第二章 道路与回路

2.1道路与回路

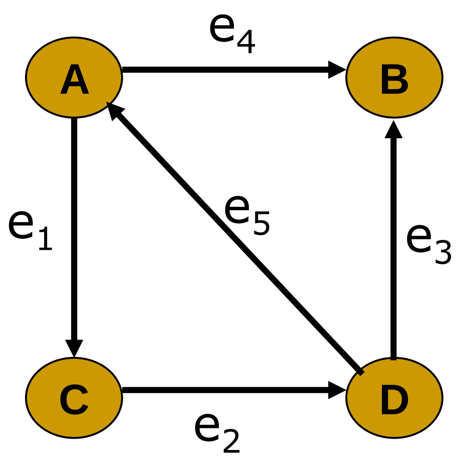
- 定义2.1.1

  有向图G=(V,E)中,若边序列P=(e_{i1}, e_{i2}, …, e_{iq}),其中e_{ik}=(v_i, v_j) 满足v_i是e_{ik-1}的终点, v_j 是e_{ik+1}的始点，就称P是G的一条有向道路.如果e_{iq}的终点也是e_{i1}的始点，则称P是G的一条有向回路

道路与回路

- 如果P中的边没有重复出现，则分别称为简单有向道路和简单有向回路
- 进而, 如果P中结点也不重复出现, 又分别称它们是初级有向道路和初级有向回路, 简称为路和回路
- 显然,初级有向道路(回路)一定是简单有向道路(回路)

有向道路



(e1, e2, e5, e1) 有向道路，不是简单有向道路

(e1, e2, e5, e4) 简单有向道路，不是初级有向道路**(A)**

(e1, e2, e3) 初级有向道路

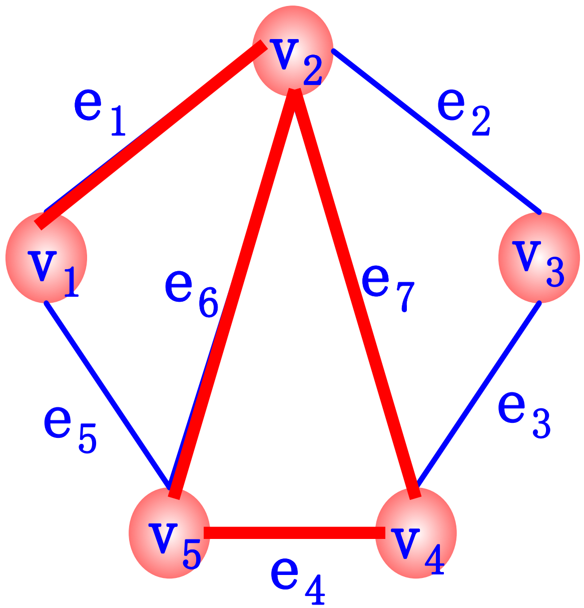
(e1, e2, e5) 初级有向回路

道路与回路

- 定义2.1.2

  无向图G=(V, E)中，若点边交替序列P=(v_{i1}, e_{i1}, v_{i2}, e_{i2}, …, e_{iq-1}, v_{iq})满足v_{ik}, v_{ik+1}是e_{ik}的两个端点, 则称P是G中的一条链或道路. 如果v_{iq}=v_{i1}, 则称P是G中的一个圈或回路，其长度为边数（q-1）
- 如果P中没有重复出现的边, 称之为简单道路或简单回路, 若其中结点也不重复, 又称之为初级道路或初级回路

例



V_1到v_2的简单道路

V_1到v_4的初级道路

道路与回路

- 定义2.1.3

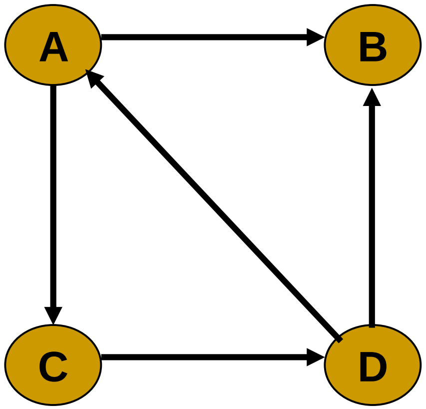
  1. 设G是无向图, 若G的任意两结点之间都存在道路, 就称G是连通图, 否则称为非连通图

  2. 如果G是有向图, 不考虑其边的方向, 即视为无向图, 若它是连通的, 则称G是连通图

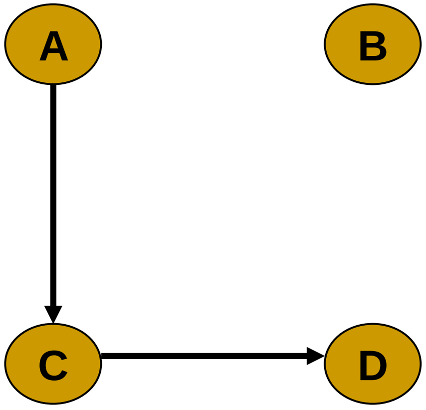
  3. 若连通子图H不是G的任何连通子图的真子图, 则称H是G的极大连通子图或称连通支

  显然G的每个连通支都是它的导出子图

连通图



连通图



非连通图

两个连通分支**{B}, {A, C, D}**

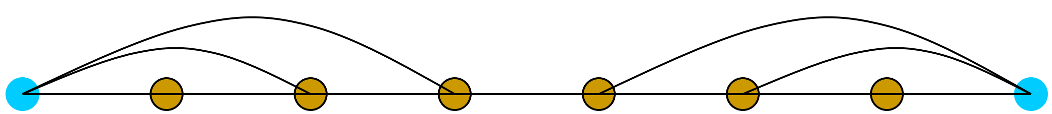
道路与回路

- 定义2.1.4

  设C是简单图G中含结点数大于3的一个初级回路，如果结点v_i和v_j在C中不相邻，而边$(v_i,v_j)\in E(G)$，则称(v_i,v_j)是C的一条弦。

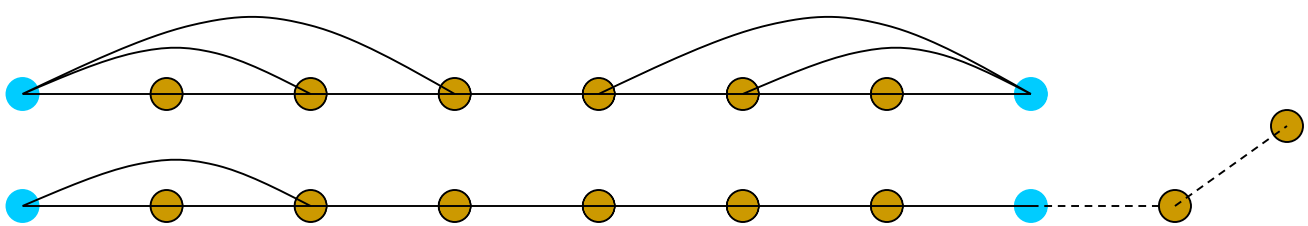
极长初级道路

- 极长初级道路：在简单图$G=<V,E>$中，$E \neq \emptyset$，设$\Gamma_1=v_0v_1\ldots v_l$为G中一条初级道路,若路径的两个端点$v_0$和$v_l$不与初级道路本身以外的任何结点相邻，这样的初级道路称为极长初级道路(有向图中，初级道路起点的前驱集（内邻集），终点的后继集（外邻集），都在初级道路本身上)

