



# Capacitação em Inteligência Artificial e Aplicações

---

## Revisão de Probabilidade e Estatística para IA

- Prof. Gerson Vieira Albuquerque Neto
- Prof. Rodrigo Carvalho Souza Costa
- Prof. Yves Augusto Romero





# IA

## Objetivos da Aula

- Apresentar uma breve introdução sobre a importância da matemática na IA
- Apresentar os principais conceitos matemáticos necessários para compreender a IA





# Tipos e definições de Inteligência artificial

- **Introdução**
- Álgebra Linear
- Probabilidade
- Estatística



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DO CEARÁ



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÃO







# IA

# Introdução

- A Inteligência Artificial (IA) tem sido uma das tecnologias mais comentadas nos últimos anos. É um campo que se concentra na criação de máquinas que podem executar tarefas que normalmente exigiriam inteligência humana.
- Para entender a IA, é essencial ter uma compreensão básica sobre
  - álgebra linear
  - probabilidade e
  - estatística.

Global AI Development  
White Paper 2020



# Tipos e definições de Inteligência artificial

- Introdução
- **Álgebra Linear**
- Probabilidade
- Estatística



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DO CEARÁ



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÃO





# IA

# Álgebra Linear

- É o ramo da matemática que lida com equações lineares e suas representações em vetores e matrizes, usado para representar dados de uma maneira estruturada que pode ser facilmente manipulada por algoritmos.
- Na álgebra linear, os vetores e matrizes são os blocos de construção que fornecem uma maneira de expressar relações complexas entre pontos de dados.
- Na área de IA são importantes os seguintes conceitos:
  - Operações com matrizes, como multiplicação e transposição
  - Determinantes e inversas de matrizes
  - Sistemas de equações lineares
  - Espaços vetoriais

Vetor de nomes dos alunos

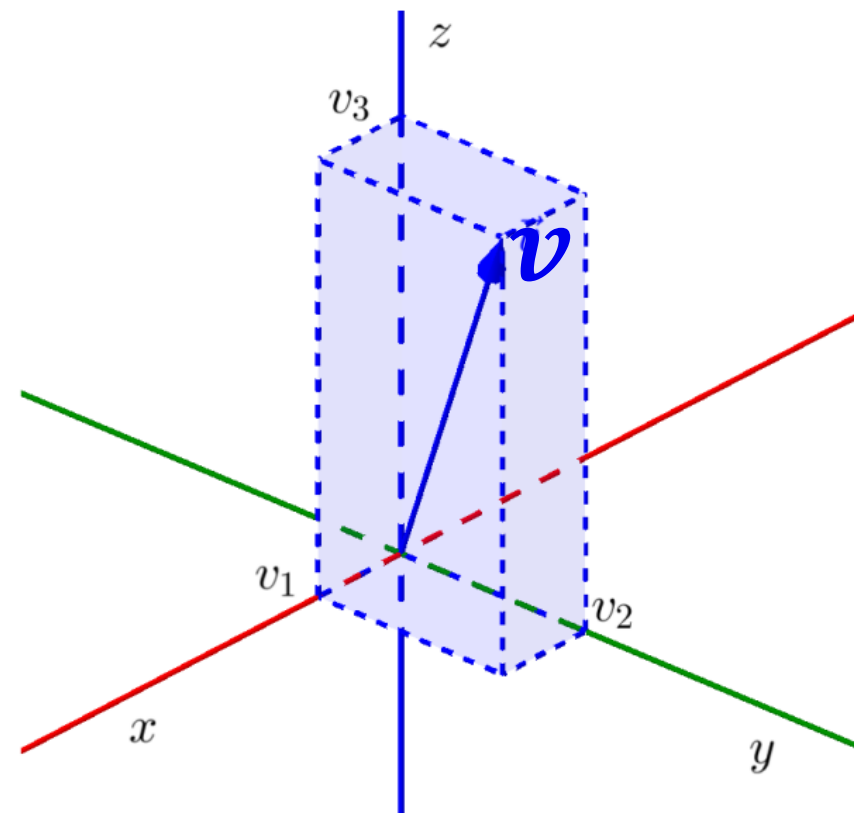
1	2	3	...	49	50
João	Pedro	Carlos	...	José	Maria

