INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 26-05-2021

Trilhas de Euler

Algoritmo de Fleury

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

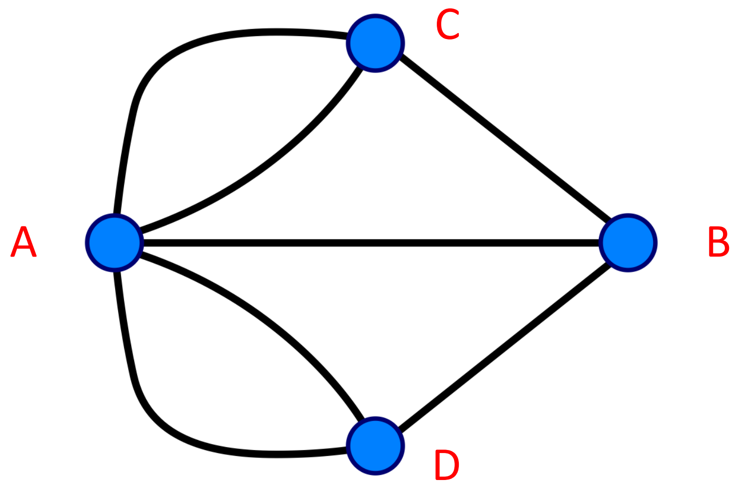
Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

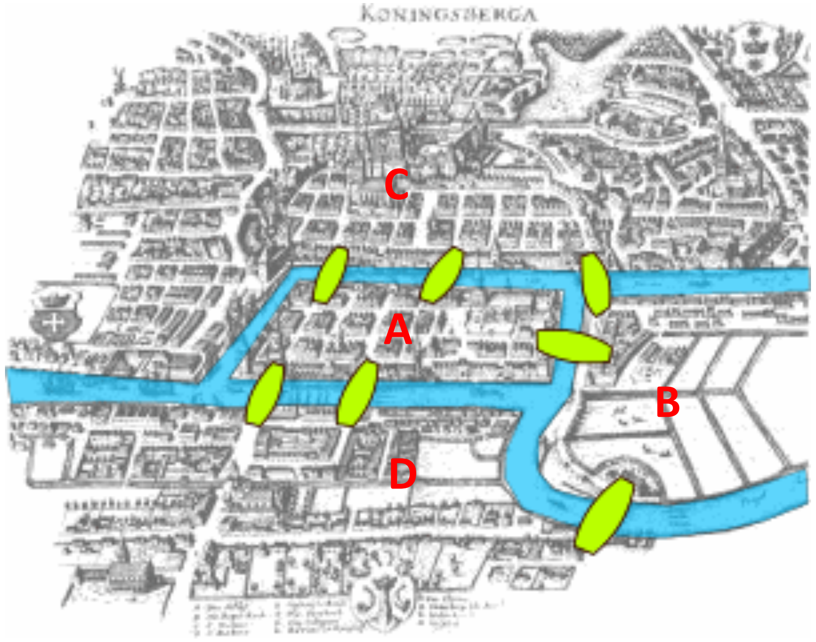
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Trilhas de Euler

Na cidade de Königsberg (atualmente Kaliningrado) existiam sete pontes sobre o Rio Pregel ligando duas ilhas ao restante da cidade. Os moradores da cidade se divertiam tentando resolver o seguinte desafio: realizar um passeio passando por todas pontes uma única vez.

Podemos modelar esse desafio através de um grafo com quatro vértices, dois deles representando as ilhas e outros dois para as margens, e sete arestas representando as pontes.





Observe que esse grafo é *não simples*. A solução do problema seria uma trilha contendo todas as arestas do grafo.
Em 1736 Leonhard Euler provou que tal passeio era ***impossível!*** 😕

Teorema de Euler

Uma *Trilha Fechada de Euler* (TFE) é uma trilha fechada que contém todos as arestas de um grafo. O Teorema de Euler estabelece uma condição que é necessária e suficiente para que exista uma TFE um grafo num grafo conexo.

Teorema de Euler: Um grafo conexo possui uma TFE se e somente se todos os seus vértices têm grau par.

Uma *Trilha Aberta de Euler* (TAE) é uma trilha aberta que contém todos as arestas de um grafo.

Corolário: Um grafo conexo possui uma TAE se e somente se ele possui exatamente dois vértices de grau ímpar.

Um grafo conexo que possua uma Trilha de Euler (aberta ou fechada) é chamado de *euleriano*.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

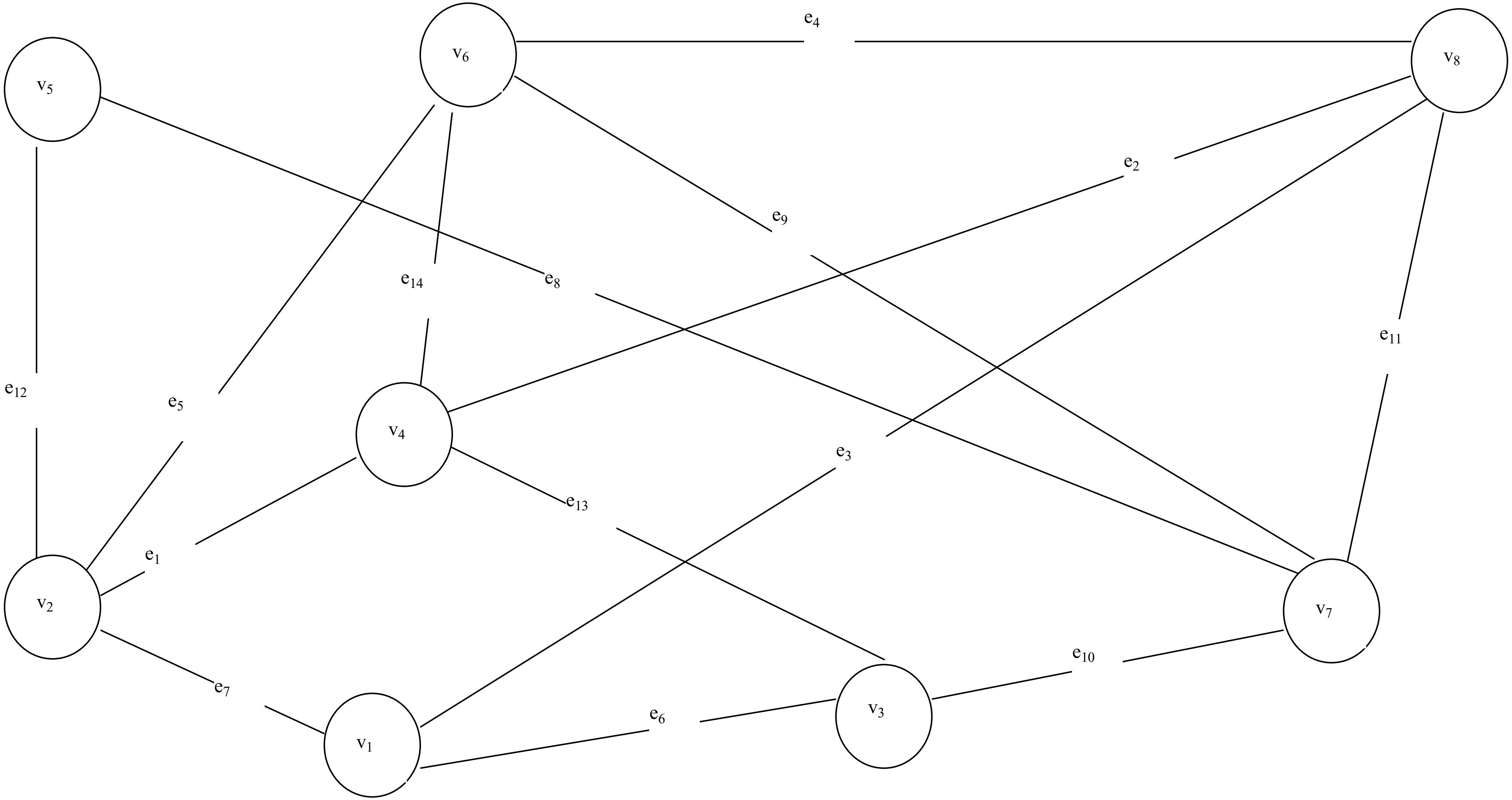
Algoritmo de Fleury

O *Algoritmo de Fleury* permite encontrar uma Trilha de Euler num grafo euleriano. Se todos os vértices têm grau par, a trilha pode começar em qualquer vértice. Se o grafo tem dois vértices de grau ímpar, a trilha deve começar em um dos vértices de grau ímpar.

Seja *u* o vértice corrente no início de uma iteração. Escolha uma aresta incidente em *u* que não seja *ponte*, se houver essa possibilidade, caso contrário escolha uma ponte incidente em *u*.

Seja *uv* a aresta escolhida. Insira *uv* na trilha, remova *uv* do grafo e considere *v* o novo vértice corrente.

O algoritmo para quando todas as arestas do grafo estiverem na trilha.


v_5
v_6
e_4
v_8
e_2
e_9
e_{14}
e_8
e_{11}
e_{12}
e_5
v_4
e_3
e_{13}
e_1
v_2
v_7
e_{10}
e_7
e_6
v_3
v_1

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 27-05-2021

Coloração de Arestas

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

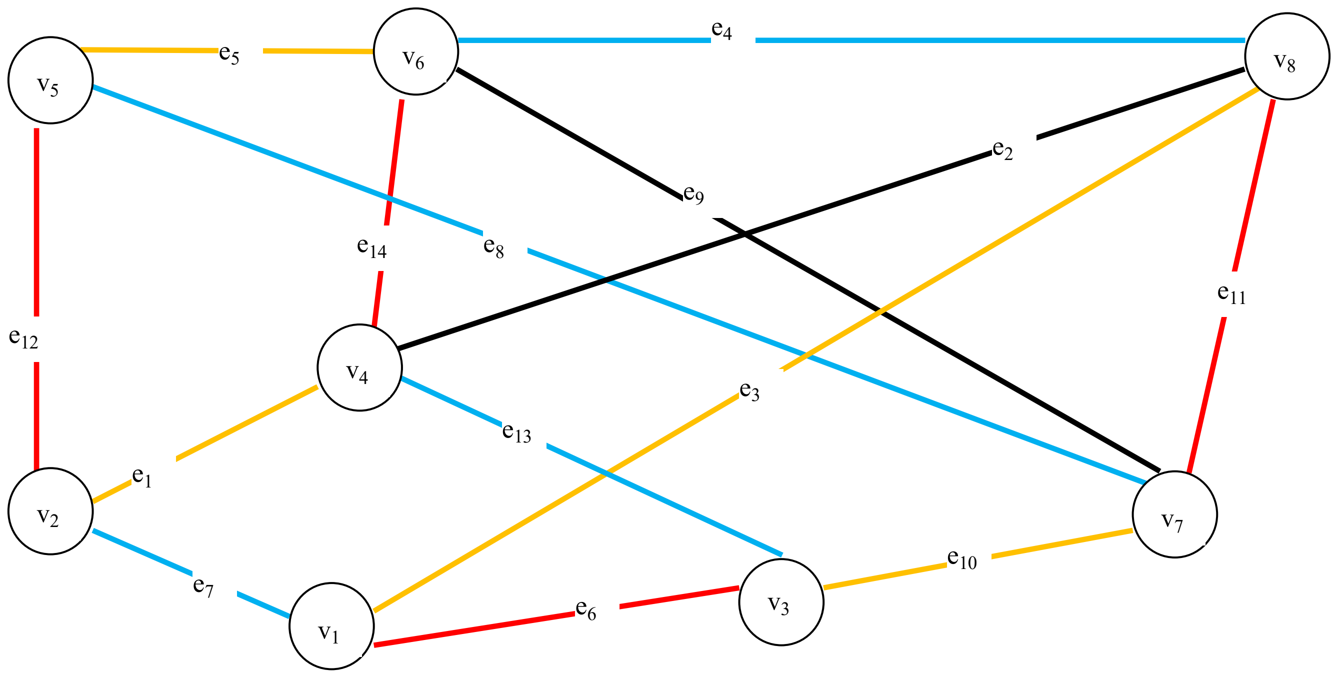
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Coloração de Arestas

Uma *coloração de arestas* é uma atribuição de cores a cada uma das arestas de um grafo.
Dizemos que uma coloração de arestas é *própria* se arestas adjacentes sempre têm cores diferentes.
Se uma coloração própria de arestas utiliza *k* cores dizemos que ela é uma *k-aresta-coloração*.
Se um grafo admite uma *k*-aresta-coloração dizemos que ele é *k-aresta-colorível*.



Grafo 4-aresta-colorível

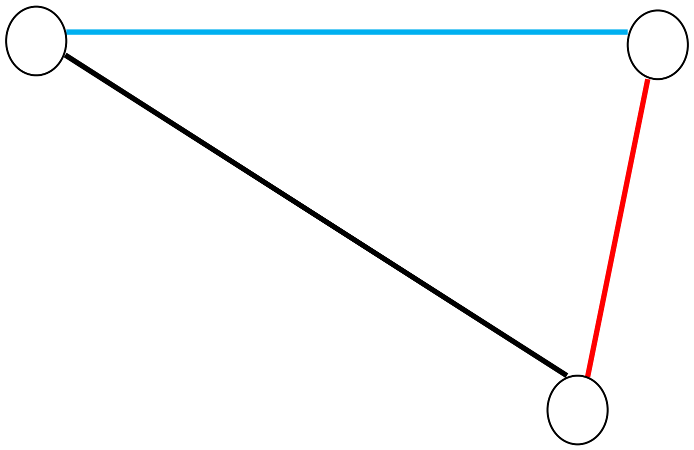
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Índice Cromático

O *índice cromático* de G, denotado por $\mathcal{X}'(G)$, é o menor *k* tal que G é *k*-aresta-colorível.

Teorema de Vizing: $\Delta(G) \leq \mathcal{X}'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Um grafo é *Classe 1* se $\mathcal{X}'(G) = \Delta(G)$ e é *Classe 2* se $\mathcal{X}'(G) = \Delta(G) + 1$.
Os grafos planares com $\Delta(G) \geq 7$, os grafos bipartidos, os grafos completos de ordem par são classe 1.
Os circuitos de comprimento ímpar e os grafos completos de ordem ímpar são classe 2.
Determinar se um grafo é classe 1 ou classe 2 é um problema ***NP-Completo*** 😔