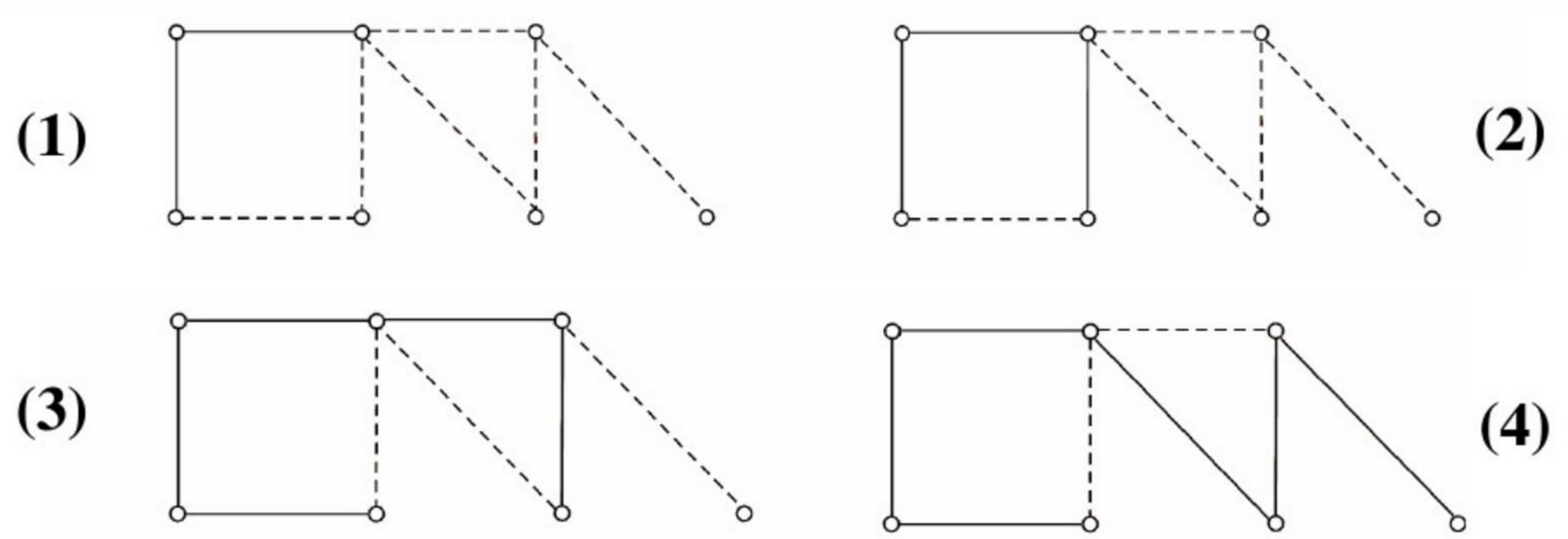


扩大初级道路法

- 扩大初级道路法：任何一条初级道路，如果不是极长初级道路，则至少有一个端点与初级道路本身以外的结点相邻，则将该结点及其相关联的边扩到新的初级道路中来，得到更新的初级道路。继续上述过程，直到变成极长初级道路为止



极长初级道路 实例



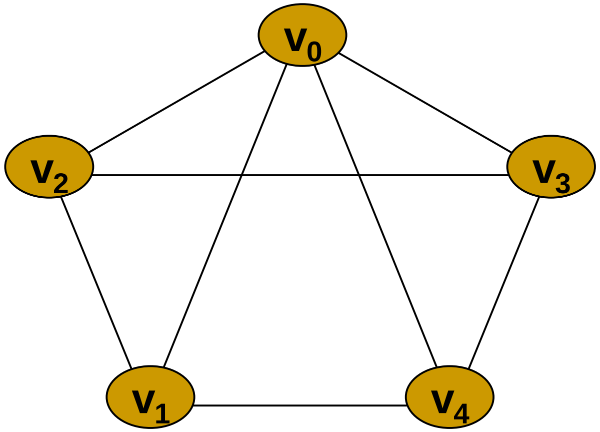
- 由某条道路扩大出来的极长初级道路不唯一，可以说，极长初级道路不是图中最长的道路
- （1）中的实线边所示为长度为2的初级道路，而（2）（3）（4）为扩大后的极长初级道路

道路与回路

- **证明：若对简单图G中每一个$v_k \in V(G)$，都有$d(v_k) \geq 3$，则G中必含带弦的回路。**

证明：在G中构造一条极长的初级道路$P=(v_0, e_{i1}, v_1, e_{i2}, \ldots, v_{l-1}, e_{il}, v_l)$。由于P是极长的初级道路，所以$v_0$和$v_l$的邻接点都在该道路P上。由已知条件，$d(v_0) \geqslant 3$，不妨设$\Gamma(v_0)=\{v_1, v_{ij}, v_{ik}, \ldots\}$, 其中$1<j<k$，这时$(v_0, v_1, \ldots, v_{ik}, v_0)$是一条初级回路，而$(v_0, v_{ij})$就是该回路中的一条弦。

带弦回路



1. 构造极长初级道路

(v0, v1), (v0, v1, v2), (v0, v1, v2, v3), (v0, v1, v2, v3, v4)

