集合论

第9章集合

■ 第9章到第12章介绍集合论. 主要介绍集 合论的基本概念和结论,这包含集合、 运算、关系、函数和基数. 对概念和定 理的介绍将以数理逻辑的谓词逻辑为工 具来描述,体现了这两个数学分支之间 的联系, 且可使集合论的研究既简练又 严格,还将简要介绍集合论公理系 统. 这个公理系统又称公理集合论,是 数理逻辑的一个分支.

9.1 集合的概念和表示方法9.1.1 集合的概念

- 集合是集合论中最基本的概念,但很难给出精确的定义.集合是集合论中唯一不给出定义的概念,但它是容易理解和掌握的.
- 集合是一些确定的、可以区分的事物汇聚在一起组成的一个整体,组成—个集合的每个事物称为该集合的一个元素,或简称—个元.
- 如果a是集合A的一个元素,就说a属于A,或者说a在A 中,记作a∈A,
- 如果b不是集合A的—个元素,就说b不属于A. 或者说b不在A中,记作b∉A.
- 集合概念是很简单的,但准确理解其含义却是十分重要的.



■ 特别应注意下列几点:

- (1)集合的元素可以是任何事物,也可以是另外的集合(以后将说明,集合的元素不能是该集合自身).
- (2)一个集合的各个元素是可以互相区分开的.这意味着, 在一个集合中不会重复出现相同的元素.
- (3)组成一个集合的各个元素在该集合中是无次序的.
- (4)任—事物是否属于一个集合,回答是确定的,也就是说。对一个集合来说,任一事物或者是它的元素或者不是它的元素,二者必居其一而不可兼而有之,且结论是确定的。

下面将用实例说明这些含义.

9. 1. 2 集合的表示方法

- 我们—般用不同的大写字母表示不同的集合.并用不同的小写字母表示集合中不同的元素,但是因为某个集合的一个元素可能是另—个集合.所以这种约定不是绝对的.
- 本书中规定,用几个特定的字母表示几个常用的集合. 约定
 - N表示全体自然数组成的集合,
 - Z表示全体整数组成的集合,
 - Q表示全体有理数组成的集合,
 - R表示全体实数组成的集合,
 - C表示全体复数组成的集合.

本书中,规定0是自然数,即0∈N. 但在另一些书中,规定0不是自然数.



■ 通常表示集合的方法有两种.

一种方法是<mark>外延表示法</mark>. 这种方法一一列举出集合的 全体元素. 例如

$$A=\{7, 8, 9\},\$$
 $N=\{0, 1, 2, 3, ...\},\$

表示集合A有三个元素7,8,9.集合N的元素是0,1,2,3,...,集合N就是自然数的集合,N的表示式中使用了省略符号,这表示N中有无限多个元素4,5,6,7等.有限集合中也可以使用省略符号,例如

表示由26个小写英文字母组成的集合.



另一种方法是内涵表示法,这种方法是用谓词来描述 集合中元素的性质.上述的集合A和N可以分别表示为

 $A=\{x|x$ 是整数且 $6<x<10\}$,

 $N=\{x|x是自然数\},$

一般情况,如果P(x)表示一个谓词,那么就可以用 {x|P(x)}或{x:P(x)}表示一个集合.{x|P(x)}是使P(x)为 真的所有元素组成的集合. 也就是说,若P(a)为真,则a属于该集合;若P(a)为假,则a不属于该集合. 在表示式中的|和:是一个分隔符号. 在它前向的x是集合中元素的形式名称(如集合A中元素的形式名称是x,但实际名称是7,8,9.常用x,y,z表示形式名称). 在分隔符号后面的P(x)是仅含自由变元x的谓词公式.

9. 1. 3 集合的实例

■ 例1 B={9, 8, 8, 7},

集合B中的两个8应看作B中的同一个元素, 所以B中只有三个元素.集合B就是{9,8, 7}.它与上述的集合A是同样的集合,因 为元素之间没有次序. -

■ 例2 D={x |x∉B}.

集合D是用集合B来定义的. 若 $x \notin B$,则 $x \in D$: 若 $x \in B$,则 $x \notin D$. 集合D中的元素 是除7,8,9外的一切事物.

■ 例3 F={7, {8, {9}}}. 集合F和集合B不同。7∈F,但8∉F, 9∉F. 只有8∈{8, {9}}和9∈{9}. 集合F 仅含有两个元素7和{8, {9}}, 这两个元 素由表示F的最外层花括号包围,并由逗 号分隔开. 对于以集合为元素的集合(即 有多层花括号的集合),应注意集合的层 次.

• 例4 $G = \{x | x = 1 \ V(\exists y)(y \in G^x = \{y\})\}.$

集合G是用递归方法定义的.这个定义是构造性的,可以由该定义求G的每个元素,从而构造出G.构造G的过程是

由1∈G, 有{1} ∈G,

曲{1} ∈G, 有{{1}} ∈G,

. . .

这个构造过程是无止境的,因此G的元素有无限多个.



例5 H={x|x是一个集合^x ∉ x}.

可用反证法证明集合H是不存在的. 假设存在这样的集 合H,下面将证明,对某一具体事物y,无法确定y是否 属于H. 我们以H本身作为这个具体事物y, 证明中y就 是H.对于集合H,必有y∈H或y∉H,下面分别考虑 之. (1)若 $y \in H$. 由于 $y \in H$ 的元素,y就具有H中元素的 性质y∉y.考虑到y就是H,所以y∉H. 这与y∈H矛 盾.(2)由于y不是H的元素,y就没有H中元素的性质, 因此y∈y. 又因y就是H,则y∈H. 这与y∉H矛盾. 两种 情况都存在矛盾,所以y∈H和y∉H都不成立,集合H不 存在. 问题的根源在于,集合论不能研究"所有集合 组成的集合".这是集合论中的一个悖论,称为Rusell 悖论.

- 9. 2 集合间的关系和特殊集合
- 9. 2. 1 集合间的关系
- 在实数之间可以定义关系=、<、<、≤,>、≥.类似地,在集合之间可以定义关系=、□、□、□、□、□



- 定义9. 2. 1 两个集合是相等的,当且 仅当它们有相同的元素.若两个集合A和 B相等,则记作A=B;若A和B不相等, 则记作A≠B,
- 这个定义也可以写成
 A=B<=>(∀x)(x∈A←→x∈B),
 A≠B<=>(∃x)¬(x∈A←→x∈B).



■ 这个定义就是集合论中的外延公理,也叫外延原理. 它实质上是说"一个集合是由它的元素完全决定的". 因此,可以用不同的表示方法(外延的或内涵的),用不同的性质、条件和内涵表示同一个集合. 例如

{7,8,9}, {x|x是整数^6<x<10}, {x|(x-7)(x-8)(x-9)=0},

表示同一个集合,即三个集合相等.

定义9.2.2 对任意两个集合A和B,若A的每个元素都是B的元素,就称A为B的子集合,或称B包含A,或称B是A的超集合,记作

A⊆B 或 B⊇A. 这个定义也可以写成 A⊆B<=>(∀x)(x∈A→x∈B).

当A不是B的子集合时,即A⊆B不成立时,记作A⊈ B(子集合可简称为子集)。

■ 注意区分⊆和∈. 例如

{a} ⊈ {{a},b} 但 {a} ∈{{a}, b}, {a, b}⊆{a, b, {a}} 但 {a, b}∉{a, b, {a}}.

 $A \in B$ 表示A是B的一个元素, $A \subseteq B$ 表示A的每个元素都是B的元素.此外, ϵ 是集合论的原始符号,这是一个基本概念;但是 \subseteq 是由 ϵ 定义出来的概念.

下面给出有关=的两个主要结论,

■ 定理9.2.1 两个集合相等的充要条件是它们互为子集, PA = B < PA = A.

证明
$$A = B$$

$$<=>(\forall x)(x \in A \longleftrightarrow x \in B)$$

$$<=>(\forall x)((x \in A \longleftrightarrow x \in B)^{\wedge}(x \in B \longleftrightarrow x \in A))$$

$$<=>(\forall x)(x \in A \longleftrightarrow x \in B)^{\wedge}(\forall x)(x \in B \longleftrightarrow x \in A)$$

$$<=>A \subseteq B^{\wedge}B \subseteq A.$$

这个定理很重要,以后证明两个集合相等时,主要使用这个定理,判定两个集合互为子集.