Matriz das notas dos alunos

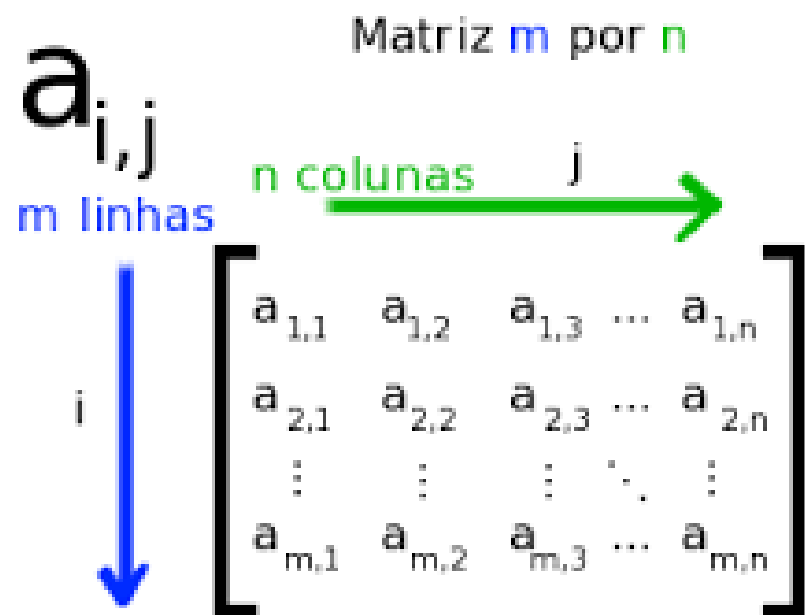
	1	2	3	4
1	9,5	10	8	7,5
2	10	9	9	5,5
3	9	8,5	9,5	7
...	...	...	...	...
49	7	10	10	9
50	7	8,5	5,5	4



- Consistem em uma lista ordenada de números, onde cada número é chamado de componente do vetor que indicam a magnitude e a direção de uma grandeza.
- Notação matemática
  - letra minúscula em negrito :  $\mathbf{v}$
- Representação de um vetor  $\mathbf{v}$  com  $n$  dimensões:
  - $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$
- Exemplo: vetor de 3 dimensões  
$$\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$$







- São usadas para representar dados.
  - Exemplos:
    - os dados de uma imagem
    - conjunto de pontos em um gráfico.
- São representadas por uma tabela retangular de números.
- Notação matemática
  - letra maiúscula em negrito :  **$M$**
- As operações comuns:
  - multiplicação,
  - transposição e
  - inversão de matrizes.





- Matrizes Importantes

- Identidade de dimensão N:  $I_N$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal:  $\text{diag}(x)$

$$\text{diag } x = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & x_n \end{bmatrix}$$

- Operações

- Transposição de matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 5 & 4 & 17 \\ 11 & 17 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 5 & 4 & 17 \\ 11 & 17 & 6 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação

$$[A] \times [B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

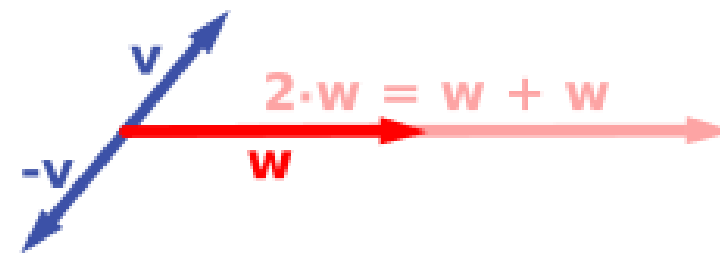
$$L_1 C_1 = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$



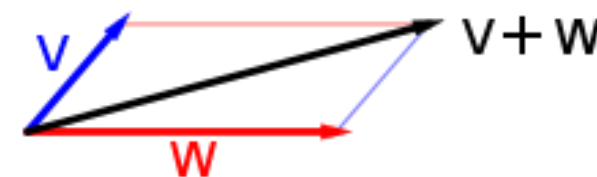
# IA

## Espaço vetorial

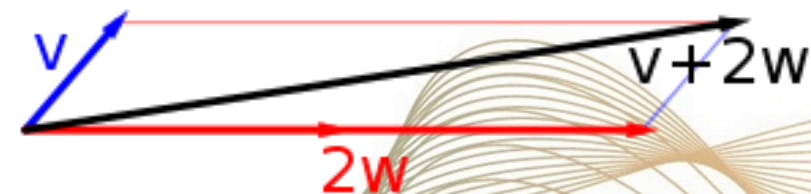
- Conjuntos de vetores que seguem algumas regras de comportamento, como a adição de vetores e a multiplicação de vetores por escalares.
- São usados para **modelar objetos e conceitos** em várias áreas da matemática e da física.
- Os espaços vetoriais podem ser finitos ou infinitos e podem ser classificados de acordo com suas propriedades