2. Γ(v0)={v1,v2,v3,v4}

3. (v0,v1,v2,v3,v0)即为所求的初级回路，

而**(v0,v2)**就是该回路的一条弦

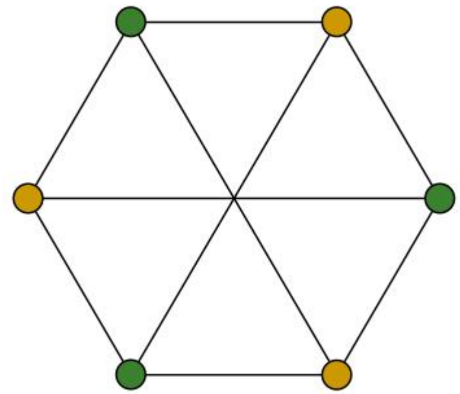
道路与回路

二分图

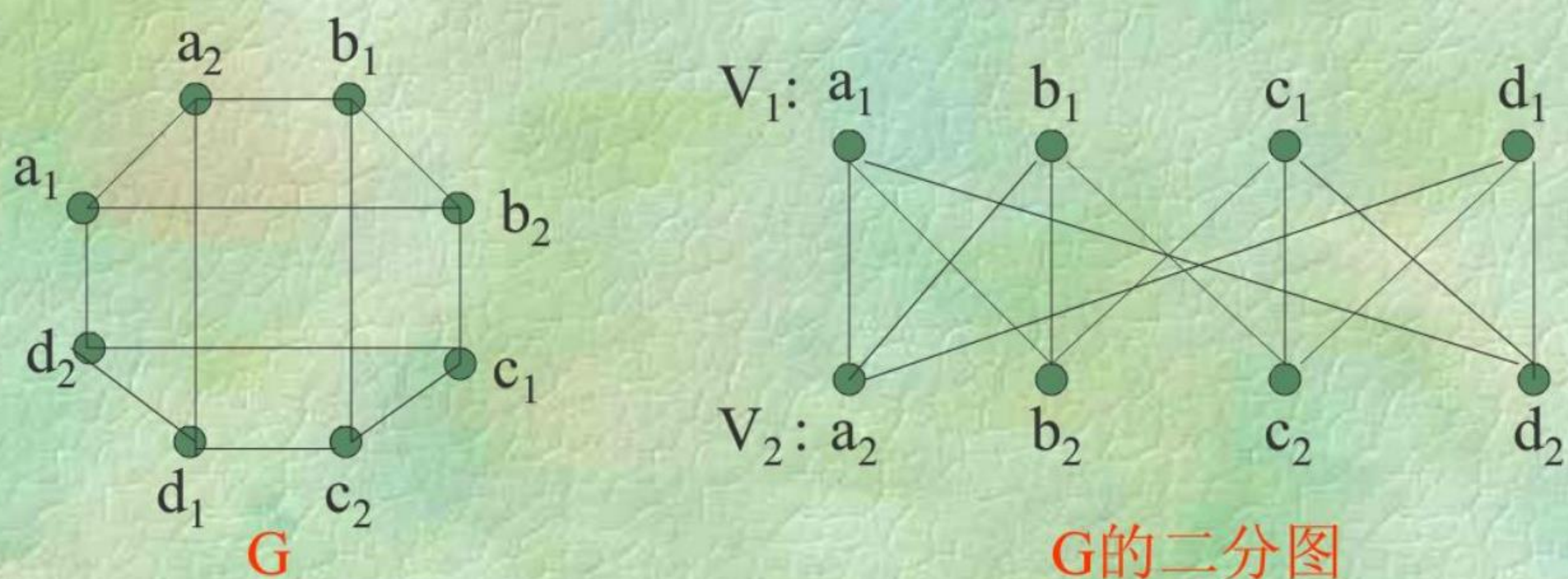
- 定义5.1.4：如果图G 的顶点集V(G)能够分成两个不相交的非空子集V_1和 V_2，使得G的每条边的两个端点分别在 V_1和 V_2中，则称G为二分图。记为G=< V_1 , V_2 >。
- 二分图G的二划分子集V_1、V_2可能不唯一。
- 若二分图G=< V_1 , V_2 >中V_1的每个顶点与 V_2的每个顶点都邻接，则称G为完全二分图，记为$K_{m,n}$，其中，$|V_1|=m$，$|V_2|=n$。

道路与回路

- 完全二分图$K_{3,3}$



- 下面是图G及其二分图：



道路与回路

- 含有K_3子图的图一定不是二分图
- K_n不是二分图（n>=3）

道路与回路

- **证明：如果二分图G中存在回路，则它们都是由偶数条边组成的。**

证明：设C是二分图G的任一条回路，不妨设$v_0 \in X$是C的始点，由于G是二分图，所以沿回路C必须经过偶数条边才能达到某结点$v_i \in X$，因而只有经过偶数条边才能回到v_0。

补图

- 定义5.1.5：如果简单图G和简单图H满足:

  (1)V(H)=V(G)=V；（顶点集相等）

  (2)对∀u、v ∈V， u≠v，uv ∈E(H)，当且仅当 uv ∉E(G)，（边集互补）

则称H为G的补图，(是边的补集)记为H=$\overline{G}$ 。

- 两个简单图互为补图的例子:

道路与回路

- **证明：设G是简单图，当m>(n-1)(n-2)/2时，G是连通图。**

证明：假定G是非连通图，则它至少含有2个连通分支。设分别是$G_1=(V_1,E_1)$, $G_2=(V_2,E_2)$。其中

$|V_1(G_1)|=n_1$, $|V_2(G_2)|=n_2$, $n_1+n_2=n$,

$|E_1(G_1)|+|E_2(G_2)|=m$。由于G是简单图，因此

$$|E_1(G_1)| \le \frac{1}{2}n_1(n_1-1),$$

$$|E_2(G_2)| \le \frac{1}{2}n_2(n_2-1),$$

$$m \le \frac{1}{2}n_1(n_1-1)+\frac{1}{2}n_2(n_2-1).$$

道路与回路

由于$1 \le n_1 \le n-1$, $1 \le n_2 \le n-1$

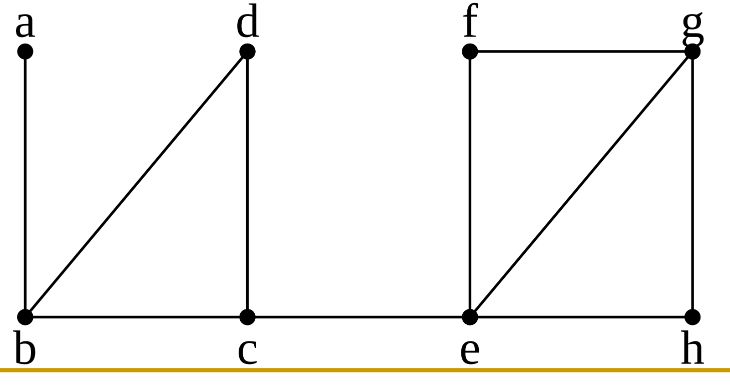
所以

$$m \le \frac{1}{2}(n-1)(n_1-1+n_2-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

与已知条件矛盾，故G是连通图。

道路与回路

- n个结点的连通图的边数一定≥n-1
- 两点间距离：若u与v连通，则u与v之间最短道路长度称为u与v的距离
- 割点：去掉该点（及关联边后），图的连通分支数上升
- 割边（桥）：去掉该边后，图的连通分支数上升