- 定理9. 2. 2 对任意的集合A, B和C;
 - $(1)A\subseteq A$.
 - $(2)(A \subseteq B^B \subseteq A) = >A = B$
 - $(3)(A \subseteq B^B \subseteq C) = A \subseteq C$

在这个定理中, (1)是自反性, (2)是反对称性(这是定理9. 2. 1的一部分), (3)是传递性. 定理9. 2. 2说明包含关系⊆具有这3个性质(实数间的≤关系也有这3个性质).

■ 应该指出, \in 没有这3个性质. (1)以后将证明,对任意的集合A,A \notin A. (2)以后将证明,对任意的集合A和B,一(A \in B^B \in A). (3)对任意的集合A、B和C,当A \in B和B \in C时,不一定有A \in C. 以后将指出,C为传递集合时才能推出A \in C



- 定义9. 2. 3 对任意两个集合A和B,若A⊆B且A≠B,就称A为B的真子集,或称B真包含A,或称B是A的真超集合,记作A⊂B或B⊃A,
- 这个定义也可以写成A⊂B<=>(A⊆B^A≠B),

•

■ 定义9. 2. 4 若两个集合A和B没有公共元素,就称A和B是不相交的.

这个定义也可以写成

A和B不相交<=>¬(∃x)(x∈A^x∈B).

■ 若A和B不是不相交的,就称A和B是相交的. 例如

 $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\},\$

 $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\},\$

{1, 2}和{3, 4, 5}不相交,

{1, 2}和{2, 3, 4}相交。

9. 2. 2 特殊集合

空集和全集是两个特殊集合.它们的概念相简单,但在集合论中的地位却很重要.下面介绍这两个集合.

• 定义9. 2. 5 不含任何元素的集合称为空集,记作 Φ . 空集的定义也可以写成 $\Phi = \{x | x \neq x\}$.

显然, $(\forall x)(x \notin \Phi)$ 为真.

下面介绍有关空集的两个重要结论.



- 定理9. 2. 3 对任意的集合A, $\Phi \subseteq A$. 证明 假设存在集合A,使 $\Phi \nsubseteq A$,则存在x,使x $\in \Phi$ 且x $\notin A$. 这与空集 Φ 的定义矛盾,所以定理得证.
- 推论9. 2. 1 空集是唯一的,
 证明留作思考题(只要假设有两个空集Φ和Φ¹,
 证明Φ=Φ¹,即可),

■ 定义9. 2. 6 在给定的问题中,所考虑的所有事物的集合称为全集,记作E.全集的定义也可以写成

$$E = \{x | x = x\}.$$

全集的概念相当于谓词逻辑的论域.对不同的问题,往往使用不同的论域,例如在研究有关实数的问题时,就以R为全集.

9. 3集合的运算

■ 运算是数学上常用的手段. 两个实数进行加法 运算可以得到一个新的实数. 类似地, 两个集 合也可以进行运算,得到交集、并集等新的集 合.集合的运算是由已知集合构造新集合的一 种方法. 我们经常从若干简单集合出发, 用运 算构造大量新集合, 这类似于用逻辑联结词构 造出大量合式公式.集合的运算式子也是表示 这些新集合的一种方法,而且往往是更简捷的 表示方法. 所以, 集合的运算式子是表示集合 的第三种方法. 这种表示方法不仅简捷,而且 可利用运算的性质简化一些证明问题.

9.3.1 集合的基本运算

- ▶ 面介绍的5种运算是集合论中的基本运算,
- 定义9.3.1 对集合A和B,
 - (1)并集AUB定义为 AUB={x|x∈AVx∈B},
 - (2)交集AnB定义为 AnB={x|x∈A^x∈B}.
 - (3)差集(又称B对A的相对补集,补集)A-B定义为 A-B={x|x∈A^x∉B}.
 - (4)余集(又称A的绝对补集)-A定义为 -A=E-A={x|x∉A},(其中E为全集.A的余集就是A对E的相对补 集.)
 - (5)对称差A⊕B定义为 A⊕B=(A−B)U(B−A)={x|x∈A_V x∈B}.

例1 已知集合A,B和全集E为

 $A=\{a, b, c, d\},\$

 $B = \{e. f, a,d\},\$

 $E=\{a, b, c, d, e, f, q\},\$

则有

 $A UB = \{a, b, c, d, e, f\} = BUA,$

 $AnB = \{a, d\} = BnA,$

 $A-B=\{b, c\}, B-A=\{e, f\},\$

 $-A = \{e, f, g\}, -B = \{b,c, g\},\$

 $A \oplus B = \{b, c, e, f\} = B \oplus A.$

并集AUB中的元素是A和B中所有的元素,公共元素只出现一 次、交集AnB中的元素是A和B占所有的公共元素、差集A-B中的 元素是在A中但不在B中的那些元素,余集一A中的元素是在全集 中但不在A中的那些元素. 对称差A⊕B中的元素即由A-B的元素 和B-A的元素组成.

9. 3. 2 广义并和广义交

■广义并和广义交是一元运算,是对一个集合的集合A进行的运算.它们分别求A中所有元素的并和交,A中可以有任意多个元素,它们就可以求任意个元素的并和交.A中若有无限多个元素,它们就可以求无限多个元素的井和交.广义并和广义交是并集和交集的推广.



- 定义9. 3. 2 若集合A的元素都是集合,则把 A的所有元素的元素组成的集合称为A的广义并, 记作UA; 把A的所有元素的公共元素组成的集合称为A的广义交,记作nA.
- 这个定义也可以写成
 UA={x|(∃z)(z∈A^x∈z)},
 nA={x|(∀z)(z∈A→x∈z)},
 此外,规定UΦ=Φ,规定nΦ无意义.

例2 已知集台A为

A={{a, b, c}, {a, b}, {b, c, d}}, 则有

 $U A = \{a, b, c, d\},$ $nA = \{b\}.$

可以用广义并和广义交分别定义并集和交集
 AU B=U{A, B},
 AnB=n{A, B}.

广义并和并集的运算符都是U. 但因广义并是一元运算, 并集是二元运算,所以对U的含义不会产生误解.

9. 3. 3 幂集

- 集合的幂集是该集合所有子集组成的集合,幂集是由—个集合构造的新集合,它也是集合的一元运算,但是幂集与原集合的层次有所不同.
- 定义9. 3. 3 若A是集合,则把A的所有子集组成的集合称为A的幂集,记作P(A).
- 这个定义也可以写成P(A)={x|x⊆A}.

例3 $P(\Phi)=\{\Phi\},$ $P(\{\Phi\})=\{\Phi, \{\Phi\}\},$ $P(\{a, b\})=\{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$

对任意的集合A,有 $\Phi \subseteq A$ 和A $\subseteq A$,因此有 $\Phi \in P(A)$ 和 A $\in P(A)$.

9. 3. 4 笛卡儿积

- 笛卡儿积也是—种集合二元运算,两个集合的笛卡儿积是它们的元素组成的有序对的集合,笛卡儿积是与原集合层次不同的集合. 笛卡儿积是下一章介绍关系概念的基础. 下面先介绍有序对,再介绍笛卡儿积.
- 两个元素x和y(允许x=y)按给定次序排列组成的二元组合称为一个有序对,记作<x,y>. 其中x是它的第一元素,y是它的第二元素.

■ 有序对<x, y>应具有下列性质:

$$(1)x\neq y=>< x,y>\neq < y, x>,$$

$$(2)=<=>x=u^y=v.$$

- 在平面直角坐标系上一个点的坐标就是一个有 序对.
- 下面用集合定义有序对,使之具有上述的性质,
- 定义9. 3. 4 有序对<x,y>定义为<x,y>={{x},{x,y}}.

- 定理9.3.1
 - $(1)<x, y>=<u, v><=>x=u^y=v.$
 - $(2)x \neq y = > < x, y > \neq < y, x > .$
- 证明 (1)设x=u^y=v,则显然有{{x}, {x, y}}={{u}, v}, 于是<x, y>=<u, v>.

设< $x, y>=<u, v>, 则有{\{x\},\{x,y\}}={\{u\},\{u,v\}}.$

分别考虑x=y和x≠y两种情况.

当x=y时,<x,y>={{x}},于是 {x}={u}={u, v},

则 x=u=v=y.

当**x**≠**y**时,显然{**u**}≠{**x**, **y**}. 于是

{u}≠{x} 且 {x, y}={u, v}. 则 x=u. 显然 y≠u,于是y=v.