multiplicação por escalar



soma de vetores





# Tipos e definições de Inteligência artificial

- Introdução
- Álgebra Linear
- **Probabilidade**
- Estatística



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DO CEARÁ



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÃO





# IA

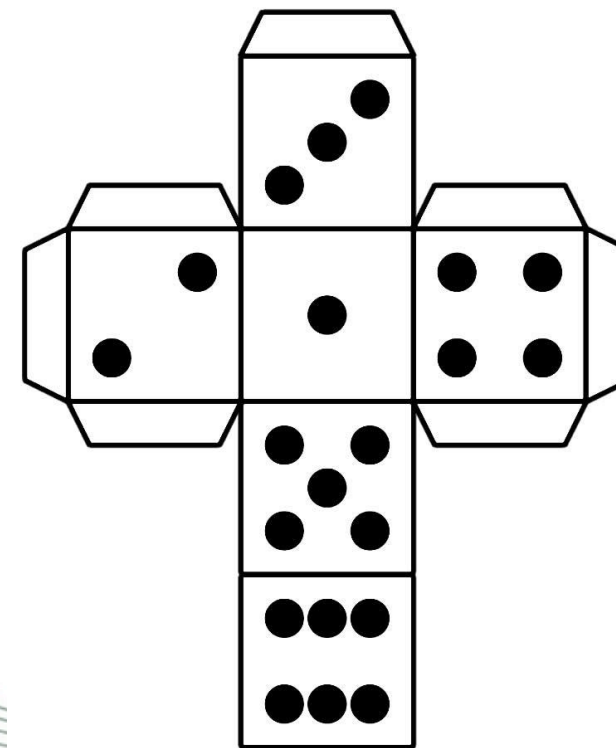
## Probabilidade

- A **probabilidade** é uma medida numérica da chance de um evento ocorrer.
- Medida pela **razão** entre o **número de resultados favoráveis (X)** ao evento e o **número total de resultados possíveis**

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

evento

Espaço amostral







# IA

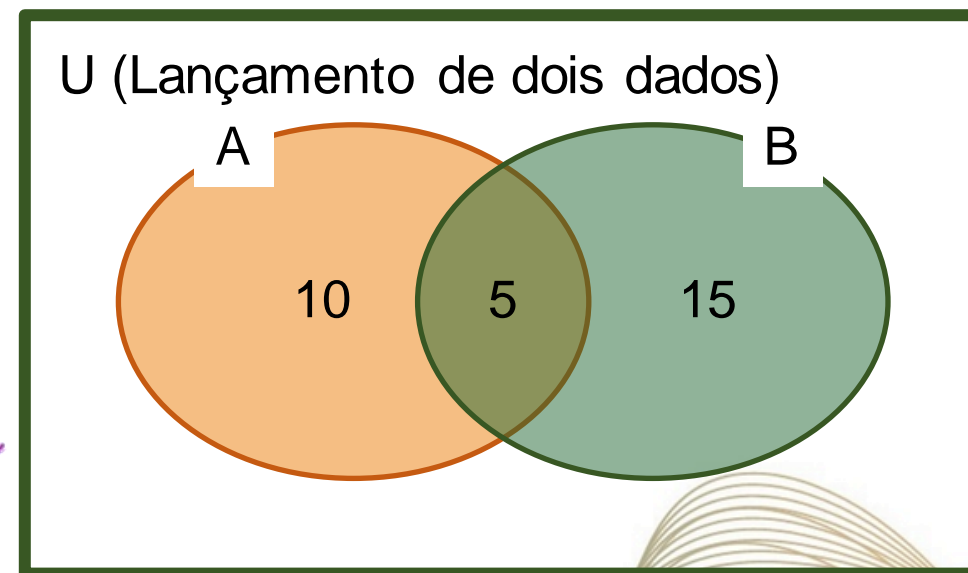
## Probabilidade

- A **probabilidade** é uma medida numérica da chance de um evento ocorrer.
- Medida pela **razão** entre o **número de resultados favoráveis (X)** ao evento e o **número total de resultados possíveis**

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

evento

Espaço amostral





# IA

## Probabilidade

- A probabilidade é o estudo de **eventos aleatórios** e sua probabilidade de ocorrer.
- Na IA, a probabilidade é usada para fazer previsões com base em dados.
- Descrição quantitativa de um fenômeno cujo resultado é **incerto**
- Tipos de fenômenos/experimentos:
  - **Determinístico**: é um fenômeno que quando repetido mantendo o mesmas condições, leva ao mesmo resultado.
  - **Aleatório**: é um fenômeno que, quando repetido sob o mesmo condições, é impossível prever o seu resultado





- No reconhecimento de fala, a probabilidade é usada para determinar a probabilidade de uma determinada palavra ser falada com base nos sons que foram ouvidos.
- As redes bayesianas são uma ferramentas populares que depende fortemente da teoria da probabilidade.
  - são usados para modelar relações complexas entre variáveis
  - podem ser usados para fazer previsões em uma ampla gama de aplicações, desde diagnóstico médico até previsão financeira.



