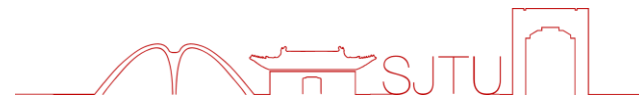




上海交通大学  
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY



# 离散数学 第二次助教课

蔡子诺

2022年11月22日

饮水思源 · 爱国荣校



# 第一章 命题逻辑的基本概念

## ● 考点一：命题的判断

□ 非真即假的陈述句

## ● 考点二：命题联结词及真值表

## ● 考点三：重言式、可满足式、矛盾式

## ● 考点四：代入规则

□ 原子命题、全部代换

## ● 考点五：命题形式化

□ 易错点：异或的形式化

## ● 考点六：(逆)波兰表达式



C, 真值表法

( ) 2. 命题公式 $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$  具有\_\_\_\_\_个使其为真的指派。

A 2

B 4

C 5

D 3

方法1: 为假的指派 $\rightarrow R$ 为F, (P and Q)为F

方法2: 真值表法



# 第一章

1.3 命题公式  $p \vee ((q \vee r) \wedge s)$  的波兰表达式为  $\vee p \wedge \vee q r s$

1.8  $(p \wedge q) \vee (\neg p)$  的波兰表达式是:  $\vee \wedge p q \neg p$

1.4 设P: 天下雨, Q: 他在室内运动, 则命题“除非天下雨, 否则他不在室内运动”的形式化为  $\neg p \rightarrow \neg q$

1.10 设P: “你陪伴我”, Q: “你代我叫车子”, R: “我将出去”。则命题: “除非你陪伴我或代我叫车子, 否则我将不出去”的形式化为:  $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg r$

1.6 命题公式  $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$  是 重言式

P	Q	结果
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T





## 第二章 命题逻辑的等值和推理演算

① 考点一：等值公式 (18条)

② 考点二：联结词的完备集

③ 考点三：对偶式

④ 考点四：范式、主范式

⑤ 考点五：推理公式

⑥ 考点六：推理演算

- 条件证明规则

- 归结法



## 第二章 联结词的完备集

(B) 3. 下面有\_\_\_\_\_个命题联结词集合是完备集。

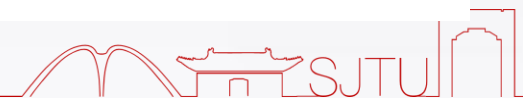
$\{\neg, \wedge\}$ ,  $\{\neg, \vee\}$ ,  $\{\neg, \rightarrow\}$ ,  $\{\neg, \leftrightarrow\}$ ,  $\{\vee, \rightarrow\}$ ,  $\{\wedge, \leftrightarrow\}$ ,  $\{\vee, \uparrow\}$ ,  $\{\downarrow\}$

- A. 4
- B. 5
- C. 6
- D. 7

最小完备集的个数为4个

### 不完备集

- $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 不是完备的  
因为 $\neg$ 不能仅由该集合的联结词表达出
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$ 不是完备的
- $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 的任何子集都是不完备的  
 $\{\neg, \leftrightarrow\}$ 的任何子集也是不完备的  
(如果一个联结词的集合是不完备的, 那么它的任何子集都是不完备的)
- $\{\vee, \wedge\}$ 不是完备的





## 第二章 联结词的完备集

### 2.8

逻辑联结词或非 $\downarrow$ 可以定义为： $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$ 。将公式 $\neg(x \vee y) \wedge z$ 转换成只用 $\downarrow$ 表示的公式\_\_\_\_\_

$$\underline{((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)) \downarrow (z \downarrow z)}$$

### 2.12

$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$ ，用或非联结词表示出 $P \rightarrow Q$ 为\_\_\_\_\_。

$$\underline{((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow P \downarrow Q)}$$



## 第二章 对偶式



### 2.4

4.  $P \rightarrow Q \vee R \rightarrow S$  的对偶式为  $(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge S$

注意运算顺序和括号的添加





## 第二章 主范式 (填空题)



2.7

C

( ) 13. 命题公式  $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$  的主析取范式中含极小项的个数为\_\_\_\_\_

A. 8

B. 3

C. 5

D. 0



2.13

7. 已知公式  $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow (Q \rightarrow P))$ , 其主合取范式为\_\_\_\_\_  $M_1$  \_\_\_\_\_。

P	Q	结果
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T



## 第二章：主范式

2.17 设命题公式  $G = \neg(P \rightarrow Q) \vee (Q \wedge (\neg P \rightarrow R))$ ，求  $G$  的主析取范式。

1. 消去联结词
2. 否定词内移
3. 使用分配律
4. 添加缺失项

$$\begin{aligned} G &= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge (P \vee R)) \\ &= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge R) \\ &= (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\ &\quad \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \\ &\quad \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\ &= \bigvee_{3,4,5,6,7} \end{aligned}$$

