离散数学 习题课一

蔡子诺

2022年10月20日

饮 水 思 源 • 爱 国 荣 校

1.1 基本概念

基本定义

- 图
- 度
  - 结点关联的边数
  - 自环对度的贡献是2
- **简单图**：无重边无自环的无向图
- 赋权图/正权图
- **支撑子图/生成子图，导出子图**
- 图的并、交和对称差
- 直接后继集/直接前趋集
- **同构**

基本性质

- 结点和边的数量关系
- 奇数度的结点数量为偶数个
- 正度之和等于负度之和
- 完全图的边数
- 非空简单图存在度相同的节点

同构的必要条件

- 结点数量与边数量各自相等；
- 度的非增序列相同；
- 存在同构的导出子图。

Problem 1

BC

下列关于图的基本概念的说法中，正确的有 ____.

A. 在有向图 G 中，每个结点 v 的正度和负度相等，所有结点的正度之和等于所有结点的负度之和.

B. 已知图 $G=(V,E), G'=(V',E')$. 如果 G' 是 G 的生成子图，那么 $V=V'$.

C. 从图 G 中删除某个点 v 和与其相连接的边，得到的图 $G'=G-v$ 是图 G 的导出子图.

D. 如果图 G 和 G' 不同构，那么它们不存在同构的导出子图. 充分与必要条件

Problem 2

BD

下列关于图的基本概念的说法中，正确的有____。

A. 一个包含 5 个节点的图中，节点的度数可能是 (3,4,2,2,4) 。 节点的度之和为奇数

B. 已知图 $G = (V, E)$，图 $G' = (V', E')$。 如果 G' 是 G 的支撑子图，那么 $V = V'$。

C. 无向图 G 和 G' 如图 1 所示，G' 是 G 的导出子图。V2与v3缺少边

D. 如果 G 和 G' 不存在同构的导出子图，则 G 和 G' 一定不同构。

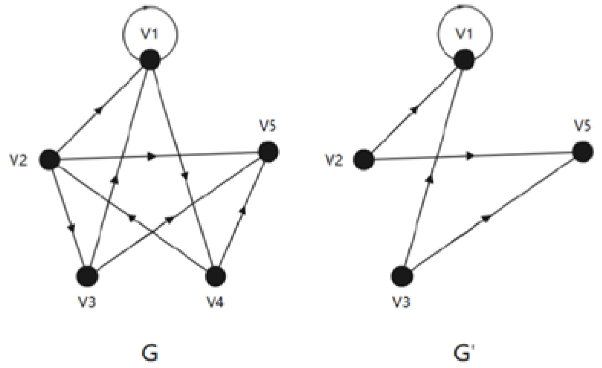


图 1

1.2 图的代数表示

邻接矩阵

□有向图

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_i,v_j)\in E\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

□无向图

- 对称矩阵

关联矩阵

□有向图

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k)\in E\\ -1, & e_j=(v_k,v_i)\in E\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

□无向图

	邻接矩阵	关联矩阵
结点数量	矩阵的行数/列数	矩阵的行数
边数量	非零元素数量（有向图）	矩阵的列数
表示自环	能	不能
表示重边	不能	能

Problem 3

AD

下列关于图的代数表示的说法中, 正确的有 ____.

A. 无向图的邻接矩阵是一个对称矩阵.

B. 有向图G如图 **1** 所示，它的邻接矩阵表示为$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 不是有向图的

C. 关联矩阵能够表示自环，但不能表示重边. 可以表示重边，不能表示自环

D. 已知有向图 $G = (V, E)$, 它的关联矩阵第i行非零元的数目恰是结点 v_i 的度, 第 i 行所有元素之和为结点 v_i 的正度与负度之差.

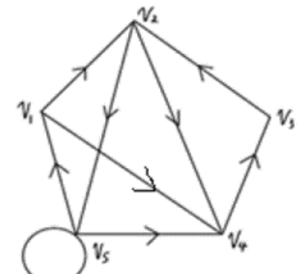


图1

Problem 4

CD

下列关于图的代数表示的说法中，正确的有 ______。

A. 关联矩阵中能够表示自环和重边。不能表示自环

B. 有向图的邻接矩阵一定不是对称矩阵。

C. 如图 **1** 所示，有向图 G 的邻接矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D. 有向图的关联矩阵第 i 行元素和是节点 v_i 的正度和负度之差，非零元素个数则是节点 v_i 的度。