# IA

## Axiomas da probabilidade

- Os axiomas de Kolmogorov são os fundamentos da teoria da probabilidade introduzida por Andrey Kolmogorov em 1933.
- Esses axiomas permanecem centrais e têm contribuições diretas para a matemática, as ciências físicas e os casos de probabilidade do mundo real.
- Axioma 1:** Toda probabilidade está entre 0 e 1, ou seja:  $0 \leq P(A) \leq 1$
- Axioma 2:** A probabilidade de que pelo menos um dos eventos elementares em todo o espaço amostral ( E ) ocorra é 1, ou seja:  $P(E) = 1$
- Axioma 3:** Para qualquer sequência de eventos mutuamente exclusivos

$$P\left(\bigcup_{n=1}^N E_n\right) = \sum_{n=1}^N P(E_n)$$





# IA

## Probabilidade condicional

- Probabilidade de um evento ocorrer dado que outro evento já ocorreu.
- Exemplo:
  - Sejam **A** e **B** eventos não vazios de um espaço amostra **E**.
  - Denominamos de probabilidade condicional de **A** em relação à **B** e indicamos por  **$P(A|B)$**  a probabilidade de ocorrer o evento **A**, já tendo ocorrido o evento **B**
- Fórmula:
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
- em que :
  - **$P(A \cap B)$**  é a probabilidade da intersecção entre **A** e **B**, e
  - **$P(B)$**  é a probabilidade do evento **B**.



# IA

## Exemplo aplicado de probabilidade condicional

- Um cientista está criando um novo método para diagnosticar diabetes.
- Experiência com 1000 pacientes (80 com diabetes).
- O cientista então examinou todos os pacientes usando seu método.
  - De todos os testes, 100 foram positivos e 900 negativos
  - Dos positivos, apenas 70 pacientes tinham a doença (verdadeiro positivo) e 30 não tinham a doença (verdadeiro negativo)
  - Dos negativos, 10 tinham a doença (Falso negativo)
- Como posso medir a eficácia deste teste?

