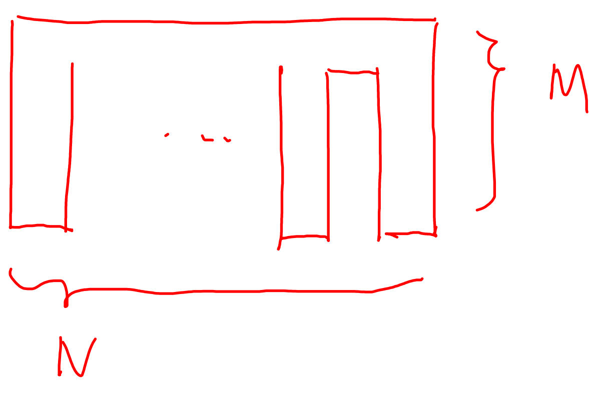
(2) 证明或者举反例

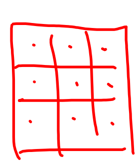
14. 考虑 $M * N$ 的网格，以其中的方格作为点集，任意两个点之间有边当且仅当对应的两个方格相邻，构成图 G。

(1) 当 N 是偶数且 $M > 1$ 时，给出一种哈密顿回路的构造方法。

(2) 当 N 和 M 都是大于 1 的奇数时，证明此时 G 没有哈密顿回路。

(1)





(2) 方法1：标色法

方法2：

$W(G-S) = \frac{MN+1}{2}$

$|S| = \frac{MN-1}{2}$

必要性：G是H图，$S \subseteq V$

$\Rightarrow W(G-S) \leq |S|$

第一行取偶数点，第二行奇数点 …

15. 已知引理（教材例 2.1.3）：设 C 是简单图 G 中含结点数大于 3 的一个初级回路。如果结点 v_i, v_j 在 C 中不相邻，而边 $(v_i, v_j) \in E(G)$，则称 (v_i, v_j) 是 C 的一条弦。若对每一个 $v_k \in V(G)$ 都有 $d(v_k) \geq 3$，则 G 中含有带弦的回路。

证明：在简单图中，若 $n \geq 4$ 且 $m \geq 2n-3$，则G中含有带弦的回路。

当 $n=4$ 时，$m \geq 2\times4-3=5$

假设 $n \leq k$ 时，命题成立

当 $n=k+1$ 时，$m \geq 2(k+1)-3 = 2k-1$

① $\exists v_i$，$d(v_i)=1$，剩余的 k 个点 $m' \geq 2k-1-1 = 2k-2$

② $\exists v_i$，$d(v_i)=2$，连接相邻的两点

③ $\forall v_i$，$d(v_i) \geq 3 \Rightarrow$ 引理.