Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
Coordenação de Matemática
Equações diferenciais
Segunda lista em 29/01/2012
Prof. Stálio

1. Encontre a solução geral da equação diferencial dada.

   a) $y'' + 2y' - 3y = 0$
   b) $2y'' - 3y' + y = 0$
   c) $4y'' - 9y' = 0$
   d) $y'' - 2y' - 2y = 0$

2. Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é $y = c_1 e^{\frac{-t}{2}} + c_2 e^{-2t}$.

3. Resolva o problema de valor inicial $4y'' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \beta$. Depois, encontre β de modo que a solução tenda a zero quando $t \to \infty$.

4. Verifique que $y_1(x) = t^2$ e $y_2(x) = t^{-1}$ são duas soluções da equção diferencial $t^2 y'' - 2y = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $c_1 t^2 + c_2 t^{-1}$ também é solução dessa equação quaisquer que sejam c_1 e c_2.

5. Se o wronskiano de f e g é $3e^{4t}$, e se $f(t) = e^{2t}$, encontre $g(t)$.

6. Se $W(f,g)$ é o wronskiano de f e g, e se $u = 2f - g$, $v = f + 2g$, encontre o wronskiano $W(u,v)$ de u e v em função de $W(f,g)$.

7. Se o wronskiano de f e g é $t\cos t - \operatorname{sen} t$ e $u = f + g$, $v = f - g$, encontre o wronskiano $W(u,v)$ de u e v.

8. Se as funções y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, prove que $c_1 y_1$ e $c_2 y_2$ são, também são soluções linearmente independentes, desde que nem c_1 nem c_2 sejam nulos.

9. Encontre o wronskiano de duas soluções da equação diferencial $(\cos t)y'' + (\operatorname{sen} t)y' - ty = 0$.

10. Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de $ty'' - 2y' + (3+t)y = 0$ e se $W(y_1, y_1)(2) = 3$, encontre o valor de $W(y_1, y_1)(4)$.

11. Se f, g e h são funções diferenciáveis, mostre que $W(fg, fh) = f^2 W(g,h)$.

12. Encontre a solução geral da equação diferencial $y'' - 2y' + 6y = 0$.

13. Mostre que $W\left(e^{\lambda t}\cos \mu t, e^{\lambda t}\operatorname{sen} \mu t\right) = \mu e^{2\lambda t}$.

14. Usando a fórmula de Euler, mostre que

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ e } \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

15. Se e^{rt} é dada pela equação $e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t}\cos\mu t + ie^{\lambda t}\operatorname{sen}\mu t$, mostre que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{rt}\right) = re^{rt}$$

para quaisquer número complexo r.

16. Encontre a solução geral da equação diferencial $9y^{''} + 6y^{'} + y = 0$.

17. Se $ar^2 + br + c = 0$ tem duas raízes reais e iguais r_1, mostre que

$$L[e^{rt}] = a\left(e^{rt}\right)^{''} + b\left(e^{rt}\right)^{'} + ce^{rt} = a\left(r - r_1\right)e^{rt} \qquad (*)$$

Como a última expressão à direita na equação $(*)$ é nula quando $r = r_1$, segue que $e^{r_1 t}$ é uma solução de $L[y] = ay^{''} + by^{'} + cy = 0$.

Derive a equação $(*)$ em relação a r e mude as ordens das derivadas em relação a r e a t, mostrando, assim, que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(L[e^{rt}]\right) = L\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{rt}\right)\right] = L\left[te^{rt}\right] = ate^{rt}\left(r - r_1\right)^2 + 2ae^{rt}\left(r - r_1\right) \qquad (**)$$

Como a última expressão à direita na equação $(**)$ é nula quando $r = r_1$, conclua que $te^{r_1 t}$ também é solução de $L[y] = 0$.

18. Encontre a solução geral da equação diferencial dada:

a) $y^{''} + 2y^{'} + 5y = 3\operatorname{sen} 2t$

b) $y^{''} - 2y^{'} - 3y = -3te^{-t}$

c) $y^{''} + 9y = t^2e^{3t} + 6$

d) $2y^{''} + 3y^{'} + y = t^t + 3\operatorname{sen} t$

e) $u^{''} + \omega_0 u = \cos\omega_0 t$