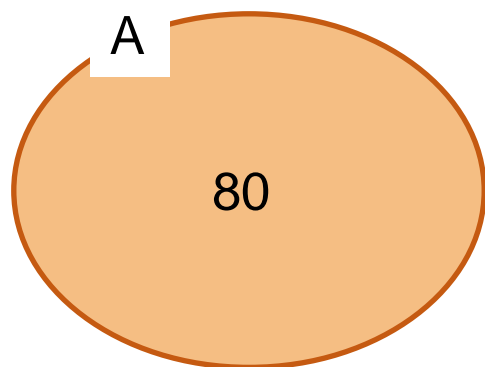




# IA

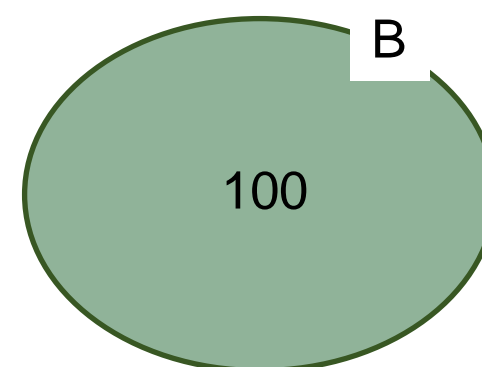
## Analizando os dados

U



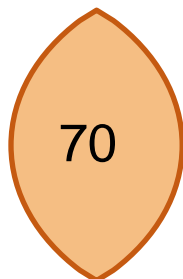
A: Pessoas com Diabetes

U



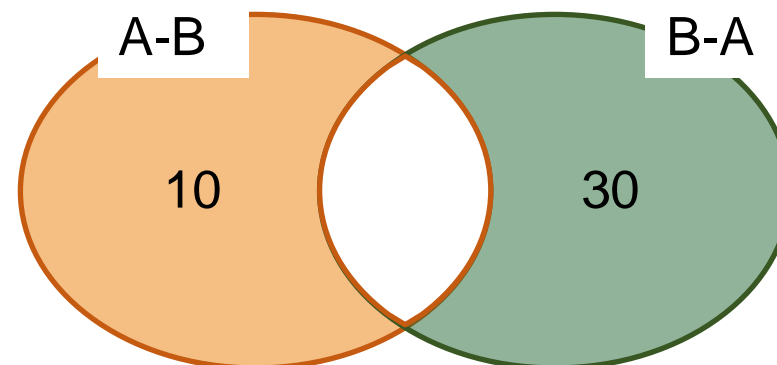
B: Pessoas com teste positivo

$A \cap B$



$A \cap B$ : Pessoas com diabetes e teste positivo

U



A-B: Pessoas com diabetes e teste negativo

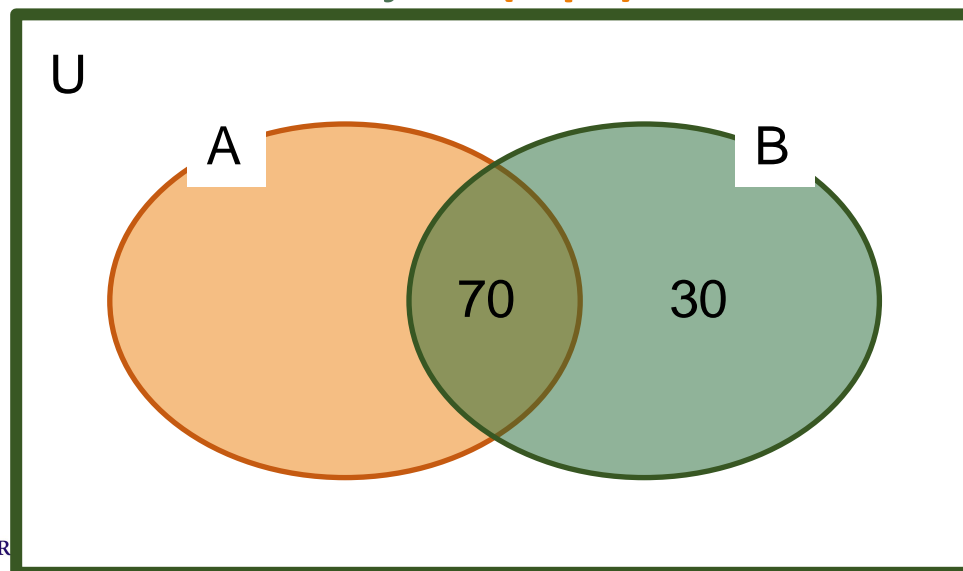
B-A: Pessoas sem diabetes com teste positivo



# IA

## Vamos para o cálculo?

- Vamos definir os eventos
  - A = Paciente possui diabetes;  $N(A)=80$
  - B = o resultado do teste foi positivo.  $N(B)=100$
- Posso medir a eficácia deste teste através da probabilidade condicional
  - Probabilidade da ocorrência de **A** sabendo que o **B** já ocorreu. Ou seja:  $P(A|B)$



$$N(A \cap B) = 70$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$= \frac{N(A \cap B)/N(U)}{N(B)/N(U)}$$

$$= \frac{70/1000}{100/1000} = 0,7$$





# IA

## Regra do produto

- A regra do produto é uma diretriz sobre quando as probabilidades podem ser multiplicadas para produzir outra probabilidade significativa.
- Especificamente, a regra do produto é usada para encontrar a probabilidade de uma interseção de eventos.
- Dado os eventos **A** e **B** ocorrerem simultaneamente, a regra do produto é representada por  **$P(A \cap B)$** , em que:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$



# IA

## Voltemos a nosso exemplo (incluindo mais dados)

- Um cientista está criando um novo método para diagnosticar diabetes.
- Experiência com 1000 pacientes (80 com diabetes), **dos quais 450 são homens (20 com diabetes)**.
- O cientista então examinou todos os pacientes usando seu método.
  - De todos os testes, 100 foram positivos e 900 negativos
  - Apenas 70 pacientes tinham a doença
  - **25 testes positivos em homens dos quais 20 tinham diabetes**
- **Qual a probabilidade de um paciente ter diabetes, dado que ele é do sexo masculino e tem um teste positivo?**