割点为：**b, c**和**e**　　　　桥：**{a, b}**和 **{c, e}**

补：等价概念

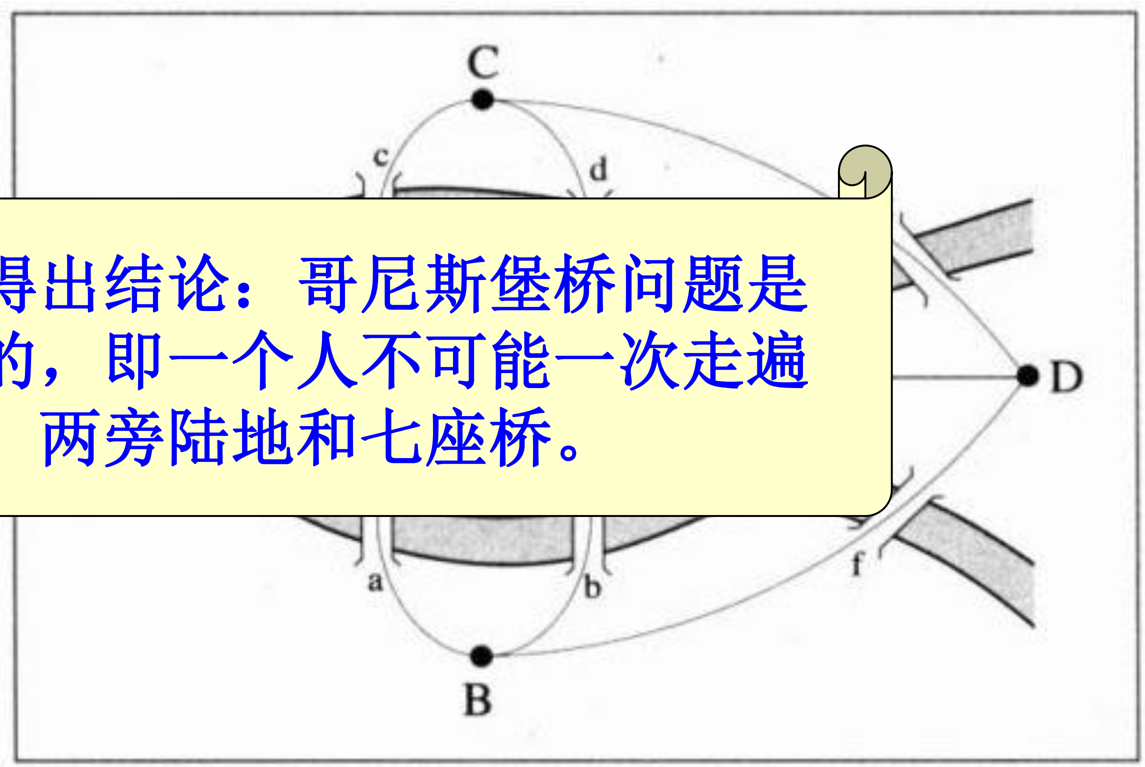
清华教材	曹老师教材
▪ 链/道路	通道（依据起点终点是否重合：开/闭）
▪ 简单道路	迹（依据起点终点是否重合：开/闭）
▪ 初级道路	路
▪ 初级回路	圈（依据长度：奇/偶）
▪ 二分图	二部图/偶图

2.3 欧拉道路与回路

- 1736年瑞士著名数学家欧拉(Leonhard Euler)发表了图论的第一篇论文“哥尼斯堡七桥问题”．成功地回答了，图中是否存在经过每条边一次且仅一次的回路
- 人们普遍认为欧拉是图论的创始人
- 1936年，匈牙利数学家寇尼格（Konig）出版了图论的第一部专著《有限图与无限图理论》，这是图论发展史上的重要的里程碑，它标志着图论将进入突飞猛进发展的新阶段

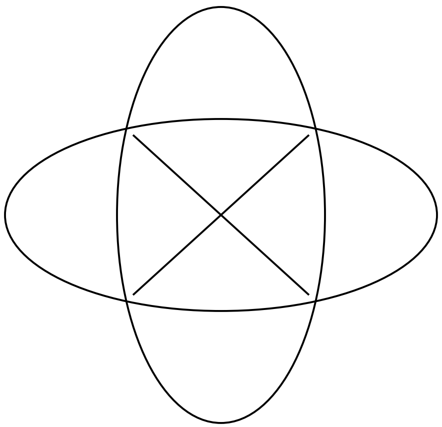
哥尼斯堡七桥问题

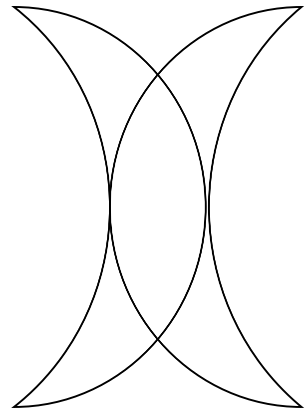
1736年，瑞士数学家列昂哈德·欧拉（Leonhard Euler）仔细研究了这个问题，他将上述四块陆地与七座桥间的关系用一个抽象的图形来描述，其中的四块陆地分别用四个点表示，而陆地之间有桥相连者则用连结两个点的边表示。

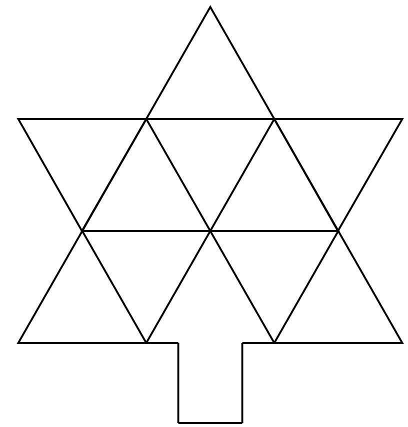


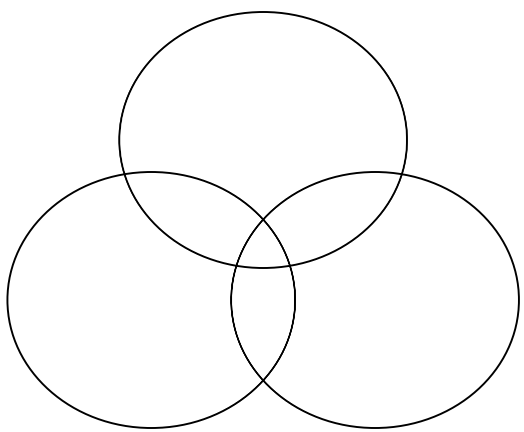
欧拉得出结论：哥尼斯堡桥问题是无解的，即一个人不可能一次走遍两岛、两旁陆地和七座桥。

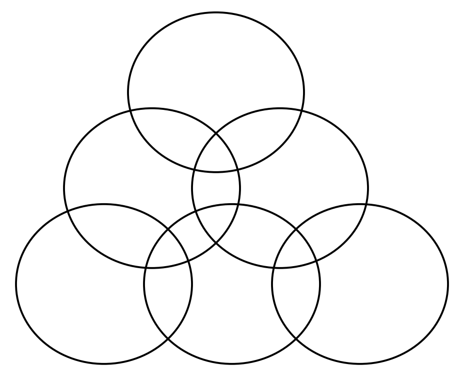
一笔画











欧拉道路与回路（欧拉迹与欧拉闭迹）

- 定义2.3.1

  无向连通图G=(V, E)中的一条经过所有边的简单回路(道路)称为G的欧拉回路(道路)

- 定理2.3.1

  无向连通图G存在欧拉回路的充要条件是G中各结点的度都是偶数

欧拉道路与回路

- 定理2.3.1的证明：

1. 必要性：若G中有欧拉回路C，则C过每条边一次且仅一次．对任一结点v来说，如果C经过e_i进入v，则一定通过另一条边e_j从v离开. 因此结点v的度是偶数
2. 充分性：由于G是有穷图，因此可以断定，从G的任一结点v_0出发一定存在G的一条简单回路C. 这是因为各结点的度都是偶数，所以这条简单道路不可能停留在v_0以外的某个点，而不能再向前延伸以致构成回路C