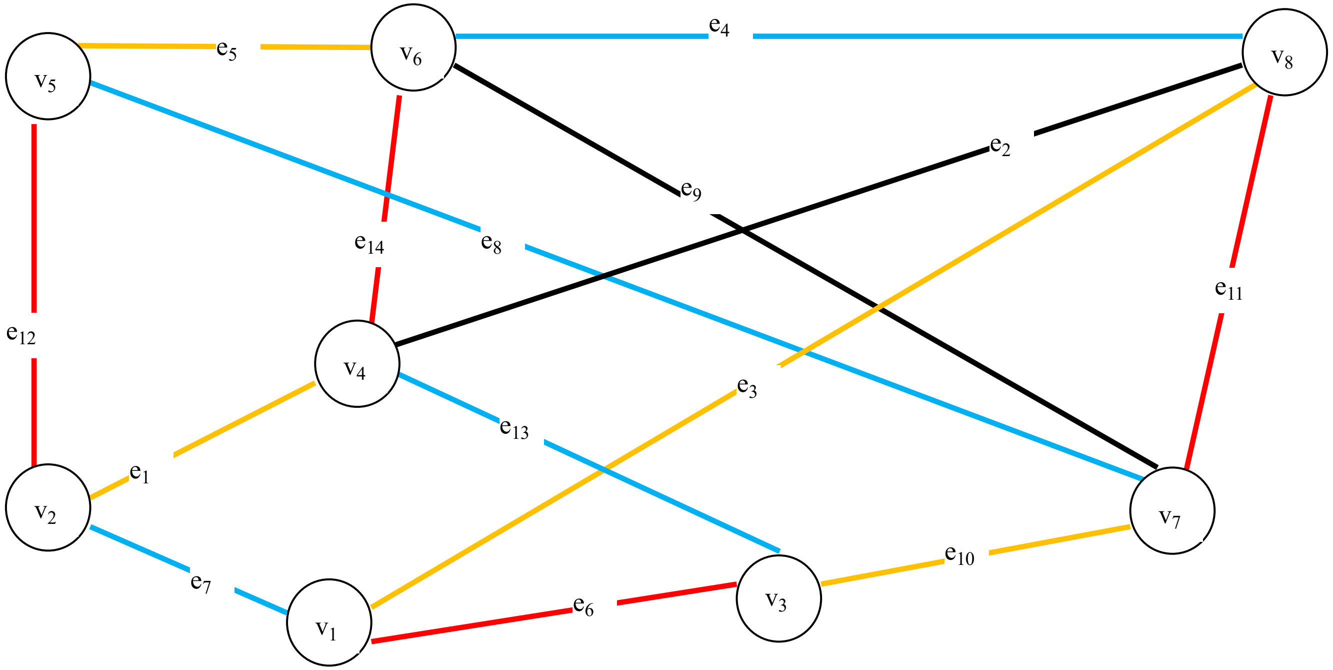


Grafo Classe 2

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

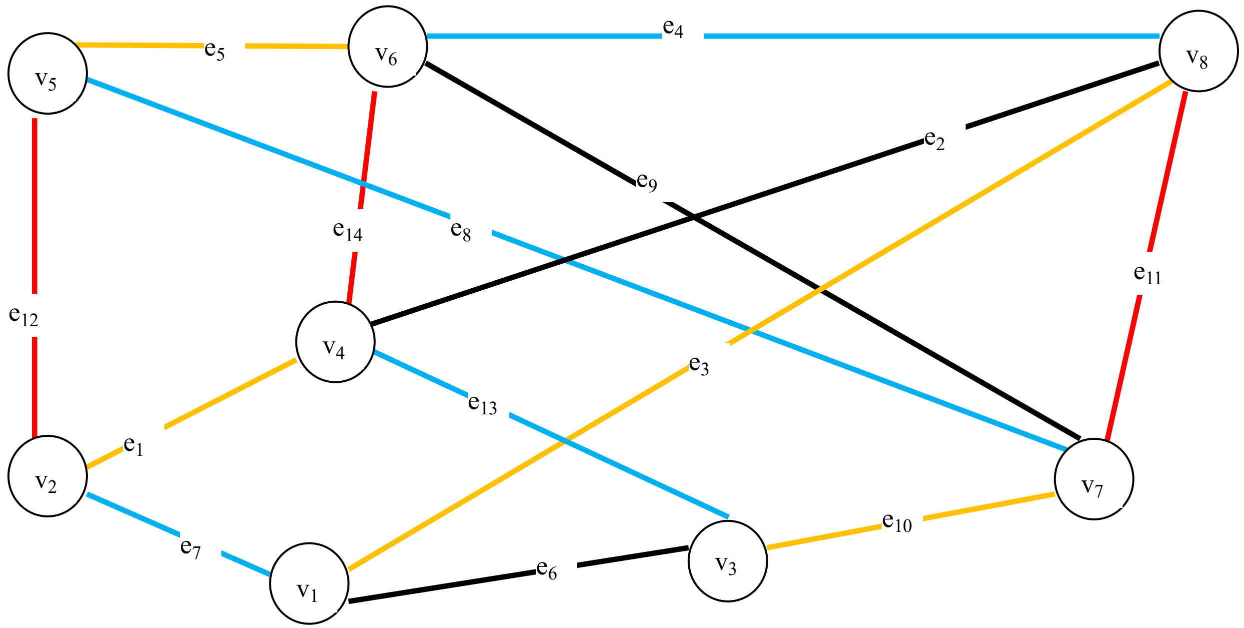
Coloração Equilibrada de Arestas

Seja *C* uma *k*-aresta-coloração que utiliza as cores 1, 2, ..., *k*. Seja c_i a quantidade de arestas da cor *i* (*i* = 1, 2, ..., *k*). Dizemos que *C* é *equilibrada* se $|c_i - c_j| \leq 1$(*i* = 1, 2, ..., *k* e *j* = 1, 2, ..., *k*).



4-aresta-coloração desequilibrada

INSTITUTO FEDERAL
Ceará



4-aresta-coloração equilibrada

O *índice cromático equilibrado* de G, denotado por $\chi_{eq}'(G)$, é o menor *k* tal que existe uma *k*-aresta-coloração equilibrada de G.

Fato: $\chi_{eq}'(G) \geq \chi'(G)$.

Diversão pra casa: prove o seguinte teorema
Teorema: Se G é completo então $\chi_{eq}'(G) = \chi'(G)$.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 01-06-2021

Coloração de Vértices

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

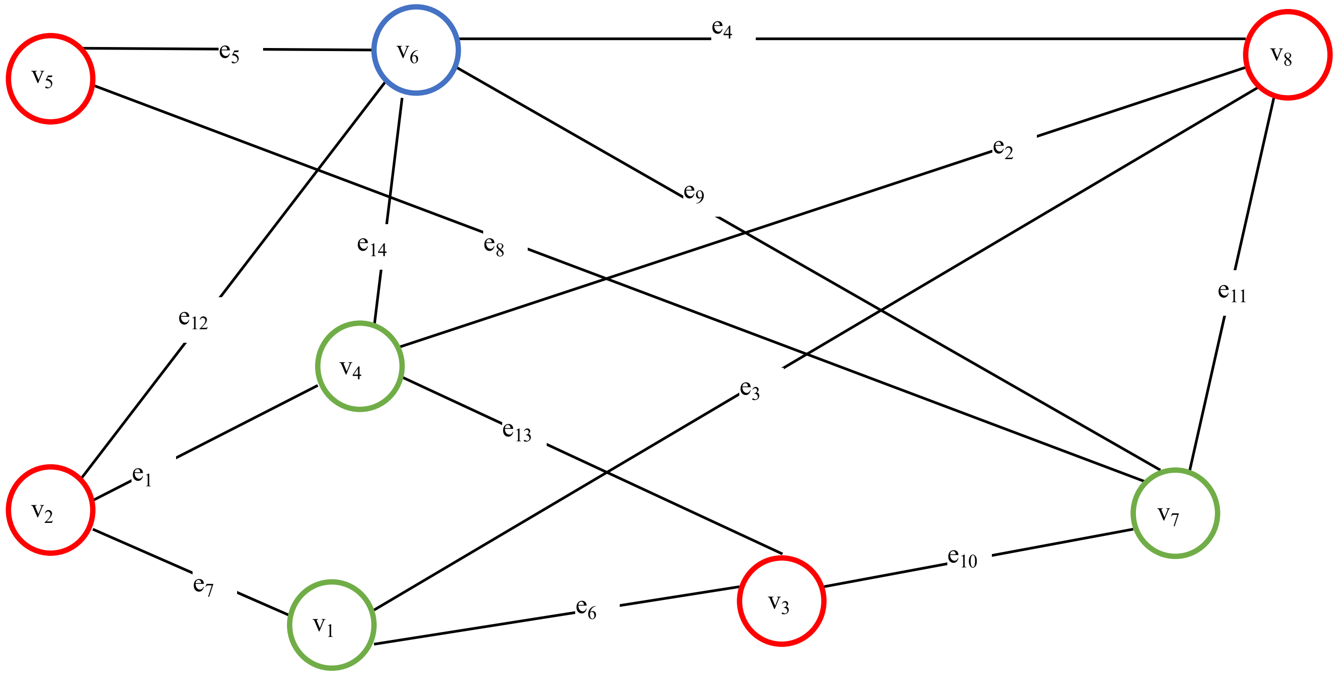
Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Coloração de Vértices

Uma *coloração de vértices* é uma atribuição de cores a cada um dos vértices de um grafo.
Dizemos que uma coloração de vértices é *própria* se vértices adjacentes sempre têm cores diferentes.
Se uma coloração própria de vértices utiliza *k* cores dizemos que ela é uma *k-vértice-coloração* ou simplesmente *k-coloração.*
Se um grafo admite uma *k*-coloração dizemos que ele é *k-colorível*.



Grafo 3-colorível

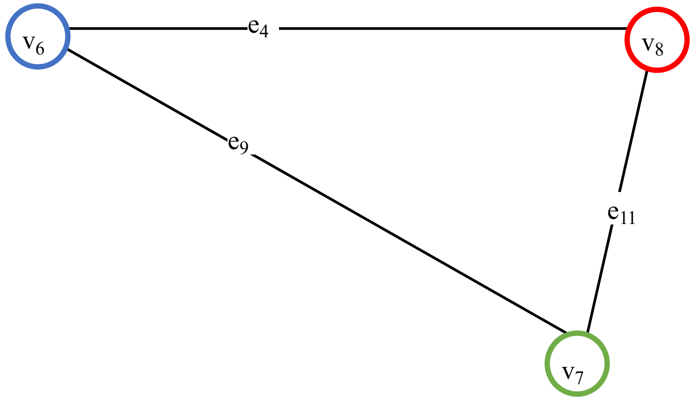
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Número Cromático

O *número cromático* de G, denotado por $\chi(G)$, é o menor k tal que G é k-colorível.

Um *clique* de G é um subgrafo completo contido em G.

Teorema 1: Se G contém um clique de ordem n então $\chi(G) \geq n$.



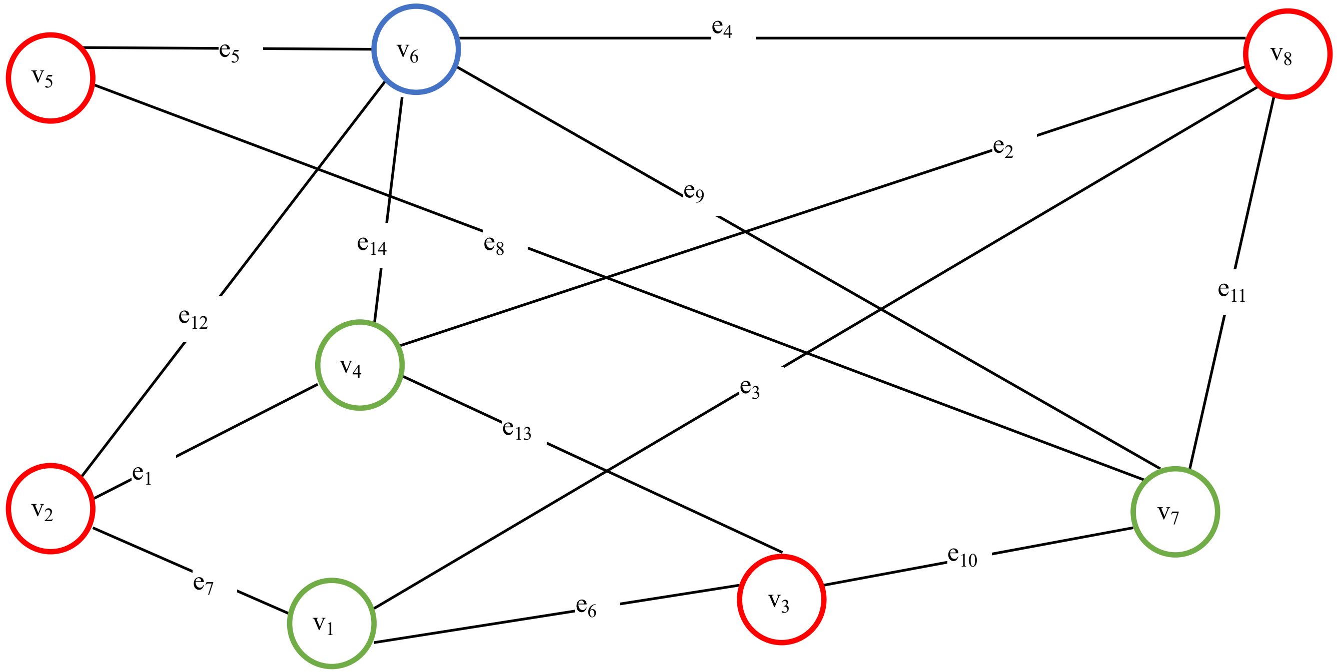
Clique de ordem 3

Teorema 2: Se F é uma floresta então $\chi(F) \leq 2$.

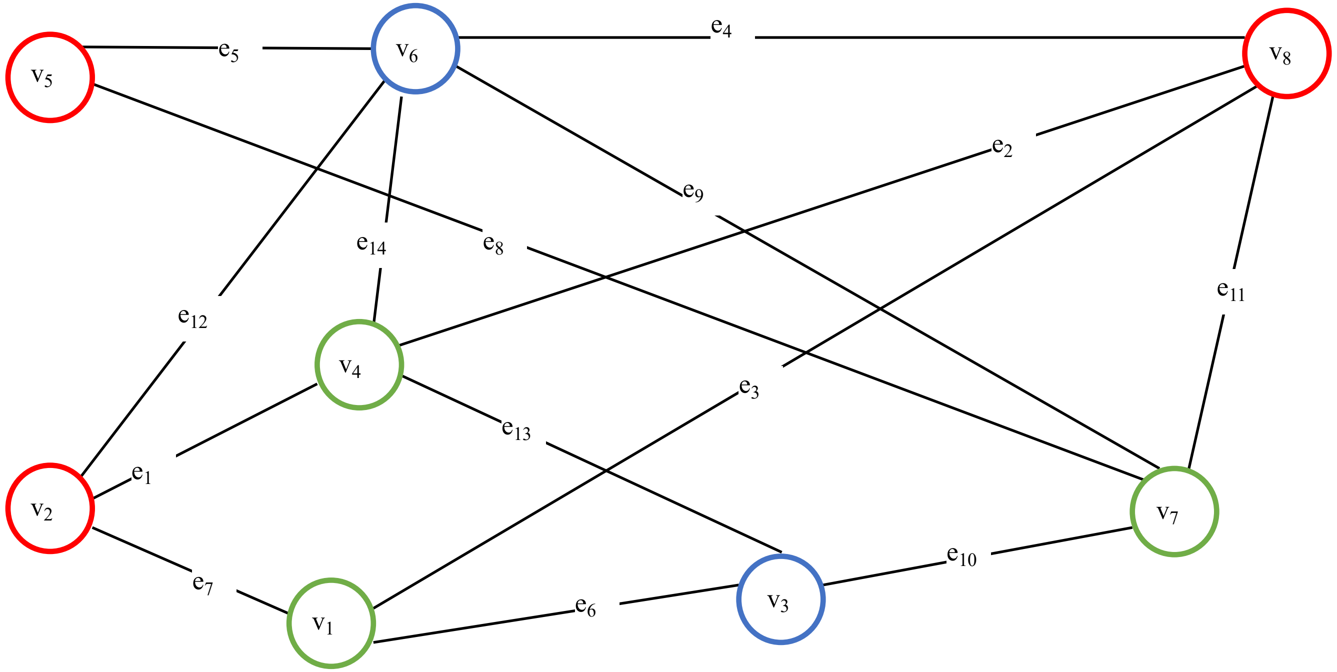
Teorema 3: $\chi(K_n) = n$.

Coloração Equilibrada de Vértices

Seja *C* uma *k*-coloração que utiliza as cores 1, 2, ..., *k*. Seja c_i a quantidade de vértices da cor *i* (*i* = 1, 2, ..., *k*). Dizemos que *C* é *equilibrada* se $|c_i - c_j| \leq 1$ (*i* = 1, 2, ..., *k* e *j* = 1, 2, ..., *k*).



