离散数学 第二次助教课

蔡子诺

2022年11月22日

第一章 命题逻辑的基本概念

考点一：命题的判断

- 非真即假的陈述句

考点二：命题联结词及真值表

考点三：重言式、可满足式、矛盾式

考点四：代入规则

- 原子命题、全部代换

考点五：命题形式化

- 易错点：异或的形式化

考点六：(逆)波兰表达式

C, 真值表法

( ) 2. 命题公式$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$具有______个使其为真的指派。

A 2

B 4

C 5

D 3

方法1：为假的指派->R为F，(P and Q)为F

方法2：真值表法

1.3 命题公式 $;P\vee((Q\vee R)\wedge S)$ 的波兰表达式为 $\vee P\wedge\vee QRS$

1.8 $(p\wedge q)\vee(\neg p)$ 的波兰表达式是：$\vee\wedge pq\neg p$

1.4 设P：天下雨，Q：他在室内运动，则命题“除非天下雨，否则他不在室内运动”的形式化为 $\neg P\rightarrow\neg Q$.

1.10 设P：“你陪伴我”，Q：“你代我叫车子”，R：“我将出去”。则命题：“除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去”的形式化为：$\neg(P\vee Q)\rightarrow\neg R$

1.6 命题公式 $(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$ 是 重言式

P	Q	结果
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

第二章 命题逻辑的等值和推理演算

- 考点一：等值公式（18条）
- 考点二：联结词的完备集
- 考点三：对偶式
- **考点四：范式、主范式**
- 考点五：推理公式
- **考点六：推理演算**
  - □ 条件证明规则
  - □归结法

（B）3. 下面有______个命题联结词集合是完备集。

{¬, ∧}, {¬, ∨}, {¬, →}, {¬, ↔}, {∨, →}, {∧, ↔}, {∨, ↑}, {↓}

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

最小完备集的个数为4个

不完备集

- {∨,∧,→, ↔}不是完备的
  因为¬不能仅由该集合的联结词表达出
- {¬, ↔}不是完备的
- {∨,∧,→, ↔}的任何子集都是不完备的
  {¬, ↔}的任何子集也是不完备的
  (如果一个联结词的集合是不完备的，那么它的任何子集都是不完备的)
- {∨,∧}不是完备的

2.8

逻辑联结词或非↓可以定义为：$x \downarrow y = \neg(x \vee y)$。将公式 $\neg(x \vee y) \wedge z$ 转换成只用↓表示的公式 $((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)) \downarrow (z \downarrow z)$。

2.12

$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$，用或非联结词表示出 $P \rightarrow Q$ 为 $((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)$。

2.4

4. $P \to Q \vee R \to S$的对偶式为 $(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge S$ 。

注意运算顺序和括号的添加

- 2.7

C

（　）13. 命题公式 $\neg(P \wedge Q) \to R$ 的主析取范式中含极小项的个数为____

A. 8　　B. 3　　C. 5　　D. 0

- 2.13

7. 已知公式 $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow (Q \to P))$，其主合取范式为____$M_1$____。

P	Q	结果
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

第二章：主范式

2.17 设命题公式 $G=\neg(P\to Q)\vee(Q\wedge(\neg P\to R))$ ，求 G 的主析取范式。

1. 消去联结词
2. 否定词内移
3. 使用分配律
4. 添加缺失项

$$
\begin{aligned}
G &= (P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge(P\vee R)). \\
&= (P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge P)\vee(Q\wedge R). \\
&= (P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R) \\
&\quad \vee (P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R) \\
&\quad \vee (P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R) \\
&= \bigvee\nolimits_{3;4;5;6;7}
\end{aligned}
$$

主合取范式：$\bigwedge_{7;6;5}$

2.14

2. 设命题公式$G=\neg(P\rightarrow Q)$，$H=P\rightarrow(Q\rightarrow\neg P)$，则$G$与$H$的关系是（ A ）

(A) $G\Rightarrow H$ (B) $H\Rightarrow G$ (C) $G=H$ (D) 以上都不是

$G=P\wedge\neg Q.$

$H=\neg P\vee(\neg Q\vee\neg P)$

$=\neg P\vee\neg Q.$

$G\Rightarrow H$ 成立

$H\Rightarrow G$ 不成立.