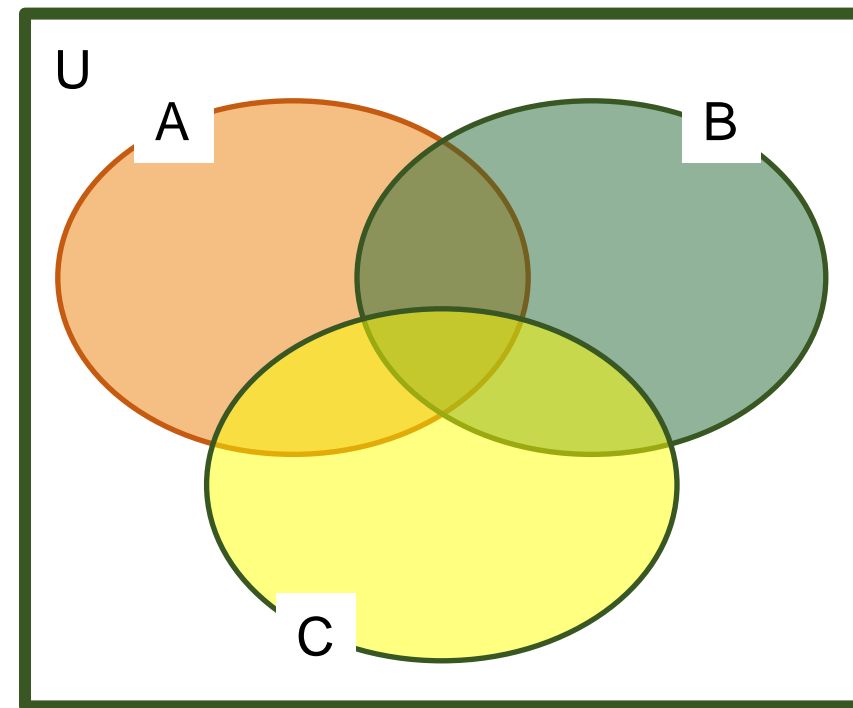




# IA

## Vamos para o cálculo?

- Vamos definir os eventos
  - A = Paciente possui diabetes;  $N(A)=80$
  - B = o resultado do teste foi positivo.  $N(B)=100$
  - C = Paciente do sexo masculino.  $N(C)=450$
- O que se deseja:
  - Probabilidade da ocorrência de **A** sabendo que o **B** e **C** já ocorreu. Ou seja:  $P(A|B \cap C)$
- O que se sabe
  - $N(A \cap C)=20$
  - $N(A \cap B)=70$
  - $N(A \cap B \cap C)$  - 20 homens testados c/diabetes
  - $N(B|C)$  - 25 pessoas testadas dado que são homens
- Pela regra do produto:
  - $P(B \cap C) = P(B|C) P(C)$



$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}$$

$$= \frac{20/1000}{P(B|C)P(C)} = \frac{\frac{20}{1000}}{\frac{25}{450} \times \frac{450}{1000}} = \frac{4}{5} = 80\%$$

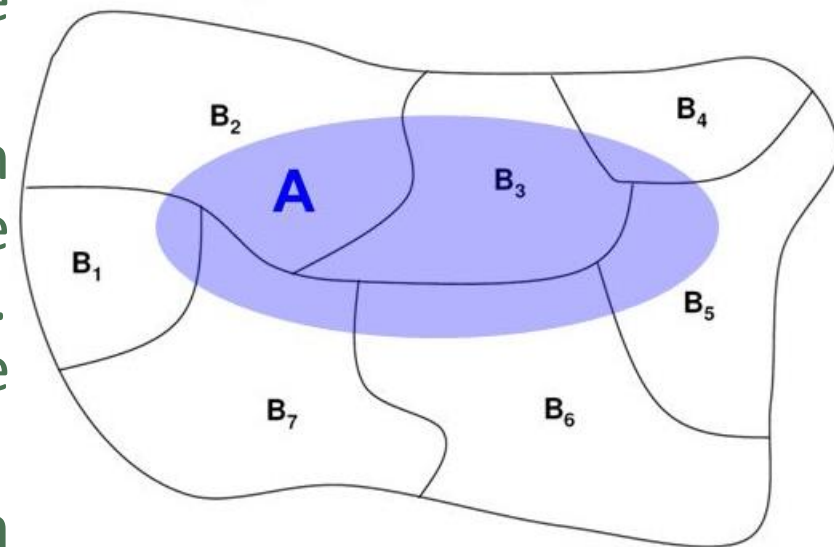


# IA

## Regra de probabilidade total

- A regra de probabilidade total divide os cálculos de probabilidade em partes distintas.
- É usado para encontrar a probabilidade de um evento, **A**, quando você não sabe o suficiente sobre as probabilidades de **A** para calculá-lo diretamente. Em vez disso, você faz um evento relacionado, **B**, e use isso para calcular a probabilidade para **A**.
- Considerando um espaço de amostra dividido em várias zonas não sobrepostas em que a soma de todas essas zonas é igual ao espaçamento da amostra.  
 $\sum B = E$
- Assim:  $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$ .  
Utilizando a regra do produto:

