离散数学第一次习题课

施宏建

shhjwu5@sjtu.edu.cn

目录

图论第一章

交通导航适合用下面哪种图表示

有向多重图	30 回应者	61 %
简单图	1 回应者	2 %
有向简单图	16 回应者	33 %
无向多重图	2 回应者	4 %

图论第一章

下列关于简单图，下列说法错误的是

简单图都是无向图	40 回应者	82 %
简单图没有自环	1 回应者	2 %
空图是简单图	6 回应者	12 %
简单图没有重边	1 回应者	2 %
无答案	1 回应者	2 %

简单图：无重边、无自环的无向图

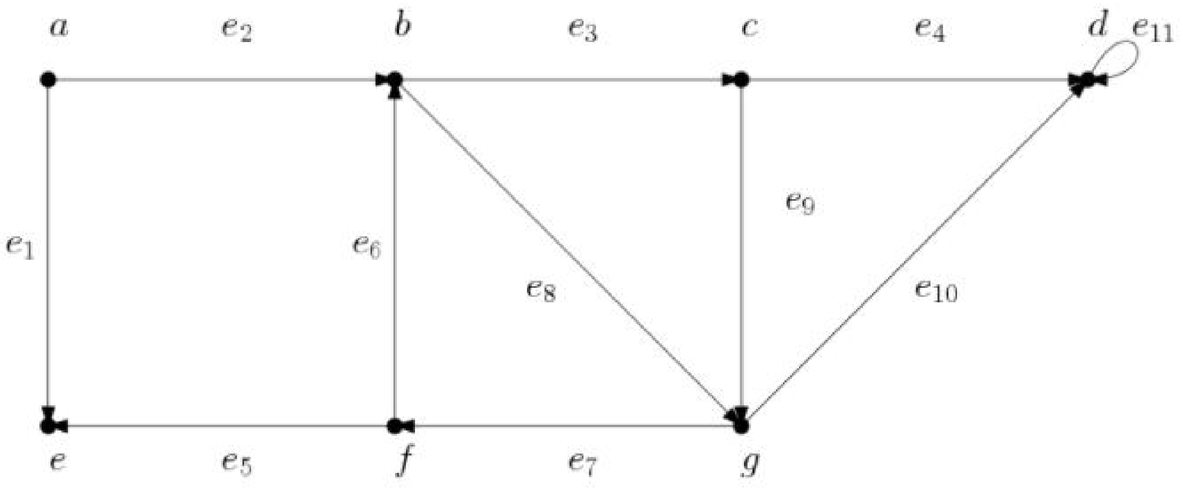
图论第一章

一个具有n个结点的简单图最多有（　　）条边

2n(n-1)	1 回应者	2 %	
n(n-1)	2 回应者	**4 %**	✓
n(n-1)/2	45 回应者	92 %	
2n	1 回应者	2 %	

图论第二章

在有向图G_4中，以下哪一些是回路(circuit)?