3-coloração desequilibrada



3-coloração equilibrada

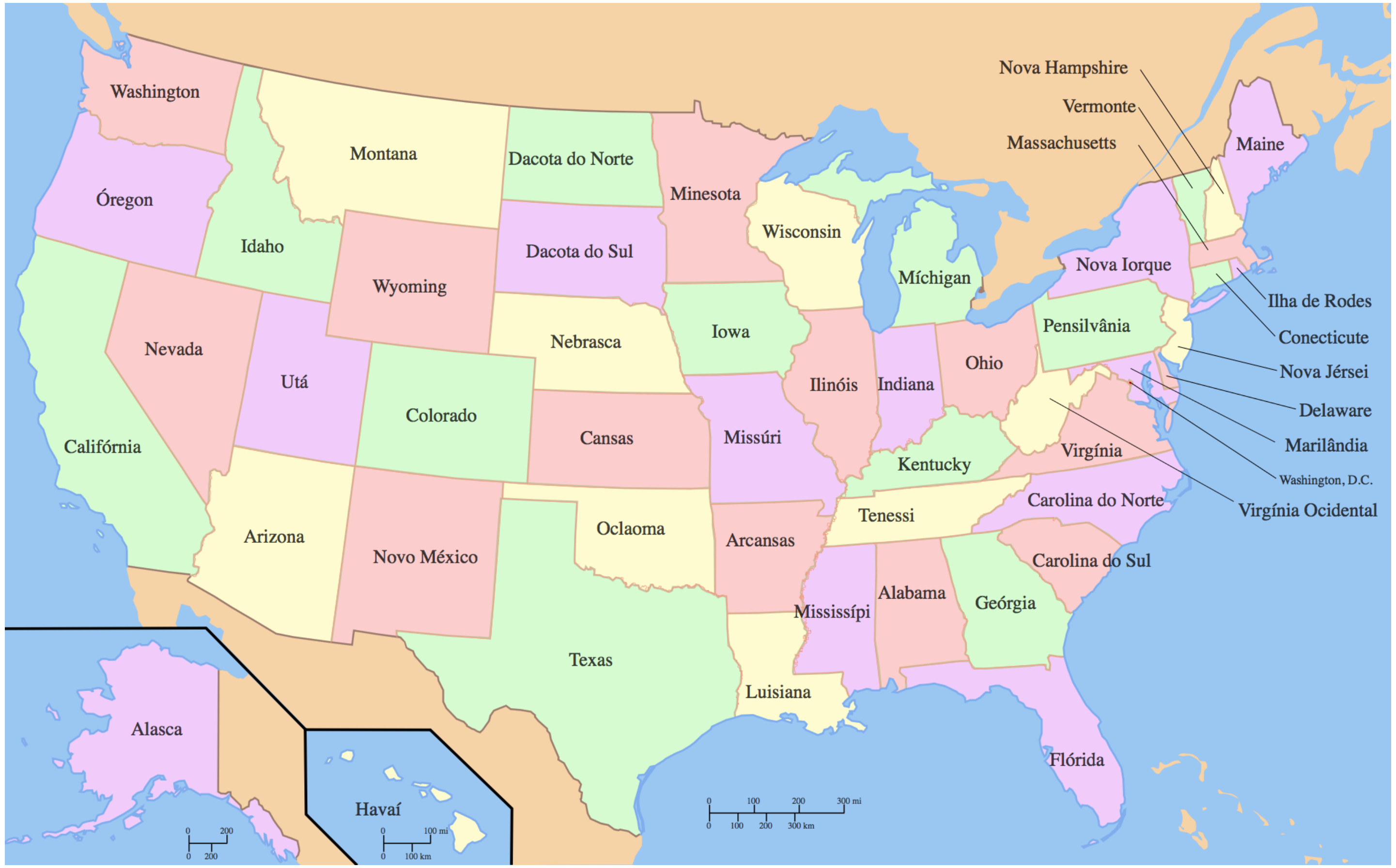
O *número cromático equilibrado* de G, denotado por $\mathcal{X}_{eq}$(G), é o menor *k* tal que existe uma *k*-coloração equilibrada de G.

Fato: $\mathcal{X}_{eq}(G) \geq \mathcal{X}(G)$.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Teorema das 5 cores: Dado um mapa dividido em regiões, é possível colorir as regiões do mapa de forma que regiões vizinhas tenham sempre cores diferentes usando no máximo 5 cores.

Teorema das 4 cores: Dado um mapa dividido em regiões, é possível colorir as regiões do mapa de forma que regiões vizinhas tenham sempre cores diferentes usando no máximo 4 cores.



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 08-06-2021

Emparelhamentos em Grafos Bipartidos

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

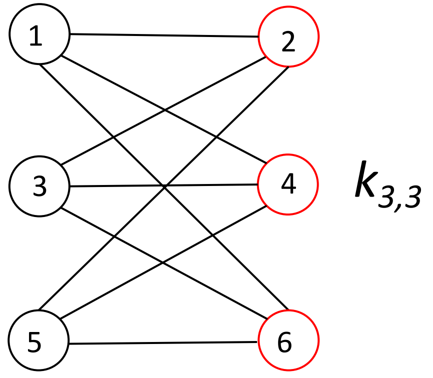
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

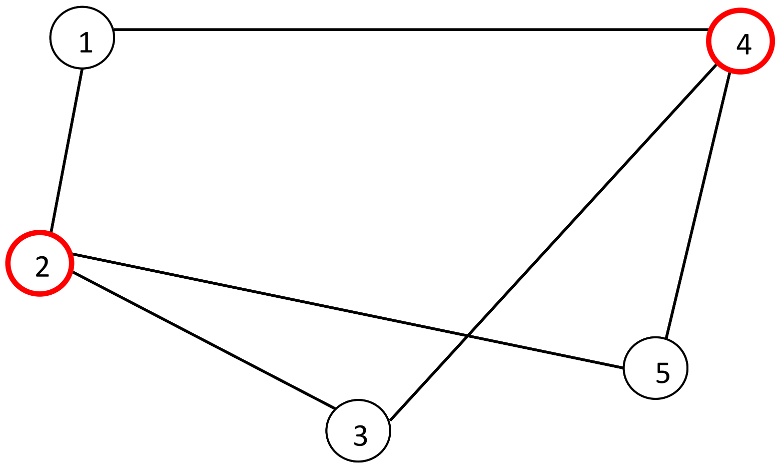
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos Bipartidos

Um grafo é dito *bipartido* (ou *biparticionável*) se é possível particionar seu conjunto de vértices em dois subconjuntos, digamos X e Y, de tal maneira que toda aresta conecte um vértice de X a um vértice de Y.



Grafo Bipartido



Grafo Bipartido

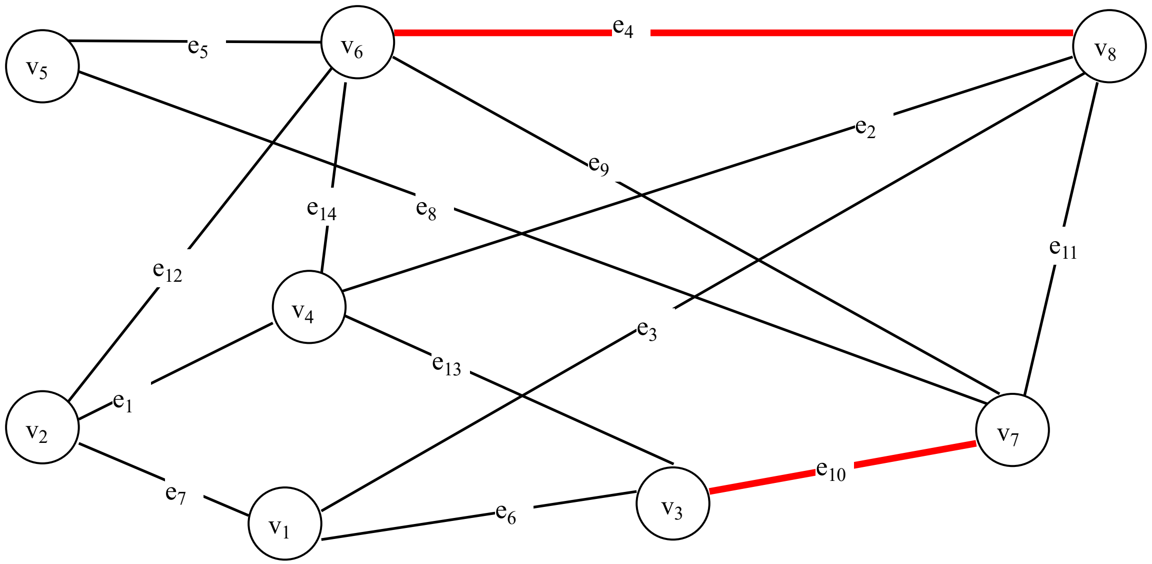
Teorema: Um grafo é bipartido se e somente se ele não possui circuito de comprimento ímpar.

Corolário: Todas as florestas são grafos bipartidos.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Emparelhamentos

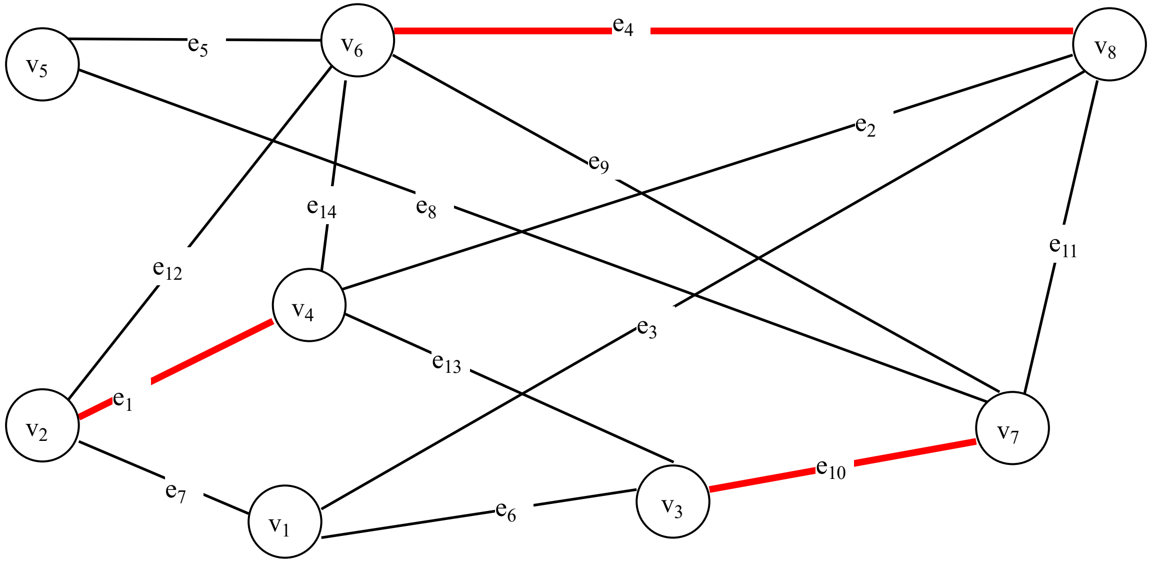
Um *emparelhamento* é um conjunto de arestas *não adjacentes entre si*.



Emparelhamento

Um emparelhamento é *maximal* se ele não está propriamente contido em nenhum outro emparelhamento.

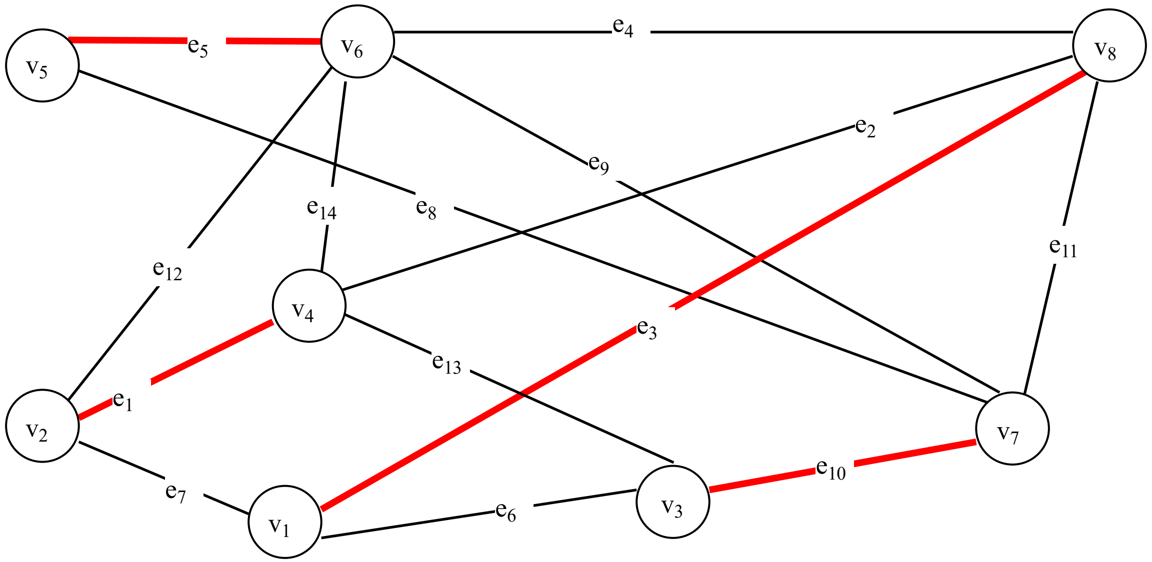
INSTITUTO FEDERAL
Ceará



Emparelhamento maximal

Seja *M* um emparelhamento. Se uma aresta *uv* pertence a *M*, dizemos que *M cobre u* e *v*.

Um emparelhamento é *perfeito* se ele cobre todos os vértices de um grafo.



Emparelhamento perfeito

Seja *G* um grafo bipartido com bipartição (*X*, *Y*). Quais as condições para que exista um emparelhamento que cubra todos os vértices de *X*?

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 10-06-2021

Teorema de Hall

Prof: Glauber Cintra
glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

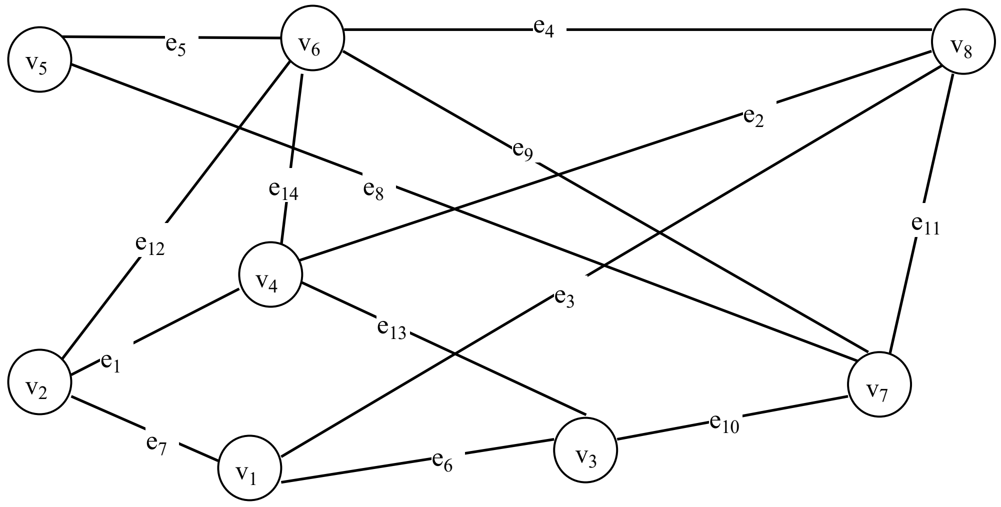
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Teorema de Hall

Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y). O Teorema de Hall estabelece uma condição que é necessária e suficiente para que exista um emparelhamento que cubra todos os vértices de X. Antes de enunciá-lo e prová-lo, precisamos de algumas definições.

Seja S um conjunto de vértices. Chamamos de *vizinhança de S*, denotada por $N(S)$, o conjunto de todos os vértices adjacentes a algum dos vértices de S.