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|B_k)P(B_k)$$







# Tipos e definições de Inteligência artificial

- Introdução
- Álgebra Linear
- Probabilidade
- **Estatística**



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DO CEARÁ



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÃO





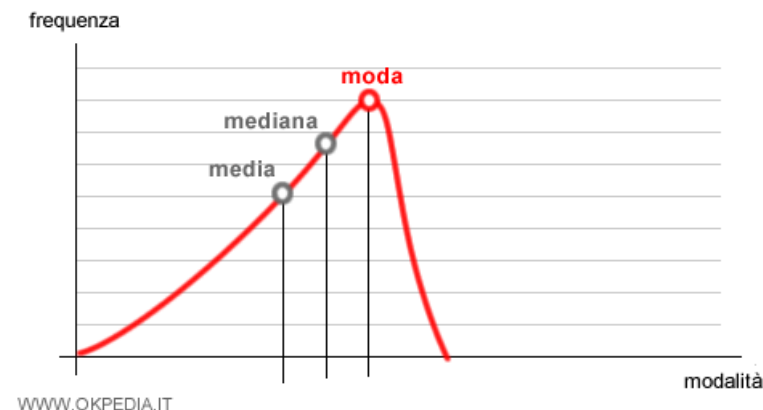
- A estatística é a ciência de coletar, analisar e interpretar dados.
- Na IA, a estatística é usada para treinar modelos de aprendizado de máquina analisando grandes conjuntos de dados.
- Métodos estatísticos como análise de regressão e teste de hipóteses são usados para identificar padrões e relações nos dados.
- Exemplo:
  - Uma das técnicas mais populares usadas na IA é chamada de aprendizado profundo, que depende fortemente de métodos estatísticos.
  - Os algoritmos de aprendizagem profunda usam redes neurais para aprender com grandes conjuntos de dados
  - Podem ser usados em uma ampla gama de aplicações, desde o reconhecimento de imagens até o processamento de linguagem natural.



# IA

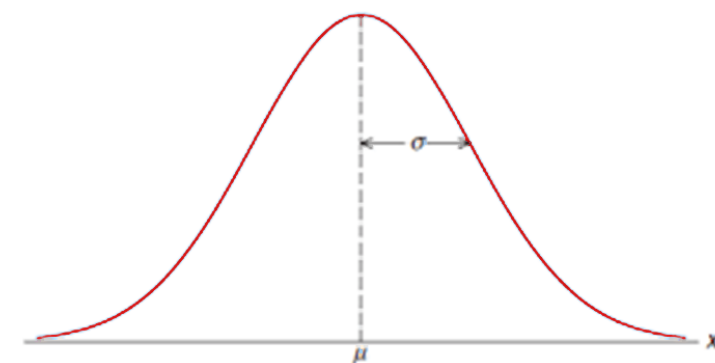
## Estatística descritiva

- Uma das técnicas mais comuns para resumir grandes quantidades de dados.
- Essa técnica nos permite resumir as informações do conjunto de dados em algumas medidas estatísticas



medida	equação
média $\mu$ ou $\bar{x}$	$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$
desvio padrão $\sigma$	$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2}{N - 1}}$
amplitude	$x_{max} - x_{min}$

medida	equação
mediana	$\begin{cases} x\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{x\left(\frac{n}{2}\right) + x\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{2}, & \text{se } n \text{ impar} \end{cases}$
moda	$\operatorname{argmax}(f(x))$