主合取范式： $\bigwedge_{7,6,5}$



## 第二章 推理公式



### 2.14

2. 设命题公式  $G = \neg(P \rightarrow Q)$ ,  $H = P \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$ , 则  $G$  与  $H$  的关系是( **A** )

(A)  $G \Rightarrow H$

(B)  $H \Rightarrow G$

(C)  $G = H$

(D) 以上都不是

### 2.15

3. 下面 4 个推理定律中, 不正确的是( **D** )。

(A)  $A \Rightarrow (A \vee B)$

(B)  $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$

(C)  $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$

(D)  $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

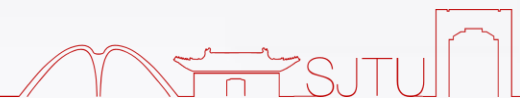
$$G = P \wedge \neg Q.$$

$$H = \neg P \vee (\neg Q \vee \neg P)$$

$$= \neg P \vee \neg Q.$$

$G \Rightarrow H$  成立.

$H \Rightarrow G$  不成立.





## 第二章：自然语句形式化+推理演算

七、(8') 证明下列推理关系：如果李华在光明中学上学，那么他不是初中生，就是高中生。如果李华是初中生，那么他需要参加中考。如果李华是高中生，那么他经常给外国的友人写信。如果李华经常给外国的友人写信，那么他的英文写作能力很强。李华的英文写作能力不强。从而知：如果李华在光明中学上学，那么他需要参加中考。

### 自然语句形式化

$P$ : 李华在光明中学上学  
 $Q$ : 李华初中生  
 $R$ : 李华高中生  
 $S$ : 李华参加中考  
 $T$ : 李华给外国友人写信  
 $W$ : 李华英文写作能力强

$(P \rightarrow Q \vee R), Q \rightarrow S, R \rightarrow T, T \rightarrow W, \neg W \Rightarrow P \rightarrow S$

(1) $P$	附加前提引入	
(2) $P \rightarrow Q \vee R$	前提引入	
(3) $Q \vee R$	(1)(2) 分离	(11) $Q$ (3)(10)
(4) $T \rightarrow W$	前提引入	(12) $Q \rightarrow S$ 前提引入
(5) $\neg W \rightarrow \neg T$	(4) 置换	(13) $S$ (11)(12) 分离
(6) $\neg W$	前提引入	(14) $P \rightarrow S$ 条件证明规则
(7) $\neg T$	(5)(6) 分离	
(8) $R \rightarrow T$	前提引入	
(9) $\neg T \rightarrow \neg R$	(8) 置换	
(10) $\neg R$	<del>前提引入</del> (7)(9) 分离	





## 第二章 推理演算

六. (8') 任用一种推理方法证明:  $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \wedge (\delta \rightarrow \neg \gamma) \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \delta)$

$$\neg(\alpha \wedge \delta) = \neg\alpha \vee \neg\delta = \alpha \rightarrow \neg\delta.$$

证明:

(1)	$\alpha$	附加前提引入
(2)	$\alpha \rightarrow \beta$	前提引入
(3)	$\beta$	(1)(2)分离
(4)	$\beta \rightarrow \gamma$	前提引入
(5)	$\gamma$	(3)(4)分离
(6)	$\delta \rightarrow \neg \gamma$	前提引入
(7)	$\gamma \rightarrow \neg \delta$	(6)置换

(8)  $\neg \delta$  (5)(7)分离

(9)  $\alpha \rightarrow \neg \delta$  条件证明规则.

∴



# 第四章 谓词逻辑的基本概念

● 考点一：基本概念（谓词、个体词、函数、量词、自由变元与约束变元、辖域）

● 考点二：合式公式的判断

● 考点三：自然语句形式化

□所有的有理数都是实数；

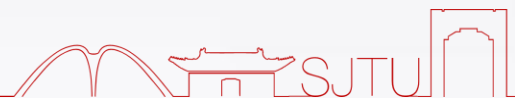
□有的实数是有理数；

□没有有理数是无理数；

□有的实数不是有理数

● 考点四：有限域下的表示

● 考点五：普遍有效性的判定







## 第四章 基本概念



### 4.5

6. 公式  $(\forall x) ((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\exists y) R(y)) \wedge S(z)$  的自由变元是 z, 全称量词的辖域为  $((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\exists y) R(y))$ 。

### 4.1

( ) 5. 若个体域为整数集合, 下列公式中 C 不是命题。

A.  $(\forall x) (\forall y) (x \cdot y = x)$

B.  $(\forall x) (\exists y) (x \cdot y = 1)$

C.  $(\forall x) (x \cdot y = x)$

D.  $(\exists x) (\exists y) (x \cdot y = 2)$



(C) 6. 设个体域  $D=\{a, b\}$ , 则公式  $(\exists x)(F(x) \wedge G(x))$  消去量词后可表示为\_\_\_\_\_。

A.  $(F(a) \wedge F(b)) \vee (G(a) \wedge G(b))$ ;

B.  $(F(a) \vee F(b)) \wedge (G(a) \vee G(b))$ ;

C.  $(F(a) \wedge G(a)) \vee (F(b) \wedge G(b))$ ;

D.  $(F(a) \vee G(a)) \wedge (F(b) \vee G(b))$





## 第四章 自然语句形式化

### 4.6

( ) 14. 设  $A(x)$ :  $x$  是人,  $B(x)$ :  $x$  犯错误, 命题“没有人不犯错误”符号化为\_\_\_\_\_

A.  $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$

B.  $\neg(\exists x)(A(x) \rightarrow \neg B(x))$

C.  $\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$

D.  $\neg(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$

D

### 4.7

8. 设  $R(x)$  表示  $x$  是实数,  $E(x, y)$  表示  $x=y$ , 则语句“对所有的实数  $x$ , 都存在实数  $y$ , 使得  $x=y$ ”的符号化为

$$(\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists y)(R(y) \wedge E(x, y)))$$



## 第四章 普遍有效性的判定



4.8

9. 公式  $(\exists x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$  不是 (是/不是) 普遍有效的;  
 $Q(0)=Q(1)=P(0)=F, P(1)=F$

4.9

10. 公式  $\neg((\forall x)F(x) \rightarrow (\exists y)G(y)) \wedge (\exists y)G(y)$  是 (是/不是) 不可满足的  
化简





# 第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

## ● 考点一：等值式

## ● 考点二：范式

□ 前束范式：去联结词  $\rightarrow$  否定词内移  $\rightarrow$  量词左移  $\rightarrow$  变元异名

□ Skolem 标准型

## ● 考点三：推理演算

□ 全称/存在量词的引入与消去

□ 归结推理



## 5.6

(A) 15. 下列各式哪个不正确?

A.  $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

B.  $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

C.  $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

D.  $(\forall x)(P(x) \vee q) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee q$



# 第五章 范式



六(8') 求公式 $((\forall x)(\exists y)(P(x,y) \rightarrow Q(y))) \rightarrow (\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))$ 的前束范式和 Skolem 标准形。

$$\begin{aligned}
 & ((\forall x)(\exists y)(P(x,y) \rightarrow Q(y))) \rightarrow (\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists u)(\forall v)L(x,u,v)) \\
 = & \neg((\forall x)(\exists y)(\neg(P(x,y) \vee Q(y))) \vee (\forall x)(\neg R(x) \vee (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))) \\
 = & (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \wedge \neg Q(y)) \vee (\forall x)(\neg R(x) \vee (\exists u)(\forall v)L(x,u,v)) \\
 = & (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \wedge \neg Q(y)) \vee ((\forall x)(\exists u)(\forall v)(\neg R(x) \vee L(x,u,v))) \\
 = & (\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(P(x,y) \wedge \neg Q(y)) \vee (\neg R(z) \vee L(z,u,v))
 \end{aligned}$$

skolem标准型

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v) P(a, y) \wedge \neg Q(y) \vee \neg R(z) \vee L(z, f(y, z), v).$$





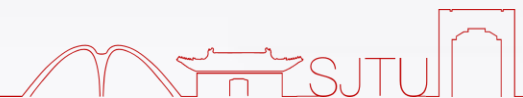
# 第五章 推理演算

5.8

八. (10') 任用一种推理方法证明:

$$(\exists x)(R(x) \wedge W(x)), (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(W(x) \wedge \neg P(x))$$

- |      |   |           |
|------|---|-----------|
| (1)  | $(\exists x) R(x) \wedge W(x)$            | 前提引入      |
| (2)  | $R(a) \wedge W(a)$                        | 存在量词消去    |
| (3)  | $R(a)$                                    | (2)       |
| (4)  | $(\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x))$ | 前提引入      |
| (5)  | $R(a) \rightarrow \neg Q(a)$              | 全称量词消去    |
| (6)  | $\neg Q(a)$                               | (2)(5) 分离 |
| (7)  | $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$      | 前提引入      |
| (8)  | $P(a) \rightarrow Q(a)$                   | 全称量词消去    |
| (9)  | $\neg Q(a) \rightarrow \neg P(a)$         | (8) 置换    |
| (10) | $\neg P(a)$                               | (6)(9) 分离 |
| (11) | $W(a)$                                    | (2)       |
| (12) | $\neg P(a) \wedge W(a)$                   | (10)(11)  |
| (13) | $(\exists x)(\neg P(x) \wedge W(x))$      | 存在量词引入    |





# 谢谢！

饮水思源 爱国荣校