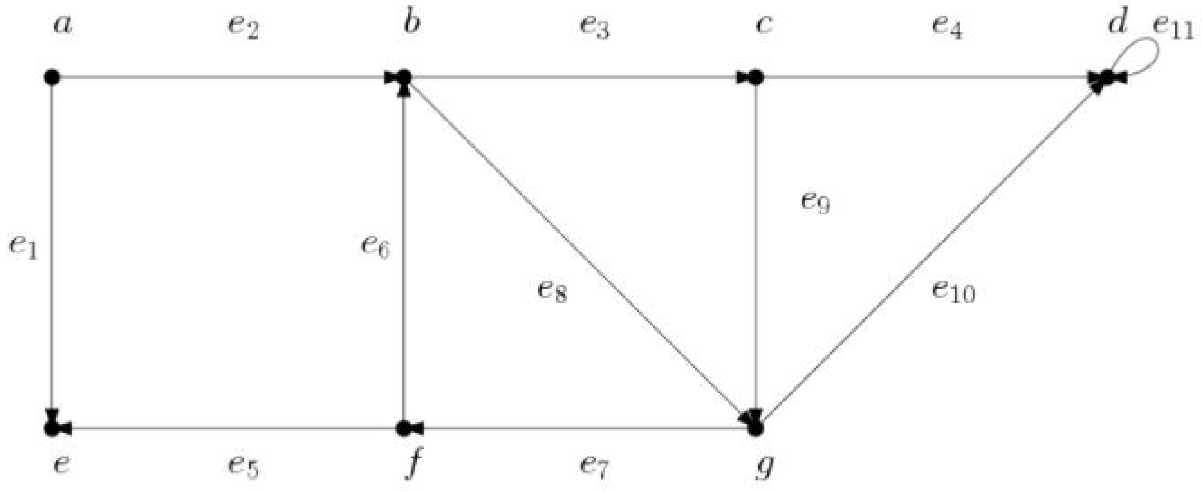
The Graph G_4

其中a,b,c,d,e,f,g为结点，e_i为边

b, e3, c, e9, g, e7, f, e6, b	47 回应者	**98 %**	✓
d, e11, d	42 回应者	**88 %**	✓
a	5 回应者	10 %	
c, e9, g, e10, d, e4, c	15 回应者	31 %	

图论第二章

在有向图G_4中，以下哪一些是道路(path)?



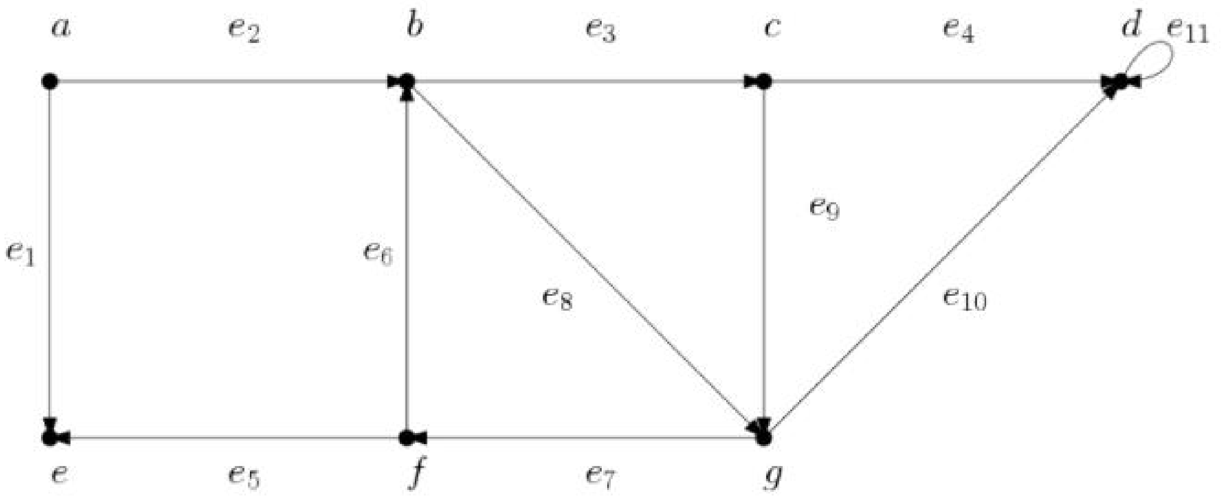
The Graph G_4

其中a,b,c,d,e,f,g为结点，e_i为边

a, e2, b, e6, f	14 回应者	32 %	
b, e3, c, e9, g, e7, f, e5, e	43 回应者	98 %	✓
a	8 回应者	18 %	✓
d, e11, d	29 回应者	66 %	✓

图论第二章

在有向图G_4中，以下哪一些是简单道路(simple path)?