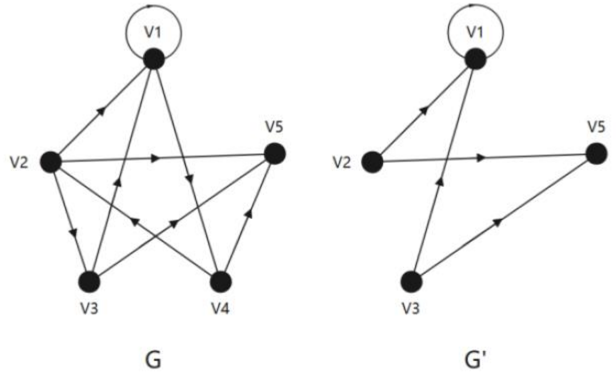


图 **1**

Problem 5

有向图 G 的邻接矩阵为$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 G 中结点个数为__5__，边的条数为 __10__, 图 G 中__存在__(存在/不存在/无法判断) 自环.

Problem 6

有向图G的关联矩阵为：

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array}
\end{array}
$$

则 G 中节点个数为 <u>5</u> ，所有节点的度数和为 <u>14/0</u> ，图 G 中<u>不存在</u>（存在/不存在/无法判断）重边。

Problem 7

构成

图 4 中的 G_1 与 G_2 均为有向图, 它们____ (构成/不构成) 同构关系，如果构成请指出结点间的映射关系; 如果不构成, 请说明理由 ____.

f:$u1 \to v2, u2 \to v4, u3 \to v6, u4 \to v5, u5 \to v1, u6 \to v3$

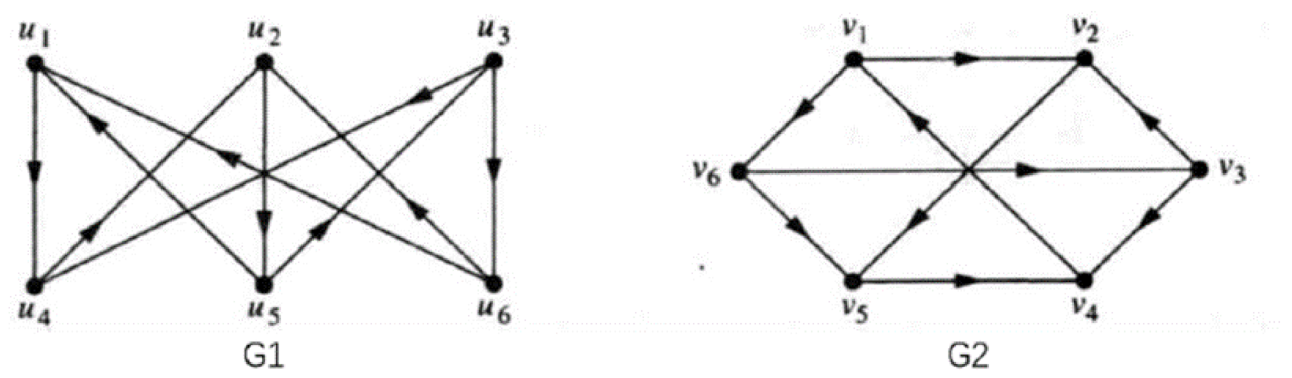


图4

	正	负
U1	1	2
U2	1	2
U3	2	1
U4	1	2
U5	2	1
U6	2	1

	正	负
V1	2	1
V2	1	2
V3	2	1
V4	1	2
V5	1	2
V6	2	1

Problem 8

已知无向图 G 的关联矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{bmatrix}$$

给其各边赋值权重 $w(e_1) = 5, w(e_2) = 6, w(e_3) = 3, w(e_4) = 4, w(e_5) = 5, w(e_6) = 2, w(e_7) = 7, w(e_8) = 3, w(e_9) = 1$。

(1) 写出图 G 的邻接矩阵。

(2) 用 Prim 或者 Kruskal 算法得到其最短树，并计算该树中所有边的权值之和。

第一章课后习题

第二题：反证法

2. 简单图 G 中，如果 $m>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，证明 G 不存在孤立结点。 C_n^2

3. 完全图的每边任给一个方向，称为有向完全图。证明在有向完全图中

$$\sum_{v_i \in V}(d^{+}(v_i))^2=\sum_{v_i \in V}(d^{-}(v_i))^2 。$$

2 道路与回路

2.1 道路与回路

- 道路、简单道路、初级道路
- 回路、简单回路、初级回路
- 连通图、极大联通子图（不止一个）

2.2 欧拉道路与回路

- 定义：经过所有边的简单道路（回路）
- 充要条件

2.3 哈密顿道路与回路

- 定义：经过所有点的初级道路（回路）
- 充分性定理

数学归纳法

反证法

Problem 9

BCD

下列关于道路与回路的说法中, 正确的有_____.

