第三次习题课

考试要点及例题讲解

命题的定义

- 非真即假的陈述句
- 下列不是命题的是
- A. 明天下雨
- B. 这句话是错的
- C. 今天下雨
- D. $x+1=2$

BD

真值的判断及命题的化简

- $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$真值表

P	Q	$(P \wedge Q)$	$(P \vee Q)$	$(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$
F	F	F	F	T
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	T	T

$$(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$$

$$\neg(P \wedge Q) \vee (P \vee Q)$$

$$(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \vee Q)$$

重言式

命题及符号化

- 若P：明天下雨，Q：今天下雨，那么“今明两天都下雨”符号化为

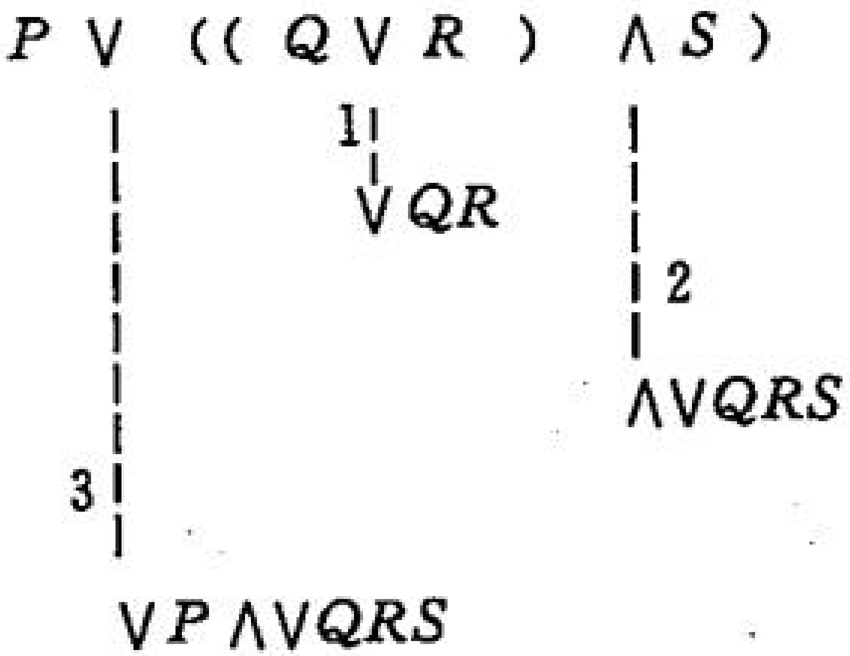
  $$(P \wedge Q)$$

- 如果说“交大比同济工科好；同济比复旦数学好；数学好则工科好；工科好则数学好”这四段话都是正确的，那我们可以知道：
- A. 交大工科比复旦好
- B. 交大数学比复旦好
- C. 同济数学比交大好
- D. 复旦工科比同济好

AB

波兰式和逆波兰式

- 波兰=前缀，逆波兰=后缀
- $P \vee ((Q \vee R) \wedge S)$的波兰式



完备集及其表示

- 选出下列选项中的完备集
- A. $\{\vee, \wedge\}$
- B. $\{\neg, \vee, \wedge\}$
- C. $\{\neg, \leftrightarrow\}$
- D. $\{\neg, \rightarrow\}$

$$g_8(P,Q) = \neg P \wedge \neg Q = P \downarrow Q,$$

$$g_{14}(P,Q) = \neg P \vee \neg Q = P \uparrow Q,$$

BD

- 常见完备集：

$$\{\neg, \vee\}, \{\neg, \wedge\}\ \{\neg, \rightarrow\}, \{\uparrow\}, \{\downarrow\}$$

（主）合/析取范式

求$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$的析取范式.

$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$

$=(\neg(P\vee Q)\wedge(P\wedge Q))\vee(\neg\neg(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q))$

$=(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)\vee((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))$ （摩根律、双重否定）

$=(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg P)\vee(Q\wedge\neg Q)$ （分配律）

$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

$=(P\vee\neg P)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee\neg P)\wedge(\neg Q\vee Q)$ （分配律）

$=(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$ （同一律）

极大/极小项

- $P \to Q$主析取范式
- 析取-极小-T，合取-极大-F
- $\vee_{0;1;3}$， $\wedge_1$

P	Q	$P \to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

由两个命题变项 P_1，P_2可构成四个极小项：$\neg P_1 \wedge \neg P_2$，$\neg P_1 \wedge P_2$，$P_1 \wedge \neg P_2$和 $P_1 \wedge P_2$. 若将 P_i与 1 对应，而$\neg P_i$与 0 对应，进而将极小项

$\neg P_1 \wedge \neg P_2$与 00 对应，简记为 m_0.

$\neg P_1 \wedge P_2$与 01 对应，简记为 m_1.

$P_1 \wedge \neg P_2$与 10 对应，简记为 m_2.

$P_1 \wedge P_2$与 11 对应，简记为 m_3.

由两个命题变项 P_1，P_2可构成四个极大项：$\neg P_1 \vee \neg P_2$，$\neg P_1 \vee P_2$，$P_1 \vee \neg P_2$和 $P_1 \vee P_2$，并分别以 M_0，M_1，M_2和 M_3表示.

变元、函数、辖域等概念

- 下列说法中正确的是
- A. $(\forall x)P(x)\vee Q(y)$ 中，x是约束的，y是自由的
- B. $(\exists x)((\forall y)P(x,y))$ 中，∀y的辖域是P(x,y)
- C. 无论P(x)为何，$(\forall x)P(x)=(\forall y)P(y)$
- D. 将命题形式P(x)变为命题的方式只有将x确定为某个常项

ABC

合式公式

AD

- 下列选项中哪些是合式公式
- A. $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$
- B. $(\forall x)F(x) \wedge G(x)$
- C. $(\exists x)((\forall x)F(x))$
- D. $(\exists x)(A(x) \rightarrow (\forall y)B(x,y))$

合式公式定义：

(1) 命题常项、命题变项和原子谓词公式(不含联结词的谓词)都是合式公式.

(2) 如果 A 是合式公式，则$\neg A$ 也是合式公式.

(3) 如果 A,B 是合式公式，而无变元 x 在 A,B 的一个中是约束的而在另一个中是自由的，则$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$也是合式公式(最外层括号可省略).

(4) 如果 A 是合式公式，而 x 在 A 中是自由变元，则$(\forall x)A$，$(\exists x)A$ 也是合式公式.

(5) 只有适合以上 4 条的才是合式公式.

自然语句和公式转化

BC

- 下列自然语句及公式转化正确的是
- A. A(x)表示为偶数，B(x)表示为素数，则 至少有一偶数是素数 转化为 $(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$
- B. A(x)表示为实数，B(x)表示为有理数，则 有的实数不是有理数 转化为 $(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$
- C. A(x)表示为无理数，B(x)表示为有理数，则 $\neg(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$ 转化为 没有无理数是有理数
- D. P(x)表示为有理数，Q(x)表示为实数，则 $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))$ 转化为 所有的有理数都是实数

普遍有效性的判断

- 下列选项中普遍有效的是
- A. $(\exists x)(P(x) \land Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x))$
- B. $(\forall x)(P(x) \lor \neg P(x))$
- C. $(\forall x)P(x)$
- D. $(\exists x)(P(x) \land \neg P(x))$

AB

前束范式和Skolem标准形

求$\neg((\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\rightarrow(\exists x)(\neg(\forall y)Q(y,b)\rightarrow R(x)))$的前束范式.

(1) 消去联结词$\rightarrow,\leftrightarrow$.

得 $\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\vee(\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y,b)\vee R(x)))$

(2) $\neg$内移(反复使用摩根律)

得 $(\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\wedge\neg(\exists x)((\forall y)Q(y,b)\vee R(x))$

$=(\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\wedge(\forall x)((\exists y)\neg Q(y,b)\wedge\neg R(x))$

(3) 量词左移(使用分配等值式)

得 $(\forall x)((\exists y)P(a,x,y)\wedge(\exists y)\neg Q(y,b)\wedge\neg R(x))$

(4) 变元易名.(使用变元易名分配等值式)

$(\forall x)((\exists y)P(a,x,y)\wedge(\exists z)\neg Q(z,b)\wedge\neg R(x))$

$=(\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a,x,y)\wedge\neg Q(z,b)\wedge\neg R(x))$

$=(\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a,b,x,y,z)$

前束范式和Skolem标准形

求公式$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$的 Skolem 标准形.

首先将最左边的$(\exists x)$消去，而将谓词 P 中出现的所有变元 x 均以论域中的某个常项 a（未在 P 中出现过）代入. 进而消去从左边数第二个存在量词$(\exists u)$，因$(\exists u)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$，需将谓词 P 中出现的所有变元 u 均以 y,z 的某个二元函数 $f(y,z)$（未在 P 中出现过）代入. 最后按同样的方法消去存在量词$(\exists w)$，因$(\exists w)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$和$(\forall v)$，需将谓词 P 中出现的所有变元 w 均以 y,z,v 的某个三元函数 $g(y,z,v)$（未在 P中出现过也不同于 $f(y,z)$）代入. 这样便得消去全部存在量词的 Skolem 标准形

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v)).$$

谓词逻辑的推理演算

大学里的学生不是本科生就是研究生，有的学生是高材生，John 不是研究生但是高材生，从而如果 John 是学生必是本科生.

(4) $P(x)$：x 是学生，$Q(x)$：x 是本科生，$R(x)$：x 是研究生，$S(x)$：x 是高材生

即证

$$(\forall x)\big(P(x)\rightarrow Q(x)\overline{\vee}R(x)\big)\wedge(\exists x)(P(x)\wedge S(x))\wedge(\neg R(\text{John})\wedge S(\text{John}))$$

$$\Rightarrow P(\text{John})\rightarrow Q(\text{John})$$

推理规则法：

① $(\forall x)\big(P(x)\rightarrow Q(x)\overline{\vee}R(x)\big)$　前提

② $\neg R(\text{John})$　前提

③ $P(x)\rightarrow Q(x)\overline{\vee}R(x)$　① 全称量词消去

④ $P(\text{John})$　附加前提引入

⑤ $Q(\text{John})\overline{\vee}R(\text{John})$　③④ 分离

⑥ $Q(\text{John})$　②⑤ 分离

⑦ $P(\text{John})\rightarrow Q(\text{John})$　条件证明规则

归结法：

建立子句集

$$\left\{\begin{array}{l}\neg P(x)\vee(Q(x)\overline{\vee}R(x)),P(a),S(a),\\ \neg R(\text{John}),S(\text{John}),P(\text{John}),\neg Q(\text{John})\end{array}\right\}$$

① $\neg P(x)\vee(Q(x)\overline{\vee}R(x))$

② $P(a)$

③ $S(a)$

④ $\neg R(\text{John})$

⑤ $S(\text{John})$

⑥ $P(\text{John})$

⑦ $\neg Q(\text{John})$

⑧ $\big(Q(\text{John})\overline{\vee}R(\text{John})\big)$　①⑥ 归结

⑨ $Q(\text{John})$　④⑧ 归结

⑩ □　⑦⑨ 归结

集合的基本操作及性质

- 下列关于集合的说法不正确的是
- A. 存在 $H=\{x\mid x$ 是一个集合 $\wedge x\notin x\}$
- B. $\varnothing\in\varnothing$.
- C. $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{\{a,b\}\}\}$.
- D. 若 $A\in B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

ABD

可用反证法证明集合 H 是不存在的. 假设存在这样的集合 H. 下面将证明，对某一具体事物 y，无法确定 y 是否属于 H. 我们以 H 本身作为这个具体事物 y，证明中 y 就是 H. 对于集合 H，必有 $y\in H$ 或 $y\notin H$，下面分别考虑之. (1) 若 $y\in H$. 由于 y 是 H 的元素，y 就具有 H 中元素的性质 $y\notin y$. 考虑到 y 就是 H，所以 $y\notin H$. 这与 $y\in H$ 矛盾. (2) 由于 y 不是 H 的元素，y 就没有 H 中元素的性质，因此 $y\in y$. 又因 y 就是 H，则 $y\in H$. 这与 $y\notin H$ 矛盾. 两种情况都存在矛盾，所以 $y\in H$ 和 $y\notin H$ 都不成立，集合 H 不存在. 问题的根源在于，集合论不能研究"所有集合组成的集合". 这是集合论中的一个悖论，称为 Russell 悖论.

幂集和广义集合

- 写出 $\{\{a\},a\}$的幂集.

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{\{a\},a\}\}$$

- 写出 $\{\{1,\{2\}\}\}$的幂集.

$$P(A)=\{\varnothing,\{\{1,\{2\}\}\}\}$$

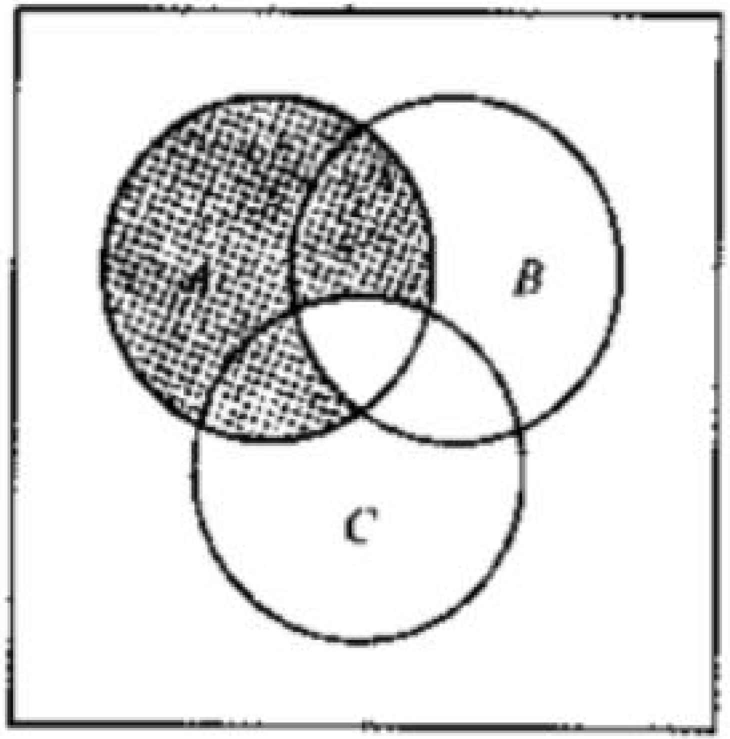
- 写出 $\bigcap\{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\}\}$.

$$\bigcap\{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\}\}=\{3\}$$

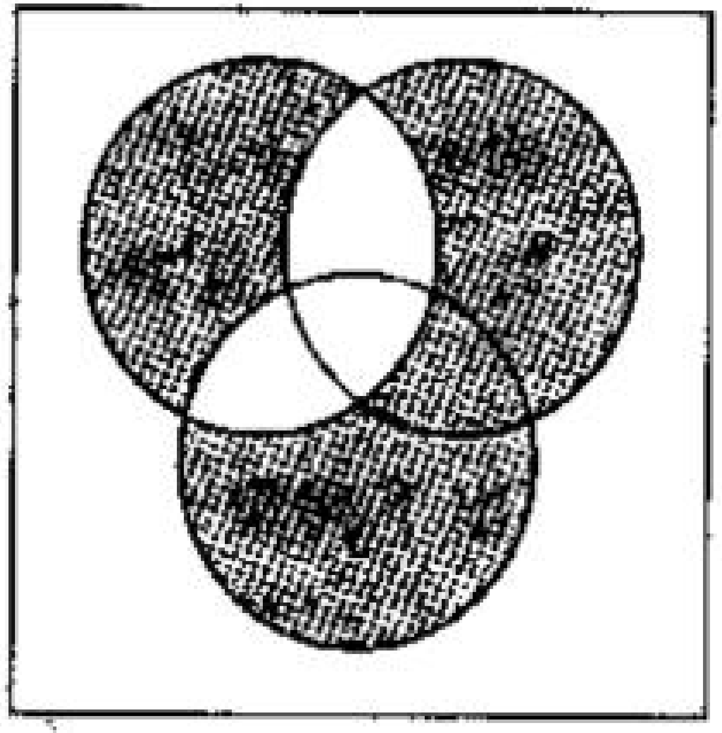
集合的图像表示

- 画出下列集合的文氏图

$A\cap(-B\cup -C)$.



$A\oplus(B\cup C)$.



关系及关系矩阵

设 $A=\{1,2,3\}$，在 A 上有多少不同的关系？设 $|A|=n$，在 A 上有多少不同的关系？

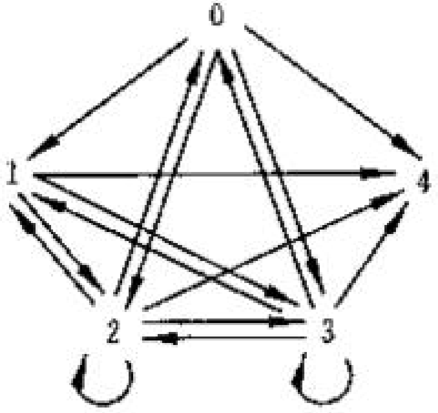
$A=\{1,2,3\}$ 时，A 上不同的关系有 $2^{3^2}=512$ 种.

$|A|=n$ 时，A 上不同的关系有 2^{n^2} 种.

对 $A=\{0,1,2,3,4\}$ 上的下列关系，给出关系图和关系矩阵.

$R_4=\{\langle x,y\rangle \mid x<y$ 或 x 是质数$\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



关系的逆、合成

设集合 A 上的关系 R 为

$$A=\{a,\{a\},\{\{a\}\}\},$$

$$R=\{\langle a,\{a\}\rangle,\langle\{a\},\{\{a\}\}\rangle\}.$$

求 R^{-1} $R\upharpoonright\{\{a\}\}$ $R\circ R$ $R[\{a\}]$

$$R^{-1}=\{\langle\{a\},a\rangle,\langle\{\{a\}\},\{a\}\rangle\}$$

$$R\upharpoonright\{\{a\}\}=\{\langle\{a\},\{\{a\}\}\rangle\}$$

$$R\circ R=\{\langle a,\{\{a\}\}\rangle\}$$

$$R[\{a\}]=\{\{a\}\}$$

对 X 到 Y 的关系 Q，Y 到 Z 的关系 S，Z 到 W 的关系 R

下列说法中正确的是

- A. $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$.
- B. $\mathrm{ran}(R^{-1})=\mathrm{dom}(R)$
- C. $(R\circ S)\circ Q=R\circ(S\circ Q)$
- D. $S\circ R\neq R\circ S$

ABCD

等价、相容、偏序、拟序

- 等价：自反+对称+传递
- 相容：自反+对称
- 偏序：自反+反对称+传递
- 拟序：非自反+反对称+传递

R 是 A 上自反的$\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow xRx)$，

R 是 A 上非自反的$\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow x\not R x)$.

R 是 A 上对称的$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)$

$$((x\in A\land y\in A\land xRy)\rightarrow yRx)$$

R 是 A 上反对称的$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)$

$$((x\in A\land y\in A\land xRy\land yRx)\rightarrow x=y)$$

R 是 A 上传递的$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\forall z)$

$$((x\in A\land y\in A\land z\in A\land xRy\land yRz)\rightarrow xRz).$$

函数的概念及性质

- 下列说法中正确的是
- A. $\{\langle x,y\rangle \mid x\in\mathbf{N}\wedge y\in\mathbf{N}\wedge x+y<10\}$ 是函数
- B. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-2x-15$ 是单射的
- C. $f:\mathbf{R}\to(0,\infty),\ f(x)=2^x$ 是双射的
- D. $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{N},\ f(x)=|x|$ 是满射的

CD

(1) 若 $\operatorname{ran}(f)=B$，则称 f 是满射的，或称 f 是 A 到 B 上的；

(2) 若对任意的 $x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2$，都有

$$f(x_1)\neq f(x_2)$$，则称 f 是单射的，或内射的，或一对一的；

(3) 若 f 是满射的又是单射的，则称 f 是双射的，或一对一 A 到 B 上的．简称双射．

函数的复合及逆

设 $f,g,h\in \mathbf{N}_{\mathbf{N}}$，$f(n)=n+1$，$g(n)=2n$，$h(n)=\begin{cases}0 & n\text{是偶数}\\1 & n\text{是奇数}\end{cases}$，求出 $f\circ f$，$f\circ g$，$g\circ f$，$g\circ h$，$h\circ g$，$(f\circ g)\circ h$.

$$f\circ f(n)=n+2,\ f\circ g(n)=2n+1,\ g\circ f(n)=2n+2,$$

$$g\circ h(n)=\begin{cases}1 & n\text{为偶数}\\1 & n\text{为奇数}\end{cases},\ h\circ g(n)=0,\ (f\circ g)\circ h(n)=\begin{cases}1 & n\text{为偶数}\\3 & n\text{为奇数}\end{cases}.$$

定义 11.2.2 设 $f:A\to B$，$g:B\to A$，如果 $g\circ f=I_A$，则称 g 为 f 的左逆；如果 $f\circ g=I_B$，则称 g 为 f 的右逆.

补充题讲解

9.1. 集合的概念和表示方法

(　) 1. 以下___不是集合

A. $\phi \times P(\phi)$ （P 表示幂集运算）

B. $\{x \mid x$是整数且$|x|$是素数$\}$

C. $\{x \mid x$是包含1的集合$\}$

D. $\{x \mid x$包含1且$x \subseteq R\}$

C

书P131

矛盾. 两种情况都存在矛盾，所以 $y \in H$ 和 $y \notin H$ 都不成立，集合 H 不存在. 问题的根源在于，集合论不能研究“所有集合组成的集合”. 这是集合论中的一个悖论，称为 Russell 悖论.

9.3. 集合的运算

(　) 10. 以下各项中正确的选项为______。

A. $\varnothing \cup \{\varnothing\} = \varnothing$

B. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing\}$

C. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\varnothing\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

D. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \varnothing = \{\{\varnothing\}\}$

B

大括号层级分清楚

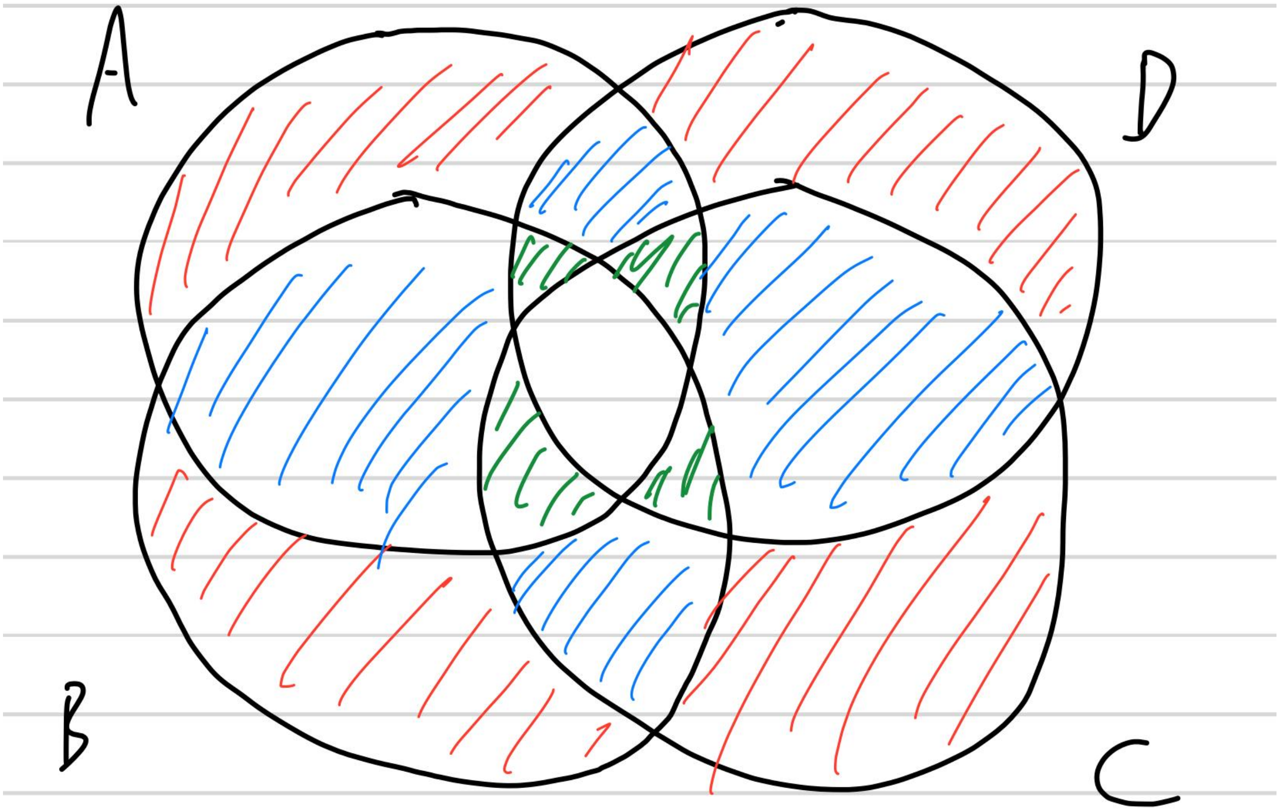
9.4. 集合的图形表示法

10. 对 24 名科技人员进行掌握外语情况的调查，其统计资料如下：会说英语、日语、德语、法语的人数分别是 13、5、10 和 9。其中同时会说英语、日语的人数为 2。同时会说英语、德语或同时会说英语、法语或同时会说德语、法语两种语言的人数均为 4。会说日语的人既不会说法语也不会说德语。则同时会说英语、德语、法语的人数为_1_。

$$\sum 1\text{个} - \sum 2\text{交} + \sum 3\text{交} - 4\text{交} = 4\text{并}$$

$$(37) - (14) + (x) = 24 \Rightarrow x = 1$$

9.4. 集合的图形表示法



9.5. 集合运算的性质和证明

(　) 2. $A\cup(B\cap C)$与___不恒等

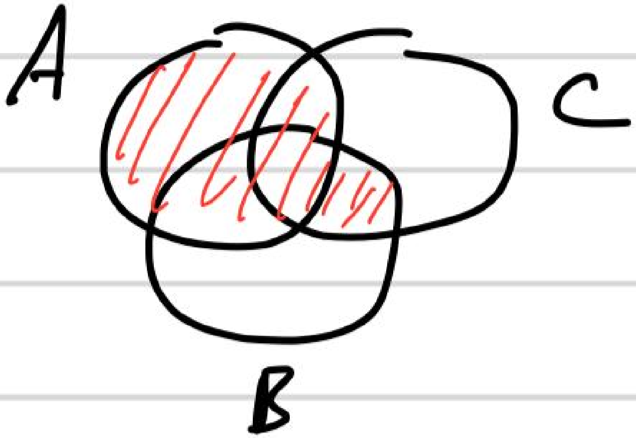
A. $(A\cup B)\cap(A\cup C)$

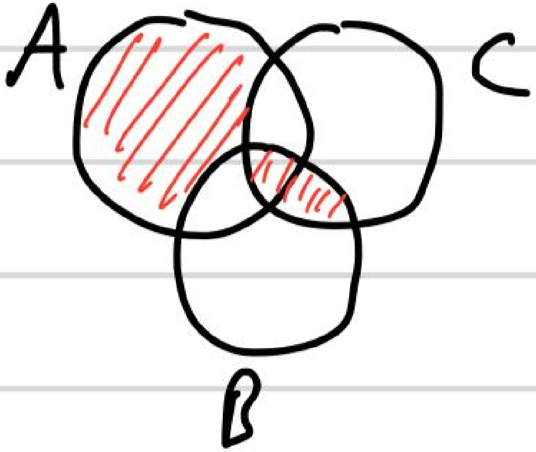
B. $((A-B)-C)\cup(B\cap C)$

C. $(A-B)\cup(B\cap C)\cup(A-C)$

D. $A\cup(B-(B\oplus C))$

B





9.5. 集合运算的性质和证明

书P142及145

（　）3. 假设 $A \subseteq B$，以下___不一定成立

A. $\bigcup A \subseteq \bigcup B$

B. $\bigcap A \subseteq \bigcap B$

C. $P(A) \subseteq P(B)$

D. $A-B \subseteq B-A$

B

定理 9.5.11 对集合的集合 A 和 B，有

(1) $A \subseteq B \Rightarrow \bigcup A \subseteq \bigcup B$，

(2) $A \subseteq B \Rightarrow \bigcap B \subseteq \bigcap A$，其中 A 和 B 非空.

证明 (1) 设 $A \subseteq B$. 对任意的 x，可得

$$x \in \bigcup A \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \land y \in A)$$
$$\Rightarrow (\exists y)(x \in y \land y \in B) \Leftrightarrow x \in \bigcup B$$

所以，$\bigcup A \subseteq \bigcup B$.

(2) 设 $A \subseteq B$. 对任意的 x，可得

$$x \in \bigcap B \Leftrightarrow (\forall y)(y \in B \to x \in y)$$
$$\Rightarrow (\forall y)(y \in A \to x \in y) \text{(由 } A \subseteq B\text{)}$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcap A$$

所以，$\bigcap B \subseteq \bigcap A$.

9.6. 有限集合的基数

1．对于有限集合 A、B，$P(P(A)\times B)$ 基数是________。 $2^{|B|*2^{|A|}}$

$P(A)$基数是$2^{|A|}$

9.7. 集合论公理系统

三. (8') 证明：$A \times A \in P(P(P(A)))$.

9.7 证明：(根据定义证明)

$A\times A = \{ \langle x,y\rangle \mid x,y\in A \} = \{ \{x,y\},\{x\} \mid x,y\in A \}$.

$\{x\} \in P(A)$, $\{x,y\} \in P(A)$

$\Rightarrow \{ \{x\}, \{x,y\} \} \subseteq P(A)$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \subseteq P(A)$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in PP(A)$

$\Rightarrow A\times A \subseteq PP(A)$

$\Rightarrow A\times A \in PPP(A)$.

10.1. 二元关系

2. 设A是n个元素的集合，则A中的所有不同关系的总数是______ 2^{n^2}

$A \times A$有n^2种组合

每个组合有两种可能（xRy或$x \not R y$）

10.5. 关系的闭包

五．（8'）给定 $A=\{1,2,3,4\}$ 和 A 上的关系 $R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$，

求：R 的自反闭包、对称闭包及传递闭包的关系矩阵。

五. $A=\{1,2,3,4\}$

$R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}.$

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$r(R)=R\cup R^0=R\cup I_A$

$$M(r(R))=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$s(R)=R\cup R^{-1}$

$$M(s(R))=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

R本身是传递的，$M(t(R))=M(R).$

10.5. 关系的闭包

八、（10'）设 $A=\{a,b,c,d\}$ 中的关系 $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$，

（1）用 $M(R)$ 的幂求 R^2,R^3；

（2）求最小的自然数 $m,n\ (m<n)$，使得 $R^m=R^n$。

（3）求出关系 R 的自反、对称且传递的闭包，请写出详细步骤。

八、(1) $A=\{a,b,c,d\}$.

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$R^2=\{<a,a>,<a,c>,<b,b>,<b,d>\}$.