定理2.3.1充分性证明

如果E(G)=C, 则C就是欧拉回路，充分性得证。

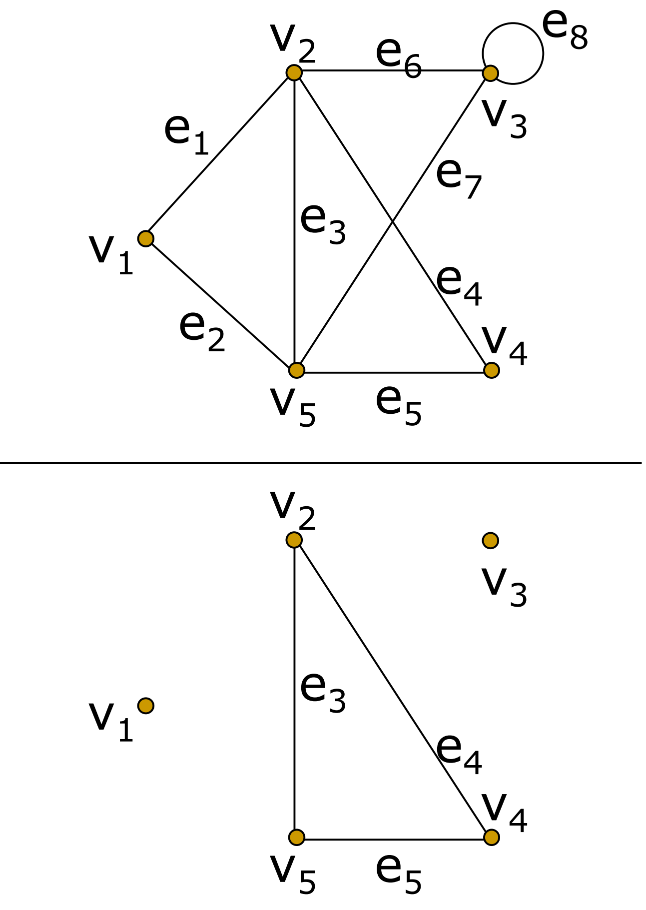
否则在G中删去C的各边，得到G_1=G-C。

G_1可能是非连通图，但是每个结点的度保持为偶数。这时，G_1中一定存在某个度非零的结点v_i, 同时v_i也是C中的结点。否则C的结点与G_1的结点之间无边相连，与G是连通图矛盾。

同理，从v_i出发，G_1中v_i所在连通分支内存在一条简单回路C_1。显然，$C \cup C_1$仍然是G的一条简单回路，但它包括的边数比C多。

继续以上构造方法，最终有简单回路C’ = $C \cup C_1 \cup \ldots \cup C_k$，它包含了G的全部边，即C’是G的一条欧拉回路

构造欧拉回路



$C=(e_1,e_6,e_8,e_7,e_2)$

$C' =(e_3,e_5,e_4)$

$C \cup C' =(e_1,e_3,e_5,e_4,e_6,e_8,e_7,e_2)$

$=E(G)$

欧拉道路与回路

- 推论2.3.1

  若无向连通图G中只有2个度为奇的结点,则G存在欧拉道路.

  证明：设v_i和v_j是两个度为奇数的结点.

  作G’=G+(v_i, v_j), 则G’中各点的度都是偶数. 由定理2.3.1, G’有欧拉回路, 它含边(v_i, v_j), 删去该边, 得到一条从v_i到v_j的简单道路, 它恰好经过了G的所有边, 亦即是一条欧拉道路

欧拉道路与回路

- 结论：七桥问题既不存在欧拉回路也不存在欧拉道路。
- 推论2.3.2

  若有向连通图G中各结点的正、负度相等, 则G存在有向欧拉回路.

  其证明与定理2.3.1的证明相仿.

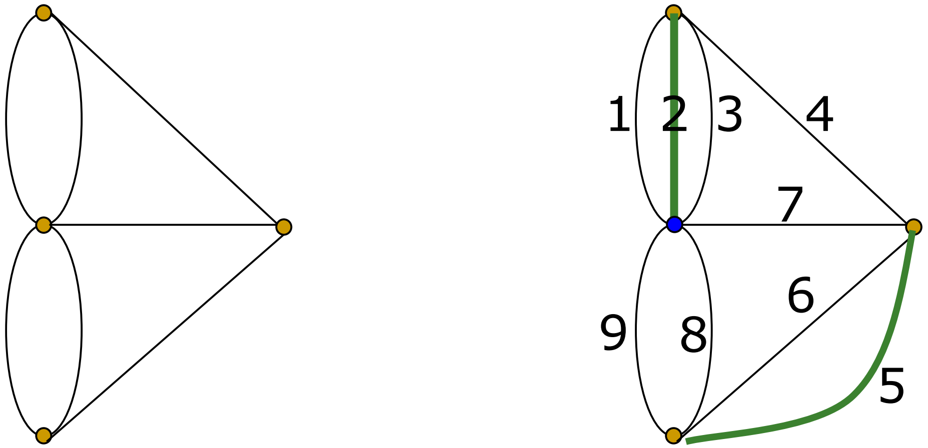
欧拉道路与回路

- 例2.3.3 设连通图G=(V,E)有k个度为奇数的结点，那么E(G)可以划分成k/2条简单道路。

证明：由性质1.1.2，k是偶数。在这k个结点间增添k/2条边，使每个结点都与其中一条边关联，得到G’，那么G’中各结点的度都为偶数。

由定理2.3.1，G’包含一个欧拉回路C。而新添的k/2条边在C上都不相邻。所以删去这些边后，我们就得到由E(G)划分成的k/2条简单道路。

举例



- 欧拉回路(1,2,3,4,5,6,7,8,9)
- 2(=4/2)条简单道路(3,4)和(6,7,8,9,1)

一笔画

- 某图形是否可以一笔画出
  - 凡是由偶点组成的连通图，一定可以一笔画成。画时可以把任一偶点为起点，最后一定能以这个点为终点画完此图
  - 凡是只有两个奇点的连通图（其余都为偶点），一定可以一笔画成。画时必须把一个奇点为起点，另一个奇点终点
  - 其他情况的图都不能一笔画出,但是奇点数除以二便可算出此图需几笔画成