Ex:



$S = \{v_1, v_2, v_3\}$

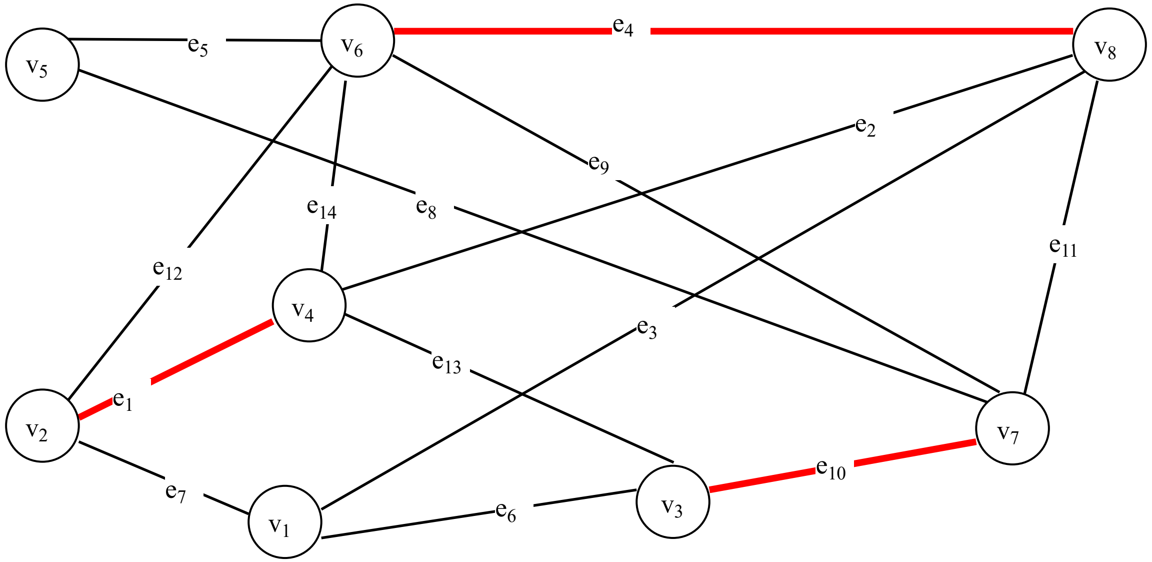
$N(S) = \{v_2, v_3, v_8, v_1, v_4, v_6, v_7\}$

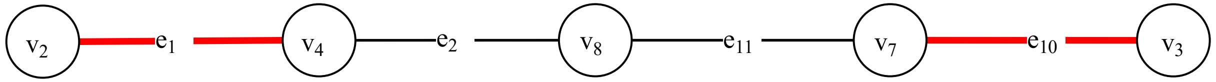
Fato: Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y). Se $S \subseteq X$ então $S \cap N(S) = \emptyset$.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

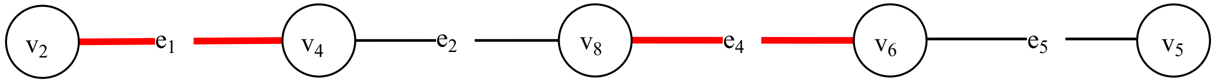
Sejam *M* um emparelhamento e *p* um caminho num grafo *G*. Dizemos que *p* é *M-alternante* se as arestas de *p* se alternam na propriedade de pertencer a *M*, ou seja, se uma aresta de *p* pertence a *M* a aresta consecutiva não pertence a *M*, e se uma aresta aresta de *p* não pertence a *M* então a aresta consecutiva pertence a *M*.

Ex: M é o conjunto das arestas vermelhas





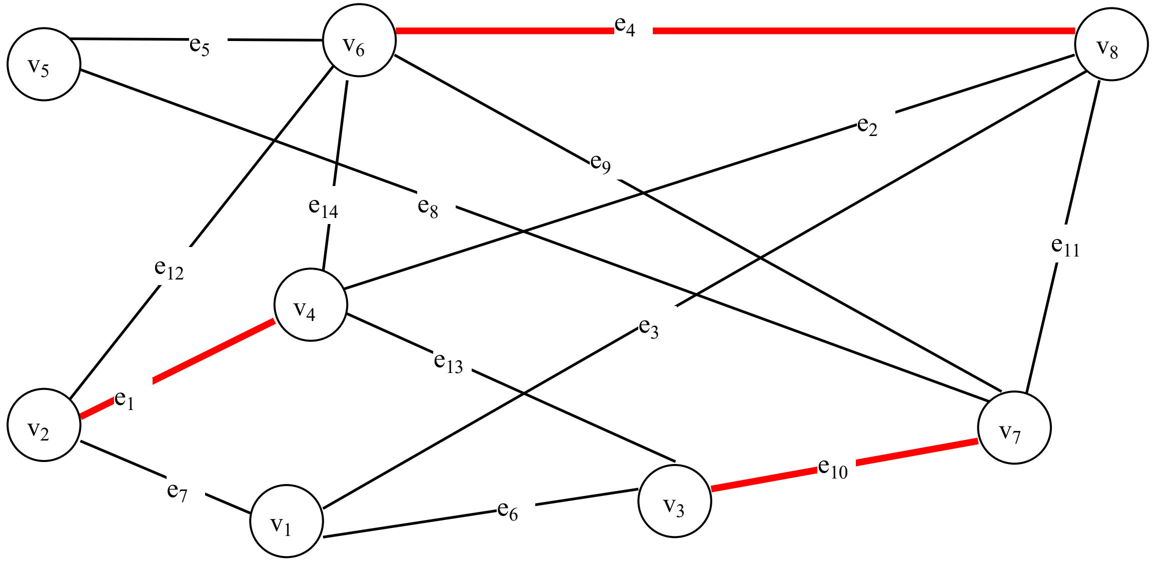
Não é *M*-alternante

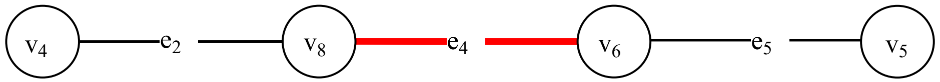


É *M*-alternante

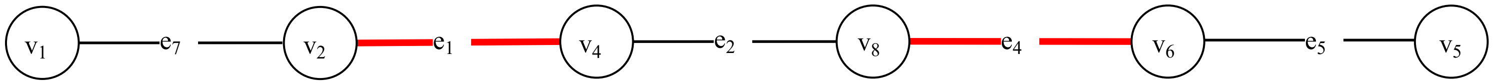
Dizemos que um caminho *M*-alternante é *M-aumentador* se os vértices nas extremidades do caminho não estão cobertos por *M*.

Ex: M é o conjunto das arestas vermelhas





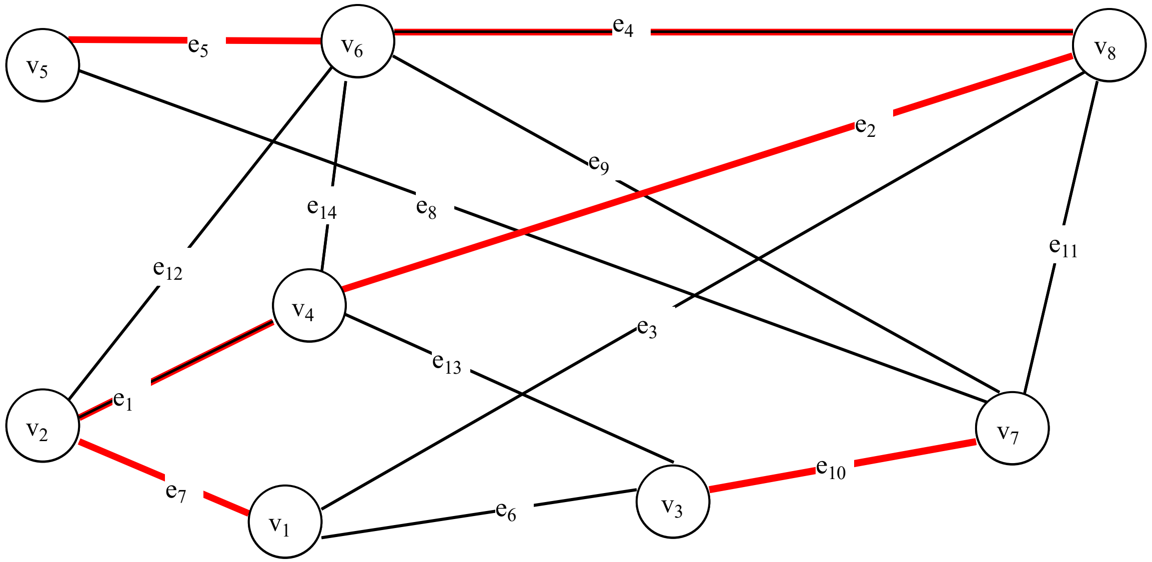
Não é *M*-aumentador

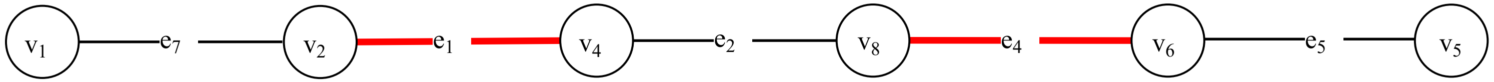


É *M*-aumentador

Podemos usar um caminho *M-aumentador* para aumentar o emparelhamento *M*. Para isso devemos remover de *M* as arestas do caminho que pertencem a *M* e inserir em *M* as arestas do caminho que não pertencem a *M*.

Ex: M é o conjunto das arestas vermelhas





Teorema de Hall: Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y). Existe um emparelhamento que cobre todos os vértices de X se e somente se para todo $S \subseteq X$ temos que $|S| \leq |N(S)|$.

Prova: (⇒) Suponha que existe um emparelhamento que cobre todos os vértices de X. Note que para todo $S \subseteq X$ temos que ter $|S| \leq |N(S)|$, caso contrário não seria possível cobrir todos os vértices de S.

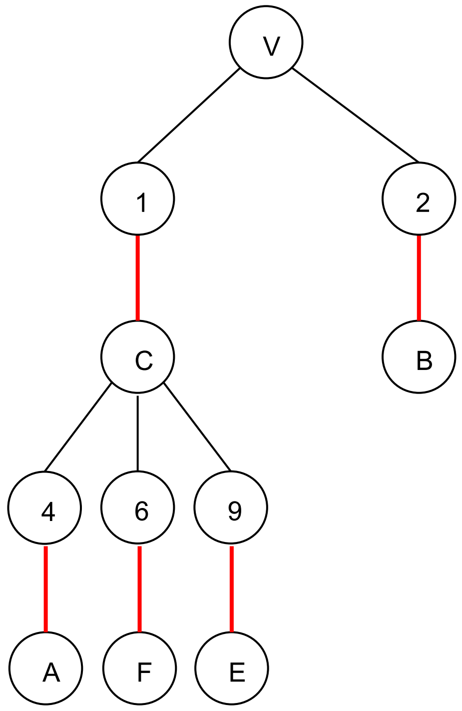
(⇐) Suponha agora que para todo $S \subseteq X$ temos que $|S| \leq |N(S)|$. Queremos provar que existe um emparelhamento que cobre todos os vértices de X.

Suponha, por absurdo, que não exista um emparelhamento que cubra todos os vértices de X.

Seja M um *emparelhamento máximo* em X e $v \in X$ um vértice não coberto por M.

Construa uma árvore *maximal* enraizada em v na qual todos caminhos iniciados na raiz sejam M-alternantes. Claramente, tal árvore não pode contém nenhum caminho M-aumentador, caso contrário M não seria máximo. Assim, nessa árvore todas as folhas são vértices cobertos por M.

Ex:



Considerando que v está no nível 1 da árvore, não há folhas no níveis pares da árvore. Seja S o conjunto dos vértices nos níveis ímpares. Observe que $N(S)$ é exatamente o conjunto de vértices dos níveis pares da árvore. Note ainda que $|S| = |N(S)| + 1 > |N(S)|$, o que é uma contradição $\Rightarrow\Leftarrow$ ■

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 15-06-2021

Método Húngaro

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Método Húngaro

Entrada: Um grafo bipartido G com bipartição (X, Y)

Saída: um emparelhamento que cobre todos os vértices de X ou um conjunto $S \subseteq X$ tal que $|S| > |N(S)|$

$M = \{ \}$

enquanto existir vértice $v \in X$ não coberto por M

construa uma árvore maximal enraizada em v na qual todos os caminhos iniciados em v sejam M-alternantes

se existir na árvore um caminho p que seja M-aumentador

A = {arestas de p que pertencem a M}

B = {arestas de p que não pertencem a M}

$M = \{M \cup B\} - A$

se não

S = {vértices da árvore que pertencem a X}

devolva S e pare

devolva M

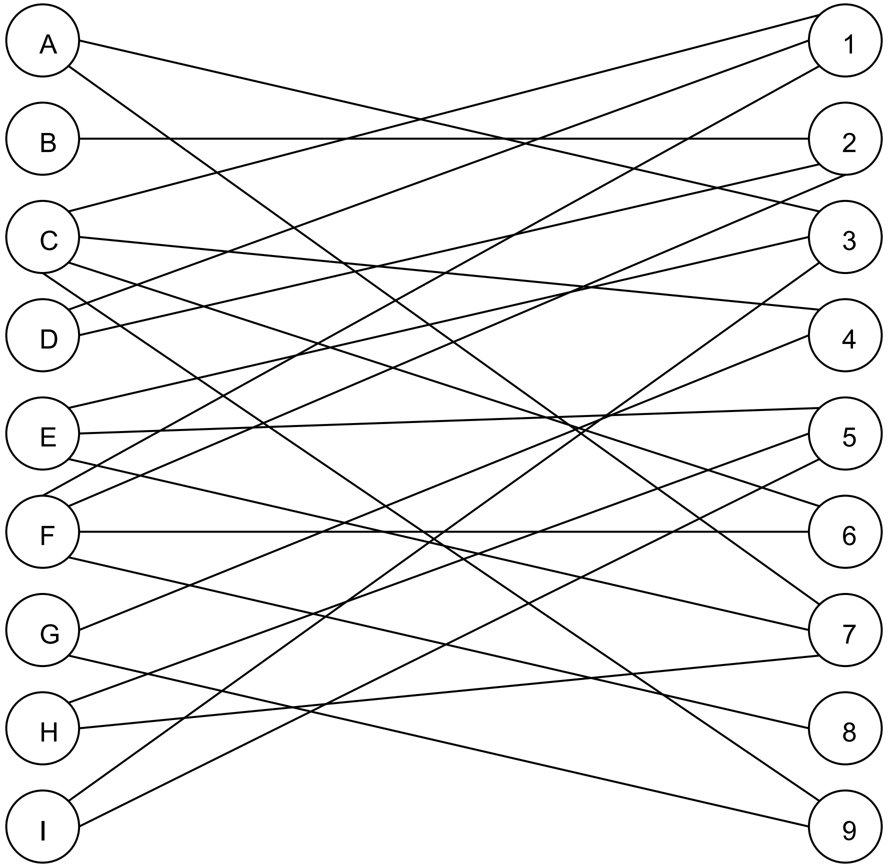
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

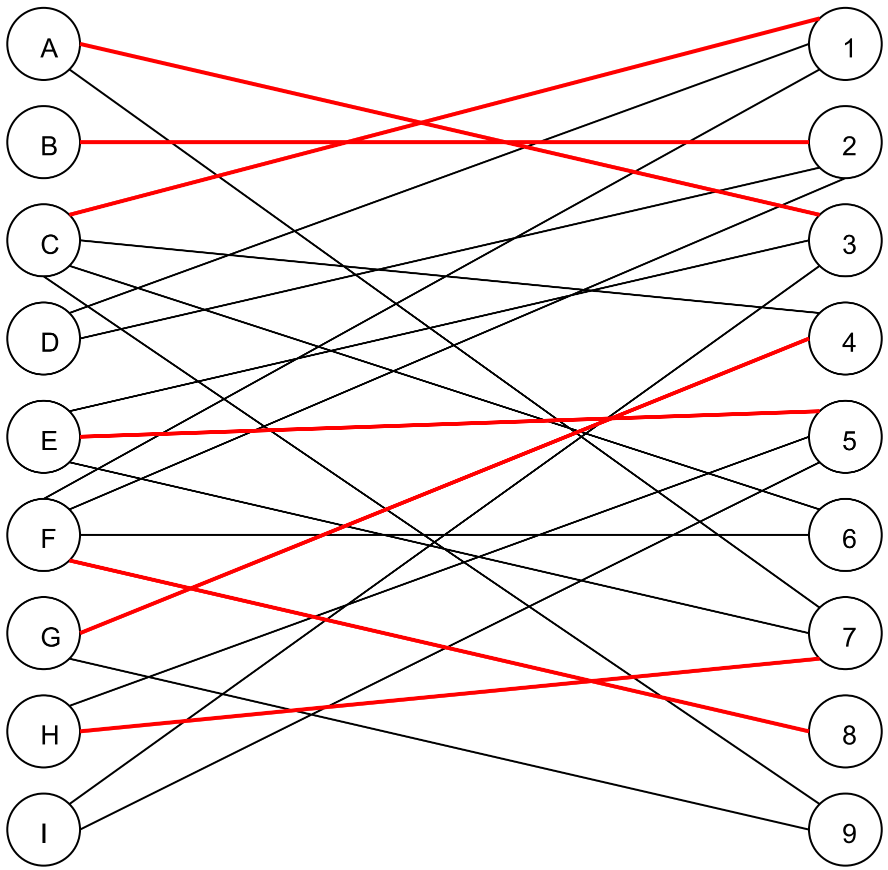
Problema da Designação de Tarefas

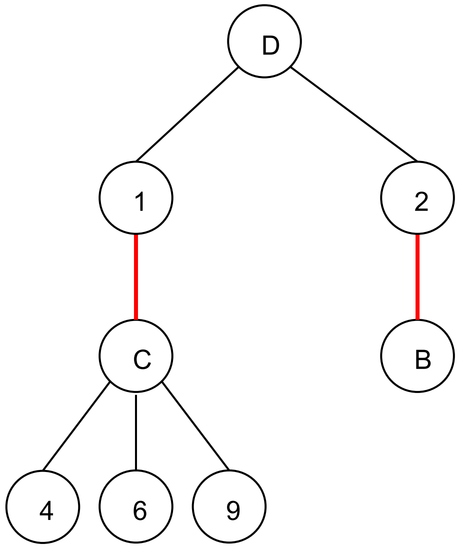
No problema da designação de tarefas temos *n* funcionários e *n* tarefas. Sabemos quais tarefas cada funcionário está apto a executar. Desejamos designar exatamente 1 tarefa para cada funcionário de modo que cada funcionário tenha que executar uma tarefa para a qual está habilitado.