两种情况都可得到x=u^y=v

- (2)其证明留作思考题,
- 可以推广有序对的概念,定义由有序的n个元 素组成的n元组. n元组是用递归方法定义的.
- 定义9.3.5 若n∈N且n>1, x₁, x₂, ..., x_n是n 个元素,则n元组<x1, ..., xn>定义为 当n=2时,二元组是有序对<x1, x2>, 当n≠2时,<x₁, ..., x_n>=<<x₁, ..., x_{n-1}>, x_n>...

■ 例4 <a, b, c, d>=<<<a, b>, c>, d>.

按照这个定义,有序对就是二元组,n元组就是多重有序对.



■ 定义9.3.6 集合A和B的笛卡儿积(又称卡氏积、乘积、直积)A×B 定义为

$$A \times B = \{z | x \in A^y \in B^z = \langle x, y \rangle \}$$
或简写为 $A \times B = \{\langle x, y \rangle | x \in A^y \in B\}.$

■ 例5 已知集合A和B为A={a, b}, B={0, 1, 2}. 则有

 $A \times B = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \}$

 $B \times A = \{<0, a>, <0, b>, <1, a>, <1, b>, <2, a>, <2, b>\},$

 $A \times A = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}.$

在A=B时,可把 $A\times A$ 简写为 A^2 .

- 上面用有序对定义了笛卡儿积. A和B的笛卡儿积,就是由x∈A和y∈B构成的有序对<x, y>的全体组成的集合. 可以推广这个概念,用n元组定义n阶笛卡儿积.
- 定义9. 3. 7 若 $n \in N$ 且n > 1,而 A_1 , A_2 ,..., A_n 是 $n \land$ 集合,它们的n阶笛卡儿积记作 $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$,并定义为 $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{ < x1, ..., xn > | x1 \in A1^{\circ}...^{\circ} xn \in An \}.$

当A1=A2=...=An=A时,它们的n阶笛卡儿积可以简写为 A_1^n .

9.3.5 优先权

- 集合可以由集合运算符连接构成新集合,如 A∩B和-A. 两个集合可以由集合关系符连接,构成一个命题,如A∩B⊆A和A≠B. 这种命题可以由逻辑联结词连接,构成复合命题,如 (A⊆B^A≠B). 两个命题可以由逻辑关系符连接,如A=B=>A⊆B.
- 在集合论中,当描述问题和证明问题时,往往 在一个式子中同时使用上述四类连接符号.为 了简单、确定地表示各类连接符号的优先次序, 下面规定各类连接符号的优先权,



一元运算符**(-A**,**P(A)**,∩**A**,∪**A)**

优先于 二元运算符(-, ∩, U, ⊕, ×)

优先于 集合关系符(=, \subseteq , \subset , \in)

优先于 一元联结词(一)

优先于 二元联结词 $(\land, \lor, \rightarrow, \leftarrow\rightarrow)$

优先于 逻辑关系符(<=>, =>).

此外,还使用数学上惯用的括号表示优先权方法、从左到右的优先次序.规定

- (1)括号内的优先于括号外的;
- (2)同一层括号内, 按上述优先权,
- (3)同一层括号内,同一优先级的,按从左到右的优先次序.



例 6

表示 $((-A) \oplus B \subseteq C \cup \bigcap D)$ 表示 $((-A) \oplus B) \subseteq (C \cup (\bigcap D)),$ $\neg A \cap B \in C \rightarrow D \subseteq \bigcap E$ $(\neg ((A \cap B) \in C)) \rightarrow (D \subseteq (\bigcap E)),$ $A \subseteq B \land A \neq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ $((A \subseteq B) \land (A \neq B)) \Leftrightarrow (A \subseteq B),$

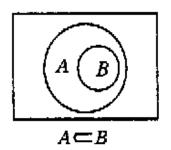
9. 4 集合的图形表示法

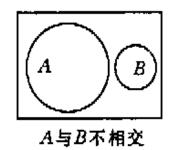
- 前面已介绍了表示集合的三种方法: 外延表示法, 内涵表示法和使用运算的表示法, 图形表示法是 图形表示法是数学上常 示法是第四种表示法. 图形表示法是数学上常用的方法, 它的优点是形象直观、易于理解, 缺点是理论基础不够严谨, 因此只能用于说明, 不能用于证明.
- 下述的三种图形表示法分别适于表示不同类型的集合运算. 不仅可以表示集合运算的概念, 而且可以表示一些性质和结论.

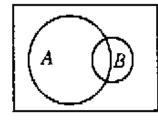
9. 4. 1 文氏图

- 在文氏图中,矩形内部的点表示全集的所有元素. 在矩形内画不同的圆表示不同的集合,用圆内部的点表示相应集合的元素. 文氏图可以表示集合间的关系和集合的5种基本运算.
- 图9.4.1中各图表示集合的关系,各图中的A和B间具有相应的关系,图9.4.2中各图表示5种基本运算,各图中斜线区表示经相应运算得到的集合.









A与B相交且A \subset B

图 9.4.1 文氏图



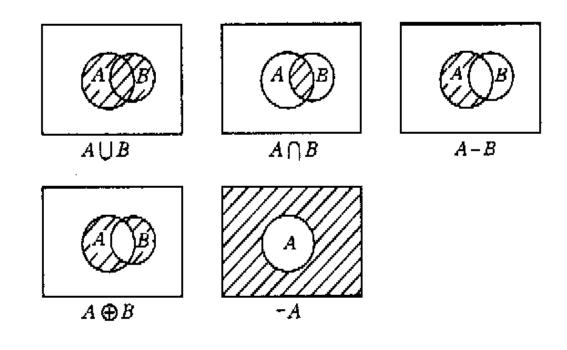


图 9.4.2 文氏图

9. 4. 2 幂集的图示法

■可以用一个网络图中 的各结点表示幂集的 各元素. 设A={0,1, 2},则P(A)的各元素 在图9. 4. 3中表 示. 图中结点间的连 线表示二者之间有包 含关系. 这种图就是 下一章介绍的哈斯 图.

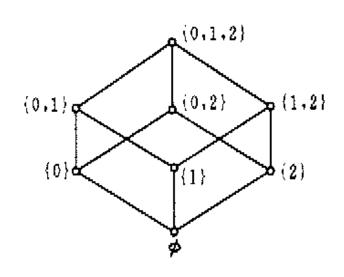


图 9.4.3 幂集

9. 4. 3 笛卡儿积的图示法

■ 在平面直角坐标系上,如果用x轴上的线段表示集合A,并用y轴 表示集合A,并用y轴 上的线段表示集合B, 则由两个线段画出的 规形就可以表示笛卡 儿积A×B,如图 9.4.4所示,

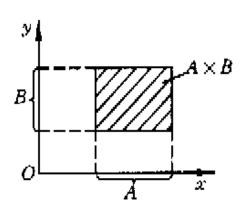


图 9.4.4 笛卡儿积

9.5 集合运算的性质和证明9.5.1 基本运算的性质

■ 集合的三种运算AUB, AnB, -A分别是用逻辑连接词V, ^, 一定义的, 因此它们具有和V, ^, 一类似的性质. 下面给出它们满足的一些其木却律。

定理 9.5.1 对任意的集合 A,B 和 C, f

(1) 交換律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

- (2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- (3) 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- (4) 幂等律 $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
- (5) 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$.
- (6) 摩根律 $A-(B \cup C)=(A-B) \cap (A-C)$, $A-(B \cap C)=(A-B) \cup (A-C)$, $-(B \cup C)=-B \cap -C$, $-(B \cap C)=-B \cup -C$.

(7) 同一律
$$A \cup \emptyset = A$$
,

 $A \cap E = A$.

(8) 零律
$$A \cup E = E$$
,

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
.

(9) 补余律
$$A \cup -A = E$$
,

$$A \cap \neg A = \emptyset$$
.

$$(10) -\varnothing = E,$$

$$-E=\varnothing$$
.

(11) 双补律
$$-(-A)=A$$
.



■ 下面仅证(3)和(5)

求证(3)
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
.

证明 对于任意的 x 可得

$$x \in A \cup (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \ \lor \ x \in (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \lor (x \in B \land x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \land x \in (A \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

于是结论得证.