A. 在图 G 中, 如果道路 L 是一条简单道路， 那么在 L 中不存在重复出现的结点.

B. 图 G 的极大联通子图是不唯一的, 而且每个极大联通子图 H 都是 G 的导出子图.

C. **图 2** 中(a) (b) (c) 三张图的连通支的个数分别为 1, 2, 3.

D. 如果二分图中出现回路, 那么该回路一定由偶数条边组成.

简单有向道路不存在重复的边

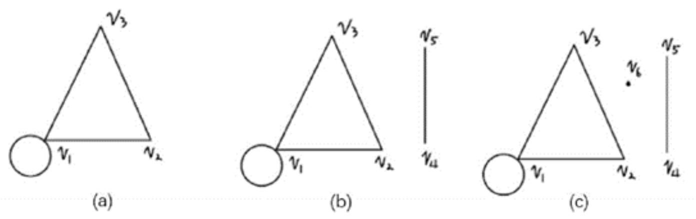


图2

Problem 10 & 11

图 3 中 <u>存在</u> (存在/不存在) 欧拉回路, <u>存在</u> (存在/不存在) 哈密顿回路.

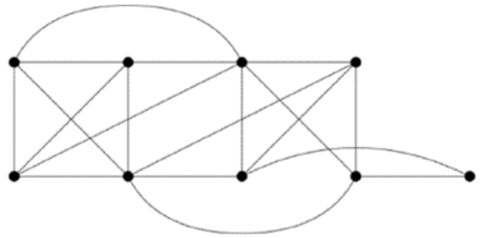


图3

图 4 无向图 *G* 中 <u>不存在</u>（存在/不存在）欧拉回路， <u>存在</u>（存在/不存在）哈密顿道路。

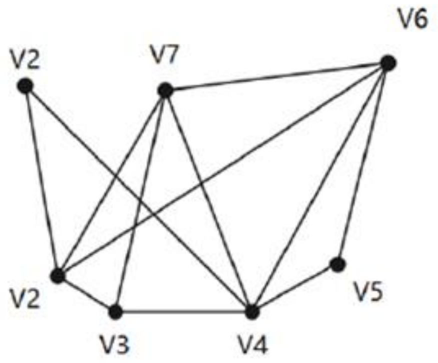


图 4

Problem 12

若无向简单图 G 是欧拉图，证明或反驳：

(1) 当 G 的顶点数是奇数时，若补图 $\overline{G}$ 是连通的，则 $\overline{G}$ 中存在欧拉通路。

(2) 当 G 的顶点数是偶数时，若补图 $\overline{G}$ 是连通的，则 $\overline{G}$ 中存在欧拉通路。

（1）证明

（2）证明或者举反例

Problem 13

考虑 $M * N$ 的网格，以其中的方格作为点集，任意两个点之间有边当且仅当对应的两个方格相邻，构成图 G。

(1) 当 N 是偶数且 $M > 1$ 时，给出一种哈密顿回路的构造方法。

(2) 当 N 和 M 都是大于 1 的奇数时，证明此时 G 没有哈密顿回路。

（2）标色法/双计数法

第二章课后习题

- 第一题：数学归纳法
- 第二题：连通图与补图的概念
- 第八题：反证法

1. 设简单图 G 有 k 个连通支，证明

$$m \leqslant \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k)。$$

2. 证明 G 和 $\overline{G}$ 至少有一个是连通图。

8. 设 G 是 $n \geqslant 3$ 的简单图，证明：若

$$m \geqslant \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2,$$

则 G 存在 H 回路。

3 树

3.1 树的有关定义

- 树的定义：不含回路的连通图
- 割边
- 支撑树

3.6 哈夫曼树

3.7 最短树

- Kruskal 算法
- Prim 算法

补充：二叉树

- 满二叉树
- 完全二叉树

Problem 14

AB

下列关于树和森林的说法中，正确的有_____.