Ex:

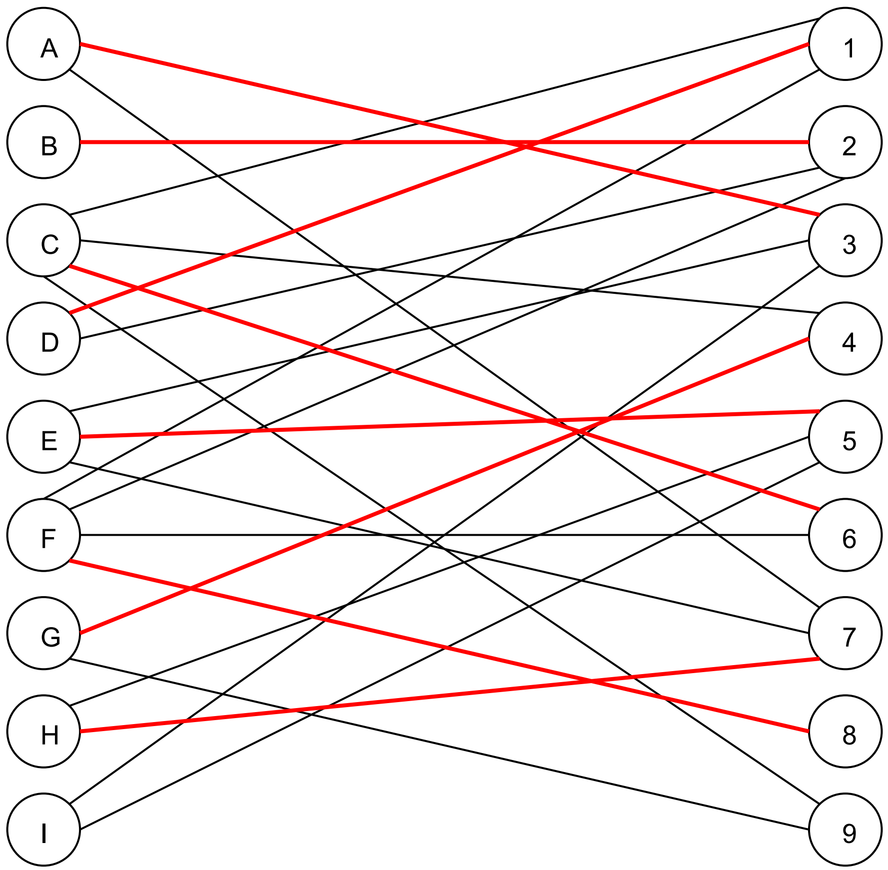
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ana			✓				✓		
Bel		✓							
Cid	✓			✓		✓			✓
Davi	✓	✓							
Eva			✓		✓		✓		
Fred	✓	✓				✓		✓	
Gil				✓					✓
Hugo					✓		✓		
Iara			✓		✓				

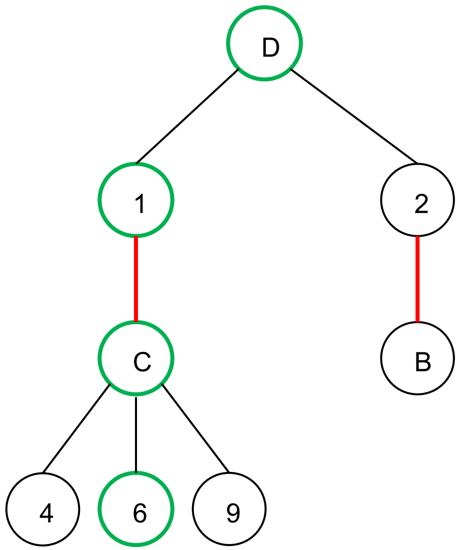



A
B
C
D
E
F
G
H
I
1
2
3
4
5
6
7
8
9


D
1
2
C
B
4
6
9

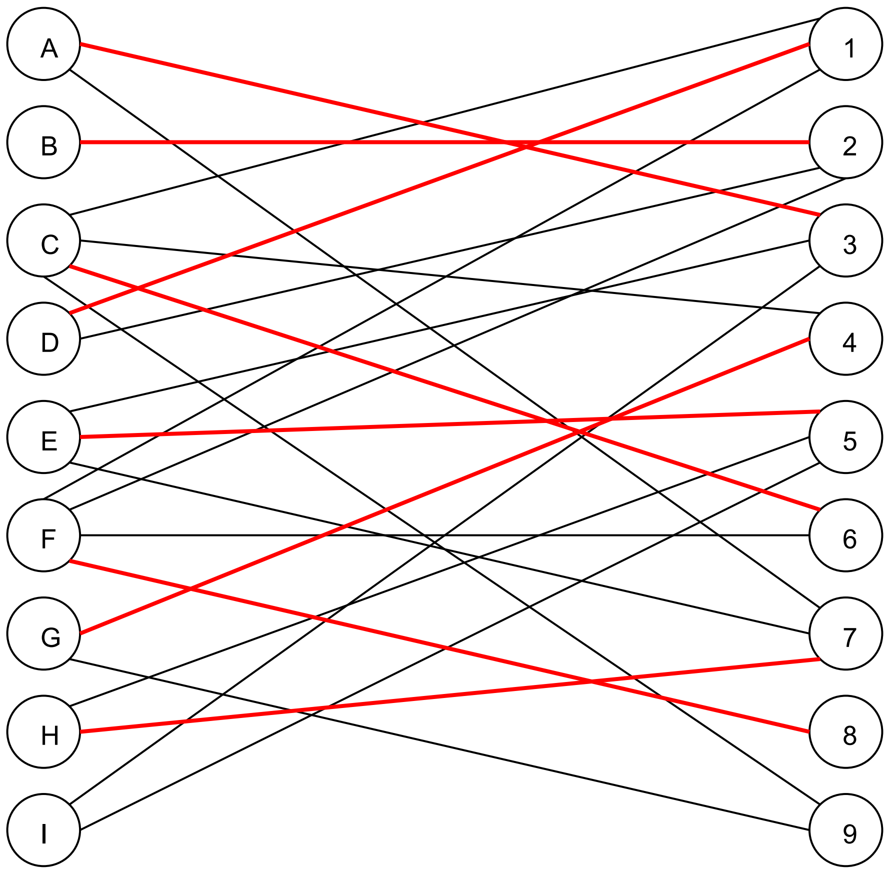
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

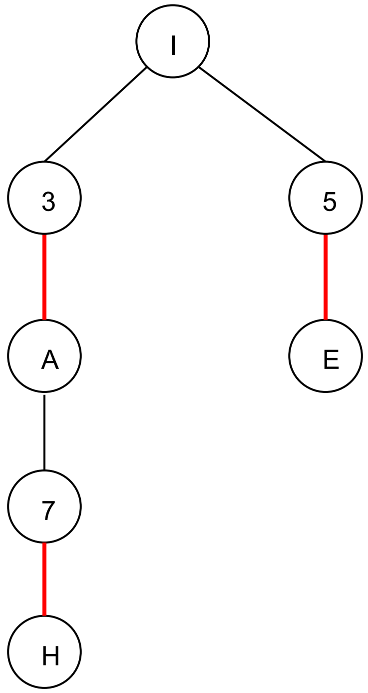




Usando o caminho *M*-aumentador

INSTITUTO FEDERAL
Ceará





$S = \{I, A, E, H\}$

$N(S) = \{3, 5, 7\}$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 17-06 -2021

Fluxos em Redes

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

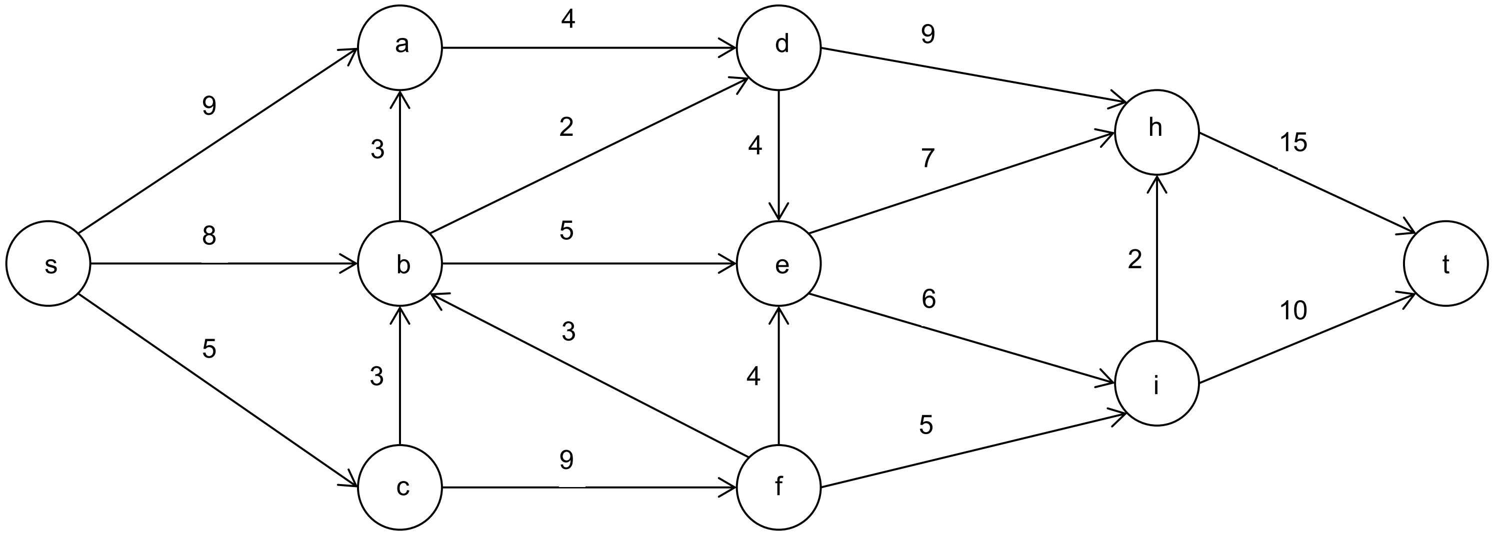
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Fluxos em Redes

Uma *rede* é um grafo dirigido com dois vértices especiais *s* (origem) e *t* (destino), no qual cada arco *i* possui uma capacidade de vazão c_i.



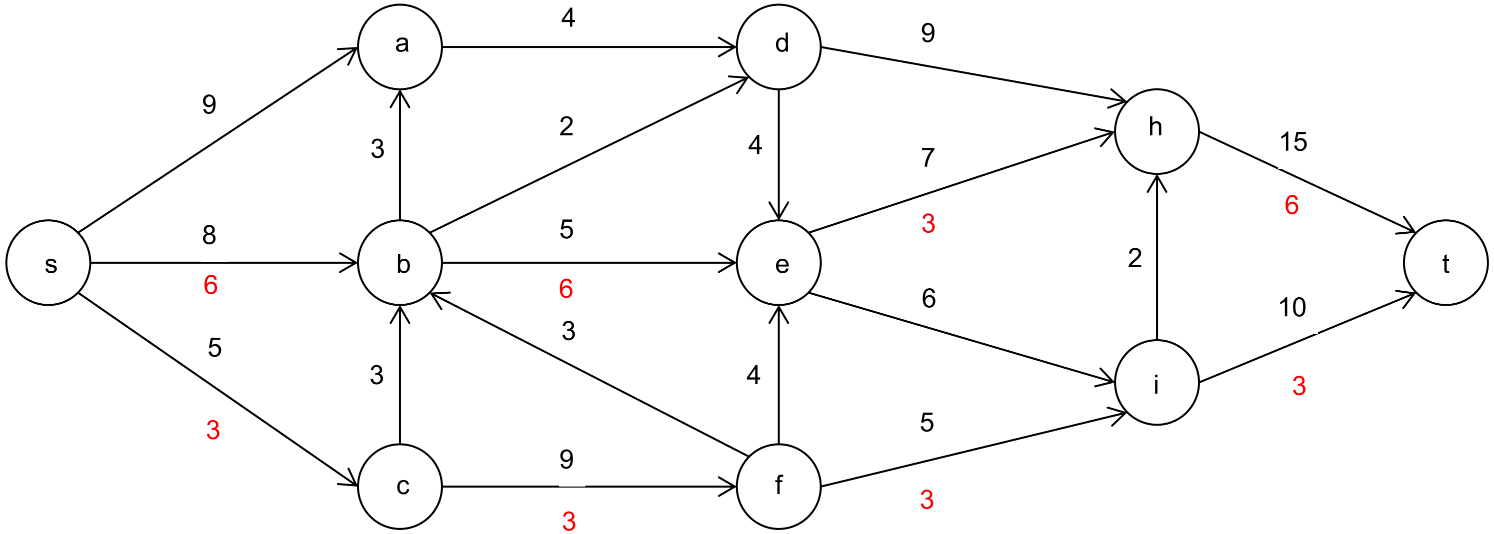
Denotamos por $\delta^+(v)$ o conjunto de todos os arcos que chegam em *v* e por $\delta^-(v)$ o conjunto de todos os arcos que saem de *v*.

Ex: $\delta^+(d) = \{\overrightarrow{ad}, \overrightarrow{bd}\}$, $\delta^-(d) = \{\overrightarrow{dh}, \overrightarrow{de}\}$

Um *fluxo* numa rede é uma atribuição de fluxo a cada um dos arcos da rede. Vamos denotar por f_i o fluxo no arco *i*. Um fluxo é viável se:

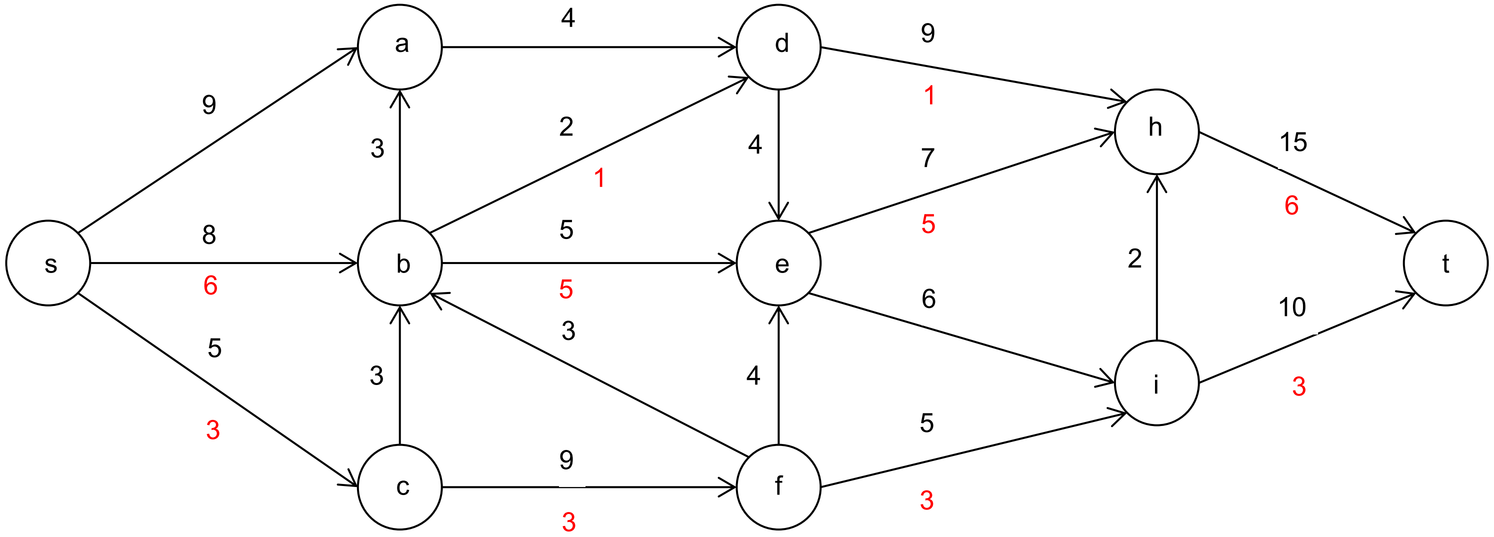
- Para todo arco *i*, $0 \leq f_i \leq c_i$
- Para todo vértice *v* (diferente de *s* e de *t*), $\sum_{i \in \delta^+(v)} f_i = \sum_{i \in \delta^-(v)} f_i$ (Lei de *Kirchoff*)

No exemplo a seguir os valores em vermelho representam os fluxos nos arcos, sendo que os arcos que não têm o fluxo indicado na figura têm fluxo 0.



