



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 15-03-2021

Apresentação da Disciplina

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Conteúdo – 1ª etapa

- Notação assintótica
- Conceitos básicos
- Análise de algoritmos iterativos
 - Invariantes
 - Região crítica
- Fórmulas de recorrência
- Análise de algoritmos recursivos
- Algoritmos de cota inferior e superior
- Análise amortizada
 - Método da agregação
 - Método contábil
 - Método potencial



Conteúdo – 2ª etapa

- Divisão e conquista
- Programação dinâmica
- Enumeração explícita
- Enumeração implícita
- Estratégia gulosa

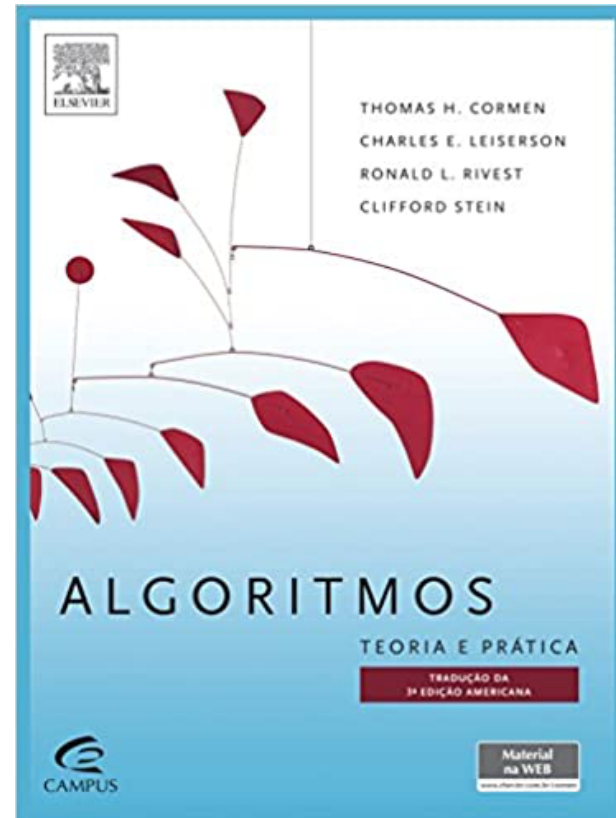


INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Bibliografia

Cormen et Al, Algoritmos: Teoria e Prática

Feofiloff, Algoritmos em Linguagem C



Frequência

Controle através do Meet Attendance



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 22-03-2021

Notação Assintótica

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Notação Assintótica

Notação assintótica é usada para denotar conjuntos de funções. Usaremos cinco tipos de notação assintótica, todas elas baseadas no conceito de *dominação assintótica*.

Dizemos que uma função f *domina assintoticamente* uma função g se existe uma constante x_0 tal que $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \geq x_0$.

Ex: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x + 2$

Se $x \geq 2$:

$$f(x) = x^2 = x \cdot x \geq 2x = g(x)$$

$$f(x) = x^2 = x \cdot x \geq 2x = x + x \geq x + 2 = h(x)$$

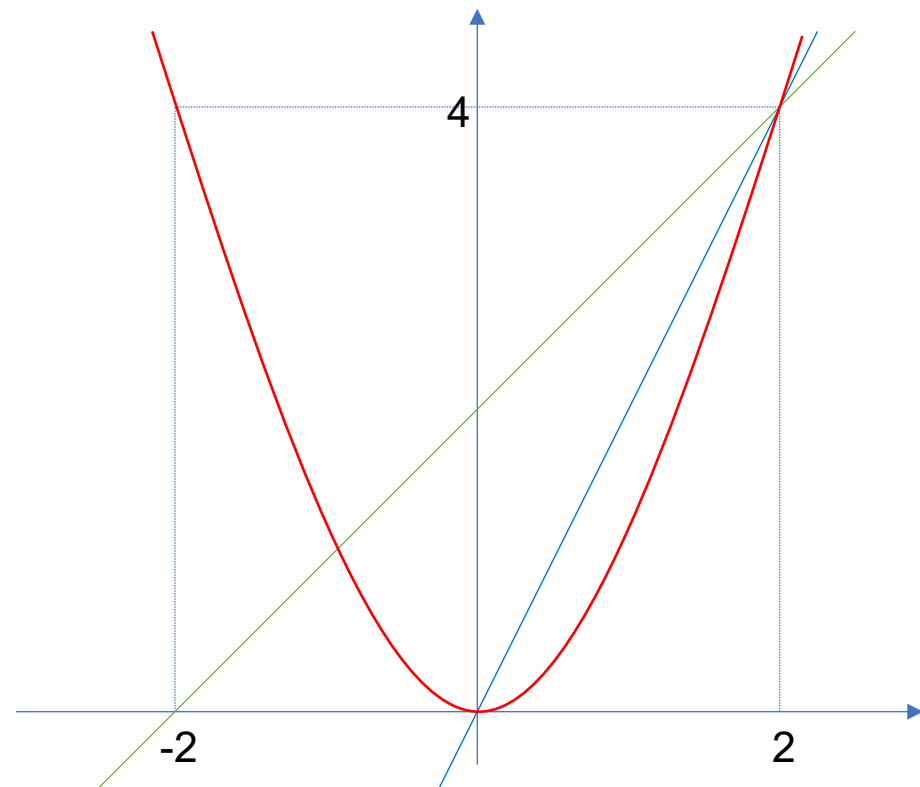
Conclusão: f domina assintoticamente g e h

$$g(x) = 2x = x + x \geq x + 2 = h(x)$$

Conclusão: g domina assintoticamente h

Suponha que g domine assintoticamente f

$$c \cdot g(x) \geq f(x) \Rightarrow 2cx \geq x^2 \Rightarrow 2c \geq x \text{ (} c \text{ não pode ser constante)}$$





Notação O (Omicron ou Ó grande)

Denotamos por $O(f)$ o conjunto de todas as funções *dominadas assintoticamente* por $c.f$, onde c é uma constante positiva. Isso significa dizer que se $g \in O(f)$ então existem constantes x_0 e $c (> 0)$ tais que $c.f(x) \geq g(x)$, para todo $x \geq x_0$.

Ex: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x + 2$

Quais dessas funções pertencem a $O(f)$, $O(g)$ e $O(h)$?

Se $x \geq 2$ e $c = 1$:

$$c.f(x) = x^2 = x.x \geq 2x = g(x)$$

$$c.f(x) = x^2 = x.x \geq 2x = x + x \geq x + 2 = h(x)$$

Conclusão: $f, g, h \in O(f)$

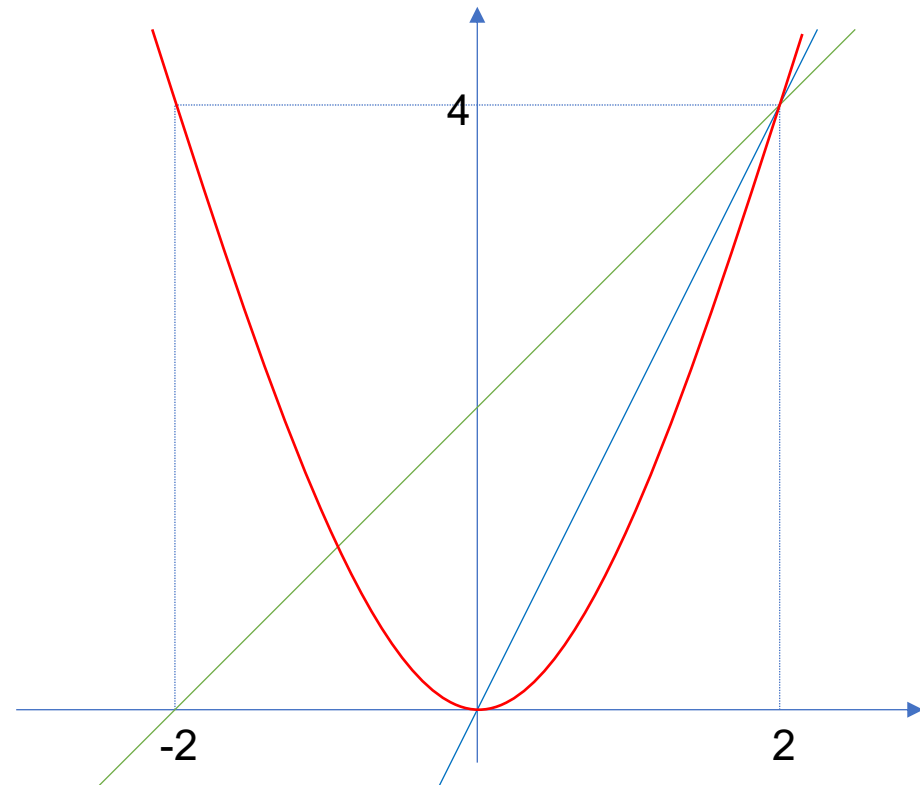
$$c.g(x) = 2x = x + x \geq x + 2 = h(x)$$

Conclusão: $g, h \in O(g)$

Se $x \geq 2$ e $c = 2$:

$$c.h(x) = 2(x + 2) = 2x + 4 > 2x = g(x)$$

Conclusão: $g, h \in O(h)$





Notação Ω (Ômega grande)

Denotamos por $\Omega(f)$ o conjunto de todas as funções que *dominam assintoticamente* $c.f$, onde c é uma constante positiva.

Ex: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x + 2$

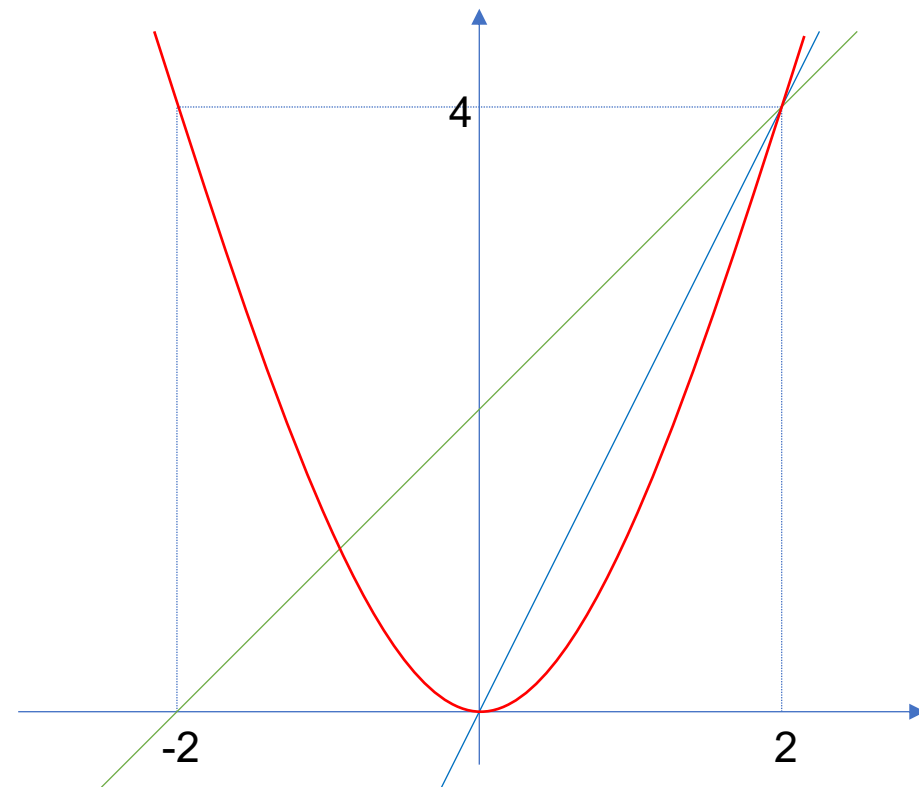
Quais dessas funções pertencem a $\Omega(f)$, $\Omega(g)$ e $\Omega(h)$?

$$f \in \Omega(f)$$

$$f, g \text{ e } h \in \Omega(g)$$

$$f, g \text{ e } h \in \Omega(h)$$

Obs: $g \in O(f) \Leftrightarrow f \in \Omega(g)$





Notação Θ (Theta)

$$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$$

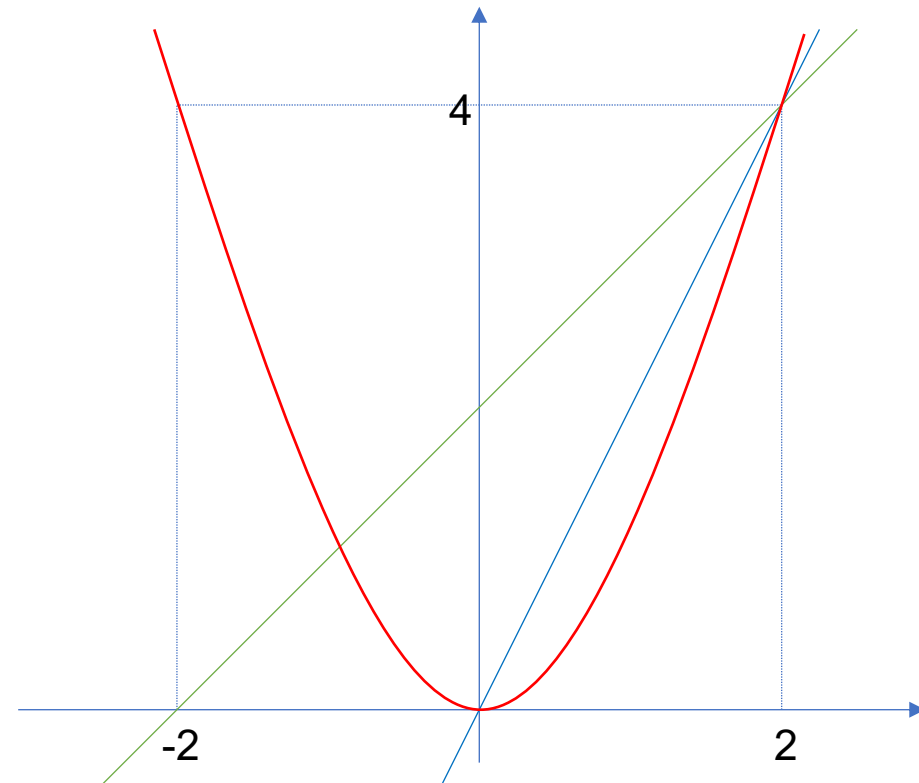
Ex: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x + 2$

Quais dessas funções pertencem a $\Theta(f)$, $\Theta(g)$ e $\Theta(h)$?

$$f \in \Theta(f)$$

$$g \text{ e } h \in \Theta(g)$$

$$g \text{ e } h \in \Theta(h)$$





Notação o (ó pequeno)

$$o(f) = O(f) - \Theta(f)$$

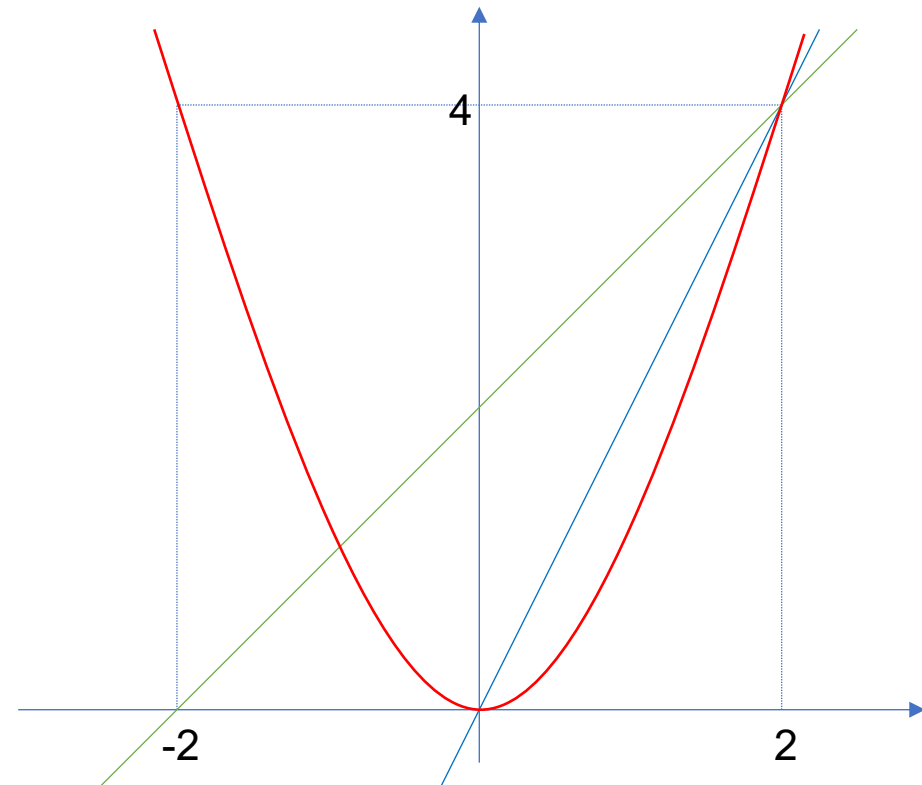
Ex: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x + 2$

Quais dessas funções pertencem a $o(f)$, $o(g)$ e $o(h)$?

$$g \text{ e } h \in o(f)$$

Nenhuma dessas funções pertence a $o(g)$

Nenhuma dessas funções pertence a $o(h)$





Notação ω (ômega pequeno)

$$\omega(f) = \Omega(f) - \Theta(f)$$

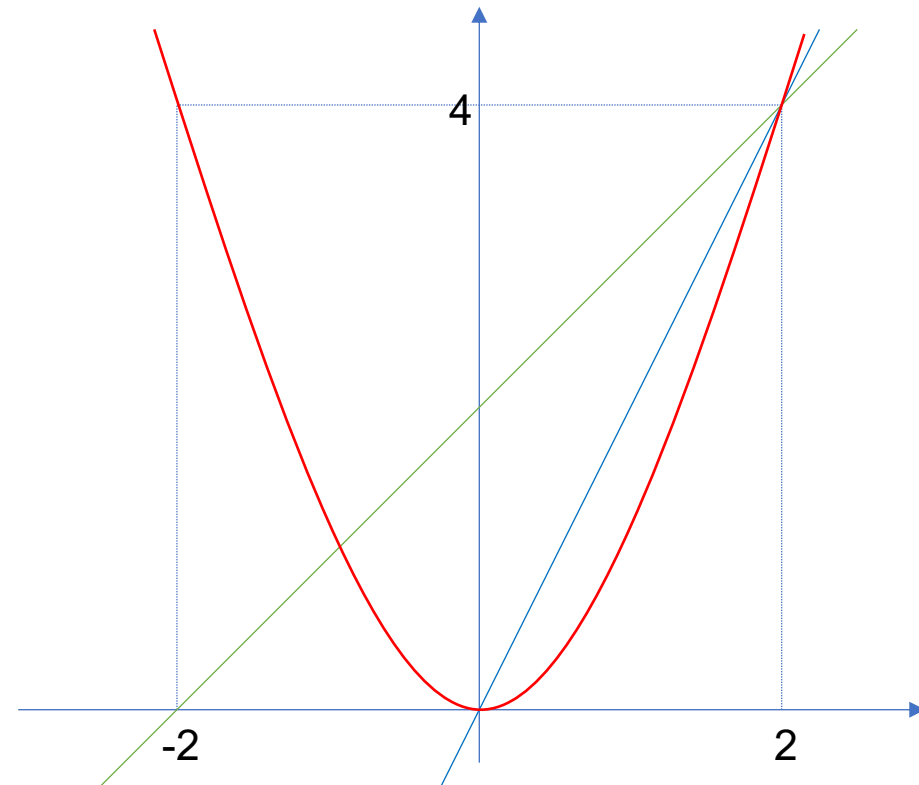
Ex: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x + 2$

Quais dessas funções pertencem a $\omega(f)$, $\omega(g)$ e $\omega(h)$?

Nenhuma dessas funções pertence a $\omega(f)$

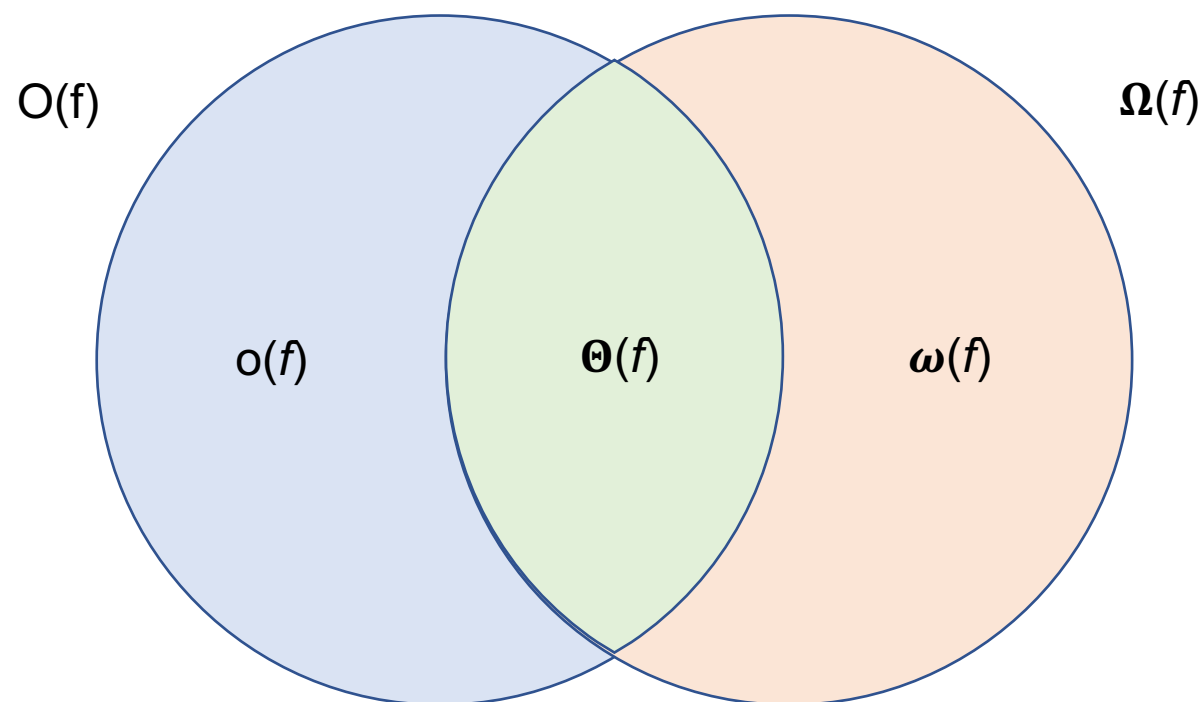
$$f \in \omega(g)$$

$$f \in \omega(h)$$





\mathcal{O}	\leq
Ω	\geq
Θ	$=$
o	$<$
ω	$>$





INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 26-03-2021

Propriedades das Notações Assintóticas

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Propriedades das Notações Assintóticas

- **Reflexividade:** O , Ω , Θ

Ex: $f \in O(f)$

- **Antirreflexividade:** o , ω

Ex: $f \notin o(f)$

- **Simetria:** Θ

Ex: se $g \in \Theta(f)$ então $f \in \Theta(g)$

- **Antissimetria:** o , ω

Ex: se $g \in \omega(f)$ e $f \in \omega(g)$ então $f = g$

- **Transitividade:** O , Ω , Θ , o , ω

Ex: se $f \in \Omega(g)$ e $g \in \Omega(h)$ então $f \in \Omega(h)$



- **Propriedade multiplicativa:** se c é uma *constante positiva* então $O(f) = O(c.f)$
- **Propriedade aditiva:** se $g \in O(f)$ então $O(f) = O(f + g)$
- **Propriedade subtrativa:** se $g \in o(f)$ e f e g são funções crescentes então $O(f) = O(f - g)$

Essas três propriedades também valem para as notações Ω , Θ , o , ω . Elas significam que em notação assintótica *constantes positivas multiplicativas* e *termos de menor ordem de crescimento* são ***irrelevantes***.

$$O(3x^2), \Omega(x^3 + 4x), \Theta(2^x - x^4), o(2^{x+1} + 6x - 8), \omega(\log^2 x^4)$$



Ex: Simplifique as notações assintóticas abaixo usando as propriedades multiplicativa, aditiva e subtrativa.

$$O(3x^2), \Omega(x^3 + 4x), \Theta(2^x - x^4), o(2^{x+1} + 6x - 8), \omega(\log_2 x^4)$$

$$O(3x^2) = O(x^2) \text{ propriedade multiplicativa}$$

$$\Omega(x^3 + 4x) = \Omega(x^3) \text{ propriedade aditiva}$$

$$\Theta(2^x - x^4) = \Theta(2^x) \text{ subtrativa}$$

$$o(2^{x+1} + 6x - 8) = o(2^x) \text{ propriedade multiplicativa, aditiva e subtrativa}$$

$$\omega(\log_2 x^4) = \omega(\log x) \text{ propriedade multiplicativa}$$



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cuidado!

$$O(2^{3x}) = O(2^x) ?$$

Não!!



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 29-03-2021

Algoritmos

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Algoritmos

Algoritmo: uma *sequência* de instruções que visam resolver instâncias de um *problema*.

Algoritmo computacional: algoritmo constituído apenas de instruções *bem definidas*.

Algoritmo correto: algoritmo que resolve corretamente *todas* as instâncias do problema para o qual foi desenvolvido.

Além disso, cada instância deve ser resolvida em tempo finito.

Algoritmo eficiente: algoritmo que requer a execução de uma quantidade de instruções elementares limitada por um *polinômio* no tamanho da entrada.

Uma instrução é *elementar* se ela pode ser executada em tempo constante.

O *tamanho da entrada* de um algoritmo é a quantidade de bits necessários para representar os dados fornecidos ao algoritmo.



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 09-04-2021

Complexidade computacional

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Complexidade computacional

A análise de algoritmos tem como principais objetivos determinar a *corretude* e a *eficiência* dos algoritmos.

A *complexidade temporal* de um algoritmo é uma medida que nos permite estimar o tempo requerido pelo algoritmo. A complexidade temporal é função do tamanho da entrada e costuma ser expressa usando-se notação assintótica.

A *complexidade espacial* de um algoritmo é uma medida que nos permite estimar a quantidade *extra* de memória requerida pelo algoritmo. A quantidade extra é toda a memória requerida pelo algoritmo exceto aquela usada para representar os dados de entrada. A complexidade espacial também é função do tamanho da entrada e costuma ser expressa usando-se notação assintótica.

Tais complexidades podem ser de três tipos:

- Melhor caso: expressa o comportamento do algoritmo nos casos que lhe são mais favoráveis
- Pior caso: expressa o comportamento do algoritmo nos casos que lhe são menos favoráveis
- Caso médio: expressa o comportamento médio (típico) do algoritmo



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 12-04-2021

Invariantes

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Invariantes

Um *invariante* é uma propriedade que se mantém válida durante toda a execução de um procedimento iterativo. Podemos usar invariantes para demonstrar a corretude de algoritmos.

Ex:

Algoritmo fatorial

Entrada: $x \in \mathbb{N}$

Saída: $x!$

$r = x$

para $i = x - 1$ até 2 (passo -1)

$r = r * i$

devolva r

Esse algoritmo é correto?

Ele falha para $x = 0$, logo **não é correto** 😞



Algoritmo fatorial_corrigido

Entrada: $x \in \mathbb{N}$

Saída: $x!$

$r = 1$

para $i = 2$ até x

$r = r * i$

devolva r

Esse algoritmo é correto?

Analizando esse algoritmo, percebemos a validade do seguinte invariante: **ao final de cada iteração do laço temos $r = i!$.**



Invariante: Ao final de cada iteração do laço temos $r = i!$.

Prova: Façamos indução em i . Base: $i = 2$. Observe que ao final da primeira iteração teremos $r = 2 = 2! = i!$.

Suponha agora que ao final da iteração com $i = k$ tenhamos $r = k!$ (hipótese de indução ou simplesmente H.I.).

Observe que na iteração com $i = k + 1$ faremos $r = k! * (k + 1) = (k + 1)! \blacksquare$

Teorema: O algoritmo `fatorial_corrigido` é correto.

Prova: Se $x < 2$, nenhuma iteração do laço será executada e o algoritmo devolverá 1, o que é correto pois $0! = 1$ e $1! = 1$.

Nos demais casos, o invariante garante que ao final da última iteração teremos $r = x!$, portanto o algoritmo devolverá $x!$ ■ 😊



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 16-04-2021

Região crítica

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Vamos determinar a complexidade temporal do Algoritmo fatorial_corrigido.

Algoritmo fatorial_corrigido

Entrada: $x \in \mathbb{N}$

Saída: $x!$

```
1       $r = 1$ 
4x - 1  para  $i = 2$  até  $x$ 
2x - 2       $r = r * i$ 
1      devolva  $r$ 
```

Contando cuidadosamente, concluímos que ele requer a execução de $6x - 1$ instruções elementares. Logo sua complexidade temporal, em termos assintóticos, é $\Theta(x)$.

Como o algoritmo utiliza apenas as variáveis escalares r e i , sua complexidade espacial é $O(1)$ (constante).

O Algoritmo fatorial_corrigido é eficiente?

Não, ele é **ineficiente**.



Região crítica

Felizmente, não precisamos contar quantas instruções elementares o algoritmo executa. Se pudermos determinar uma *região crítica* (ou *instrução crítica*) do algoritmo, basta contar quantas vezes a região crítica é executada para determinar a complexidade temporal do algoritmo. Chamamos de região crítica uma região do algoritmo que é a mais executada do algoritmo.

Formalmente, seja A um algoritmo constituído das instruções $1, 2, \dots, k$. Sejam f_1, f_2, \dots, f_k funções que indicam quantas vezes as instruções $1, 2, \dots, k$ são executadas, respectivamente.

Se $f_j \in O(f_i)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) então a instrução i é uma instrução crítica do algoritmo A .

Observe que a complexidade temporal assintótica de A é $O(f_1 + f_2 + \dots + f_k)$. Se a instrução i é crítica, usando a propriedade da adição, concluímos que tal complexidade é $O(f_i)$.



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 19-04-2021

Algoritmos com melhor e pior caso

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Vamos analisar o algoritmo abaixo que serve para procurar um valor num vetor.

Algoritmo Busca_sequencial

Entrada: um vetor v com n posições e um valor x

Saída: *Sim*, se x ocorre em v ; *Não*, caso contrário

para $i = 1$ até n

 se $x = v[i]$

 devolva *Sim* e pare

devolva *Não*

Teorema: o Algoritmo Busca_sequencial é correto.

Prova: Suponha que x não ocorre em v . Nesse caso a condição do se nunca será satisfeita e o algoritmo devolverá *Não*, o que é correto.

Suponha agora que x ocorre em v . Seja k a primeira posição de v tal que $x = v[k]$. Note que $1 \leq k \leq n$. Quando $i = k$ a condição do se será satisfeita e o algoritmo devolverá *Sim*, o que é correto ■



Qual o melhor caso do Algoritmo Busca_sequencial?

O melhor caso ocorre quando $x = v[1]$. Nesse caso o tempo requerido será $O(1)$.

Qual o pior caso desse algoritmo?

O pior caso ocorre quando v não contém x . Nesse caso o tempo requerido será $\Theta(n)$.

Ele é eficiente?

Sim, pois o tamanho da entrada é $\Theta(n)$ e o tempo requerido pelo algoritmo, mesmo no pior caso, é $O(n)$, portanto linear no tamanho da entrada.

O Algoritmo Busca_sequencial utiliza apenas a variável escalar i , logo sua complexidade espacial é $O(1)$.



Vamos agora analisar um algoritmo que verifica se há elementos repetidos num vetor.

Algoritmo Repetido

Entrada: um vetor v com n posições

Saída: *Sim*, se existem elementos repetidos em v ; *Não*, caso contrário

para $i = 1$ até $n - 1$

 para $j = i + 1$ até n

 se $v[i] = v[j]$

 devolva *Sim* e pare

devolva *Não*

Teorema: o Algoritmo Repetido é correto.

Prova: Suponha que não há elementos repetidos em v . Nesse caso a condição do se nunca será satisfeita e o algoritmo devolverá *Não*, o que é correto.

Suponha agora que há elementos repetidos em v . Seja k a primeira posição de v cujo conteúdo se repete. Seja l a primeira posição após a posição k tal que $v[k] = v[l]$. Note que $1 \leq k \leq n - 1$ e $k + 1 \leq l \leq n$. Quando $i = k$ e $j = l$ a condição do se será satisfeita e o algoritmo devolverá *Sim*, o que é correto ■



Qual o melhor caso do Algoritmo Repetido?

O melhor caso ocorre quando $v[1] = v[2]$. Nesse caso o tempo requerido será $O(1)$.

Qual o pior caso desse algoritmo?

O pior caso ocorre quando v não contém elementos repetidos. Nesse caso o tempo requerido será $\Theta(n^2)$.

Ele é eficiente?

Sim, pois o tamanho da entrada é $\Theta(n)$ e o tempo requerido pelo algoritmo, mesmo no pior caso, é $O(n^2)$, portanto quadrático no tamanho da entrada.

O Algoritmo Repetido utiliza apenas as variáveis escalares i e j , logo sua complexidade espacial é $O(1)$.

Tem como melhorar esse algoritmo?



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 23-04-2021

Algoritmos com laços condicionais

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Algoritmo tamanho_interseção

Entrada: os vetores A e B com n e m posições respectivamente

Saída: a quantidade de elementos de A que também ocorrem em B

$quant = 0$

para $i = 1$ até n

$j = 1$

 enquanto $j < i$ e $A[j] \neq A[i]$

$j++$

 se $j = i$ */* $A[i]$ não é uma repetição dos valores contidos nas posições anteriores */*

$j = 1$

 enquanto $j \leq m$ e $B[j] \neq A[i]$

$j++$

 se $j \leq m$

$quant++$

devolva $quant$



Invariante: Ao final de cada iteração do laço *para* a variável *quant* armazena a quantidade de elementos que estão entre as posições 1 e i de A que aparecem em B .

Prova: Façamos indução em i . Base: $i = 1$. Observe que na primeira iteração do *para* o segundo laço *enquanto* irá procurar uma ocorrência de $A[1]$ em B . Se encontrar, *quant* passará a valer 1; caso contrário, *quant* continuará valendo 0, e portanto o invariante será válido.

Suponha agora que ao final da iteração do *para* com $i = k$ a variável *quant* armazene a quantidade de elementos que estão entre as posições 1 e k de A que aparecem em B (H.I.).

Na iteração com $i = k + 1$, o primeiro *enquanto* servirá para verificar se $A[k + 1]$ é uma repetição de elementos das posições anteriores de A . Caso isso não seja verdade, o segundo laço *enquanto* irá procurar uma ocorrência de $A[k + 1]$ em B . Se encontrar, *quant* será incrementada; caso contrário, *quant* continuará com o mesmo valor. Dessa forma, ao final da iteração a variável *quant* armazenará a quantidade de elementos que estão entre as posições 1 e $k + 1$ de A que aparecem em B ■

Teorema: O Algoritmo tamanho_interseção é correto.

Prova: Aplicando o invariante, no final da última iteração do *para* a variável *quant* armazenará a quantidade de elementos de a que aparecem em b ■



Qual o melhor caso do Algoritmo tamanho_interseção?

O melhor caso ocorre quando todos os elementos de a são iguais e $a[1] = b[1]$. Nesse caso o tempo requerido será $\Theta(n)$.

Qual o pior caso desse algoritmo?

O pior caso ocorre quando todos os elementos de a são distintos e não há interseção entre a e b . Nesse caso o tempo requerido será $\Theta(n^2 + nm)$.

Ele é eficiente?

Sim, pois o tamanho da entrada é $\Theta(n + m)$ e o tempo requerido pelo algoritmo, mesmo no pior caso, é $\Theta(n^2 + nm)$, portanto no máximo quadrático no tamanho da entrada.

O Algoritmo tamanho_interseção utiliza apenas 3 variáveis escalares, logo sua complexidade espacial é $O(1)$.



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 26-04-2021

Fórmulas de Recorrência

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Fórmulas de Recorrência

Uma *fórmula de recorrência* é uma fórmula na qual um termo é definido em função dele mesmo.

Ex: $n! = n * (n - 1)!$

$$\text{fib}(n) = \text{fib}(n - 1) + \text{fib}(n - 2)$$

No primeiro exemplo temos uma recorrência de primeira ordem. No segundo, temos uma recorrência de segunda ordem.

Resolver uma fórmula de recorrência consiste em eliminar a repetição do termo recorrente.

Ex: $n! = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * 1$

$$\text{fib}(n) = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}}, \text{ onde } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



Método da Soma

Podemos resolver uma fórmula de recorrência usando o *método da soma*. Este método consiste basicamente em, a partir da recorrência original, obter uma coleção de fórmulas de recorrências tais que a sua soma resulta na eliminação da repetição do termo recorrente.

Ex: $T(n) = T(n - 1) + n$
 $T(1) = 1$

$$T(n) = \cancel{T(n-1)} + n$$

$$\cancel{T(n-1)} = \cancel{T(n-2)} + (n-1)$$

$$\cancel{T(n-2)} = \cancel{T(n-3)} + (n-2)$$

...

$$\cancel{T(2)} = \cancel{T(1)} + 2$$

$$\cancel{T(1)} = 1$$

$$T(n) = 1 + 2 + \dots + n = n * (n + 1) / 2 = (n^2 + n)/2$$

$$T(n) \in \Theta(n^2)$$



Ex: $R(n) = 2 * R(n - 1) + 1$
 $R(1) = 1$

Eq. 0 $R(n) = 2 * \cancel{R(n - 1)} + 1$

Eq. 1 $2 * \cancel{R(n - 1)} = 4 * \cancel{R(n - 2)} + 2$

Eq. 2 $4 * \cancel{R(n - 2)} = 8 * \cancel{R(n - 3)} + 4$

...

Eq. $n-2$ $2^{n-2} * \cancel{R(2)} = 2^{n-1} \cancel{R(1)} + 2^{n-2}$

Eq. $n-1$ $2^{n-1} * \cancel{R(1)} = 2^{n-1}$

$$R(n) = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$R(n) \in \Theta(2^n)$$



Ex: $S(n) = S(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$
 $S(1) = 1$

Vamos supor que $n = 2^k \Rightarrow k = \log n$

Eq. 0 ~~$S(n) = S(n/2) + 1$~~

Eq. 1 ~~$S(n/2) = S(n/4) + 1$~~

Eq. 2 ~~$S(n/4) = S(n/8) + 1$~~

...

Eq. $k-1$ ~~$S(n/2^{k-1}) = S(n/2^k) + 1$~~

Eq. k ~~$S(n/2^k) = 1$~~

$S(n) = k + 1 = \log n + 1$

$S(n) \in \Theta(\log n)$



Observe que as funções S e \log são crescentes, ou seja, se $n' \geq n$, então $S(n') \geq S(n)$ e $\log n' \geq \log n$.

Seja $2^k < n' < 2^{k+1}$. Se $n = 2^k$ então $n < n' < 2n$.

Isso implica que **$\log n' < \log 2n = \log n + 1$** e **$\log n' > \log n$** . Note que:

$$S(n) \leq S(n') \leq S(2n)$$

$$\log n + 1 \leq S(n') \leq \log 2n + 1$$

$$\log n + 1 \leq S(n') \leq \log n + 2$$

$$\log n' < S(n') < \log n' + 2$$

Concluimos assim que **$S(n') \in \Theta(\log n')$** .



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Diversão pra casa:

$$V(n) = 2 * V(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$

$$V(1) = 1$$



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 30-04-2021

Análise de Algoritmos Recursivos – Parte 1

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Diversão pra casa: $V(n) = 2 * V(\lfloor n/2 \rfloor) + n$
 $V(1) = 1$

Vamos supor $n = 2^k \Rightarrow k = \log n$

Eq. 0 $V(n) = 2 * V(n/2) + n$

Eq. 1 $2 * V(n/2) = 4 * V(n/4) + n$

Eq. 2 $4 * V(n/4) = 8 * V(n/8) + n$

...

Eq. $k-1$ $2^{k-1} V(n/2^{k-1}) = 2^k V(n/2^k) + n$

Eq. k $2^k V(n/2^k) = 2^k$

$$V(n) = n * k + 2^k = n * \log n + n$$

$V(n) \in \Theta(n \log n)$



Análise de Algoritmos Recursivos

Um algoritmo é dito *recursivo* se ele chama a si mesmo.

Todo algoritmo recursivo deve apresentar pelo menos um caso no qual ele não chama a si mesmo. Tal caso é chamado de *base da recursividade*.

Ex:

Algoritmo Fatorial

Entrada: $x \in \mathbb{N}$

Saída: $x!$

se $x = 0$ // base de recursividade

 devolva 1

se não

 devolva $x * \text{Fatorial}(x - 1)$ // chamada recursiva



Teorema: O Algoritmo Fatorial é correto.

Prova: Façamos indução em x . Base: $x = 0$, trivial.

Suponha agora que a chamada $\text{Fatorial}(x - 1)$ resulta em $(x - 1)!$ (H.I.).

Observe que a chamada $\text{Fatorial}(x)$, com $x > 0$, devolve:

$$x * \text{Fatorial}(x - 1) = x * (x - 1)! = x! \blacksquare$$



Para determinar a complexidade temporal do Algoritmo Fatorial vamos denotar por $T(x)$ o tempo requerido pelo algoritmo quando ele recebe uma entrada x . Note que:

$$T(x) = T(x - 1) + c$$

$$T(0) = c$$

onde c é uma constante. Assim:

$$T(x) = T(x - 1) + c$$

$$T(x - 1) = T(x - 2) + c$$

$$T(x - 2) = T(x - 3) + c$$

...

$$T(1) = T(0) + c$$

$$T(0) = c$$

$$T(x) = c * (x + 1)$$

$$T(x) \in \Theta(x)$$



Denotando por $E(x)$ o espaço requerido pelo Algoritmo Fatorial quando ele recebe uma entrada x , temos que:

$$E(x) = E(x - 1) + c$$

$$E(0) = c$$

$$E(x) \in \Theta(x)$$

Concluimos que o Algoritmo Fatorial requer tempo e espaço $\Theta(x)$.



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 03-05-2021

Análise de Algoritmos Recursivos – Parte 2

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Problema: dado $x \in \mathbb{N}$ calcular 2^x .

Algoritmo Pot1

Entrada: $x \in \mathbb{N}$

Saída: 2^x

$r = 1$

para $i = 1$ até x

$r = 2 * r$

devolva r

Invariante: ao final de cada iteração do laço temos $r = 2^i$.

Prova: Por indução em i . Base: $i = 1$, trivial. Suponha agora que ao final da iteração com $i = k$ tenhamos $r = 2^k$ (H.I.). Observe que na iteração com $i = k + 1$ o algoritmo faz $r = 2 * r = 2 * 2^k = 2^{k+1}$ ■

Teorema: o Algoritmo Pot1 é correto.

Prova: Se $x = 0$ o algoritmo devolve 1, o que é correto. Se $x > 0$, o invariante nos garante que ao final da última iteração teremos $r = 2^x$, e portanto ao devolver r o algoritmo devolverá a resposta correta ■

O Algoritmo Pot 1 requer tempo $\Theta(x)$ e espaço $O(1)$ 😊



Fato 1: $2^x = 2 * 2^{x-1}$.

Algoritmo Pot2

Entrada: $x \in \mathbb{N}$

Saída: 2^x

se $x = 0$

 devolva 1

se não

 devolva $2 * \text{Pot2}(x - 1)$

Teorema: o Algoritmo Pot2 é correto.

Prova: Por indução em x . Base: $x = 0$, trivial. Suponha agora que $\text{Pot2}(x - 1)$ devolva 2^{x-1} (H.I.). Ao receber $x > 0$, o Pot2 devolve:

$$2 * \text{Pot2}(x - 1) = 2 * 2^{x-1} = 2^x \blacksquare$$

A complexidade temporal e espacial do algoritmo Pot2 é dada por:

$$T(x) = T(x - 1) + c$$

$$T(0) = c$$

$$T(x) \in \Theta(x)$$

Concluimos que o Pot2 requer tempo e espaço $\Theta(x)$ 😊



Fato 2: $2^x = 2^{x-1} + 2^{x-1}$.

Algoritmo Pot3

Entrada: $x \in \mathbb{N}$

Saída: 2^x

se $x = 0$

 devolva 1

se não

 devolva $\text{Pot3}(x - 1) + \text{Pot3}(x - 1)$

Teorema: o Algoritmo Pot3 é correto.

Prova: Por indução em x . Base: $x = 0$, trivial. Suponha agora que $\text{Pot3}(x - 1)$ devolva 2^{x-1} (H.I.). Ao receber $x > 0$, o Pot3 devolve:

$$\text{Pot3}(x - 1) + \text{Pot3}(x - 1) = 2^{x-1} + 2^{x-1} = 2^x \blacksquare$$



A complexidade temporal do Algoritmo Pot3 é dada por:

$$T(x) = 2 * T(x - 1) + c$$
$$T(0) = c$$

$$T(x) \in \Theta(2^x) \text{ 😞}$$

Já a complexidade espacial do Pot3 é dada por:

$$E(x) = E(x - 1) + c$$
$$E(0) = c$$

$$E(x) \in \Theta(x) \text{ 😬}$$

Concluimos que o Pot3 requer tempo $\Theta(2^x)$ e espaço $\Theta(x)$.



Algoritmo Pot4

Entrada: $x \in \mathbb{N}$

Saída: 2^x

se $x = 0$

 devolva 1

se não

 aux = Pot4($x - 1$)

 devolva aux + aux

Teorema: o Algoritmo Pot4 é correto.

Prova: Por indução em x . Base: $x = 0$, trivial. Suponha agora que Pot4($x - 1$) devolva 2^{x-1} (H.I.). Ao receber $x > 0$, o Pot4 devolve:

$$\text{aux} + \text{aux} = \text{Pot4}(x - 1) + \text{Pot4}(x - 1) = 2^{x-1} + 2^{x-1} = 2^x \blacksquare$$

A complexidade temporal e espacial do algoritmo Pot4 é dada por:

$$T(x) = T(x - 1) + c$$

$$T(0) = c$$

$$T(x) \in \Theta(x)$$

Concluimos que o Pot4 requer tempo e espaço $\Theta(x)$ 🤔



Fato 3: $2^x = 2^{x/2} * 2^{x/2}$.

Fato 4: $2^x = 2^{x-1/2} * 2^{x-1/2} * 2$.

Algoritmo Pot5

Entrada: $x \in \mathbb{N}$

Saída: 2^x

se $x = 0$

 devolva 1

se não

 aux = Pot5($\lfloor x/2 \rfloor$)

 se x for par

 devolva aux * aux

 se não

 devolva aux * aux * 2

Teorema: o Algoritmo Pot5 é correto.

Prova: Por indução em x. Base: $x = 0$, trivial. Suponha agora que Pot5($\lfloor x/2 \rfloor$) devolva $2^{\lfloor x/2 \rfloor}$ (H.I.). Ao receber $x > 0$, se x for par o Pot5 devolve:

$$\text{aux} * \text{aux} = \text{Pot5}(\lfloor x/2 \rfloor) * \text{Pot5}(\lfloor x/2 \rfloor) = 2^{\lfloor x/2 \rfloor} * 2^{\lfloor x/2 \rfloor} = 2^{x/2} * 2^{x/2} = 2^x$$

Se x for ímpar o Pot5 devolve:

$$\text{aux} * \text{aux} * 2 = \text{Pot5}(\lfloor x/2 \rfloor) * \text{Pot5}(\lfloor x/2 \rfloor) * 2 = 2^{\lfloor x/2 \rfloor} * 2^{\lfloor x/2 \rfloor} * 2 = 2^{x-1/2} * 2^{x-1/2} * 2 = 2^x \blacksquare$$



INSTITUTO FEDERAL

Ceará

A complexidade temporal e espacial do algoritmo Pot5 é dada por:

$$T(x) = T(\lfloor x/2 \rfloor) + c$$

$$T(0) = c$$

$$T(x) \in \Theta(\log x) \text{ 😊}$$

Concluimos que o Pot5 requer tempo e espaço $\Theta(\log x)$.

Logo, ele é eficiente!



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 10-05-2021

Algoritmos de Cota Inferior e Superior

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Algoritmos de Cota Inferior

Se todo algoritmo correto para um problema P tem complexidade temporal $\Omega(f)$ dizemos que a função f é **uma cota inferior** para a complexidade temporal de P .

Nesse caso, se um algoritmo A que resolve corretamente P tem complexidade temporal $O(f)$, dizemos que A é um **algoritmo de cota inferior** para P .

Dizemos ainda que $\Theta(f)$ é a **complexidade temporal intrínseca** a P .

Ex:

Algoritmo Busca_Sequencial

Entrada: um vetor v com n posições e um valor x

Saída: *Sim*, se x ocorre em v ; *Não*, caso contrário
para $i = 0$ até $n - 1$

se $x = v[i]$

devolva *Sim* e pare

devolva *Não*

Claramente, só é possível ter certeza de que x não ocorre em v após inspecionar todas as suas posições. Assim, todos os algoritmos que resolvem corretamente esse problema gastam tempo $\Omega(n)$.

Como o algoritmo Busca_Sequencial requer tempo $O(n)$, concluímos que ele é um **algoritmo de cota inferior**. 😊



Vejam os mais um exemplo: no *Problema das Torres de Hanói* temos n discos de tamanhos diferentes e três bases A , B e C . Inicialmente os discos estão empilhados, do menor (no topo) para o maior sobre a base A . O desafio consiste em mover os n discos para a base B usando apenas movimentos válidos. Um movimento válido consiste em mover um único disco que esteja no topo de uma pilha e colocá-lo sobre o topo de outra pilha. Além disso, um disco maior **nunca** pode ser colocado sobre um disco menor.

Teorema: para resolver o Problema das Torres de Hanói com n discos são necessários $2^n - 1$ movimentos válidos.

Prova: Por indução em n . Base: $n = 0$, trivial. Suponha agora que para mover $n - 1$ discos de uma base para outra são necessários $2^{n-1} - 1$ movimentos válidos (H.I.).

Observe que antes de mover o maior disco da base A para a base B é necessário mover os outros $n - 1$ discos para a base C . Para isso, pela H.I., serão necessários $2^{n-1} - 1$ movimentos válidos. Em seguida o maior disco pode ser movido para a base B . Finalmente, será preciso mover $n - 1$ discos da base C para a base B , sendo necessários mais $2^{n-1} - 1$ movimentos válidos. Assim, a quantidade total de movimentos será:

$$2^{n-1} - 1 + 1 + 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1 \blacksquare$$

Concluimos que todo algoritmo correto para o problema das Torres de Hanói requer tempo $\Omega(2^n)$ 🧐



Algoritmo Hanói

Entrada: n discos e as bases *orig*, *dest* e *aux*

Saída: uma coleção de movimentos válidos para mover n discos da base *orig* para a base *dest*
se $n = 1$

 mova o disco da base *orig* para a base *dest*

se não

 Hanói($n - 1$, *orig*, *aux*, *dest*)

 Hanói(1, *orig*, *dest*, *aux*)

 Hanói($n - 1$, *aux*, *dest*, *orig*)

A complexidade temporal do Algoritmo Hanói é dada por:

$$T(n) = 2T(n - 1) + c$$

$$T(1) = c$$

Concluimos que o Algoritmo Hanói requer tempo $\Theta(2^n)$, logo o Algoritmo Hanói é um **algoritmo de cota inferior**. 😊



Algoritmos de Cota Superior

Se todo algoritmo correto **conhecido** para um problema P tem complexidade temporal $\Omega(f)$ dizemos que a função f é uma **cota superior** para a complexidade temporal de P . Nesse caso, se um algoritmo **conhecido** A que resolve corretamente P tem complexidade temporal $O(f)$, dizemos que A é um **algoritmo de cota superior** para P .

Um algoritmo de cota superior pode perder esse status se for descoberto outro algoritmo mais rápido do que ele.

Ex: Multiplicação de matrizes quadradas de ordem n

Algoritmo clássico: $\Theta(n^3)$

Algoritmo de Strassen (1969): $\Theta(n^{\log 7})$

Algoritmo de Coppersmith-Winograd (1987): $\Theta(n^{2,375})$



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 14-05-2021

Análise Amortizada

Método da Agregação e Método Contábil

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Análise Amortizada

Se uma operação requer tempo $O(f)$, é correto afirmar que uma sequência de n execuções dessa operação requer tempo $O(nf)$.