2.15

3. 下面 4 个推理定律中，不正确的是（ D ）。

(A) $A\Rightarrow(A\vee B)$ (B) $(A\vee B)\wedge\neg A\Rightarrow B$

(C) $(A\rightarrow B)\wedge A\Rightarrow B$ (D) $(A\rightarrow B)\wedge\neg B\Rightarrow A$

第二章：自然语句形式化+推理演算

七、(8') 证明下列推理关系：如果李华在光明中学上学，那么他不是初中生，就是高中生。如果李华是初中生，那么他需要参加中考。如果李华是高中生，那么他经常给外国的友人写信。如果李华经常给外国的友人写信，那么他的英文写作能力很强。李华的英文写作能力不强。从而知：如果李华在光明中学上学，那么他需要参加中考。

自然语句形式化

P：李华在光明中学上学
Q：李华初中生
R：李华高中生
S：李华参加中考
T：李华给外国友人写信
W：李华英文写作能力强

$(P \to \boxed{Q \bar{\vee} R}),\ Q \to S,\ R \to T,\ T \to W,\ \neg W \Rightarrow P \to S$

(1) P 附加前提引入.
(2) $P \to Q \bar{\vee} R$ 前提引入.
(3) $Q \bar{\vee} R$ (1)(2)分离
(4) $T \to W$ 前提引入.
(5) $\neg W \to \neg T$ (4)置换
(6) $\neg W$ 前提引入.
(7) $\neg T$ (5)(6)分离
(8) $R \to T$ 前提引入
(9) $\neg T \to \neg R$ (8)置换
(10) $\neg R$ (7)(9)分离
(11) Q (3)(10)
(12) $Q \to S$ 前提引入
(13) S (11)(12)分离
(14) $P \to S$ 条件证明规则

六. (8') 任用一种推理方法证明：$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \wedge (\delta \to \neg\gamma) \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \delta)$

$$\neg(\alpha \wedge \delta) = \neg\alpha \vee \neg\delta = \alpha \to \neg\delta.$$

证明：

(1) α 附加前提引入

(2) $\alpha \to \beta$ 前提引入.

(3) β (1)(2)分离

(4) $\beta \to \gamma$ 前提引入

(5) γ (3)(4)分离.

(6) $\delta \to \neg\gamma$ 前提引入.

(7) $\gamma \to \neg\delta$ (6)置换.

(8) $\neg\delta$ (5)(7)分离

(9) $\alpha \to \neg\delta$ 条件证明规则.

第四章 谓词逻辑的基本概念

- 考点一：基本概念（谓词、个体词、函数、量词、自由变元与约束变元、辖域）
- 考点二：合式公式的判断
- 考点三：自然语句形式化
  - 所有的有理数都是实数；
  - 有的实数是有理数；
  - 没有有理数是无理数；
  - 有的实数不是有理数
- 考点四：有限域下的表示
- 考点五：普遍有效性的判定

4.5

6. 公式 $(\forall x)\big((P(x) \to Q(x)) \wedge (\exists y)R(y)\big) \wedge S(z)$ 的自由变元是 ___z___，全称量词的辖域为 ___$((P(x) \to Q(x)) \wedge (\exists y)R(y))$___。

4.1

(　) 5. 若个体域为整数集合，下列公式中___C___不是命题。

A. $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y=x)$

B. $(\forall x)(\exists y)(x \cdot y=1)$

C. $(\forall x)(x \cdot y=x)$

D. $(\exists x)(\exists y)(x \cdot y=2)$

4.2

（C）6. 设个体域 $D=\{a, b\}$，则公式 $(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$ 消去量词后可表示为______。