求证(5) $A \cap (A \cup B) = A$. 证明

$$A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B)$$

$$= A \cup (\emptyset \cap B)$$

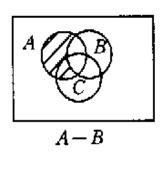
$$= A \cup \emptyset$$

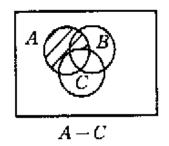
$$= A$$

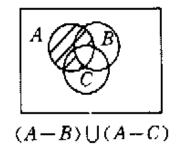


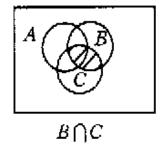
- 这里采用了两种证明方法. 一种是利用谓词演算的方法,另一种是利用已知的集合恒等式. 一部分基本规则只能用谓词逻辑来证明. 其他规律和集合恒等式可能用两种方法来证,
- ■可以用文氏图说明集合恒等式.图9.5.1用 文氏图说明A-(B∩C)=(A-B)U(A-C)从图中看出, 等式两边对应图中同一个区域,因此应该相 等.这种图形表示法只能说明问题,不能证明 问题

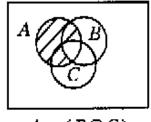












 $A - (B \cap C)$

图 9

9.5.1

下面给出差集的性质.

■ 定理9. 5. 2 对任意的集合A, B和C, 有 (1)A-B=A-(A∩B).

 $(2)A-B=A\cap -B$

 $(3)A \cup (B-A) = A \cup B$.

 $(4)A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$

证明

(1) 对任意的 x

$$x \in A - (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \land \neg (x \in A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \land \neg (x \in A \land x \in B)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \land (x \notin A \lor x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \land x \notin A) \lor (x \in A \land x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow F \lor (x \in A - B) \Leftrightarrow x \in A - B$$

(2) 对任意的 x

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \land x \in B$$
$$\Leftrightarrow x \in A \land x \in -B \Leftrightarrow x \in A \cap -B$$



(3)
$$A \cup (B-A) = A \cup (B \cap -A)$$

 $= (A \cup B) \cap (A \cup -A) = (A \cup B) \cap E$
 $= A \cup B$
(4) $A \cap (B-C) = A \cap (B \cap -C)$

$$(A) A | | (B-C) = A | | (B) | - C \rangle$$
$$= (A \cap B) \cap -C = (A \cap B) - C$$

■ 定理中的(2)是很有用的结论,它可以用A∩B代入式中的A-B,从而消去差集算符,利用定理 9.5.1的规律. 这类似于命题逻辑中消去联结词 "→".

对称差的性质类似于并集,下面给出一些基本性质,

- 定理9.5.3 对任意的集合A,B和C,有
 - (1) 交換律 $A \oplus B = B \oplus A$.
 - (2) 结合律 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.
 - (3) 分配律 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.
 - (4) 同一律 $A \oplus \emptyset = A$.
 - (5) 零律 $A \oplus A = \emptyset$.
 - (6) $A \oplus (A \oplus B) = B$.

证明(3)如下

$$(3) A \cap (B \oplus C)$$

$$= A \cap ((B - C) \cup (C - B))$$

$$= A \cap ((B \cap -C) \cup (C \cap -B))$$

$$= (A \cap B \cap -C) \cup (A \cap C \cap -B)$$

$$= ((A \cap B \cap -C) \cup (A \cap B \cap -A))$$

$$\cup ((A \cap C \cap -B) \cup (A \cap C \cap -A))$$

$$= ((A \cap B) \cap (-C \cup -A)) \cup ((A \cap C) \cap (-B \cup -A))$$

$$= ((A \cap B) \cap -(A \cap C)) \cup ((A \cap C) \cap -(A \cap B))$$

$$= (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$

集合间的⊆关系类似于实数间的≤关系,性质如下

定理 9.5.4 对任意的集合 A,B,C 和 D,q

- (1) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$.
- (2) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$.
- (3) $(A \subseteq B) \land (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$.
- $(4) (A \subseteq B) \land (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D).$
- (5) $(A \subseteq B) \land (C \subseteq D) \Rightarrow (A-D) \subseteq (B-C)$.
- (6) $C \subseteq D \Rightarrow (A-D) \subseteq (A-C)$.

■ 例1 对任意的集合A和B,有(AUB=B)⇔(A⊆B)⇔(A∩B=A)⇔(A−B=Φ).

证明 本例要求证明4个命题互相等价. 设命题(1)是 AUB=B,命题(2)是A \subseteq B,命题(3)是A \cap B=A,命题(4)是A \cap B= Φ 。只要证明(1)=>(2),(2)=>(3),(3)=>(4),(4)=>(1)即可,

(1)=>(2):

已知AUB=B. 对任意的x,得 x∈A=>x∈A∨x∈B⇔x∈A∪B⇔x∈B. 因此A⊂B.

(2) = > (3):

已知A⊆B. 对任意的x,得

 $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \land x \in B = > x \in A$

 $x \in A \Leftrightarrow x \in A \cap x \in A = > x \in A \land x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$.

因此A∩B=A.

```
(3) = > (4):
  己知A∩B=A,故
 A-B=A\cap -B=(A\cap B)\cap -B=A\cap (B\cap -B)=\Phi.
(4) = > (1):
  已知A-B=\Phi,故
  A \cup B = B \cup A = B \cup (A-B)
     (由定理9. 5. 2)=BUΦ=B.
```



■ 例2 对任意的集合A,B和C,有AUB=AUC,A∩B=A∩C=>B=C.

证明 方法1:

 $B=B\cap(A\cup B)=B\cap(A\cup C)=(B\cap A)\cup(B\cap C)$

 $= (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap C = C.$

方法2:

假设B \neq C. 不妨设存在x,使x \in B \land x \notin C. 如果x \in A,则x \in A \cap B且x \notin A \cap C与已知矛盾. 如果x \notin A,则x \in A \cup B且x \notin A \cup C,也与已知矛盾. 因此B=C.

■ 由AUB=AUC能否推出B=C呢?能否由A∩B=A∩C推出B=C呢? 请思考

例3 对任意的集合A,B和C,给出 (A-B)⊕(A-C)=Φ

成立的允要条件.

解 **(A-B)**⊕**(A-C)**=Ф

 \Leftrightarrow ((A-B)-(A-C)) \cup ((A-C)-(A-B))= Φ

 \Leftrightarrow ((A-B)-(A-C))= $\Phi \land$ ((A-C)-(A-B))= Φ

⇔(A-B)⊆(A-C)^(A-C) ⊆(A-B) (例1)

 \Leftrightarrow A-B=A-C.

于是,充要条件是A-B=A-C.

9. 5. 2 幂集合的性质和传递集

合

■ 定理9. 5. 5 对任意的集合A和B. 有

(1)
$$A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$$
.

(2)
$$A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$$
.

证明

(1) 先设 $A \subseteq B$ 成立. 对任意的 x, 有

$$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq B$$
 (定理 9.2.2)

$$\Leftrightarrow x \in P(B)$$

于是, $P(A) \subseteq P(B)$.

再设 $P(A) \subseteq P(B)$ 成立, 对任意的 x, 有

$$x \in A \Leftrightarrow \langle x \rangle \subseteq A \Leftrightarrow \langle x \rangle \in P(A) \Rightarrow \langle x \rangle \in P(B)$$

$$\Leftrightarrow \langle x \rangle \subseteq B \Leftrightarrow x \in B$$
.

于是 $A\subseteq B$.

(2)
$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B) \land P(B) \subseteq P(A) \Leftrightarrow P(A) = P(B).$$

■ 定理9.5,6 对任意的集合A和B,有 $(1)P(A)\cap P(B)=P(A\cap B).$ $(2)P(A) \cup P(B) \subset P(AUB)$. 证明 (1)对任意的x,可得 $x \in P(A) \cap P(B) \Leftrightarrow x \in P(A) \land x \in P(B)$ \Leftrightarrow x \subset A \wedge x \subset B $\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A) \land (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in B)$ $\Leftrightarrow (\forall y)(y \in X \rightarrow (y \in A \land y \in B))$ $\Leftrightarrow x \subseteq A \cap B \Leftrightarrow x \in P(A \cap B).$

(2)对任意的x,可得

$$x \in P(A)UP(B) \Leftrightarrow x \in P(A)V x \in P(B)$$

$$\Leftrightarrow$$
 $x \subset AV x \subset B$

$$\Leftrightarrow$$
 $(\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A)V(\forall y)(y \in x \rightarrow y \in B)$

$$=> (\forall y)((y \in x \rightarrow y \in A)V(y \in x \rightarrow y \in B))$$

$$\Leftrightarrow$$
 $(\forall y)(y \in x \rightarrow (y \in A \cup B))$

$$\Leftrightarrow$$
 $x \subseteq AUB \Leftrightarrow x \in P(AUB).$

 注意,结论(2)不能写成等式.例如,令A={a}, B={b}.则P(AUB)={Φ, {a}, {b}, {a, b}}, P(A)UP(B)={Φ, {a}, {b}}.