No entanto, em algumas circunstâncias, o tempo requerido por essa sequência de operações é $o(nf)$. Isso ocorre porque algumas dessas operações podem requerer tempo $o(f)$, e isso pode *amortizar* (compensar) o custo das operações que gastam tempo $\Theta(f)$.

Técnicas de análise amortizada permitem fazer essa compensação e estimar com mais precisão o tempo requerido pela sequência de operações.

Se o custo total de uma sequência de n execuções de uma operação requer tempo $\Theta(f)$, o **custo amortizado** de cada operação é $\Theta(f/n)$.

Método da agregação

É um método de análise de amortizada que consiste basicamente em somar o custo total da sequências de operações.



Algoritmo Incrementa

Entrada: um contador A implementado num vetor de bits com k posições

Saída: Incrementa de 1 unidade o valor contido no contador

$i = k - 1$

enquanto $i \geq 0$ e $A[i] = 1$

$A[i] = 0$ // reset

$i--$

se $i \geq 0$

$A[i] = 1$ // set

0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1
0	0	0

O custo de uma chamada ao algoritmo Incrementa é $O(k)$

Qual o custo de n chamadas a esse algoritmo?

A cada chamada, $A[k-1]$ é alterado (set ou reset). A cada duas chamadas $A[k-2]$ é alterado. A cada quatro chamadas $A[k-3]$ é alterado, e assim por diante. Assim, a quantidade total de sets e resets é:

$$n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \cdots + \frac{n}{2^{k-1}} \cong 2n$$

Concluimos que o custo total da sequência de n chamadas ao incrementa é $\Theta(n)$ e o **custo amortizado** de cada chamada é $O(1)$ 😊

Valores armazenados num contador A de 3 bits inicializado com 0 após 8 chamadas ao algoritmo Incrementa



Vejam mais um exemplo. Considere as operações *Empilha*, *Desempilha* e *EsvaziaPilha*, implementadas num vetor de k posições. As operações *Empilha*, *Desempilha* gastam tempo $O(1)$, já a operação *EsvaziaPilha*, que serve para remover todo o conteúdo da pilha, requer tempo $O(k)$. Qual seria o custo de uma sequência de n chamadas a essas operações?

Naturalmente o custo total das chamadas ao *Empilha* é $O(n)$, assim como o custo total das chamadas ao *Desempilha*. Note ainda que o custo total das chamadas ao *EsvaziaPilha* é menor ou igual ao custo das chamadas ao *Empilha*, logo é $O(n)$.

Agregando todos esses custos, concluímos que o custo total das n chamadas é $O(n)$ e o custo amortizado de cada chamada é $O(1)$ 😊



Método Contábil

No método contábil atribuímos a cada operação um custo amortizado. Se o custo amortizado é maior do que o custo real, dizemos que a operação gera **crédito**. Se for menor que o custo real, a operação gera **débito**.

Se numa sequência de n operações o saldo for sempre maior ou igual a zero, então a soma dos custos amortizados é maior ou igual à soma das custos reais.

Vamos aplicar o método contábil ao Algoritmo Incrementa, atribuindo custo amortizado 2 à operação *set* (gera crédito) e custo amortizado 0 ao *reset* (gera débito).

Note que o algoritmo só faz um reset de uma posição do contador se previamente foi feito o *set* dessa posição, que gerou uma unidade de crédito que cobrirá o custo do reset. Assim, o saldo será sempre maior ou igual a zero, logo a soma dos custos amortizados é maior ou igual à soma dos custos reais.

O custo amortizado de n chamadas ao Algoritmo Incrementa é $O(n)$. Concluimos assim que a soma dos custos reais é $O(n)$ e o custo amortizado de cada chamada ao Incrementa é $O(1)$.

			Saldo
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	2
1	0	0	1
1	0	1	2
1	1	0	2
1	1	1	3
0	0	0	0



Mais um exemplo: vamos atribuir custo amortizado 2 à operação Empilha (gera crédito) e custo amortizado 0 ao Desempilha (gera débito). Consequentemente, a operação EsvaziaPilha também terá custo amortizado 0 e gerará débito.

Observe que cada elemento desempilhado foi previamente empilhado e o crédito gerado no empilhamento é suficiente para pagar pelo desempilhamento. Assim, o saldo será sempre maior ou igual a zero.

Como a soma dos custos amortizados é $O(n)$, concluímos que o custo total das n chamadas é $O(n)$ e o custo amortizado de cada chamada é $O(1)$.



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 17-05-2021

Análise Amortizada
Método Potencial

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com



REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.



Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.



Método Potencial

No método potencial associamos à operação que queremos analisar uma estrutura e denotamos por D_i o estado dessa estrutura ao final de i -ésima chamada à operação. Definimos uma função Φ que associa a cada estado da estrutura um número que representa o potencial desse estado da estrutura. Assim, $\Phi(D_i)$ é o potencial da estrutura após a i -ésima chamada ($\Phi(D_0)$ é o potencial antes da primeira chamada).

O custo real de cada chamada i é denotado por c_i e o custo amortizado da chamada i é denotado por \hat{c}_i . Definimos:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

Observe que:

$$\hat{c}_1 = c_1 + \Phi(D_1) - \Phi(D_0)$$

$$\hat{c}_2 = c_2 + \Phi(D_2) - \Phi(D_1)$$

...

$$\hat{c}_n = c_n + \Phi(D_n) - \Phi(D_{n-1})$$

Somando todas essas equações temos:

$$\sum_{i=1}^n \hat{c}_i = \sum_{i=1}^n c_i + \Phi(D_n) - \Phi(D_0)$$

Se $\Phi(D_n) \geq \Phi(D_0)$ então a soma dos custos amortizados é maior ou igual à soma dos custos reais.



Vamos usar o contador como estrutura associada ao Algoritmo Incrementa e definir a função Φ como sendo a quantidade de bits iguais a 1 no contador. Supondo que inicialmente o contador armazena 0, temos $\Phi(D_0) = 0$ e portanto $\Phi(D_n) \geq \Phi(D_0)$. Neste caso, a soma dos custos amortizados é maior ou igual à soma dos custos reais.

Qual o custo amortizado de cada chamada i ao Incrementa?

Se a chamada i reseta t bits ($t < k$) e seta 1 bit:

$$\hat{c}_i = t + 1 + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = t + 1 - (t - 1) = 2$$

Se a chamada i reseta k bits:

$$\hat{c}_i = k + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = k - k = 0$$

Assim, o custo amortizado de n chamadas ao Algoritmo Incrementa é $O(n)$. Concluimos mais uma vez que o custo de n chamadas ao Algoritmo Incrementa é $O(n)$.



Outro exemplo: vamos usar a pilha como estrutura associada às operações Empilha, Desempilha e EsvaziaPilha e definir a função Φ como sendo a quantidade de elementos armazenados na pilha. Supondo que inicialmente a pilha está vazia, temos $\Phi(D_0) = 0$ e portanto $\Phi(D_n) \geq \Phi(D_0)$. Consequentemente, a soma dos custos amortizados é maior ou igual à soma dos custos reais.

Custo amortizado do Empilha:

$$\hat{c}_i = 1 + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + 1 = 2$$

Custo amortizado do Desempilha:

$$\hat{c}_i = 1 + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 - 1 = 0$$

Custo amortizado do EsvaziaPilha, supondo que a pilha armazenava t elementos:

$$\hat{c}_i = t + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = t - t = 0$$

Assim, o custo amortizado de n chamadas às operações Empilha, Desempilha e EsvaziaPilha é $O(n)$. Concluimos mais uma vez que o custo da sequência de n chamadas é $O(n)$.