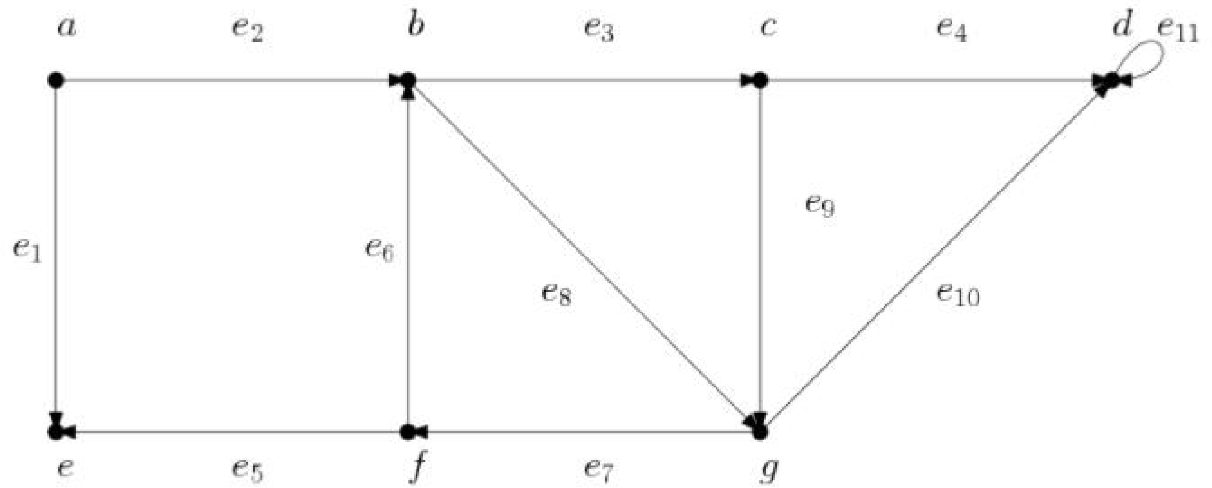
The Graph G_4

其中a,b,c,d,e,f,g为结点，e_i为边

b, e8, g. e7, f, e6, b, e3, c	46 回应者	**94 %**	✓
b, e8, g. e7, f, e6, b, e8, g	3 回应者	6 %	
a	9 回应者	**18 %**	✓
c, e4, d, e11, d	44 回应者	**90 %**	✓

图论第二章

在有向图G_4中，有多少强连通分支?



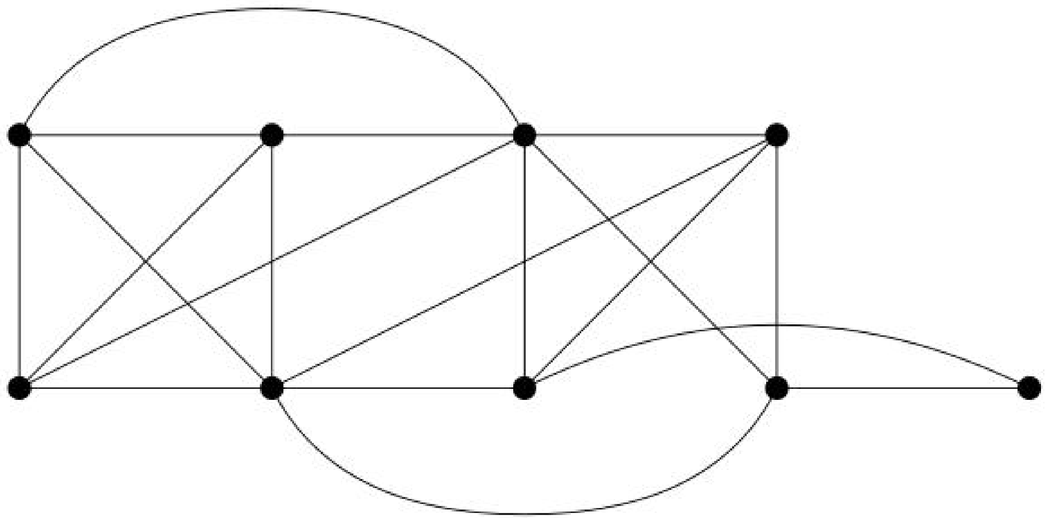
The Graph G_4

其中a,b,c,d,e,f,g为结点，e_i为边

5	7 回应者	15 %	
3	7 回应者	15 %	
2	10 回应者	21 %	
4	23 回应者	49 %	✓

图论第二章

图G_7中是否存在欧拉道路和欧拉回路?

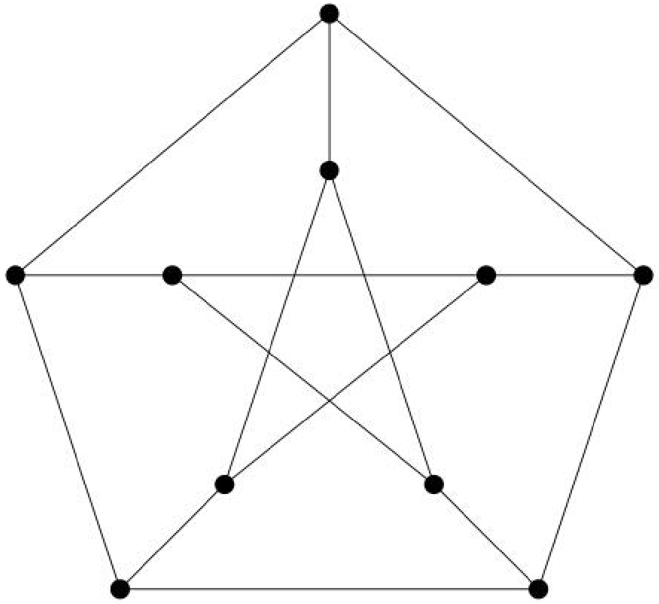


The Graph G_7

存在欧拉道路，但不存在欧拉回路	3 回应者	6 %	
欧拉回路和欧拉道路均不存在	2 回应者	4 %	
存在欧拉道路和欧拉回路	25 回应者	53 %	✓
存在欧拉回路，但不存在欧拉道路	17 回应者	36 %	

图论第二章

图G_9是著名的Petersen图。尝试通过穷举判断该图中是否存在哈密尔顿道路(Hamilton path)和哈密尔顿回路(Hamilton circuit)?



The Graph G_9

哈密尔顿道路和哈密尔顿回路均不存在	14 回应者	32 %	
存在哈密尔顿道路和哈密尔顿回路	2 回应者	5 %	
存在哈密尔顿道路，但没有哈密尔顿回路	28 回应者	64 %	✓
存在哈密尔顿回路，但没有哈密尔顿道路		0 %	

第一周课后作业

3. 完全图的每边任给一个方向，称为有向完全图。证明在有向完全图中

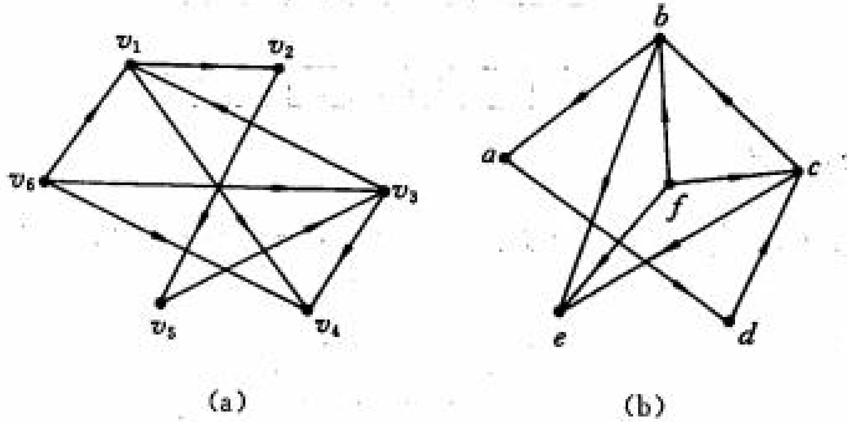
$$\sum_{v_i \in V}(d^+(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V}(d^-(v_i))^2。$$

注意$d(v_i)$指的是节点的度

$$d^+(v_i) + d^-(v_i) = n - 1$$

$$\sum_{v_i \in V} d^+(v_i) = \sum_{v_i \in V} d^-(v_i) = m = \frac{n(n-1)}{2}$$

第一周课后作业

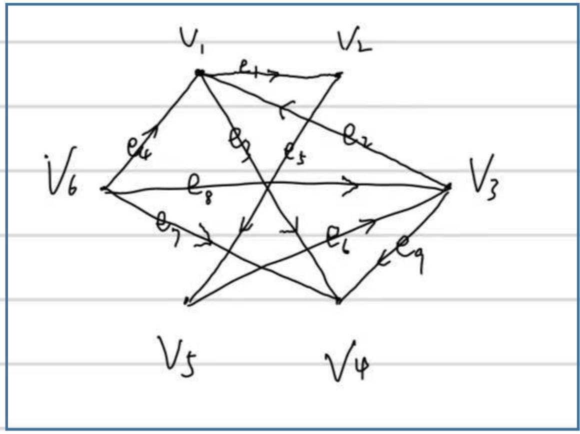


题图 1.7

8. 写出题图 1.7(a)的邻接矩阵、关联矩阵,边列表及正向表。

邻接矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



关联矩阵

$$B=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{matrix}\end{array}$$

第三周课后作业

2. 证明 G 和 $\overline{G}$ 至少有一个是连通图。

分类讨论$\overline{G}$中同一个连通图中的点，和不同连通图中的点多连通支的情况

第三周课后作业

3．证明：若连通图的最长道路不唯一，则它们必定相交。

假设连通图 G 有两条不相交最长道路

$L_1=(v_{10}, e_{11}, v_{11}, e_{12}, \cdots, e_{1n}, v_{1n})$ ，$L_2=(v_{20}, e_{21}, v_{21}, e_{22}, \cdots, e_{2n}, v_{2n})$

由于 L_1，L_2 不相交，则对 $\forall i,j=1,2,\cdots,n$ 有 $e_{1i}\neq e_{2j}$.

由于 G 连通，则 $\exists i,j=0,1,2,\cdots,n$ 使得 v_{1i} 与 v_{2j} 之间有道路 $L_3=(v_{1i}, e_1, v_2, e_2, \cdots, e_m, v_{2j})$

其中对 $\forall p,q=1,2,\cdots,n$ 及 $k=1,2,\cdots,m$ 有 $e_k\neq e_{1p}$ 且 $e_k\neq e_{2q}$

此时，令 $L_{11}=(v_{10}, e_{11}, v_{11}, e_{12}, \cdots, v_{1i})$，$L_{12}=(v_{1i}, e_{1i}, \cdots, e_{1n}, v_{1n})$

$L_{21}=(v_{20}, e_{21}, v_{21}, e_{22}, \cdots, v_{2j})$，$L_{22}=(v_{2j}, e_{2j}, \cdots, e_{2n}, v_{2n})$

则不妨设 L_{11} 长度 $l_{11}\geq\frac{n}{2}$，L_{22} 长度 $l_{22}\geq\frac{n}{2}$，而 L_3 长度 $l_3\geq 1$

故有道路 $L_4=(v_{10}, e_{11}, v_{11}, e_{12}, \cdots, v_{1i}, e_1, v_2, e_2, \cdots, e_m, v_{2j}, e_{2j}, \cdots, e_{2n}, v_{2n})$

的长度 $l_4=l_{11}+l_{22}+l_3\geq\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+1=n+1$，比 L_1 及 L_2 长，矛盾

故 L_1，L_2 必相交

第三周课后作业

9. 设 G 是有向完全图，证明 G 中存在有向的哈密顿道路。

注意数学归纳法的要点：

1. 初始条件
2. 推导条件

补充题

Problem 1

证明 9 个人中若非至少 4 个人相互认识，则至少有 3 个人相互不认识。

引理:六个人中必有三个人相互认识或相互不认识。 (拉姆塞定理)

引理证明:
1. 设其中一人为A。 若A认识其中三个人，则若三个人之间相互不认识，得证。若三人之中有两人相互认识，则加上A，三人相互认识。
2. 若A不认识其中三个人，则若三个人之间相互认识，得证。若三人之中有两人相互不认识，则加上A，三人相互不认识。

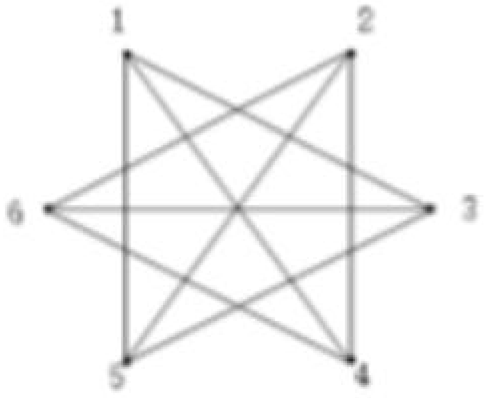
证明:
1. 若九个人中存在一个人不认识其中四个人，设其为A。则若四个人相互认识，存在4个人相互认识；若四个人中有两人相互不认识，则加上A，存在3个人相互不认识。
2. 若全部九个人都认识至少五个人，则至少有一个人认识至少六个人(图中度为奇数的节点必有偶数个)。则由引理：六个人中有三人互相认识，加上A就有4个人相互认识；或者六个人里有三个人互不认识。得证。

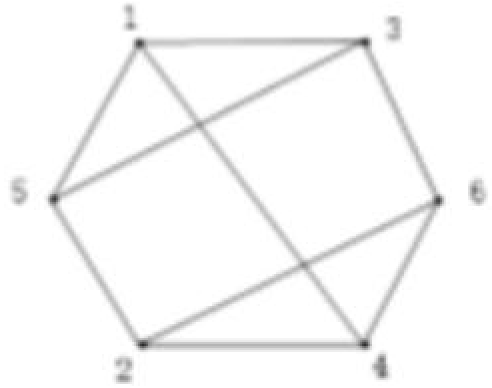
补充题

Problem 2

6 个人围成圆形就坐，每个人恰好只与相邻者不认识，是否可以重新入座，使每个人都与邻座认识？

答：可以。原题可转化为寻找同构图的问题。由以下两图同构可得。





补充题

在约克阿尔昆(735-804)提出的一个古老智力游戏中，一位农夫需要将一匹狼、一只山羊和一棵白菜带过河.农夫只有一只小船，小船每次只能载农夫和一件物品(一只动物或者白菜).农夫可以重复渡河，但如果农夫在河的另一边.那么狼会吃羊，类似地，羊会吃白菜.