Fluxo inviável

(a Lei de Kirchoff está sendo violada nos vértices *e* e *h*, e o fluxo no arco $\overrightarrow{be}$ excede sua capacidade)



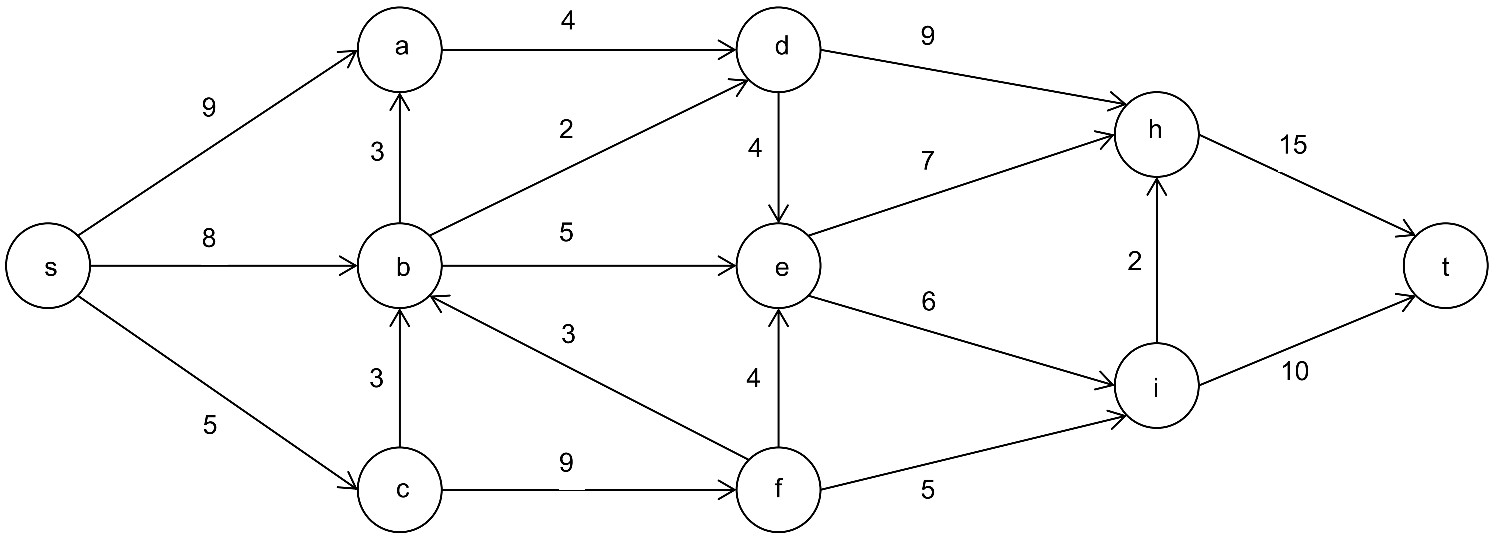
Fluxo viável

O *volume* de um fluxo *F*, denotado por *vol*(*F*), é definido como sendo:

$$vol(F) = \sum_{i \in \delta^-(s)} f_i - \sum_{i \in \delta^+(s)} f_i = \sum_{i \in \delta^+(t)} f_i - \sum_{i \in \delta^-(t)} f_i$$

Ex: o volume do fluxo do exemplo acima é 9.

Um (s, t)-*corte* numa rede é um conjunto de arcos cuja remoção desconecta s de t. A *capacidade* de um (s, t)-corte, denotada por $cap(C)$, é a soma das capacidades do arcos que compõem C.



Ex: $C = \{\overrightarrow{ht}, \overrightarrow{it}\}$

$cap(C) = 25$

Teorema: Se F é um fluxo viável e C é um (s, t)-corte então $vol(F) \leq cap(C)$.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 22-06-2021

Teorema de Ford-Fulkerson

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

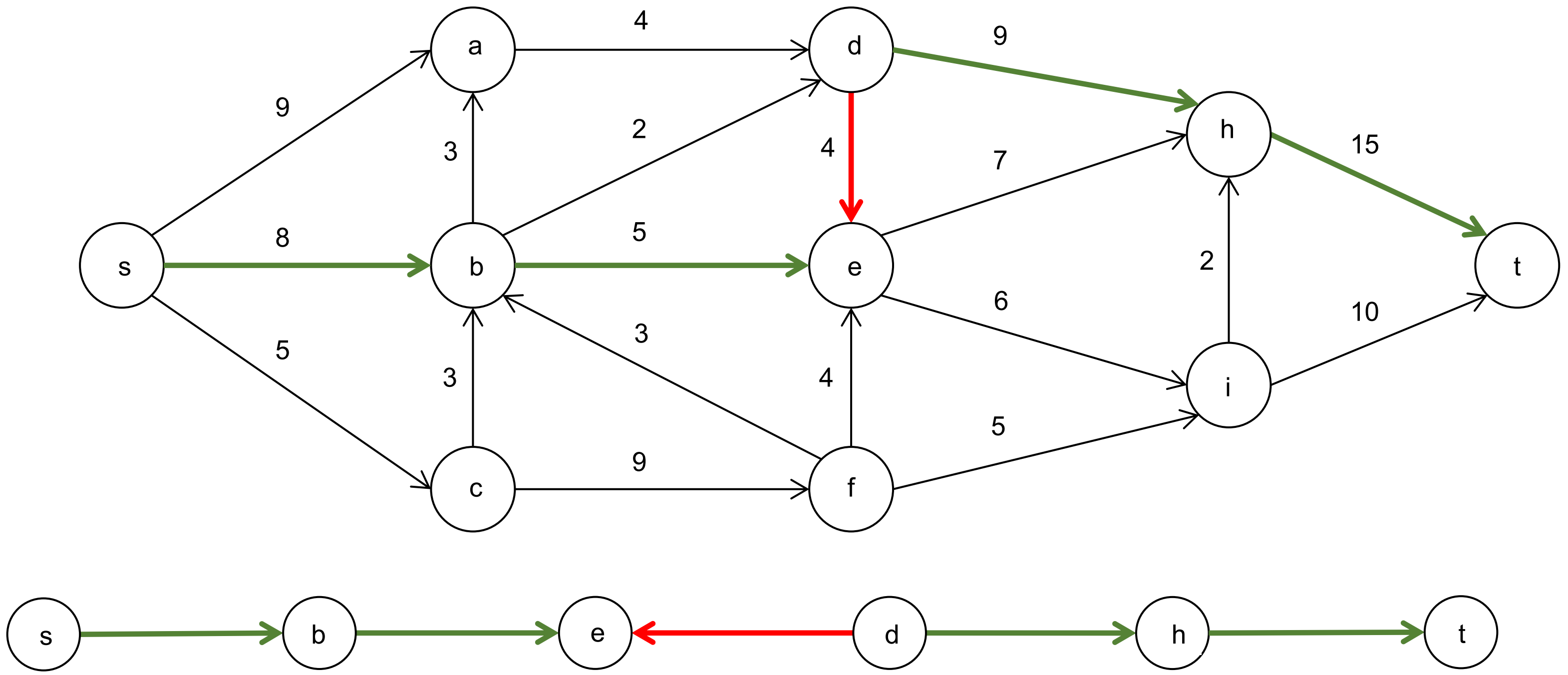
Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Teorema de Ford-Fulkerson

O Teorema de Ford-Fulkerson estabelece uma condição que é necessária e suficiente para que um fluxo possua volume máximo. Antes de enunciá-lo e prová-lo, precisamos de algumas definições.

Sejam *F* um fluxo viável e *p* um caminho (não necessariamente dirigido) de *s* a *t*. Dizemos que um arco de *p* *avança* se ele está na direção de *s* a *t* e dizemos que ele *recua* se está na direção de *t* a *s*.

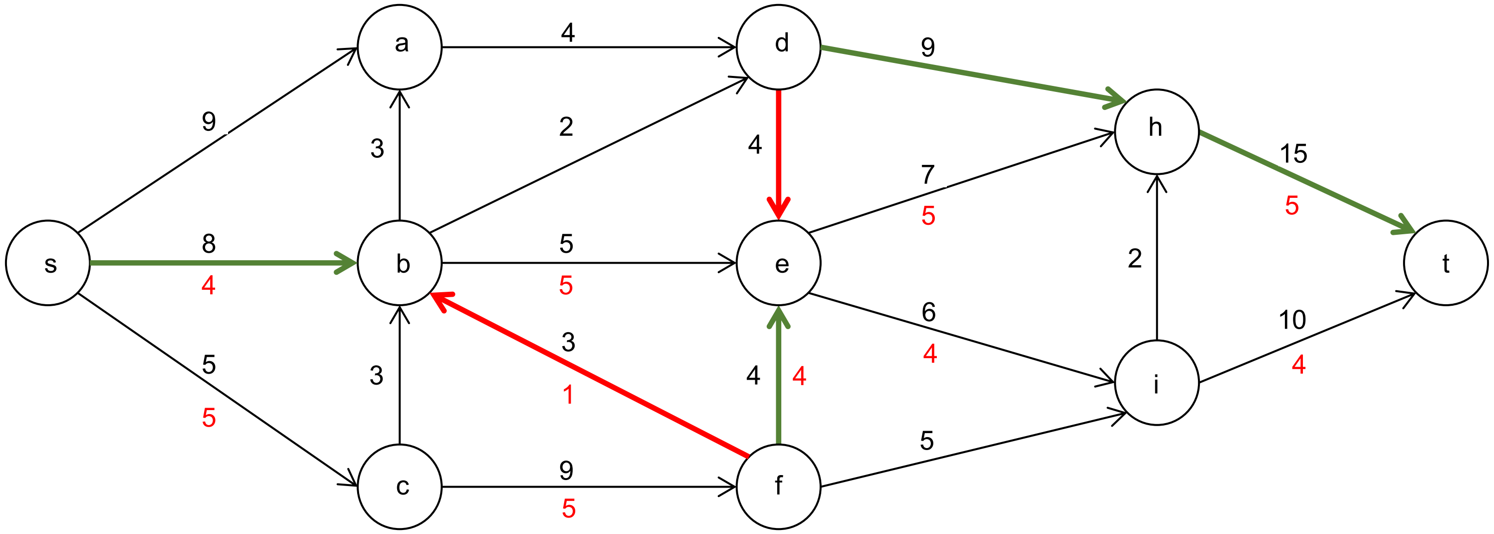
Ex:

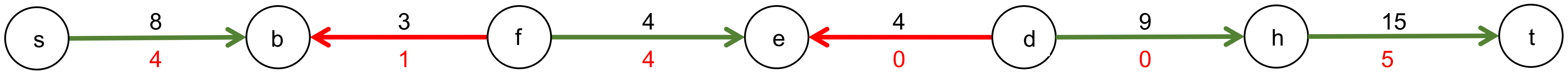


O arco $\overrightarrow{de}$ recua, os demais arcos avançam

Um arco *i* que avança está *saturado* se $f_i = c_i$. Um arco *i* que recua está *saturado* se $f_i = 0$.

Ex: os valores em vermelho representam os fluxos nos arcos, sendo que os arcos que não têm o fluxo indicado na figura têm fluxo 0.



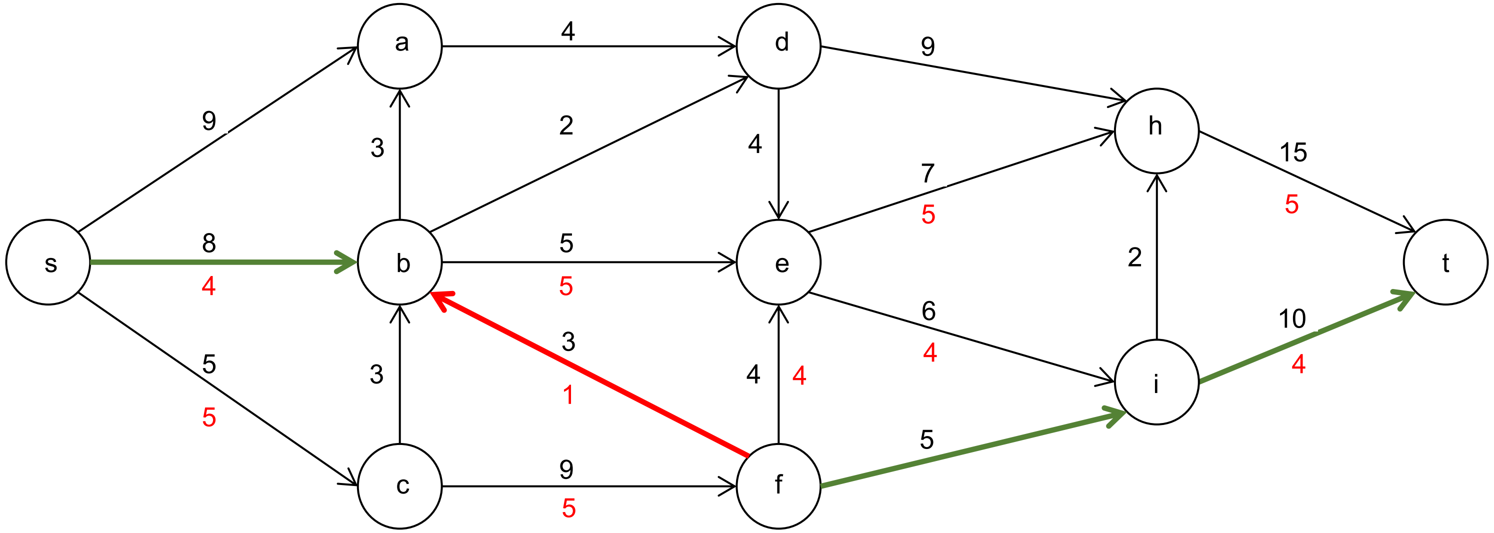


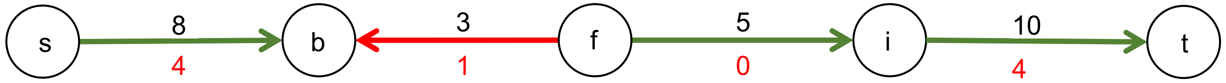
Os arcos $\overrightarrow{fe}$ e $\overrightarrow{de}$ estão saturados

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Um caminho (não necessariamente dirigido) de *s* a *t* é *F-aumentador* se nenhum de seus arcos está saturado.