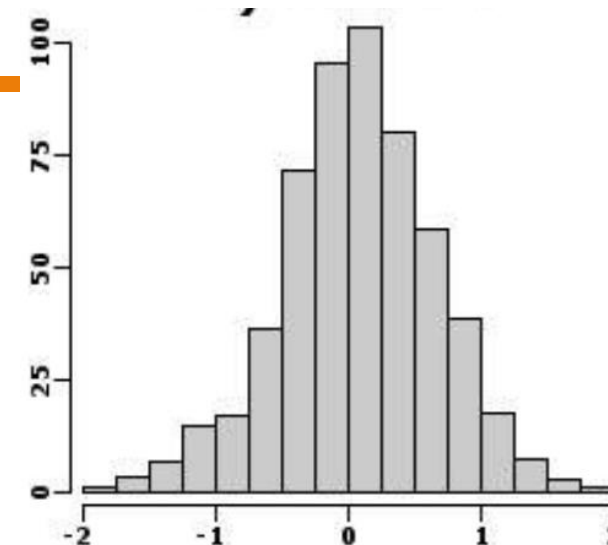




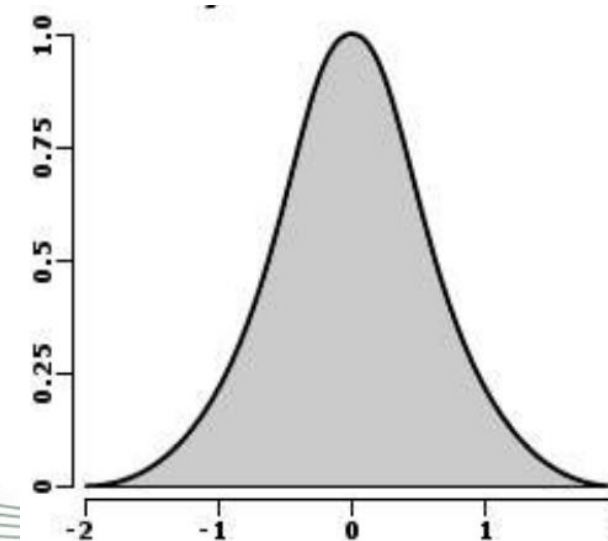
# IA

## Variáveis aleatórias e Distribuições

- Uma variável cujos valores possíveis são resultado de um fenômeno aleatório.
- Mapeia os resultados de um processo imprevisível em quantidades numéricas.
- Classificação:
  - Contínua/Discreta;
  - Univariada / Multivariada.
- Formalmente:
  - Uma variável aleatória é uma função que mapeia cada elemento em um espaço de amostra para uma linha real.



Discreta



Contínua

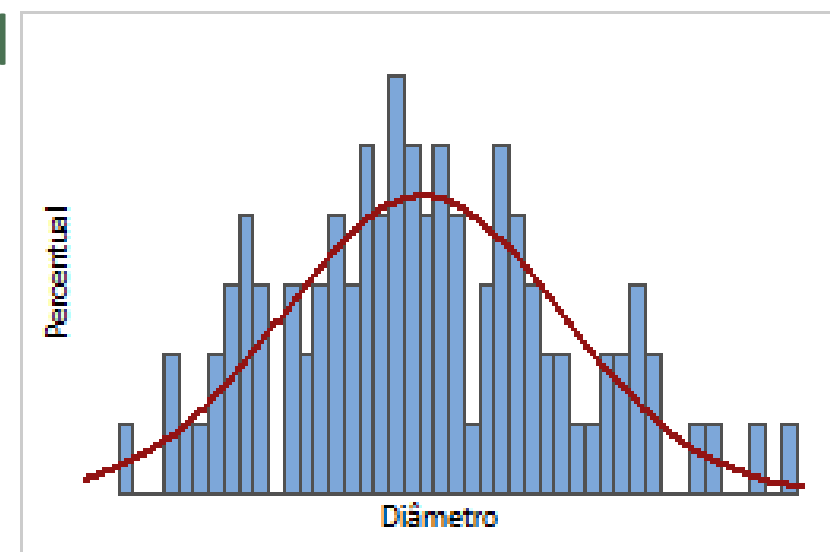




# IA

## Variáveis aleatórias e Distribuições

- Uma variável cujos valores possíveis são resultado de um fenômeno aleatório.
- Mapeia os resultados de um processo imprevisível em quantidades numéricas.
- Classificação:
  - Contínua/Discreta;
  - Univariada / Multivariada.
- Formalmente:
  - Uma variável aleatória é uma função que mapeia cada elemento em um espaço de amostra para uma linha real.





# IA

## Conclusão

- Em conclusão, entender álgebra linear, probabilidade e estatística é crucial para qualquer pessoa interessada em IA. Esses campos fornecem a base para muitos algoritmos e técnicas de IA e são ferramentas essenciais para analisar e manipular dados.
- À medida que a IA continua a avançar, é provável que esses campos se tornem ainda mais importantes.
- Ao ter uma sólida compreensão desses conceitos, você estará melhor equipado para entender e contribuir para o desenvolvimento da tecnologia de IA.

# Dúvidas?

Módulo de Inteligência Artificial



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DO CEARÁ



Instituto Iracema  
PESQUISA E INOVAÇÃO



MCTI  
FUTURO



Softex

MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÃO

GOVERNO FEDERAL  
**BRASIL**  
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO