第一章 基本概念

Problem 1

下列关于图的基本概念的说法中, 正确的有 ____.

A. 在有向图 G 中, 每个结点 v 的正度和负度相等，所有结点的正度之和等于所有结点的负度之和.

B. 已知图 $G=(V,E), G'=(V',E')$. 如果 G' 是 G 的生成子图, 那么 $V=V'$.

C. 从图 G 中删除某个点 v 和与其相连接的边, 得到的图 $G'=G-v$ 是 图 G 的导出子图.

D. 如果图 G 和 G' 不同构, 那么它们不存在同构的导出子图.

Problem 2

下列关于图的基本概念的说法中，正确的有 ______。

A. 一个包含 5 个节点的图中，节点的度数可能是 (3,4,2,2,4) 。

B. 已知图 $G=(V,E)$，图 $G'=(V',E')$。 如果 G' 是 G 的支撑子图，那么 $V=V'$。

C. 无向图 G 和 G' 如图 1 所示，G' 是 G 的导出子图。

D. 如果 G 和 G' 不存在同构的导出子图，则 G 和 G' 一定不同构。

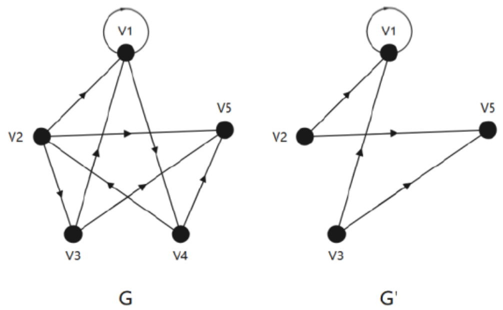


图 1

Problem 3

下列关于图的代数表示的说法中, 正确的有 ____.

A. 无向图的邻接矩阵是一个对称矩阵.

B. 有向图G如**图 1** 所示，它的邻接矩阵表示为$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

C. 关联矩阵能够表示自环，但不能表示重边.

D. 已知有向图 $G=(V,E)$, 它的关联矩阵第i行非零元的数目恰是结点 v_i 的度, 第 i 行所有元素之和为结点 v_i 的正度与负度之差.

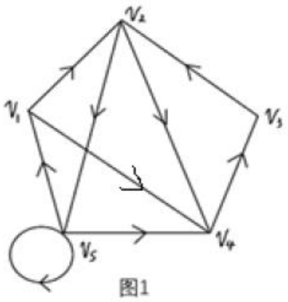


图1

Problem 4

下列关于图的代数表示的说法中，正确的有 ______。

A. 关联矩阵中能够表示自环和重边。

B. 有向图的邻接矩阵一定不是对称矩阵。

C. 如**图 1** 所示，有向图 G 的邻接矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D. 有向图的关联矩阵第 i 行元素和是节点 v_i 的正度和负度之差，非零元素个数则是节点 v_i 的度。

Problem 5

有向图 G 的邻接矩阵为$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 G中结点个数为_____ , 边的条数为_____, 图 G 中_____ (存在/不存在/无法判断) 自环.

Problem 6

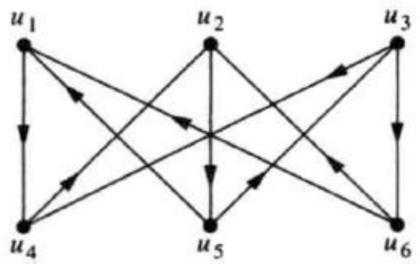
有向图 G 的关联矩阵为:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{bmatrix}$$

则 G 中节点个数为 ______ ，所有节点的度数和为 ______ ，图 G 中 ______ （存在/不存在/无法判断）重边。

Problem 7

图 4 中的 G_1 与 G_2 均为有向图, 它们_____ (构成/不构成) 同构关系，如果构成请指出结点间的映射关系; 如果不构成, 请说明理由 _____.



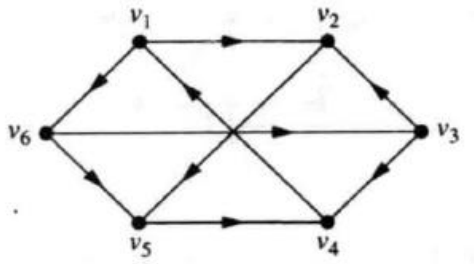


图4

Problem 8

已知无向图 G 的关联矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{bmatrix}$$

给其各边赋值权重 $w(e_1)=5, w(e_2)=6, w(e_3)=3, w(e_4)=4, w(e_5)=5, w(e_6)=2, w(e_7)=7, w(e_8)=3, w(e_9)=1$。

(1) 写出图 G的邻接矩阵。

(2) 用 Prim 或者 Kruskal 算法得到其最短树，并计算该树中所有边的权值之和。

第二章 道路与回路

Problem 9

下列关于道路与回路的说法中, 正确的有_____.
A. 在图 G 中, 如果道路 L是一条简单道路，那么在 L 中不存在重复出现的结点.
B. 图 G 的极大联通子图是不唯一的, 而且每个极大联通子图 H 都是 G 的导出子图.
C. **图 2** 中(a) (b) (c) 三张图的连通支的个数分别为 1, 2, 3.
D. 如果二分图中出现回路, 那么该回路一定由偶数条边组成.

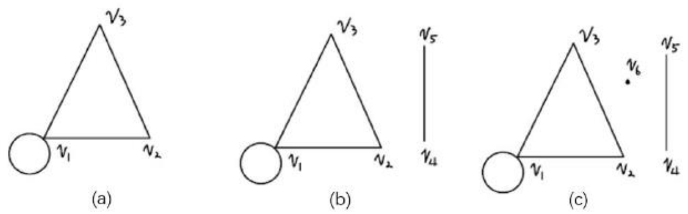


图2

Problem 10

图 3 中_____ (存在/不存在) 欧拉回路, _____ (存在/不存在) 哈密顿回路.

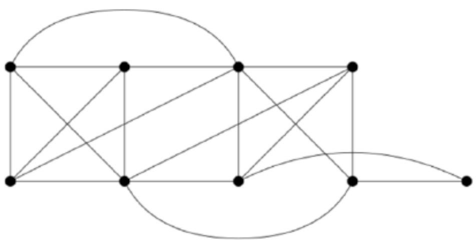


图3

Problem 11

图 4 无向图 G 中 ______（存在/不存在）欧拉回路，______（存在/不存在）哈密顿道路。

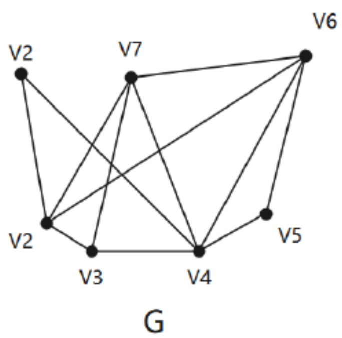


图 4

Problem 12

若无向简单图 G 是欧拉图，证明或反驳：

(1) 当 G 的顶点数是奇数时，若补图 $\overline{G}$ 是连通的，则 $\overline{G}$ 中存在欧拉通路。

(2) 当 G 的顶点数是偶数时，若补图 $\overline{G}$ 是连通的，则 $\overline{G}$ 中存在欧拉通路。

Problem 13

考虑 $M * N$ 的网格，以其中的方格作为点集，任意两个点之间有边当且仅当对应的两个方格相邻，构成图 G。

(1) 当 N 是偶数且 $M > 1$ 时，给出一种哈密顿回路的构造方法。

(2) 当 N 和 M 都是大于 1 的奇数时，证明此时 G 没有哈密顿回路。

第三章 树

Problem 14

下列关于树和森林的说法中，正确的有_____.

A. 删除树的任意一条边可以将其分成两个不连通的分支，每个分支都是原来树的导子图.

B. 高度为k的满二叉树的的叶子结点的个数 2^(k-1).

C. 完全二叉树的叶子结点均位于该二叉树的最低层.

D. 一棵有 n 个叶子结点的 Huffman 树共有 $2n$+1 个结点.

Problem 15

下列关于树的说法中，正确的有 ______。

A. 含有 n 个结点的树，所有结点的度数之和为 $2(n-1)$。

B. 如果 T 是图 G 的导出子图, 而且又是一棵树, 则称 T 是 G 的一棵支撑树，简称 G 的树。

C. 完全二叉树所有的叶结点都出现在最低的两层上。

D. 满二叉树中的任一结点，如果其右子树的高度为 k，则其左子树的高度为 k 或 $k-1$。

Problem 16

一棵高度为 k 的完全二叉树的叶子结点个数的范围为 _____ . 在一棵完全二叉树中，某结点的右子树的高度为 k, 其左子树的高度为 _____ .

Problem 17

使用哈夫曼树对字符串"ihaveapenihaveanapple"进行编码, 得到的哈夫曼树的带权路径总长为 _____ .

Problem 18

高度为 k 的完全二叉树，叶子结点的数量为 $2^{k-2}+m$，m 的范围是 ______，最低一层的叶子结点的数量为 ______。

Problem 19

使用哈夫曼树对字符串 "ilovediscretemathematics" 进行编码，得到的哈夫曼树的带权路径总长为 ______。

综合题

在约克阿尔昆(735-804)提出的一个古老智力游戏中, 一位农夫需要将一匹狼、一只山羊和一棵白菜带过河.农夫只有一只小船, 小船每次只能载农夫和一件物品(一只动物或者白菜).农夫可以重复渡河, 但如果农夫在河的另一边.那么狼会吃羊, 类似地, 羊会吃白菜.

可以通过列出两岸各有什么来描述问题的每个状态. 例如, 可以用有序对(FG,WC)表示农夫和羊在一岸, 而狼和白菜在另一岸的状态. [F 表示农夫, G 表示山羊, W 表示狼, C 表示白菜, ∅表示岸上什么也没有. 问题的初始状态就是(FGWC, ∅).]

(1) 找出这个游戏所有的允许状态, 其中不能出现在没有农夫的情况下, 让狼和羊, 或者羊和白菜在同一岸上. (3 分)
(2) 构造一个图, 使得图中的每一个顶点表示一个允许的状态, 如果可以通过一次船的运输从一个状态转换到另一个状态, 那么相应的顶点之间用一条边相连. (3 分)
(3) 找出这个游戏的两个不同解, 每个解都使用 7 次渡河. (2 分)