作业一

- P35

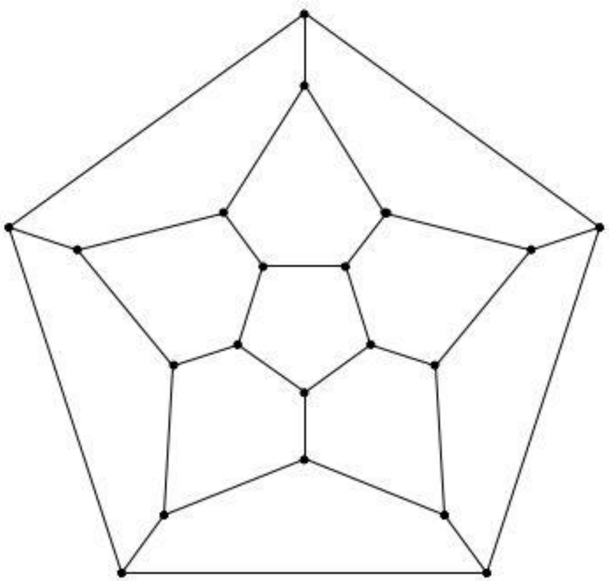
1; 2; 3; 6

2.4 哈密顿道路与回路（哈密顿路与圈）

19世纪英国数学家哈密顿提出的问题：

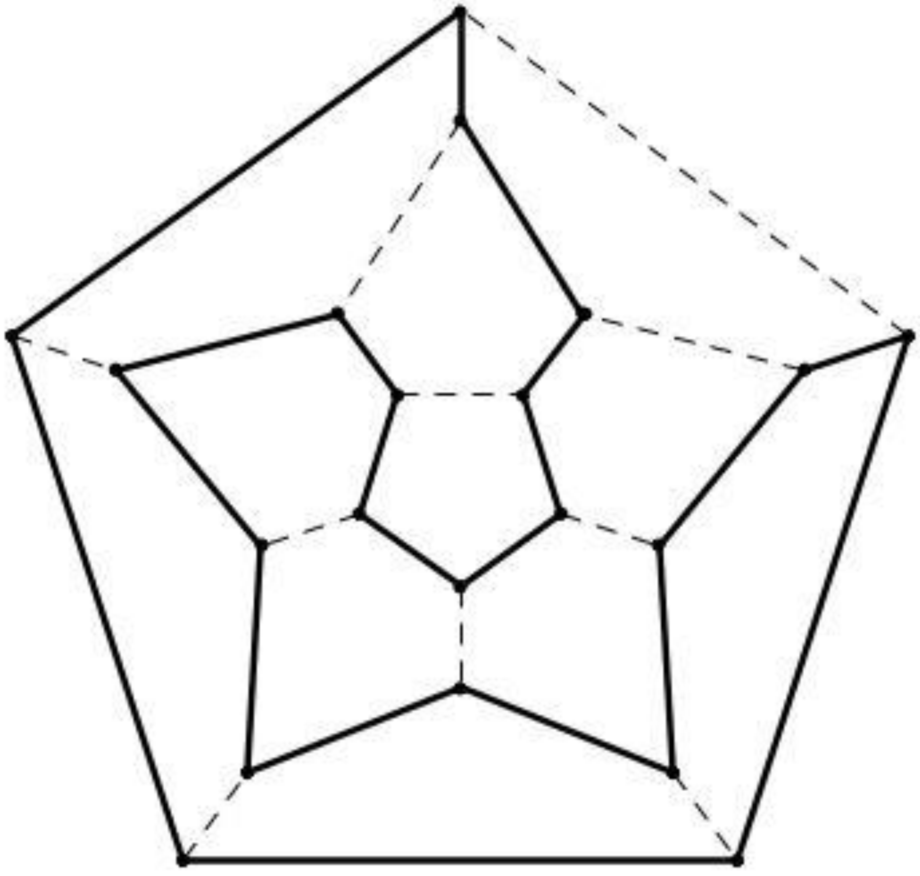
一个凸**12**面体，把**20**个顶点比作世界上**20**个城市，**30**条棱表示这些城市间的交通路线。

问：能否周游世界，即从某个城市出发，经过每城一次且只一次最后返回出发地。



哈密顿道路与回路

答案：



哈密顿道路与回路

- 定义2.4.1
  无向图的一条过全部结点的初级回路(道路)称为G的哈密顿回路(道路),简记为H回路(道路)
- 哈密顿回路是初级回路，是特殊的简单回路，因此它与欧拉回路不同。当然在特殊情况下，G的哈密顿回路恰好也是其欧拉回路
- 鉴于H回路是初级回路，所以如果G中含有重边或自环，删去它们后得到的简单图G’，那么G和G’关于H回路（道路）的存在性是等价的。因此，判定H回路存在性问题一般是针对简单图的

充分条件和必要条件

- 满足充分条件，判断是(是哈密顿图)
- 不满足必要条件，判断否(不是哈密顿图)

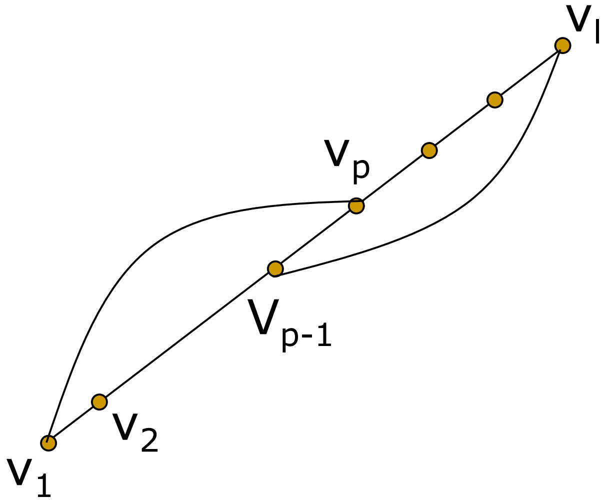
- 不满足充分条件，不能判断否(不是哈密顿图)
- 满足必要条件，不能判断是(是哈密顿图)

哈密顿道路与回路-引理*

- 引理*：设$P=(v_1, v_2, \ldots, v_l)$是图G中一条极长的初级道路(即$v_1$和$v_l$的邻点都在P上)而且$d(v_1)+d(v_l) \geq l$，则G中一定存在经过结点$v_1, v_2, \ldots, v_l$的初级回路。

证明：反证法。若边$(v_1,v_p) \in E(G)$，就不能有$(v_l, v_{p-1}) \in E(G)$，不然删除(v_p, v_{p-1})，就形成了一条过这l个结点的初级回路。于是，设$d(v_1)=k$，则$d(v_l) \leq l-k-1$。因此$d(v_1)+d(v_l) \leq l-1$ 。与已知矛盾。所以存在经过结点$v_1, v_2, \ldots, v_l$的初级回路C。

哈密顿道路与回路-引理*



哈密顿道路与回路-充分性定理1

- 定理2.4.1

  如果简单图G的任意两结点v_i, v_j之间恒有

  $$d(v_i)+d(v_j)\geq n-1$$

  则G中存在哈密顿道路

证明: 先证G是连通图。若G非连通，则至少分为2个连通支H_1, H_2，其结点数分别为n_1, n_2。从中各任取一个结点v_i, v_j，则

$d(v_i)\leq n_1-1$， $d(v_j)\leq n_2-1$。

故$d(v_i)+d(v_j)<n-1$。矛盾。

哈密顿道路与回路-充分性定理1

- 以下证G存在H道路。设$P=(v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{il})$是G中一条极长的初级道路，即$v_{i1}$和$v_{il}$的邻点都在P上。此时，