10.5. 关系的闭包

$$M(R^3) = M(R^2 \circ R)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R^3 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle\}.$

(2) $M(R^4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$R^2 = R^4 \Rightarrow m=2, n=4.$

(3) 自反 $r(R) = R \cup I_A = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle\}.$

对称 $s(R) = R \cup R^{-1} = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle c,b\rangle, \langle d,c\rangle\}.$

传递 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \ldots$

$$M(t(R)) = M(R \cup R^2 \cup R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$t(R) = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,d\rangle\}.$

10.6. 等价关系和划分

3. $A=\{1,2,3,4\}$ 上的等价关系的个数为______15______。

书上P181

定理 10.6.1 R 是非空集合 A 上的等价关系，对任意的 $x,y\in A$，成立

(1) $[x]_R\neq\varnothing$ 且 $[x]_R\subseteq A$，

(2) 若 xRy， 则 $[x]_R=[y]_R$，

(3) 若 $x\not R y$， 则 $[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$，

(4) $\bigcup\{[x]_R\mid x\in A\}=A$.

10.6. 等价关系和划分

四. (8') 设 R 是 A 中的对称关系，且 $R^2 \subseteq R$，证明：$S = I_A \cup R$ 是 A 上的等价关系。

先证明自反性

$<x, x> \in I_A \Rightarrow <x, x> \in I_A \cup R \Rightarrow xSx$ 得证.

再证明对称性

$xSy \Leftrightarrow xRy \vee xI_Ay \Leftrightarrow yRx \vee yI_Ax \Leftrightarrow ySx$

最后是传递.

$(xSy) \wedge (ySz)$

$\Leftrightarrow (xI_Ay \vee xRy) \wedge (yI_Az \vee yRz)$

$\Leftrightarrow (xI_Ay \wedge yI_Az) \vee (xI_Ay \wedge yRz) \vee (xRy \wedge yI_Az) \vee (xRy \wedge yRz)$

$\Leftrightarrow (xI_Az) \vee (xRz) \vee (xRz) \vee (xR^2z)$

$\Rightarrow xSz$.

10.8. 偏序关系

( ) 6. 下面四个关系中______是拟序关系

A. R中的 "$>$" 关系

B. $N-\{0\}$中的整除关系

C. $N-\{0\}$中的互素关系

D. $R=\{<x,y>|(x-y)$被5整除$,x,y\in Z\}$

A

书上P185

定义 10.8.2 对非空集合 A 上的关系 R，如果 R 是非自反的和传递的，则称 R 为 A 上的拟序关系.

定理 10.8.1 R 为 A 上的拟序关系，则 R 是反对称的.

10.6-8. 等价关系和划分、相容关系和覆盖、偏序关系

( )7. 设 R 是 A 中的一个关系，$I_A \subseteq R$，若有 $<a,b>\in R \wedge <a,c>\in R \Rightarrow <b,c>\in R$，则下列说法最准确的是______

A. R 是等价关系

B. R 是相容关系

C. R 是偏序关系

D. R 是拟序关系

A

（自反+对称）+传递

10.6-8. 等价关系和划分、相容关系和覆盖、偏序关系

( ) 11. R_1, R_2 均为 A 中的关系，下面结论正确的是______。

A. 若 R_1, R_2 均为对称关系，则 $R_1 \circ R_2$ 为对称关系

B. 若 R_1 是偏序关系，则 R_1^{-1} 也是偏序关系

C. $t(R_1) \cup t(R_2) = t(R_1 \cup R_2)$

D. $st(R_1) = ts(R_1)$

B

定理 10.5.6 对非空集合 A 上的关系 R_1、R_2，则

(1) $r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$，

(2) $s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$，

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$.

定理 10.5.12 对非空集合 A 上的关系 R，有

(1) $rs(R) = sr(R)$，

(2) $rt(R) = tr(R)$，

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$.

其中 $rs(R) = r(s(R))$，其他类似.

书上P166及P174

10.6-8. 等价关系和划分、相容关系和覆盖、偏序关系

（ ）15. 设 R 是 A 中的对称关系，且 $R^2 \subseteq R$，则 $S = I_A \cup R$ 是 A 上______。

A. 相容关系

B. 等价关系

C. 偏序关系

D. 拟序关系

B

对称+（自反+传递）

11.1. 函数和选择公理

4. $A=\{a, b\}$, $B=\{1, 2, 3\}$. 从 A 到 B 的满射函数有 ___0___ 个。

书上P195

如果 $f:A\to B$ 是满射的，则对任意的 $y\in B$，存在 $x\in A$，使 $f(x)=y$. 如果 $f:A\to B$ 是单射的，则对任意的 $y\in \mathrm{ran}(f)$，存在唯一的 $x\in A$，使 $f(x)=y$.

11.1. 函数和选择公理

（ ）13. 函数 $f:R\to R, f(x)=x^3-x^2+x$ 是______。

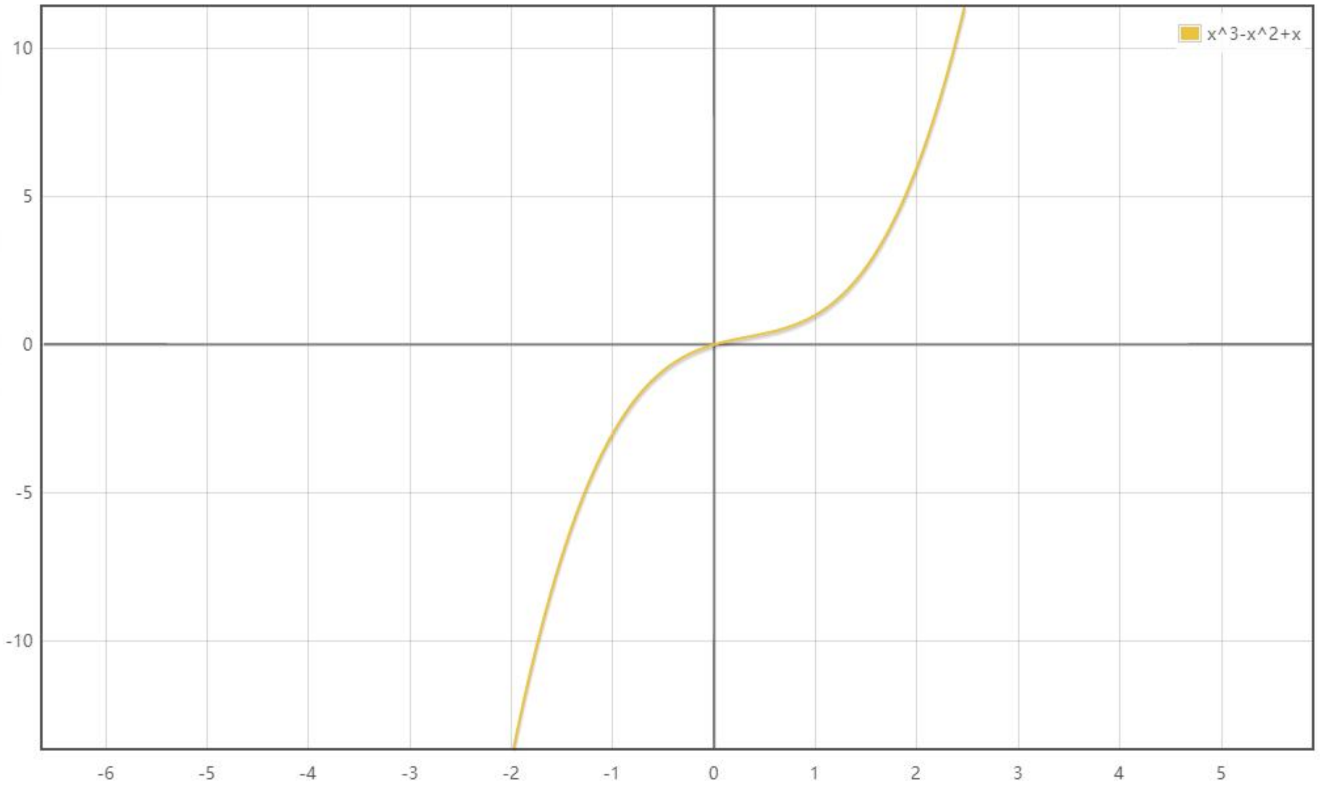
A. 满射但是不单射的

B. 单射但是不满射的

C. 双射的

D. 既不是满射也不是单射的

C



11.2. 函数的合成与函数的逆

(　) 9. f, g是函数. 若 g 不是单射的，则______

A. $f \circ g$ 不是单射的

B. $g \circ f$ 不是单射的

C. A，B 都不对

D. 不一定

A

定理 11.2.1　设 $g:A \to B, f:B \to C$，则

(1) $f \circ g$ 是函数 $f \circ g: A \to C$，

(2) 对任意的 $x \in A$，有 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

书上P197

11.2. 函数的合成与函数的逆

(　) 8. f 是集合 A 到集合 B 的关系，则______

A. 若 f 是函数，则 f^{-1} 也是函数

B. 若 f^{-1} 是函数，则 f 也是函数

C. 若 f 不是函数，则 f^{-1} 也不是函数

D. 都不对

D

多对一vs.一对多

11.2. 函数的合成与函数的逆

(　) 14. 函数$f: R \to R, f(x) = x + 1$与$g: R \to R, g(y) = y - 1$，则函数的合成$h = f \circ g$为______。

A. $h(x) = x$

B. $h(x) = x^2 - 1$

C. $h(x,y) = (x + 1)(y - 1)$

D. $h(x) = x^2 + x - 1$

A

$h(x) = (x - 1) + 1$

11.2. 函数的合成与函数的逆

8. 若函数$f: A \to B$是双射的，则 f 的左逆<u>等于</u>右逆（等于，不等于）。

书上P200

定理 11.2.8 设 $f: A \to B, A \neq \varnothing$，则

(1) f 存在左逆，当且仅当 f 是单射的；

(2) f 存在右逆，当且仅当 f 是满射的；

(3) f 存在左逆又存在右逆，当且仅当 f 是双射的；

(4) 若 f 是双射的，则 f 的左逆等于右逆.

(4) 设 f 的左逆为 $g: B \to A$，右逆为 $h: B \to A$，则 $g \circ f = I_A, f \circ h = I_B$.

$$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I_A \circ h = h$$

所以，$g = h$.

11.3. 函数的性质

五、(8') 设$f: A \to B, g: C \to D, f \subseteq g, C \subseteq A$，证明$f = g$

$\forall \langle x, y \rangle \in g$，有 $x \in C$，由 $C \subseteq A$，则 $x \in A$，

那么$\exists y_0$，$f(x) = y_0$，即$\langle x, y_0 \rangle \in f$，

又由 $f \subseteq g$，则$\langle x, y_0 \rangle \in g$.

由函数定义易知 $y = y_0$，因此$\langle x, y \rangle \in f$

则 $g \subseteq f$，所以 $f = g$.