可以通过列出两岸各有什么来描述问题的每个状态. 例如，可以用有序对(FG,WC)表示农夫和羊在一岸，而狼和白菜在另一岸的状态. [F 表示农夫, G 表示山羊, W 表示狼, C 表示白菜, ∅表示岸上什么也没有. 问题的初始状态就是(FGWC, ∅).]

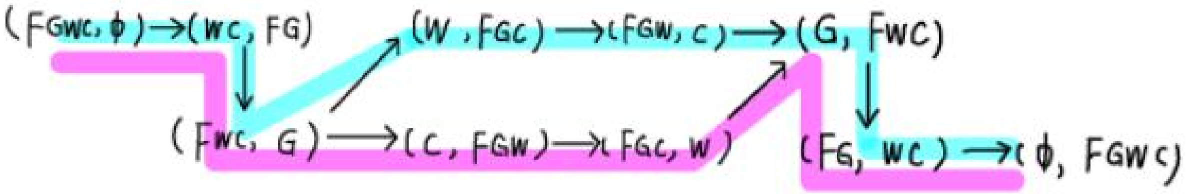
(1) 找出这个游戏所有的允许状态，其中不能出现在没有农夫的情况下，让狼和羊，或者羊和白菜在同一岸上. (3 分)
(2) 构造一个图，使得图中的每一个顶点表示一个允许的状态，如果可以通过一次船的运输从一个状态转换到另一个状态，那么相应的顶点之间用一条边相连. (3 分)
(3) 找出这个游戏的两个不同解，每个解都使用 7 次渡河. (2 分)

解：(1) 不考虑约束条件共 $2^4=16$ 种状态

(FGWC, φ)	(FG, WC)	~~(F, WGC)~~
(FGW, C)	~~(FW, GC)~~	(G, FWC)
(FGC, W)	~~(FC, WG)~~	(W, FGC)
(FWC, G)	(WC, FG)	(C, FGW)
~~(GWC, F)~~	~~(GC, FW)~~	(φ, FGWC)
	~~(WG, FC)~~	

删去不满足题意的情况，共10种状态.

(2)



(3) 两种方案如上图所示.

补充题

Problem 1

设 G 是不存在三角形的简单图，证明：

(1) $\sum d^2(v_i) \le mn$

(2) $m \le \frac{n^2}{4}$

答： 1. 对图中一条边，记其端点为 v_i, v_j，由于图中不存在三角形，有：

$$d(v_i) + d(v_j) \le n$$

对所有边列出上式相加，可得

$$\sum d^2(v_i) \le mn$$

左边为 $\sum d^2(v_i)$ 是因为值为 $d(v_i)$ 的项恰被计算了 $d(v_i)$ 次。

2. 设图中度最大的一个节点 v_0 度为 k $(0 \le k \le n-1)$. 则可以将所有节点分为三类：v_0, 和 v_0 直接相连的 k 个节点，和其他的 $(n-1-k)$ 个节点。图中的边有两类：和 v_0 直接相连的边，共有 k 条；以及和第三类的 $(n-1-k)$ 个节点相连的边，最多有 $k \times (n-1-k)$ 条。故

$$\begin{aligned} m &\le k + k \times (n-1-k) \\ &= k \times (n-k) \\ &\le \frac{n^2}{4}. \end{aligned}$$

补充题

Problem 2

证明: 二分图 $G=<X,Y>$, X 与 Y 是其二分的结点子集. 证明: 如果 G 为哈密顿图, 那么 $|X|=|Y|$.

证明: 不妨设G中一条H回路 $(v_1, v_2, v_3 \cdots v_n)$ 且 v_1 与 v_n 相连. 再设

$v_1 \in X$

$\because$ v_1, v_2 相连, G为二分图

$\therefore$ $v_2 \in Y$

$\because$ v_2, v_3 相连, G为二分图

$\therefore$ $v_3 \in X$

同理可知, $v_1, v_3 \cdots v_{2k+1} \in X$, $v_2, v_4 \cdots v_{2k} \in Y$

如果n为奇数, 那么 $v_1 \in X$, $v_n \in X$, 这和 v_1 与 v_n 相连矛盾

所以n为偶数, $v_1, v_3 \cdots v_{n-1} \in X$, $v_2, v_4 \cdots v_n \in Y$

$\therefore |X| = |Y| = \frac{n}{2}$