(1) 若$l=n$, P即为一条H道路

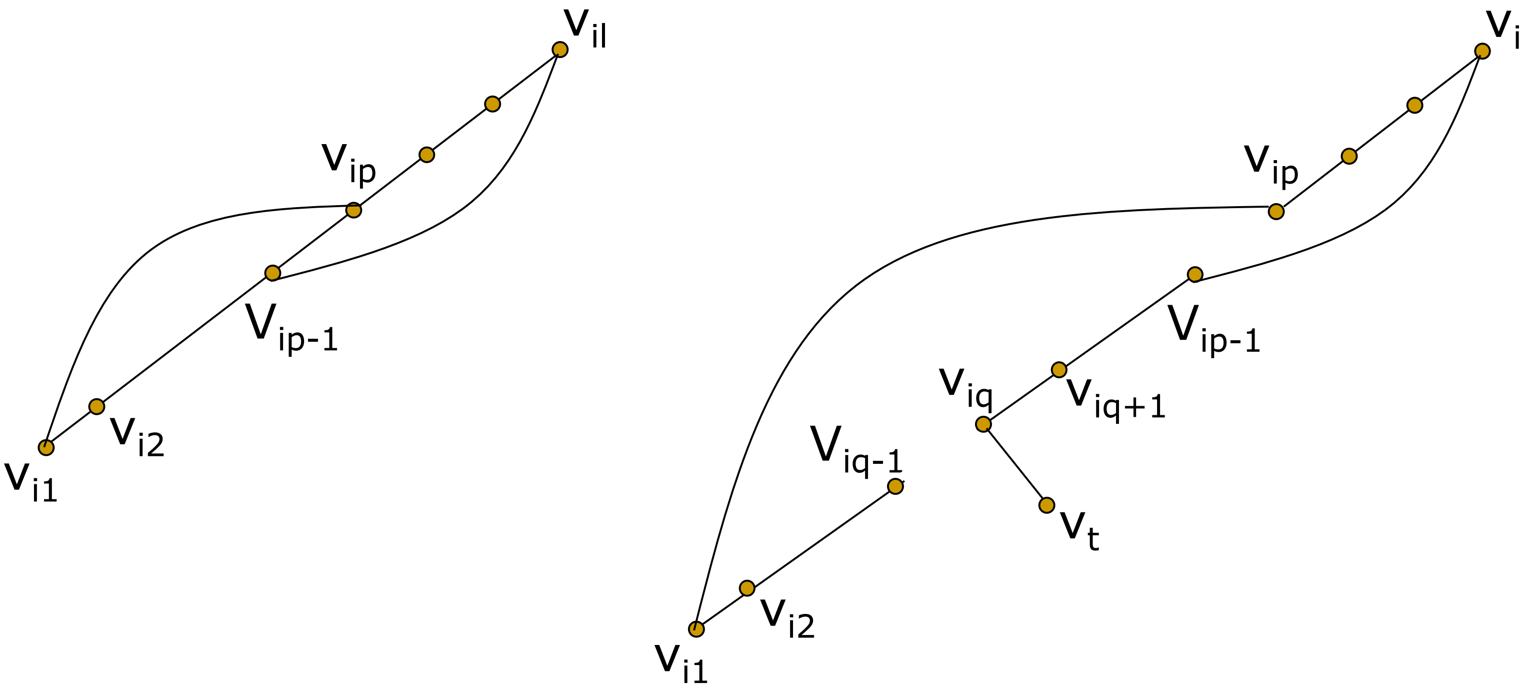
(2) 若$l<n$，则可以证明G中一定存在经过结点$v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{il}$的初级回路。(CLAIM)

否则，若边$(v_{i1},v_{ip})\in E(G)$, 就不能有$(v_{il}, v_{ip-1})\in E(G)$，不然删除$(v_{ip}, v_{ip-1})$，就形成了一条过这$l$个结点的初级回路。于是，设$d(v_{i1})=k$，则$d(v_{il})\leq l-k-1$(其中减去1表示不能与自身相邻)。因此$d(v_{i1})+d(v_{il}) \leq l-1 < n-1$。与已知矛盾。所以存在经过结点$v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{il}$的初级回路C。

哈密顿道路与回路-充分性定理1

由于G连通，所以存在C之外的结点v_t与C中某点(v_{iq})相邻。删去(v_{iq-1}, v_{iq})，则P’=(v_t, v_{iq}, …, v_{ip-1}, v_{il}, …, v_{ip}, v_{i1}, …, v_{iq-1})是G中一条比P更长的初级道路。以P’的两个端点v_t和v_{iq-1}继续扩充，可得到一条新的极长的初级道路。重复上述过程，因为G是有穷图，所以最终得到的初级道路一定包含了G的全部结点，即是H道路。

哈密顿道路与回路-充分性定理1



哈密顿道路与回路-充分性定理1

- 推论2.4.1

  若简单图G的任意两结点v_i和v_j之间恒有

  $$d(v_i)+d(v_j)\geq n$$

  则G中存在哈密顿回路

证明：由定理2.4.1，G有H道路。设其两端点是v_1和v_n，若G不存在H回路，根据引理*证明，一定有：若$d(v_1)=k$, 则$d(v_n)\leq n-k-1$，那么$d(v_1)+d(v_n)\leq n-1<n$，与已知矛盾。

- 推论2.4.2

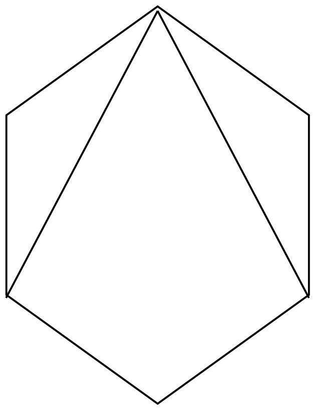
  若简单图G中每个结点的度都大于等于n/2，则G有H回路

证明：由推论2.4.1可得。

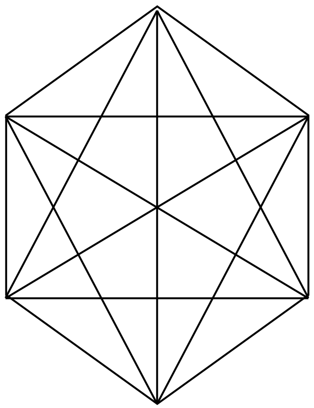
哈密顿道路与回路

- 定义2.4.2

  若v_i和v_j是简单图G的不相邻结点，且满足$d(v_i)+d(v_j) \geq n$, 则令G’=G+(v_i, v_j). 对G’重复上述过程，直至不再有这样的结点对为止．最终得到的图为G的闭合图，记作C(G).