A. 删除树的任意一条边可以将其分成两个不连通的分支，每个分支都是原来树的导子图.

B. 高度为k的满二叉树的的叶子结点的个数 2^(k-1).

C. 完全二叉树的叶子结点均位于该二叉树的最低层. 也有可能在倒数第二层

D. 一棵有 n 个叶子结点的 Huffman 树共有 $2n$+1 个结点.

Problem 15

AC

下列关于树的说法中，正确的有 ______。

A. 含有 n 个结点的树，所有结点的度数之和为 $2(n-1)$。考虑边和节点的数量关系

B. 如果 T 是图 G 的导出子图, 而且又是一棵树, 则称 T 是 G 的一棵支撑树，简称 G 的树。 支撑子图

C. 完全二叉树所有的叶结点都出现在最低的两层上。

D. 满二叉树中的任一结点，如果其右子树的高度为 k，则其左子树的高度为 k 或 $k-1$。满二叉树左右子树的高度相同

Problem 16

[2^(k-2), 2^(k-1)]

一棵高度为 k 的完全二叉树的叶子结点个数的范围为 ____ . 在一棵完全二叉树中，某结点的右子树的高度为 k, 其左子树的高度为 ____ .

K或者k+1

Problem 18

[0, 2^(k-2)]

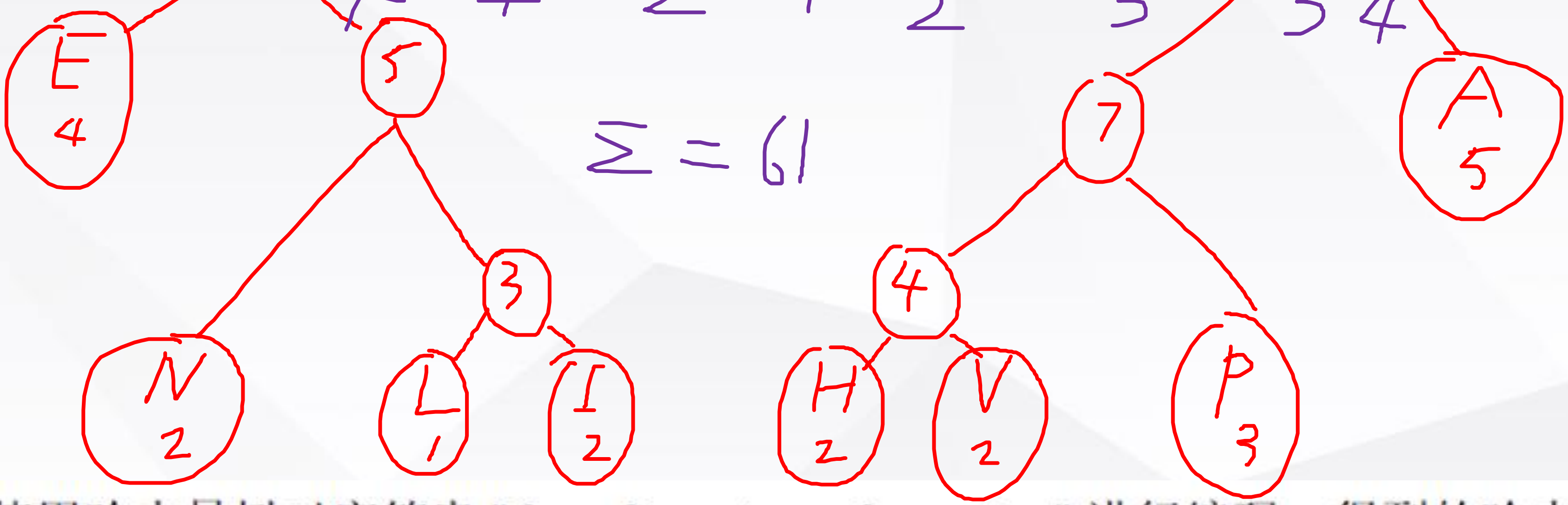
高度为 k 的完全二叉树，叶子结点的数量为 $2^{k-2}+m$，m 的范围是 ______，最低一层的叶子结点的数量为 ______。

$$\begin{cases} 1, & m=0 \\ 2^{k-1}, & m=2^{k-2} \\ 2m\text{或}2m+1, & \text{else} \end{cases}$$

Problem 17 & 19

使用哈夫曼树对字符串"ihaveapenihaveanapple"进行编码, 得到的哈夫曼树的带权路径总长为 61 .

I	H	A	V	E	P	N	L
2	2	5	2	4	3	2	1
4	4	2	4	2	3	3	4



使用哈夫曼树对字符串 "ilovediscretemathematics" 进行编码，得到的哈夫曼树的带权路径总长为 86 。

谢谢！

饮 水 思 源　爱 国 荣 校