

# 《图论》补充题

## 第一章 基本概念

### 一. 判断题

1. ( ) 在有向图中, 每个结点的正度和负度相等, 所有结点的正度之和等于所有结点的负度之和.
2. ( ) 已知图  $G=(V,E), G'=(V',E')$ . 如果  $G'$  是  $G$  的生成子图, 那么  $V=V'$ .
3. ( ) 从图  $G$  中删除某个点  $v$  和与其相连接的边, 得到的图  $G'=G-v$  是图  $G$  的导出子图.
4. ( ) 如果图  $G$  和  $G'$  不同构, 那么它们不存在同构的导出子图.
5. ( ) 无向图的邻接矩阵是一个对称矩阵.
6. ( ) 关联矩阵能够表示自环, 但不能表示重边.
7. ( ) 已知有向图  $G=(V,E)$ , 它的关联矩阵第  $i$  行非零元的数目恰是结点  $v_i$  的度, 第  $i$  行所有元素之和为结点  $v_i$  的正度与负度之差.

### 二. 证明和解答题

#### Problem 1

证明 9 个人中若非至少 4 个人相互认识, 则至少有 3 个人相互不认识。

#### Problem 2

6 个人围成圆形就坐, 每个人恰好只与相邻者不认识, 是否可以重新入座, 使每个人都与邻座认识?

#### Problem 3

在约克阿尔昆(735-804)提出的一个古老智力游戏中, 一位农夫需要将一匹狼、一只山羊和一棵白菜带过河. 农夫只有一只小船, 小船每次只能载农夫和一件物品(一只动物或者白菜). 农夫可以重复渡河, 但如果农夫在河的另一边, 那么狼会吃羊, 类似地, 羊会吃白菜.

可以通过列出两岸各有什么来描述问题的每个状态. 例如, 可以用有序对  $(FG, WC)$  表示农夫和羊在一岸, 而狼和白菜在另一岸的状态. [ $F$  表示农夫,  $G$  表示山羊,  $W$  表示狼,  $C$  表示白菜,  $\emptyset$  表示岸上什么也没有. 问题的初始状态就是  $(FGWC, \emptyset)$ .]

- (1) 找出这个游戏所有的允许状态, 其中不能出现在没有农夫的情况下, 让狼和羊, 或者羊和白菜在同一岸上. (3 分)
- (2) 构造一个图, 使得图中的每一个顶点表示一个允许的状态, 如果可以通过一次船的运输从一个状态转换到另一个状态, 那么相应的顶点之间用一条边相连. (3 分)
- (3) 找出这个游戏的两个不同解, 每个解都使用 7 次渡河. (2 分)

## 第二章 道路和回路

### 一. 判断题

1. ( ) 在图  $G$  中, 如果道路  $L$  是一条简单道路, 那么在  $L$  中不存在重复出现的结点.
2. ( ) 图  $G$  的极大联通子图是不唯一的, 而且每个极大联通子图  $H$  都是  $G$  的导出子图.
3. ( ) 如果二分图中出现回路, 那么该回路一定由偶数条边组成.

### 二. 证明和解答题

#### Problem 1

设  $G$  是不存在三角形的简单图, 证明:

$$(1) \sum d^2(v_i) \leq mn$$

$$(2) m \leq \frac{n^2}{4}$$

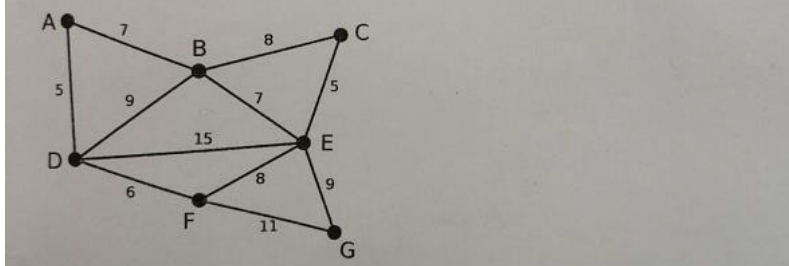
#### Problem 2

证明: 二分图  $G = \langle X, Y \rangle$ ,  $X$  与  $Y$  是其二分的结点子集. 证明: 如果  $G$  为哈密顿图, 那么  $|X| = |Y|$ .

## 第三章 树

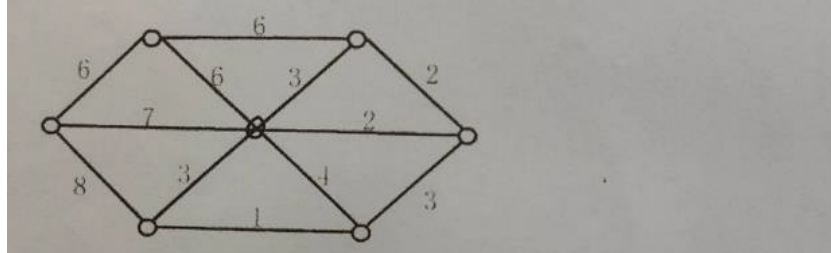
### Problem 1

2. (8分) 用 Kruscal 或者 Prim 算法求下图的最小生成树 (写出算法生成该树的每步过程), 并计算该树中所有边的权值之和。



### Problem 2

二、(8分) 用 Kruscal 算法求下图的最短树 (最小生成树), 并计算该树中所有边的权值之和。



## Problem 3

五、(7 分)用 Huffman 编码为以下 6 个字符进行编码: A: 0.08, B: 0.10, C: 0.12, D: 0.15, E: 0.20, F: 0.35. 写出 Huffman 树并求树的带权路径总长。

## Problem 4

4、(8 分) 设 7 个字母在通信中出现的频率如下:

a: 32%, b: 20%, c: 15%, d: 10%, e: 10%, f: 8%, g: 5%。

用 Huffman 算法求每个字母的最佳前缀码。

传输 10000 个按上述比例出现的字母需要传输多少个二进制数位?

## Problem 5

二、(7 分) 无向图  $G=(V, E)$ , 其中  $V=\{a, b, c, d, e\}$ ,  $E=\{(a, b), (a, c), (a, e), (b, d), (b, e), (c, e), (c, d), (d, e)\}$ , 对应边的权值为 2, 3, 5, 1, 6, 4, 2, 7

(a) 写出  $G$  的权矩阵;

(b) 使用 Kruskal 算法求出  $G$  的最短树.