补充题

Problem 1

证明 9 个人中若非至少 4 个人相互认识，则至少有 3 个人相互不认识。

引理:六个人中必有三个人相互认识或相互不认识。（拉姆塞定理）

引理证明：
1. 设其中一人为A。 若A认识其中三个人，则若三个人之间相互不认识，得证。若三人之中有两人相互认识，则加上A，三人相互认识。
2. 若A不认识其中三个人，则若三个人之间相互认识，得证。若三人之中有两人相互不认识，则加上A，三人相互不认识。

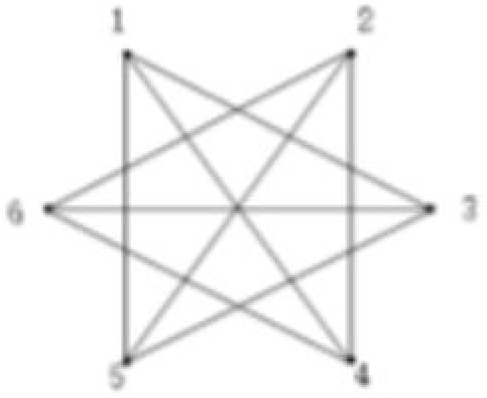
证明:
1. 若九个人中存在一个人不认识其中四个人，设其为A。则若四个人相互认识，存在4个人相互认识；若四个人中有两人相互不认识，则加上A，存在3个人相互不认识。
2. 若全部九个人都认识至少五个人，则至少有一个人认识至少六个人(图中度为奇数的节点必有偶数个)。则由引理：六个人中有三人互相认识，加上A就有4个人相互认识；或者六个人里有三个人互不认识。得证。

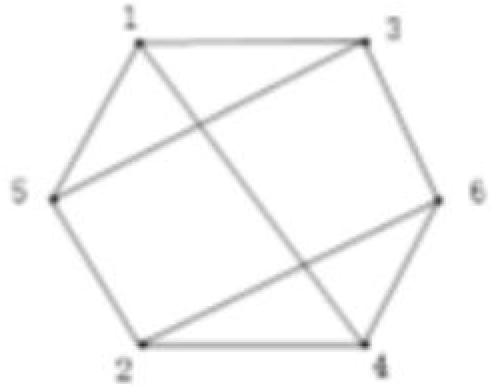
补充题

Problem 2

6 个人围成圆形就坐，每个人恰好只与相邻者不认识，是否可以重新入座，使每个人都与邻座认识？

答：可以。原题可转化为寻找同构图的问题。由以下两图同构可得。





补充题

在约克阿尔昆(735-804)提出的一个古老智力游戏中，一位农夫需要将一匹狼、一只山羊和一棵白菜带过河.农夫只有一只小船，小船每次只能载农夫和一件物品(一只动物或者白菜).农夫可以重复渡河，但如果农夫在河的另一边.那么狼会吃羊，类似地，羊会吃白菜.

可以通过列出两岸各有什么来描述问题的每个状态. 例如，可以用有序对(FG,WC)表示农夫和羊在一岸，而狼和白菜在另一岸的状态. [F 表示农夫, G 表示山羊, W 表示狼, C 表示白菜, ∅表示岸上什么也没有. 问题的初始状态就是(FGWC, ∅).]

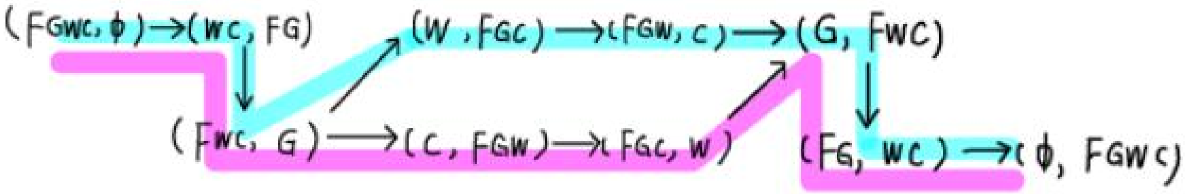
(1) 找出这个游戏所有的允许状态，其中不能出现在没有农夫的情况下，让狼和羊，或者羊和白菜在同一岸上. (3 分)
(2) 构造一个图，使得图中的每一个顶点表示一个允许的状态，如果可以通过一次船的运输从一个状态转换到另一个状态，那么相应的顶点之间用一条边相连. (3 分)
(3) 找出这个游戏的两个不同解，每个解都使用 7 次渡河. (2 分)

解：(1) 不考虑约束条件共$2^4=16$种状态，

(FGWC, φ)	(FG, WC)	~~(F, WGC)~~
(FGW, C)	~~(FW, GC)~~	(G, FWC)
(FGC, W)	~~(FC, WG)~~	(W, FGC)
(FWC, G)	(WC, FG)	(C, FGW)
~~(GWC, F)~~	~~(GC, FW)~~	(φ, FGWC)
	~~(WG, FC)~~	

删去不满足题意的情况，共10种状态.

(2)



(3) 两种方案如上图所示。

补充题

Problem 1

设 G 是不存在三角形的简单图，证明：

(1) $\sum d^2(v_i) \le mn$

(2) $m \le \frac{n^2}{4}$

答：1. 对图中一条边，记其端点为 v_i, v_j，由于图中不存在三角形，有：

$$d(v_i) + d(v_j) \le n$$

对所有边列出上式相加，可得

$$\sum d^2(v_i) \le mn$$

左边为 $\sum d^2(v_i)$ 是因为值为 $d(v_i)$ 的项恰被计算了 $d(v_i)$ 次。

2. 设图中度最大的一个节点 v_0 度为 k $(0 \le k \le n-1)$. 则可以将所有节点分为三类：v_0, 和 v_0 直接相连的 k 个节点，和其他的 $(n-1-k)$ 个节点。图中的边有两类：和 v_0 直接相连的边，共有 k 条；以及和第三类的 $(n-1-k)$ 个节点相连的边，最多有 $k \times (n-1-k)$ 条。故

$$\begin{aligned} m &\le k + k \times (n-1-k) \\ &= k \times (n-k) \\ &\le \frac{n^2}{4}. \end{aligned}$$

补充题

Problem 2

证明: 二分图 $G=<X,Y>$, X 与 Y 是其二分的结点子集. 证明: 如果 G 为哈密顿图, 那么 $|X|=|Y|$.

证明：不妨设 G 中一条H回路 $(v_1, v_2, v_3 \cdots v_n)$ 且 v_1 与 v_n 相连，再设 $v_1 \in X$

$\because$ v_1, v_2 相连，G 为二分图

$\therefore$ $v_2 \in Y$

$\because$ v_2, v_3 相连，G 为二分图

$\therefore$ $v_3 \in X$

同理可知，$v_1, v_3 \cdots v_{2k+1} \in X$，$v_2, v_4 \cdots v_{2k} \in Y$

如果 n 为奇数，那么 $v_1 \in X$，$v_n \in X$，这和 v_1 与 v_n 相连矛盾

所以 n 为偶数，$v_1, v_3 \cdots v_{n-1} \in X$，$v_2, v_4 \cdots v_n \in Y$

$\therefore |X| = |Y| = \frac{n}{2}$