定理9.5.8 对任意的集合A和B.有 $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\Phi\}.$ 证明 对任意的x,若x≠Φ,则有 $x \in P(A-B) \Leftrightarrow x \subseteq A-B$ \Leftrightarrow $(\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A-B)$ \Leftrightarrow $(\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A) \land (\forall y)(y \in x \rightarrow y \notin B)$ $=> (\forall y)(y \in X \rightarrow y \in A) \Leftrightarrow x \subset A$ 此外 x∈P(A-B) ^x≠Φ \Leftrightarrow x \subset A-B \land (\exists y)(y \in x) \Leftrightarrow $(\forall y)(y \in x \rightarrow (y \in A \land y \notin B)) \land (\exists y)(y \in x)$ => (∃y)(y∈x∧y∉B) (用推理规则)

```
⇔ x⊈ B
于是 x∈P(A-B) ^x≠Φ
   =>x \subseteq A \land x \subseteq B \Leftrightarrow x \in P(A) \land x \notin P(B)
   \Leftrightarrow x \in (P(A)-P(B))
   => P(A-B) \in (P(A)-P(B))U\{\Phi\}.
若x=Φ,有
   \Phi \in P(A-B) \bot \Phi \in (P(A)-P(B)) \cup \{\Phi\}.
```



传递集合是一类特殊的集合.下面给出传递集合的定义,并讨论它和幂集的关系,

定义9. 5. 1 如果集合的集合A的任一元素的元素都是A的元素,就称A为传递集合.
 这个定义也可以写成
 A是传递集合⇔(∀x)(∀y)((x∈y∧y∈A) →x∈A),

■ 例4

 $A=\{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$ 是传递集合.

A的元素的元素有 Φ 和{ Φ },这些都是A的元素.

 $B = \{\{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$

不是传递集合,B的元素的元素有 Φ 和 $\{\Phi\}$,但是 Φ 不是B的元素.

定理9. 5. 9 对集合的集合A, A是传递集合⇔A⊆P(A).

证明 先设A是传递集合.则对任意的y \in A,若y=\Phi则y \in P(A).若y \neq Φ,对(\forall x)(x \in y),有x \in A(A是传递集合),则有y \subseteq A,于是y \in P(A).总之,由y \in A \rightarrow y \in P(A).

再设A⊆P(A),则对任意的x和y,有 x∈y^y∈A=>x∈y^y∈P(A) (由已知) ⇔x∈y^y∈⊆A=>x∈A 因此,A是传递集合.

定理9.5.10 对集合的集合A,A是传递集合⇔P(A)是传递集合:

证明 先设A是传递集合. 对任意的x和y, 有 x∈y∧y∈P(A)⇔x∈y∧y⊆A=>x∈A

=> x⊆A (因为A是传递集合)

 $\Leftrightarrow x \in P(A)$

所以P(A)是传递集合(证明中利用了传递集合的性质,它的元素一定是它的子集).

再设P(A)是传递集合. 对任意的x和y,有 x∈y^y∈A⇔x∈y^{y} <u>C</u>A

 \Leftrightarrow $x \in y \land y \in \{y\} \land \{y\} \in P(A)$

=> x∈y^y∈P(A) (P(A)是传递集合)

9. 5. 3 广义并和广义交的性

质

定理9. 5. 11 对集合的集合A和B,有 $(1)A \subset B = > \cup A \subset \cup B$ (2)A⊆B=>∩B⊆∩A, 其中A和B非空. 证明 (1)设A⊂B. 对任意的x. 可得 $x \in \bigcup A \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y^y \in A)$ $=> (\exists y)(x \in y^y \in B) \Leftrightarrow x \in \cup B$ 所以,UA⊆UB. (2)设A⊆B.对任意的x,可得 $x \in \cap B \Leftrightarrow (\forall y)(y \in B \rightarrow x \in y)$ $=>(\forall y)(y\in A\rightarrow x\in y)(\pm A\subset B)$ $\Leftrightarrow x \in \cap A$ 所以, \cap **B** \subset \cap **A**.

■ 定理9. 5. 12 对集合的集合A和B, 有 (1)U(AUB)=(UA)U(UB),(2)∩(AUB)=(∩A)∩(∩B), 其中A和B非空. 证明 (1)对任意的x,可得 $x \in U(AUB) \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \land y \in AUB)$ $\Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \land (y \in A \ \forall y \in B))$ $\Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \land y \in A)V(\exists y)(x \in y \land y \in B)$ \Leftrightarrow x \in UA V x \in UB \Leftrightarrow x \in (UA)U(UB). 所以,U(AUB)=(UA)U(UB).

4

```
(2)对任意的x,可得 x \in \cap (AUB) <=>(\forall y)(y \in AUB \rightarrow x \in y) \Leftrightarrow (\forall y)((y \in A \ Vy \in B) \rightarrow x \in y) \Leftrightarrow (\forall y)(y \in A \rightarrow x \in y) \land (\forall y)(y \in B \rightarrow x \in y) \Leftrightarrow x \in \cap A \land x \in \cap B \Leftrightarrow x \in (\cap A) \cap (\cap B). 所以,\cap (AUB) = (\cap A) \cap (\cap B).
```



- 定理9. 5. 13 对任意的集合A,有U(P(A))=A.
 证明 对任意的x,可得
 x∈U(P(A))⇔(∃y)(x∈y∧y∈P(A))
 ⇔(∃y)(x∈y∧y⊆A)⇔x∈A
 所以,U(P(A))=A.
- 定理说明,广义并是幂集的逆运算. 例如,当A={a,b}有P(A)={ Φ , {a}, {b}, {a, b}},有UP(A)={a, b}. 但是次序不能颠倒,即P(UA) \neq A,只有A \subseteq P(UA). 例如,当A={{a}},有UA={a},有P(UA)={ Φ , {a}}.



下面讨论广义并和广义交对于传递集合的封闭性.

■ 定理9. 5. 14 若集合A是传递集合,则UA是传递集合.

证明 对任意的x和y,有
x∈y^y∈UA⇔x∈y^(∃z)(y∈z^z∈A)
=>x∈y^y∈A (A是传递集合)
⇔x∈UA
所以UA是传递集合.



■ 定理9. 5. 15 若集合A的元素都是传递 集合,则UA是传递集合.

证明对任意的x和y,有

 $x \in y \land y \in \bigcup A \Leftrightarrow x \in y \land (\exists z)(y \in z \land z \in A)$

=>(∃z)(x∈z∧z∈A) (z是传递集合)

⇔x∈UA

所以UA是传递集合.



- 定理9,5.16 若非空集合A是传递集合,则∩A是传递集合,且∩A=Φ.
- 这个定理的证明要使用正则公理,这里不给出证明.

4

■ 定理9.5.17 若非空集合A的元素都是传递集合,则∩A是传递 集合.

 $\exists x \in y \land y \in \bigcap A \Leftrightarrow x \in y \land (\forall z)(z \in A \rightarrow y \in z)$ $\Leftrightarrow (\forall z)(x \in y \land (z \notin A \lor y \in z))$ $\Leftrightarrow (\forall z)((x \in y \land z \notin A) \lor (x \in y \land y \in z))$ $\Leftrightarrow (\forall z)((x \in y \lor (x \in y \land y \in z)) \land (z \notin A \lor (x \in y \land y \in z)))$ $\Rightarrow (\forall z)(z \notin A \lor (x \in y \land y \in z))$ $\Leftrightarrow (\forall z)(z \in A \rightarrow (x \in y \land y \in z))$ $\Rightarrow (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z) \quad (z \land b \notin b \land b \land b \land c)$

所以∩A是传递集合.