A. $(F(a)\wedge F(b))\vee(G(a)\wedge G(b))$；

B. $(F(a)\vee F(b))\wedge(G(a)\vee G(b))$；

C. $(F(a)\wedge G(a))\vee(F(b)\wedge G(b))$；

D. $(F(a)\vee G(a))\wedge(F(b)\vee G(b))$

4.6

（ ）14. 设 A(x)：x 是人，B(x)：x 犯错误，命题"没有人不犯错误"符号化为______

A. $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$

B. $\neg(\exists x)(A(x) \to \neg B(x))$

C. $\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$

D. $\neg(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$

D

4.7

8. 设 R(x) 表示 x 是实数，E(x, y) 表示 x=y， 则语句"对所有的实数 x，都存在实数 y，使得 x=y"的符号化为

$(\forall x)(R(x) \to (\exists y)(R(y) \wedge E(x,y)))$

第四章 普遍有效性的判定

4.8

9. 公式 $(\exists x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$ ______ 不是 (是/不是) 普遍有效的；

Q(0)=Q(1)=P(0)=F, P(1)=F

4.9

10. 公式 $\neg((\forall x)F(x) \rightarrow (\exists y)G(y)) \wedge (\exists y)G(y)$ ______ 是 (是/不是) 不可满足的

化简

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

考点一：等值式

考点二：范式

- 前束范式：去联结词 -> 否定词内移 -> 量词左移 -> 变元异名
- Skolem 标准型

考点三：推理演算

- 全称/存在量词的引入与消去
- 归结推理

5.6

（A）15. 下列各式哪个不正确？

A. $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

B. $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

C. $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

D. $(\forall x)(P(x) \vee q) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee q$

六(8') 求公式$((\forall x)(\exists y)(P(x,y) \to Q(y))) \to (\forall x)(R(x) \to (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))$

的前束范式和 Skolem 标准形。

$$((\forall x)(\exists y)(P(x,y) \to Q(y))) \to \forall x(R(x) \to (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))$$

$$= \neg((\forall x)(\exists y)(\neg P(x,y) \vee Q(y))) \vee (\forall x)(\neg R(x) \vee (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))$$

$$= (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \wedge \neg Q(y)) \vee (\forall x)(\neg R(x) \vee (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))$$

$$= (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \wedge \neg Q(y)) \vee ((\forall x)(\exists u)(\forall v))(\neg R(x) \vee L(x,u,v))$$

$$= (\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(P(x,y) \wedge \neg Q(y)) \vee (\neg R(z) \vee L(z,u,v))$$

skolem标准型

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)\ P(a,y) \wedge \neg Q(y) \vee \neg R(z) \vee L(z,f(y,z),v)$$

5.8

八．（10'）任用一种推理方法证明：

$$(\exists x)(R(x) \wedge W(x)), (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(W(x) \wedge \neg P(x))$$

(1)	$(\exists x) R(x) \wedge W(x)$	前提引入
(2)	$R(a) \wedge W(a)$	存在量词消去
(3)	$R(a)$	(2)
(4)	$(\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x))$	前提引入
(5)	$R(a) \rightarrow \neg Q(a)$	全称量词消去
(6)	$\neg Q(a)$	(2)(5)分离
(7)	$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$	前提引入
(8)	$P(a) \rightarrow Q(a)$	全称量词消去
(9)	$\neg Q(a) \rightarrow \neg P(a)$	(8)置换
(10)	$\neg P(a)$	(6)(9)分离
(11)	$W(a)$	(2)
(12)	$\neg P(a) \wedge W(a)$	(10)(11)
(13)	$(\exists x)(\neg P(x) \wedge W(x))$	存在量词引入

谢谢！

饮 水 思 源　爱 国 荣 校