Ex:





Caminho *F-aumentador*

Podemos usar um caminho *p* *F*-aumentador para aumentar o volume do fluxo *F*. Para isso devemos calcular:

$$\alpha = min(\{c_i - f_i \mid i \text{ é um arco de } p \text{ que avança}\} \cup \{+\infty\})$$
$$\beta = min(\{f_i \mid i \text{ é um arco de } p \text{ que recua}\} \cup \{+\infty\})$$
$$\lambda = min(\alpha, \beta)$$

Em seguida devemos acrescentar λ ao fluxo de todos os arcos de *p* que avançam e diminuir λ do fluxo de todos os arcos de *p* que recuam. Note que:

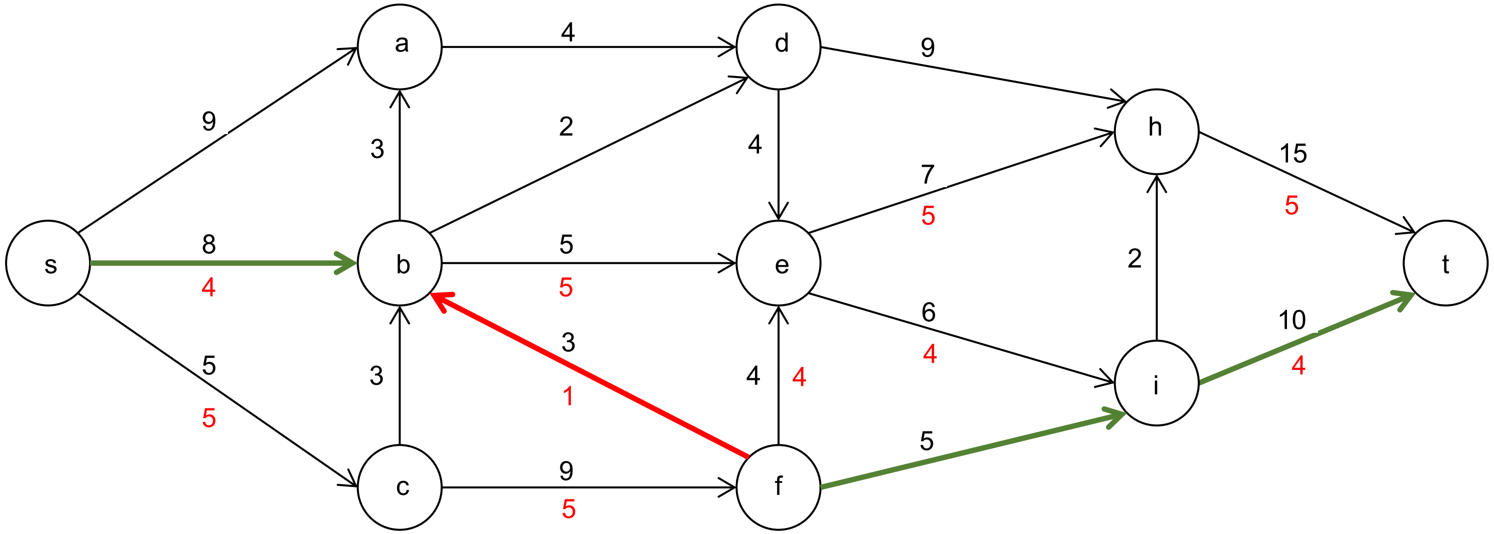
- Se *i* é um arco de *p* que avança: $f_i + \lambda \leq f_i + \alpha \leq f_i + c_i - f_i = c_i$
- Se *i* é um arco de *p* que recua: $f_i - \lambda \geq f_i - \beta \geq f_i - f_i = 0$

Além disso, se *v* é um vértice do interno de *p* temos quatro possibilidades:

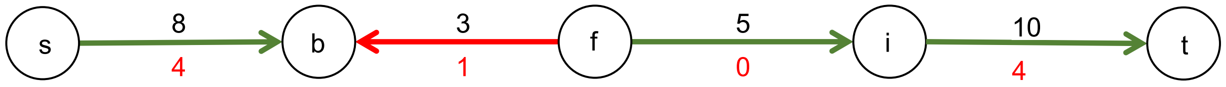
Assim, a Lei de Kirchoff continua sendo respeitada no vértice *v*. Concluímos que o novo fluxo *F* é viável e o aumento no volume é de λ. 😀

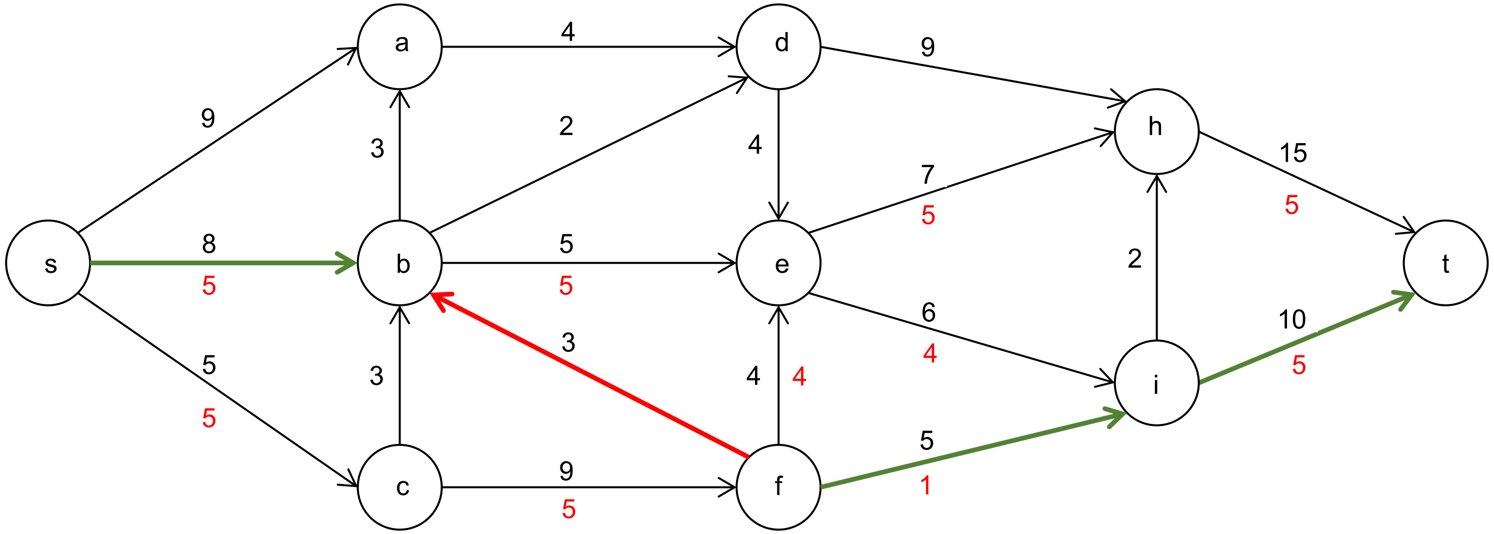
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex:



α = min({4, 5, 6, +∞}) = 4
β = min({1, +∞}) = 1
λ = min(4, 1) = 1





Novo fluxo *F*

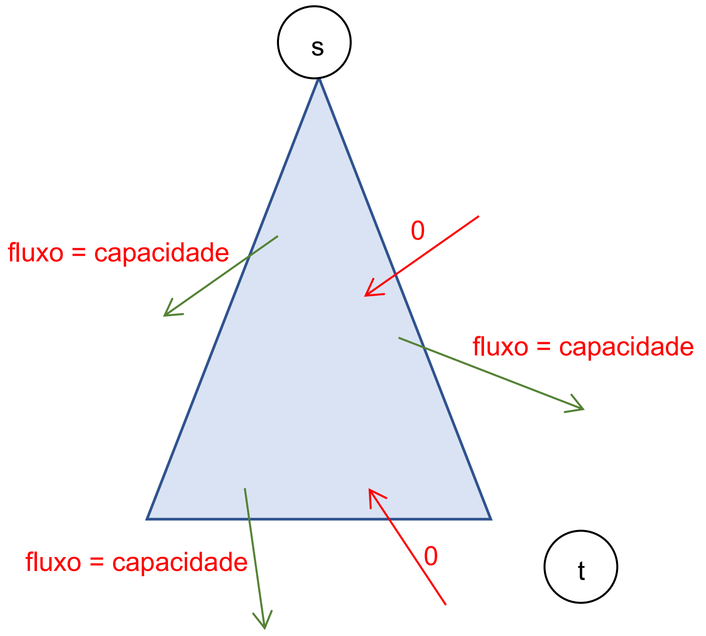
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Teorema de Ford-Fulkerson: Seja *F* um fluxo viável e *C* um (*s*, *t*)-corte. O vol(*F*) = cap(*C*) se e somente se *F* é um fluxo de volume máximo e *C* é um (*s*, *t*)-corte de capacidade mínima.

Prova: (⇒) Suponha que vol(*F*) = cap(*C*). Claramente, *F* tem volume máximo pois se existisse um fluxo *F* ' tal que vol(*F* ') > vol(*F*) então vol(*F* ') > cap(*C*). Analogamente, *C* é um (*s*, *t*)-corte de capacidade mínima pois se existisse um (*s*, *t*)-corte *C*' tal que cap(*C*) > cap(*C*') então vol(*F*) > cap(*C*').

(⇐) Suponha agora que *F* é um fluxo máximo e *C* é um (*s*, *t*)-corte mínimo. Queremos provar que vol(*F*) = cap(*C*).

Construa uma árvore *maximal* enraizada em *s* na qual todos os arcos sejam não saturados. Como o volume de *F* é máximo, tal árvore não contém um caminho *F*-aumentador e portanto *t* não faz parte da árvore.



Seja *A* o conjunto de todos os arcos que têm origem em um vértice da árvore e destino num vértice fora da árvore. Observe que os arcos de *A* estão saturados, por isso não fazem parte da árvore. Como eles estão na direção de *s* a *t*, o fluxo nesses arcos é igual à sua capacidade. Note ainda que *A* é um (*s*, *t*)-corte. Assim, $\sum_{i \in A} f_i = \sum_{i \in A} c_i =$ cap(*A*).

Seja *B* o conjunto de todos os arcos que têm origem em um vértice fora da árvore e destino num vértice da árvore. Os arcos de *B* estão saturados, por isso não fazem parte da árvore. Como eles estão na direção de *t* a *s*, o fluxo nesses arcos é 0. Assim, o vol(*F*) $= \sum_{i \in A} f_i - \sum_{i \in B} f_i = \sum_{i \in A} f_i = \sum_{i \in A} c_i =$ cap(*A*). Concluímos que *A* é um (*s*, *t*)-corte mínimo e portanto vol(*F*) = cap(*A*) = cap(*C*)■

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 24-06-2021

Algoritmo de Ford-Fulkerson

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

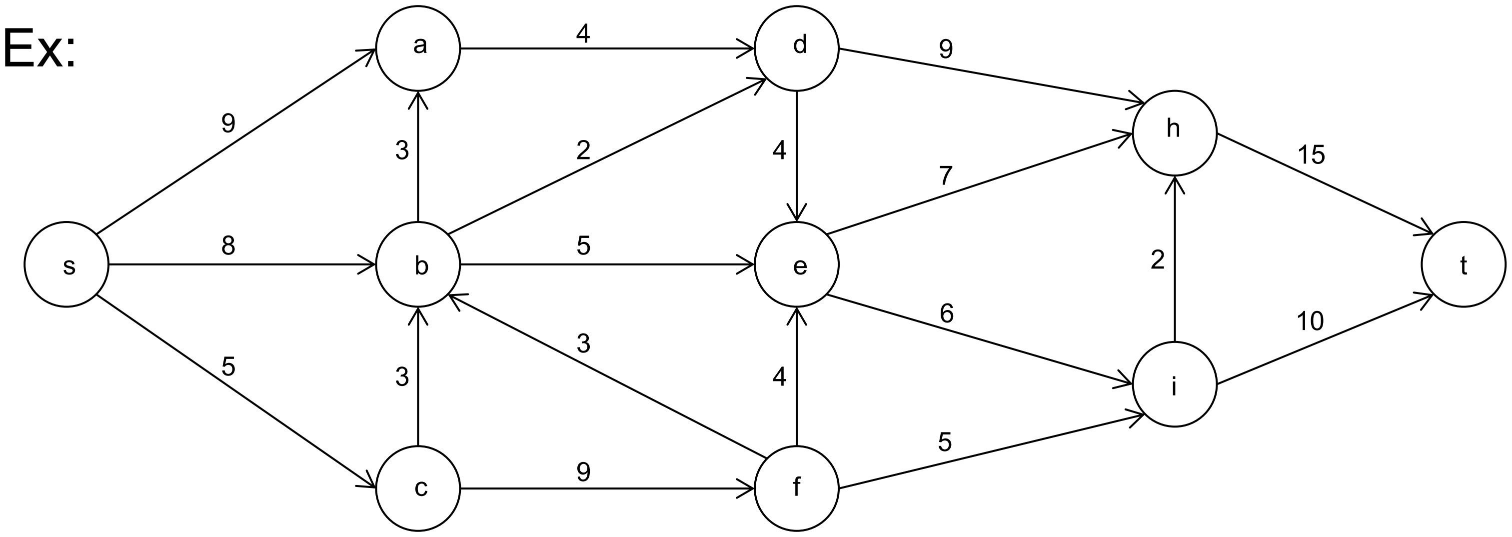
Algoritmo de Ford-Fulkerson

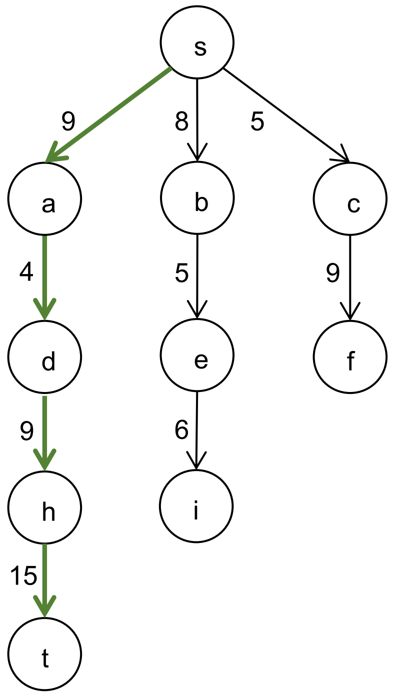
Entrada: Uma rede com n vértices e m arcos na qual cada arco i tem capacidade c_i
Saída: um fluxo máximo $F = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$ e um (s, t)-corte mínimo C

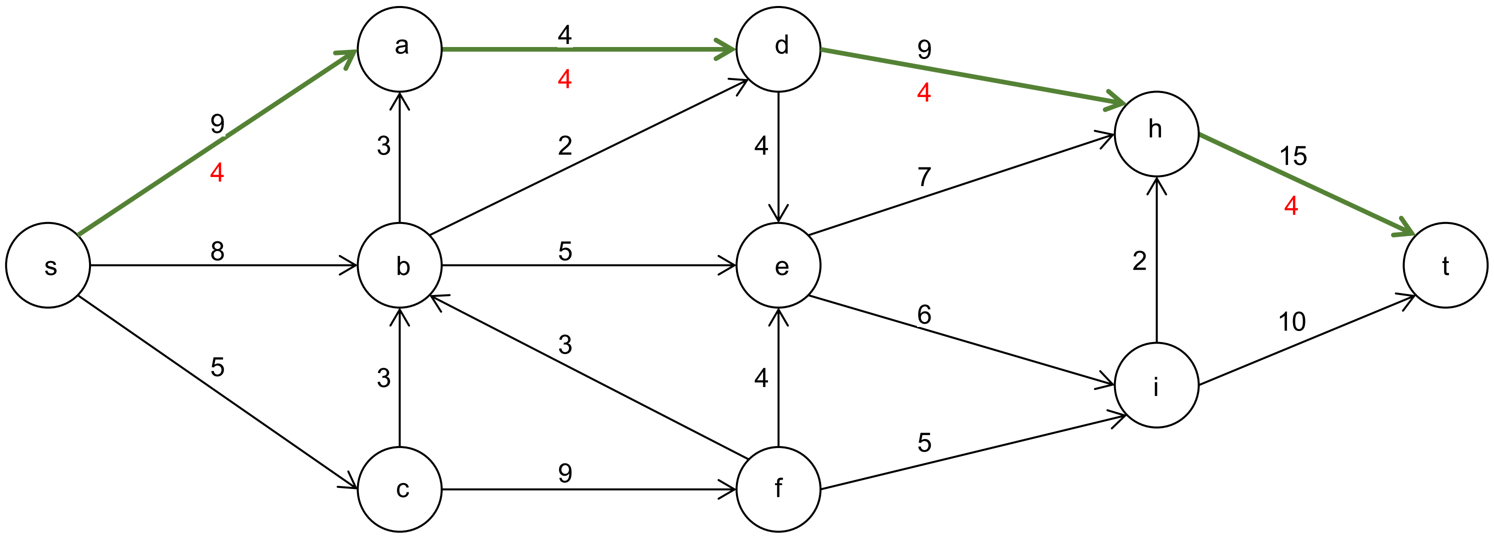
```
para i = 1 até m
    f_i = 0
faça
    construa uma árvore maximal enraizada em s na qual todos os arcos sejam não saturados
    se existir na árvore um caminho p que seja F-aumentador
        α = min({c_i – f_i | i é um arco de p que avança} ∪ {+∞})
        β = min({f_i | i é um arco de p que recua} ∪ {+∞})
        λ = min(α, β)
        para todo arco i ∈ p que avança
            f_i = f_i + λ
        para todo arco i ∈ p que recua
            f_i = f_i – λ
    se não
        C = {arcos que têm origem na árvore e destino fora da árvore}
        devolva F e C e pare
enquanto verdadeiro
```