 $\Leftrightarrow x \in \bigcap A$

9. 5. 4 笛卡儿积的性质

- 笛卡儿积具有下列基本性质.
 - (1) $A \times \Phi = \Phi \times B = \Phi$,
 - (2)若 $A \neq \Phi$, $B \neq \Phi$ 且 $A \neq B$,则 $A \times B \neq B \times A$,
 - (3)A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C

结论表明,笛卡儿积不满足交换律和结合律.结论(3)是因为

 $A \times (B \times C) = \{ \langle a, \langle b, c \rangle | a \in A \land b \in B \land c \in C \}$ $(A \times B) \times C = \{ \langle \langle a, b \rangle, c \rangle | a \in A \land b \in B \land c \in C \}$

其中<<a,b>,c>=<a,b,c>是三元组,但<a,<b, c>>不是三元组.<<a,b>,c>≠<a,<b, c>>

定理9. 5. 18 若A是集合,x∈A,y∈A,则 <x,y>∈PP(A). (PP(A)表P(P(A)).)

证明 $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x\} \in P(A)$,且 $x \in A \land y \in A \Leftrightarrow \{x,y\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x,y\} \in P(A)$.

由以上二式可得到

 $x \in A \land y \in A \Leftrightarrow \{\langle x \rangle, \langle x, y \rangle\} \subseteq P(A)$ $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \subseteq P(A) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in PP(A).$

4

- 定理9. 5. 19 对任意的集合A,B和C,有 $(1) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
 - (2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
 - (3) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$.
 - (4) $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$,

4

证明 只证(1), 其余留作思考题.

对任意的〈x,y〉,可得

$$\langle x,y\rangle \in A \times (B \bigcup C) \Leftrightarrow x \in A \land y \in B \bigcup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \land (y \in B \lor y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \land y \in B) \lor (x \in A \land y \in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \vee \langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

所以, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

定理9.5.20 对任意的集合A,B和C,若C \neq Φ ,则 $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$.

证明 先设 $A \subseteq B$. 若 $y \in C$,则

$$\langle x, y \rangle \in A \times C \Leftrightarrow x \in A \land y \in C$$

 $\Rightarrow x \in B \land y \in C \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in B \times C.$

所以, $A \times C \subseteq B \times C$.

再设 $A \times C \subseteq B \times C$. 取 $y \in C$,则

$$x \in A \Rightarrow x \in A \land y \in C \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C$$

 $\Rightarrow \langle x, y \rangle \in B \times C \Leftrightarrow x \in B \land y \in C \Rightarrow x \in B.$

所以, $A \subseteq B$.

总之, $A\subseteq B \Leftrightarrow A \times C\subseteq B \times C$.

类似可证, $A\subseteq B \Leftrightarrow C \times A \subseteq C \times B$.

定理9. 5. 21 对任意的非空集合A, B, C和D,

 $(A \times B \subseteq C \times D) \Leftrightarrow (A \subseteq C \land B \subseteq D).$

证明 先设 $A \times B \subseteq C \times D$, 对任意的 $x \in A$, 因存在 $y \in B$, 则

$$x \in A \land y \in B \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B$$

$$\Rightarrow \langle x,y \rangle \in C \times D \Leftrightarrow x \in C \land y \in D \Rightarrow x \in C$$

所以, $A \subseteq C$,类似有 $B \subseteq D$.

再设 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$. 对任意的 x 和 y,有

$$\langle x,y\rangle \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \land y \in B$$

$$\Rightarrow x \in C \land y \in D \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in C \times D.$$

所以, $A \times B \subseteq C \times D$.

9. 6 有限集合的基数

■ 集合的基数就是集合中元素的个数. 这一节介绍有限集合的基数和一些结论. 无限集合的基数将在以后介绍.

9. 6. 1 有限集合的基数

- 定义9. 6. 1 如果存在n∈N, 使集合A 与集合{x|x∈N∧x<n}={0,1,2,..., n—l>的元素个数相同,就说集合A的基 数是n,记作#(A)=n或|A|=n或 card(A)=n. 空集Φ的基数是0.
- 定义9. 6. 2 如果存在n∈N,使n是集合A的基数.就说A是有限集合.如果不存在这样的n,就说A是无限集合.

9. 6. 2 幂集和笛卡儿积的基

数

■ 定理9. 6. 1 对有限集合A,

$$|P(A)| = 2^{|A|}.$$

证明 设 $|A|=n\in\mathbb{N}$.

由 A 的 k 个元素组成的子集的数月是从 n 个元素中取 k 个的组合数

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

A 的有 0 个元素的子集只有 $\mathcal{O} \subseteq A$, 所以

$$|P(A)| = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = \sum_{k=0}^n C_n^k.$$

又因为

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k},$$



当 x=y=1 时,得

$$2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k.$$

所以

$$|P(A)| = 2^n = 2^{|A|},$$

定理9.6.2 对有限集合A和B,|A×B|=|A|.|B|.

9. 6. 3 基本运算的基数

- 定理9. 6. 3 对有限集合A1和A2,有 (1) $|A_1 \bigcup A_2| \leq |A_1| + |A_2|$,
 - (2) $|A_1 \cap A_2| \leq \min(|A_1|, |A_2|),$
 - (3) $|A_1-A_2| \ge |A_1|-|A_2|$,
 - (4) $|A_1 \oplus A_2| = |A_1| + |A_2| 2|A_1 \cap A_2|$.

下述定理通常称为包含排斥原理,它有更多的用途.



下面举例说明定理的应用.

例1 在10名青年中有5名是工人,有7名是学生,其中有3名既是工人又是学生,问有几名既不是工人又不是学生?

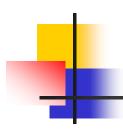
解 设工人的集合是A, 学生的集合是B. 则有 | A | = 5, | B | = 7, | A ∩ B | = 3, 又有 | -A ∩ - B | + | A ∪ B | = 10 - (| A | + | B | - | A ∩ B |) = 1

所以有一名既不是工人又不是学生.



■ 对3个有限集合A1, A2和A3, 可以推广 这个定理, 得到

 $|A1 \cup A2 \cup A3| = |A1| + |A2| + |A3| - |A1 \cap A2| - |A2 \cap A3| - |A1 \cap A3| + |A1 \cap A2 \cap A3|$



■ 例2 30位同学中,15加体育组,8人参加音乐组,6人参加美术组,其中3人同时参加三个组. 问至少有多少人没有参加任何小组?

解 设A1、A2、A3分别表示体育组、音乐组、美术组成员的集合.则有

 $|A1|=15, |A2|=8, |A3|=6, |A1\cap A2\cap A3|=3.$

因此

|A1∪A2∪A3|=15+8+6-|A1∩A2|-|A2∩A3|-|A1∩A3|+3=32-|A1∩A2|-|A2∩A3|-|A1∩A3|



而 |A1∩A2|≥|A1∩A2∩A3|=3 |A1∩A3|≥|A1∩A2∩A3|=3 |A2∩A3|≥|A1∩A2∩A3|=3 |所以|A1∪A2∪A3|≤32-3-3-3=23 |至多23人参加小组,所以至少7人不能参加任何小组。



■ 这个定理可以推广到n个集合的情况。若n∈N 且n>1,A1,A2,...,An是有限集合,则

$$|A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \bigcap A_j| +$$

$$\sum_{1 \leq i \leq k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

9. 7 集合论公理系统

- 在9. 1. 3例5中,用谓词定义集合时产生了悖论。防止悖论的方法是使集合论公理化,也就是建立集合论公理系统.
- 集合论公理系统是一阶谓词公理系统的扩展,它包括一阶谓词公理系统和几个集合论公理系统可以推出一阶谓词的所有理,集合论公理系统可以推出一阶谓词的所有定理,也可以推出集合论的概念和定理,它防止了集合论中的悖论.



在一阶谓词公理系统中,公理和定理都是永真 公式. 在集合论公理中, 少数公理是描述集合 性质的, 多数公理是构造合法集合的, 也就是 判定集合存在性的. 有的公理构造基本集合, 另一些公理由已知集合构造新的集合. 利用这 些公理,可以构造所有的集合(公理系统中的 合法集合),这就是证明定理. 在公理系统中 的集合,都是由公理得到的合法集合,以前介 绍的外延法和内涵法都不能构造出集合. 可以 说,集合论公理系统的主要目的是构造出所有 合法的集合,即判定集合的存在性、合法性.