G



C(G)

哈密顿道路与回路

- 引理2.4.1

  简单图G的闭合图C(G)是唯一的。

证明：设$C_1(G)$和$C_2(G)$是G的两个闭合图，$L_1=\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$，$L_2=\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$分别是$C_1(G)$和$C_2(G)$中新加入边的集合，可以证明$L_1=L_2$，即$C_1(G)=C_2(G)$。如若不然，不失一般性，设$e_{i+1}=(u,v)\in L_1$是构造$C_1(G)$时第一条不属于$L_2$的边，亦即$e_{i+1}\notin L_2$。令$H=G\cup\{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$，这时H是$C_1(G)$也是$C_2(G)$的子图。由于构造$C_1(G)$时要加入$e_{i+1}$，显然H中满足$d(u)+d(v)\geq n$，但是$(u,v)\notin C_2(G)$，与$C_2(G)$是G的闭合图矛盾。

哈密顿道路与回路

- 引理2.4.2

  设G是简单图, v_i,v_j是不相邻结点，且满足 $d(v_i)+d(v_j)\geq n$. 则G存在H回路的充要条件是$G+(v_i, v_j)$有H回路

证明：必要性显然。现证充分性。假定G不存在H回路，则$G+(v_i,v_j)$的H回路一定经过边(v_i,v_j)，删去(v_i,v_j)，即G中存在一条以v_i,v_j为端点的H道路，这时又有$d(v_i)+d(v_j)<n$，与已知矛盾。

哈密顿道路与回路-充分性定理2

- 定理2.4.2

  简单图G存在哈密顿回路的充要条件是其闭合图存在哈密顿回路

证明：设$C(G)=G\cup L_1$, $L_1=\{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$,

由引理2.4.1和引理2.4.2，

G有H回路$\Leftrightarrow G+e_1$有H回路$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow G\cup L_1$有H回路

由于C(G)是唯一的，故定理得证。

- 推论2.4.3

  设G($n\geq 3$)是简单图, 若C(G)是完全图K_n, G有H回路

说明:$d(v_i)+d(v_j)=(n-1)+(n-1)=n+(n-2)$

哈密顿道路与回路

- 举例：设n(≥3)个人中，任两个人合在一起都认识其余n-2个人。证明这n个人可以排成一队，使相邻者都互相认识。

证明：每个人用一个结点表示，相互认识则用边连接相应的结点，于是得到简单图G。若G中有H道路，则问题得证。

由已知条件，对任意两点v_i, $v_j \in V(G)$，都有$d(v_i)+d(v_j) \geq n-2$。此时，

(1)若v_i和v_j相识，即$(v_i,v_j) \in E(G)$, 则$d(v_i)+d(v_j) \geq n$

(2) 若v_i和v_j不相识，必存在$v_k \in V(G)$，满足(v_i,v_k), $(v_j,v_k) \in E(G)$。否则，设$(v_i,v_k) \notin E(G)$，就出现v_k, v_j合在一起不认识v_i，与已知矛盾。因此也有$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1$

综上由定理2.4.1，G中存在H道路。

哈密顿道路与回路-必要性定理

- 必要性定理：

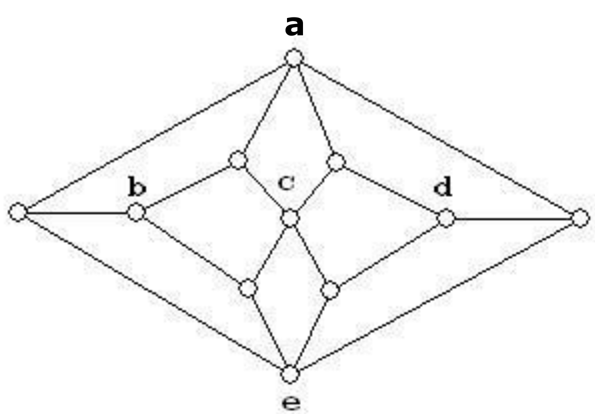
  若G是H-图，则对于V的每个非空真子集S，均有W(G-S)≤|S|，其中W(G-S)是G-S中连通分支数。

证明：设C是G的H-回路，则对于V的每个非空真子集S均有W(C-S)≤|S|。而C-S是G-S的生成子图，故W(G-S)≤W(C-S),因此W(G-S)≤|S|。

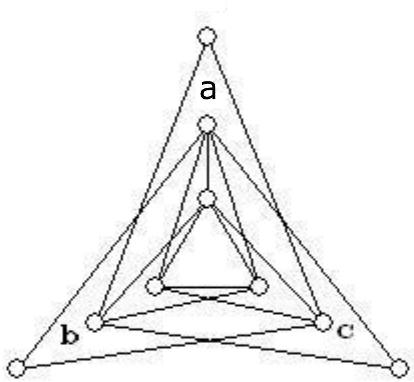
以K_4为例。

哈密尔顿图

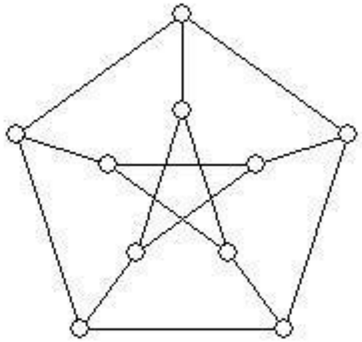
例 判定下面三个图是否是哈密尔顿图.



G_1



G_2



G_3

哈密尔顿图

- 在G_1中，令S={a,b,c,d,e}，则$W(G_1-S)=6$，由必要性定理知, G不是哈密尔顿图。
- 在G_2中令S={a,b,c}，则$W(G_2-S)=4$，所以G_2也不是哈密尔顿图。
- G_3称为彼得森图。可以证明它不是哈密尔顿图, 但对它的任意顶点子集S, 有$W(G_3-S) \leqslant |S|$。这说明必要性定理中的条件, 只是哈密尔顿图的一个必要条件，而不是充分条件
  - 与彼得森图同构的图也一定不是哈密尔顿图

充分条件和必要条件

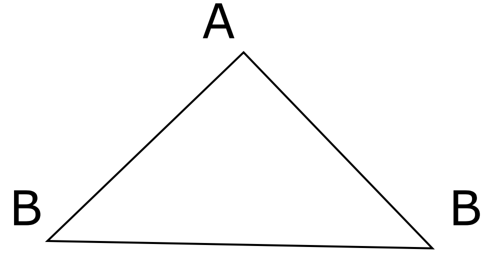
- 满足充分条件，判断是(是哈密顿图)
- 不满足必要条件，判断否(不是哈密顿图)

- 不满足充分条件，不能判断否(不是哈密顿图)
- 满足必要条件，不能判断是(是哈密顿图)

- 推论:哈密顿图没有割点.
- 定理:有奇数个顶点的二部图必不是哈密顿图.

哈密尔顿图

- 对于一个H-图，如果可以用A, B交替标记所有的顶点（即：从任一结点开始，给其标以A，它的邻接点标以B，B的邻接点再标以A，如此继续下去，直至G中所有结点被标完），则有|A|=|B|(即A,B个数相同)
- 对于一个图如果无法用A, B交替标记顶点，也无法判断是否是H-图。例如：



哈密尔顿图 难点

对于哈密顿图，需要注意以下几点：

1. 仅有哈密顿通路而无哈密顿回路的图不是哈密顿图。

2. 还没有判断图中是否存在哈密顿通路、哈密顿回路的简单判定定理，只能对节点较少的图凭经验判定。

3. 在哈密顿图中有些定理仅是判别的必要条件，必要条件正方面的叙述无法用来判断一个图是否是哈密顿图，此时该定理是毫无用处的，但必要条件的等价逆否命题却非常重要，可以用来判断一个图不是哈密顿图。

作业二

- P36

8, 9, 10