• 集合论公理系统的一个基本思想是认为"任一集合的所有元素都是集合",集合论的研究对象只是集合.除集合外的其他对象(如有序对、数字、字母)都要用集合定义.于是对这些对象的研究也就转化为对集合的研究.在定义9.3.4中,已经用集合定义了有序对.以后将用集合定义自然数.其他数字和字母也可以用集合定义.因为集合的元素都是集合,所以集合最内层的元素只能是空集.例如集合{Φ, {Φ}, {{Φ}}, 因此,空集是最基本、最重要的集合.公理系统构造的第一个集合就是空集,

9. 7. 1 集合论公理

- 下面介绍ZF公理系统,它包括10条集合论公理。下面 依次介绍这10条公理,然后重点说明其中几条.对每 条公理都给出一阶谓词公式,论域包含所有集合.
 - (1)外延公理 两个集合相等的充要条件是它们恰好具有同样的元素.

$$(\forall x)(\forall y)(x=y\leftarrow\rightarrow(\forall z)(z\in x\leftarrow\rightarrow z\in y))$$

(2)空集合存在公理 存在不含任何元素的集合(空集 Φ).

(∃x)(∀y)(y∉x) x是空集Φ

这个公理定义了集合论中第一个集合,空集Φ, 由外延公理可知,空集是唯一的.



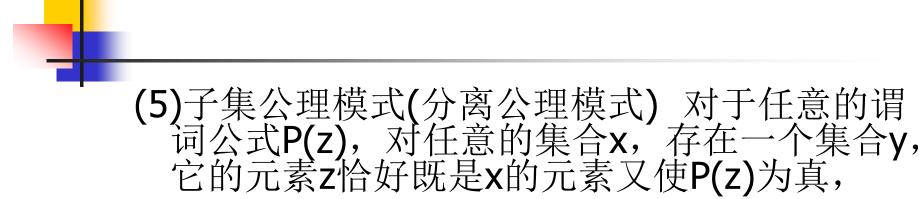
(3)无序对集合存在公理 对任意的集合x和y,存在一个集合z,它的元素恰好为x和y. $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \longleftrightarrow ((u=x)V(u=y)))$ 在x=y时,这个公理构造出恰好有一个元素的集合,如 $\{\Phi\}$ 和 $\{\{\Phi\}\}$. 在x≠y时,这个公理构造出两个元素的集合,如 $\{\Phi\}$ 和 $\{\{\Phi\}\}$, $\{\Phi\}$



(4)并集合公理 对任意的集合x,存在一个集合y,它的元素恰好为x的元素的元素,

 $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftarrow \rightarrow (\exists u)(z \in u \land u \in x))$

这个公理可以由集合{{Φ, {Φ}}, {Φ, {{Φ}}}} 构造集合{Φ, {Φ}, {{Φ}}}. 它解决了广义并 的存在性(集合的广义并是集合). 由无序对集 合存在公理和并集合公理,可以解决两个集合 并集的存在性(并集是集合).



 $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftarrow \rightarrow (z \in x \land P(z)))$

对一个具体的谓词(谓词常项)P(z), 子集公理模式就是一条公理, 对不同的P(z), 它是不同的公理. 所以, 子集公理模式不是一条公理, 而是无限多条有同样模式的公理. 因此称为公理模式. 在9. 7. 2节将介绍用子集公理模式解决交集、差集、广义交和笛卡儿积的存在性(集合经这些运算得到的都是集合),



(6)幂集合公理 对任意的集合x,存在一个 集合y,它的元素恰好是x的子集,

 $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftarrow \rightarrow (\forall u)(u \in z \rightarrow u \in x))$

公理指出幂集的存在性(集合的幂集是集 合).



(7)正则公理 对任意的非空集合x,存在x 的—个元素,它和x不相交.

 $(\forall x)(x\neq \Phi \rightarrow (\exists y)(y\in x^{(x}\cap y=\Phi)))$

正则公理将在9.7.3中说明.它排除了奇异集合,防止发生悖论.



(8)无穷公理 存在一个由所有自然数组成的集合.

 $(\exists x)(\Phi \in x \land (\forall y)(y \in x \rightarrow (y \cup \{y\}) \in x))$

式中的x是自然数集合N.在9.7.4中将说明自然数的定义和无穷公理.这个公理构造了第一个无限集合.

(9)替换公理模式 对于任意的谓词公式P(x,y),如果对任意的x存在唯一的y使得P(x,y)为真,那么对所有的集合t就存在一个集合s,使s中的元素y恰好是t中元素x所对应的那些y.

 $(\forall x)(\exists !y)P(x,y) \rightarrow (\forall t)(\exists s)(\forall u)(u \in s \leftrightarrow (\exists z)(z \in t \land P(z,u)))$ 其中(\forall x)(\forall !y)P(x,y)表示 $(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \land (\forall z) (P(x,z) \rightarrow z = y))$

这也是公埋楔式,它包括尤限多条公埋,对一个具体的P(x, y),就有一条替换公理,

4

(10)选择公理 对任意的关系R,存在一个函数F, F是R的子集,而且F和R的定义域相等.

 $(\forall x)(((\forall y)(y \in x \rightarrow y \neq \emptyset))$

 $\wedge (\forall y)(\forall z)((y \in x \land z \in x \land y \neq z) \rightarrow (y \cap z = \emptyset)))$

 $\rightarrow (\exists u)(\forall y)(y \in x \rightarrow (\exists !t)(t \in y \land t \in u)))$

也可以简写成

(∀关系R)(∃函数F)(F∈R∧dom(R)=dom(F))

这是有关函数的公理,将在第11章介绍,



■ 在10条公理中,外延公理和正则公理是描述集合性质的公理,其他公理都是判定集合存在的公理,也就是构造集合的公理,空集合存在公理和无穷公理不以其他集合的存在为前提,是直接构造基本的集合. 它集合公理、无序对集合存在公理,并模式、替换公理模式、替换公理是有条件的存在公理. 这6条公理都是由知集合构造新集合的公理. 其中前5条公理构造的集合是唯一的,而选择公理没有给出构造新集合的方法,它只判定了新集合的存在性. 实际上可能存在多个满足要求的新集合(即存在多个要求的函数).



• 建立公理系统时,总希望公理是彼此独立的. 但在这10条公理中,无序对集合存在公理和子集公理模式可以由其它公理推出. 加入这两条公理是为了使用方便. 下面给出由其它公理导出这两个公理的简单证明.



■ 已知u和v是集合,下面证明{u,v}也是 集合,由空集公理,Φ是集合.由幂集公 理, $P(Φ) = {Φ} 是集合, P({Φ}) = {Φ},$ $\{\Phi\}$ }也是集合,令集合 $t=\{\Phi, \{\Phi\}\}$,定 义P(x, y)为 $P(\Phi, u)=T, P(\{\Phi\}, v)=T,$ 则t和P(x, y)满足替换公理的前提,由替 换公理得到,存在由u和v构成的集合s= $\{u,v\},$

4

替换公理模式中,令P(x,y)是p(x)^(x=y).显然对任意的x存在唯一的y使p(x)^(x=y)成立.所以替换公理模式的前提成立,则有(∀t)(∀s)(∀u)(u∈s←→(∃z)(z∈t^p(z)^(z=u)))即 (∀t)(∃s)(∀u)(u∈s←→(u∈9^p(u)))这就是子集公理模式,因此它是替换公理模式的特例.

9. 7. 2 子集公理模式

子集公理模式是

 $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftarrow \rightarrow (z \in x^p(z)))$

子集公理模式是说,对任意的集合x,存在x的子集y,y的元素z使p(z)为真. 它主要用于下列情况. 已知若干满足条件p(z)的元素,但不知这些元素能否组成一个集合. 这时只要找到一个集合A,使这些满足条件的元素都有z∈A,这样就可以由A和p(x)用分离公理得到集合

 $\{x|x\in A^p(x)\}$

这就是那些元素组成的集合.



下面用子集公理模式证明交集、差集、广义交和笛卡儿积的存在性.

■ 定理9. 7. 1 对任意的集合A和B,交集 A∩B是集合,

证明 对集合A,选取x∈B为子集公理模式中的p(x).由子集公理存在集合

 $A0 = \{x \mid x \in A^x \in B\},$

所以, **A0**=**A**∩**B**是集合,



■ 定理9. 7. 2 对任意的集合A和B, 差集 A-B是集合.

证明 由集合A和谓词公式 $x \notin B$,依据子集公理,存在集合

 $A0=\{x|x\in A^x\notin B\}.$

所以,AO=A-B是集合.

■ 定理9. 7. 3 对任意的非空集合A,广义交∩A 是集合,

证明 对非空集合A,存在A1 \in A. 选取公式 $(\forall y)(y\in A\rightarrow x\in y)$ 为p(x). 依据子集公理,对 集合A1和上述公式,存在集合

 $A0=\{x|x\in A1^{(\forall y)}(y\in A\rightarrow x\in y)\},$ 此外 $\cap A=\{x|(\forall y)(y\in A\rightarrow x\in y)\}.$ 由 $A1\in A和(\forall y)(y\in A\rightarrow x\in y)$ 可以推出 $x\in A1$, 所以 $A0=\cap A$, $\cap A$ 是集合. ■ 定理9.7.4 对任意的集合A和B,笛卡儿积A×B是集合.

证明 对任意的<x,y>,有

$$x \in A \land y \in B$$

$$\Rightarrow x \in A \cup B \land y \in A \cup B$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in PP(A \cup B)$$
 (定理 9.5.18)

显然 $PP(A \cup B)$ 是集合,选取公式 p(z) 为

$$z = \langle x, y \rangle \land x \in A \land y \in B$$

可以构造它的子集

$$\langle z | z \in PP(A \cup B) \land z = \langle x, y \rangle \land x \in A \land y \in B \rangle$$

这就是 $A \times B$, 所以 $A \times B$ 是集合.

- 下面用子集公理证明一个重要结论.
- 定理9.7.5 不存在集合A,使任一集合都是A的元素.

证明 假设存在集合A,任一集合是A的元素.选p(x)为x各x,依据子集公理,存在集合

$$A_0 = \{x \mid x \in A \land x \in x\},\$$

即 $x \in A_0 \Leftrightarrow x \in A \land x \in x$.

取 $x=A_0$,则有

 $A_0 \in A_0 \Leftrightarrow A_0 \in A \land A_0 \notin A_0$.

如果 $A_0 \in A_0$ 就有 $A_0 \in A_0 \oplus A_0 \oplus A_0$,这是不可能的. 所以 $A_0 \oplus A_0$ 与假设才油, 定理待证。



■ 下面说明,为什么以前规定 \bigcap Φ不存在? 假设 \bigcap Ф是集合,则由广义交的定义, $x \in \bigcap$ \bigoplus $(\forall y)(y \in \bigoplus$ $y \in Y$).

因为 $y \in \Phi$ 永假,所以右式永真. 于是左式 $x \in \cap \Phi$ 对所有x永真,于是 $\cap \Phi$ 是所有集合的集合,与定理9.7.5矛盾. 因此规定 $\cap \Phi$ 不存在,

9. 7. 3 正则公理和奇异集合

首先定义非空集合的极小元.

- 定义9. 7. 1 对任意的集合A和B,当有A \in B 且A \cap B= Φ ,就称A为B的一个极小元.
- 例如集合B={{Φ}, {Φ, {Φ}}}, 则A1={Φ}是
 B的极小元, A2={Φ, {Φ}}不是B的极小元.
- 正则公理是说任一非空集合都有极小元. $(\forall x)(x \neq \Phi \rightarrow (\exists y)(y \in x^x \cap y = \Phi))$
- 正则公理又称为基础公理或限制公理.由这个公理可以推出集合的一些重要性质.



■ 定理9. 7. 6 对任意的集合A, A∉A.

证明 假设存在集合A,使A∈A,可以构造集合 $\{A\}$,有A∈ $\{A\}$. 由正则公理, $\{A\}$ 有极小元,这只能是 $\{A\}$ 的唯一元素A,因此, $A\cap\{A\}=\Phi$. 但是,由假设A∈A,则A与 $\{A\}$ 有公共元A,即A $\cap\{A\}\neq\Phi$. 产生矛盾. 所以, $A\notin A$.

■ 定理9. 7. 7 对任意的集合A1和A2有一(A1∈A2^A2∈A1).

证明留作思考题,



- 定理9. 7. 8 对任何非空的传递集合A,有 Φ∈A.
- 证明 假设存在非空传递集合A,有 $\Phi \notin A$,由正则公理,A中有极小元y,使y $\in A$ 且y $\cap A = \Phi$,由假设 $\Phi \notin A$,则y $\neq \Phi$.由正则公理,非空集合y有极小元z,使z $\in y$ 且z $\cap y = \Phi$,因为A是传递集合,且z $\in y$ 和y $\in A$,所以z $\in A$,再考虑z $\in y$,则y $\cap A \neq \Phi$,产生矛盾.结论得证.
- 由定理结论 $\Phi \in A$,可以进一步推出 $\cap A = \Phi$,因 而 $\cap A$ 是传递集合. 这是定理**9.5.16**的结论,

下面讨论奇异集合的有关问题.

■ 定义9. 7. 2 如果集合A中有集合的序列 A_0 ∈A, A_1 ∈A,…, A_n ∈A,…,使得…, A_{n+1} ∈A_n, A_n ∈A_{n-1},…, A_1 ∈A₀,或简写为 …∈ A_{n+1} ∈A_n∈A_n∈A_{n-1} ∈…∈ A_2 ∈A₁∈A₀,就称A为奇异集合,

■ 定理9. 7. 9 奇异集合不满足正则公理, 证明 设A为奇异集合,则A中的—些元素满足 $... \in A_{n+1} \in A_n \in A_{n-1} \in ... \in A_2 \in A_1 \in A_0$ 于是可以构造A的非空子集 $B = \{A_0, A_1, ..., A_n, ...\},\$ 假设B中有极小元Ai(i≥0.),则Ai∈B且Ai∩B= Φ. 然而,因为Ai+l∈Ai和Ai+l∈B,所以 $Ai\cap B\neq \Phi$,产生矛盾.因此B没有极小元,不满 足正则公理. 奇异集合A不是集合.



■ 定理9.7.10 若非空集合A不是奇异集合,则A满足正则公理.

证明 假设A中没有极小元.则对任一个A0∈A,都存在A1,使A1∈A0且A1∈A. A1也不是A的极小元,应存在A2,使A2∈A1且A2∈A. 依此类推,A中应有元素A0,A1,...,An,...,使得...∈An+1∈An∈An-1∈...∈A1∈A0因此且是奇异集合,与已知矛盾. 所以A中有极小元,A满足正则公理.



■定理指出,若存在奇异集合,则不满足正则公理;若存在正则公理,则不存在奇异集合.正则公理是限制性的,它排除了奇异集合的存在,1908年提出的集合论公理中没有正则公理,1917年提出了奇异集合问题.1925年提出了正则公理,解决了奇异集合问题。

9, 7. 4 无穷公理和自然数集

- 合
 - 无穷公理给出自然数集合的存在性.下 面先定义自然数,再说明无穷公理.
 - 定义9. 7. 3 对任意的集合A,可以定义集合A+=AU{A},把A+称为A的后继, A称为A+的前驱.
 - 定义9. 7. 4 集合0=廖是一个自然数, 若集合n是一个自然数,则集合n+1=n+也是一个自然数.

■ 按照这个定义,可以列出各自然数

$$0 = \emptyset$$

$$1 = 0^{+} = 0 \cup \{0\} = \{0\}$$

$$2 = 1^{+} = 1 \cup \{1\} = \{0,1\}$$

$$3 = 2^{+} = 2 \cup \{2\} = \{0,1,2\}$$
...

对任一个自然数 n+1,则

 $n+1=n^+=\{0,1,\cdots,n\}.$ **0**没有元系,1有一个几系,2有两个几系,周以。这件是又自然数定合理的,很容易定义自然数间的大小关系,



- 定义9. 7. 5 对任意的自然数m和n,
 m<n⇔m⊂n⇔n>m
 m≤n⇔m⊆n⇔n≥m.
- 无穷公理是 (∃N)(Φ∈N^(∀y)(y∈N→y+∈N))

无穷公理给出了自然数集合N的存在性..式中的N就是自然数集合,依据外延公理,自然数集合是唯一的,



- 下面讨论自然数的三歧性.
- 定义9. 7. 6 对集合A,如果对任意的集合 A1∈A和A2∈A,使

A1∈A2,A1=A2和A2∈A1

- 三式中恰好有一个成立,就称集合A有三歧性。
- 例如集合3={0,1,2}. 因为0∈1,0∈2, 1∈2,所以3有三歧性,
- 定理9. 7. 11 集合N有三歧性. 每个自然数都有三歧性. 对任意的自然数m和n,有m<nvm=nvm>n.