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex:

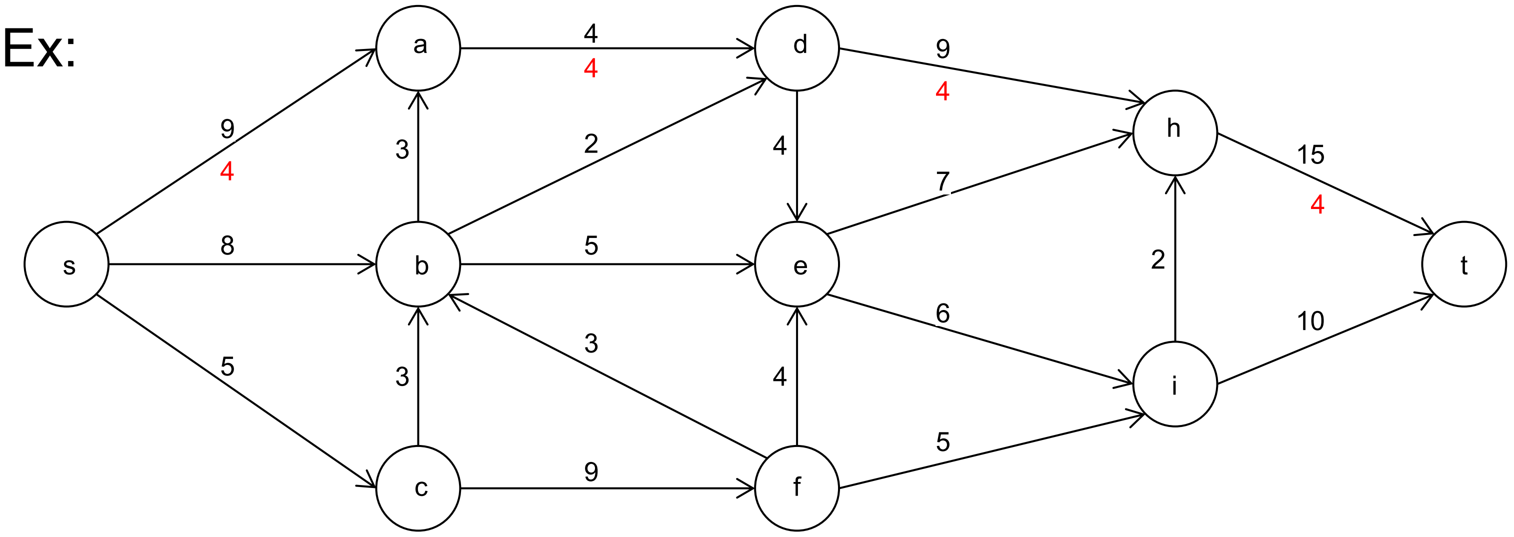


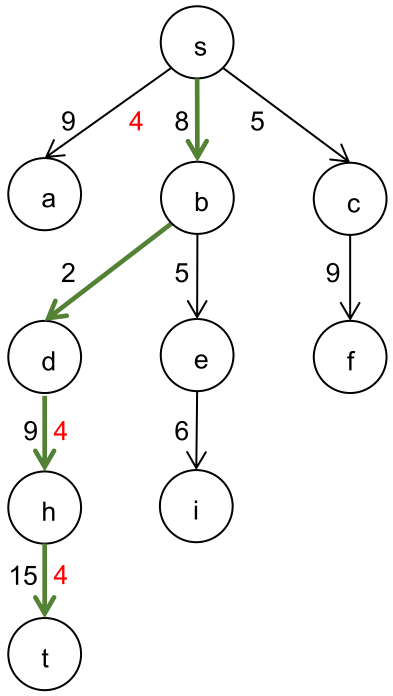


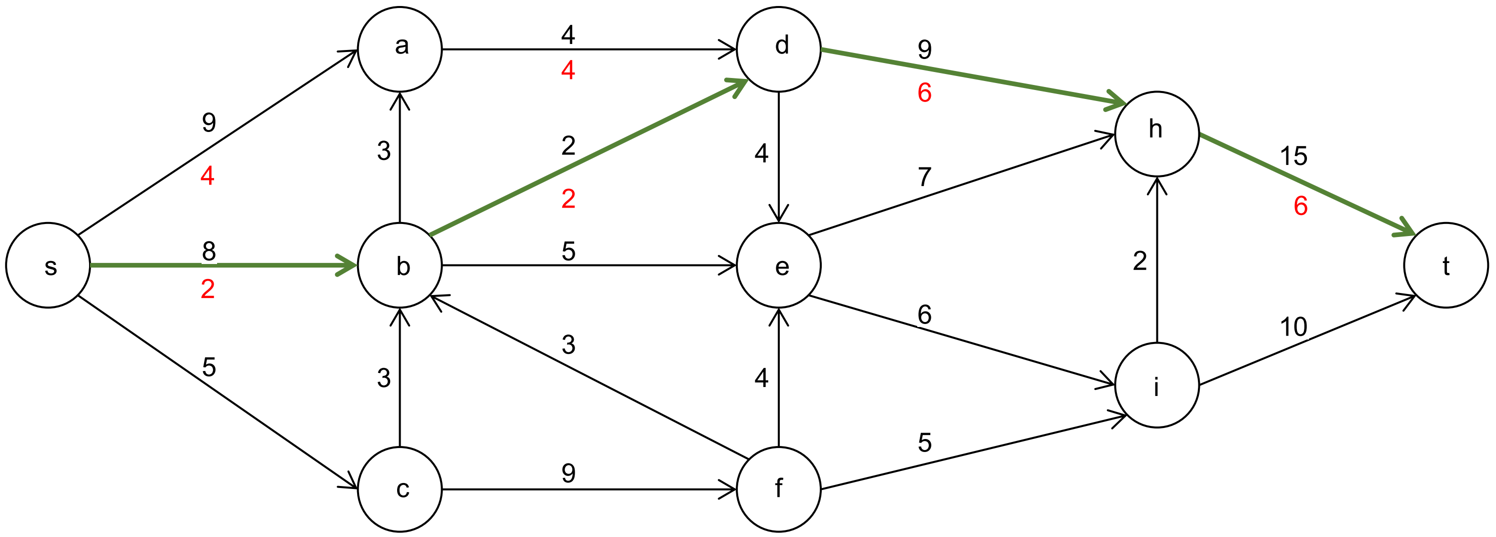


α = min({9, 4, 15, +∞}) = 4
β = min({+∞}) = +∞
λ = min(4, +∞) = 4
vol(F) = 4

Ex:

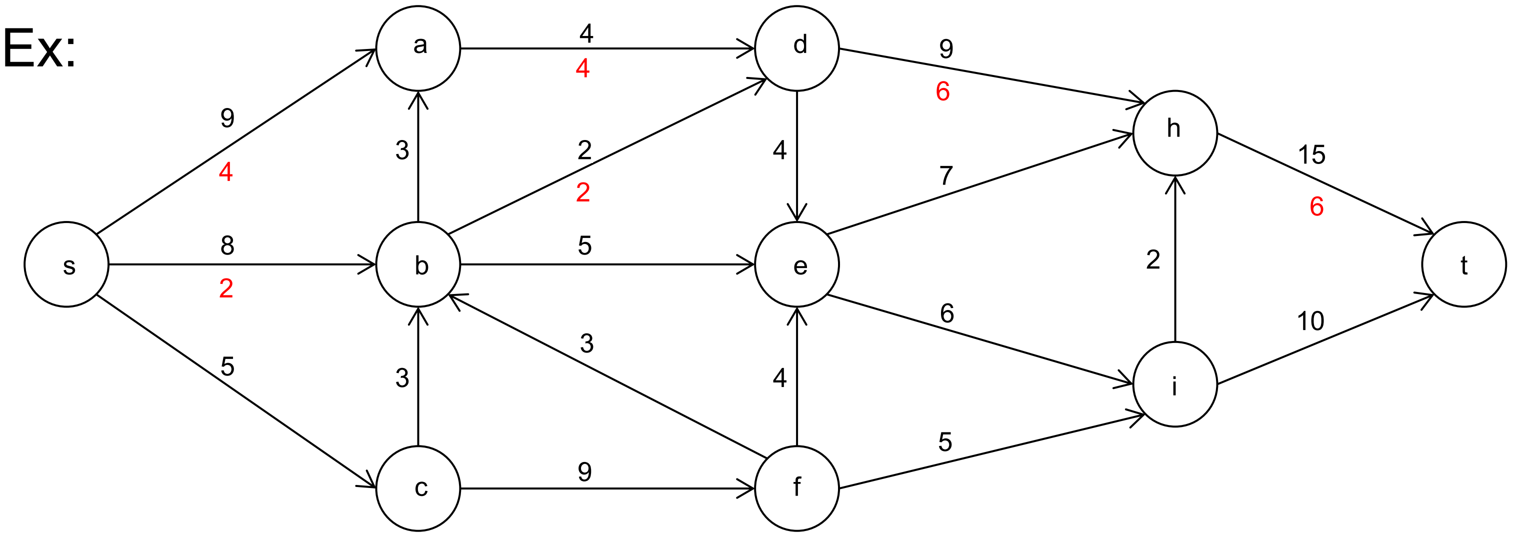


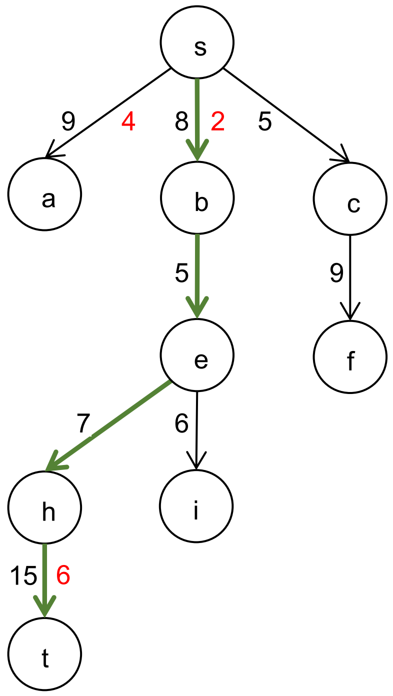


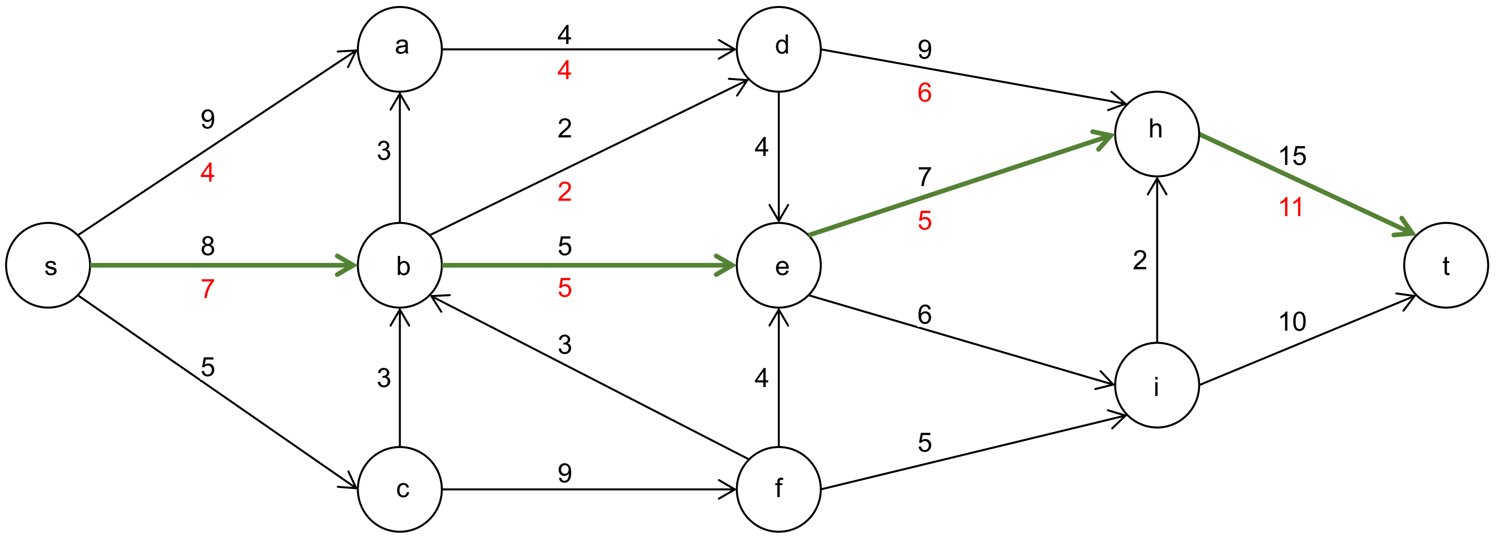


α = min({8, 2, 5, 11, +∞}) = 2
β = min({+∞}) = +∞
λ = min(2, +∞) = 2
vol(F) = 6

Ex:



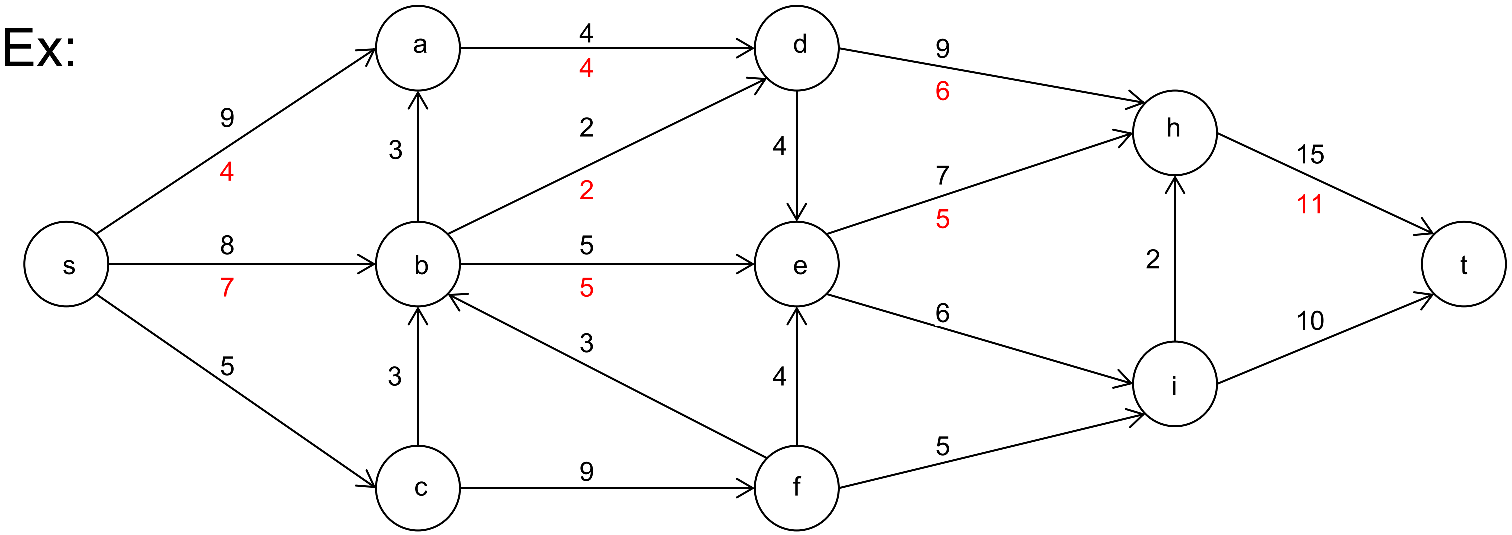


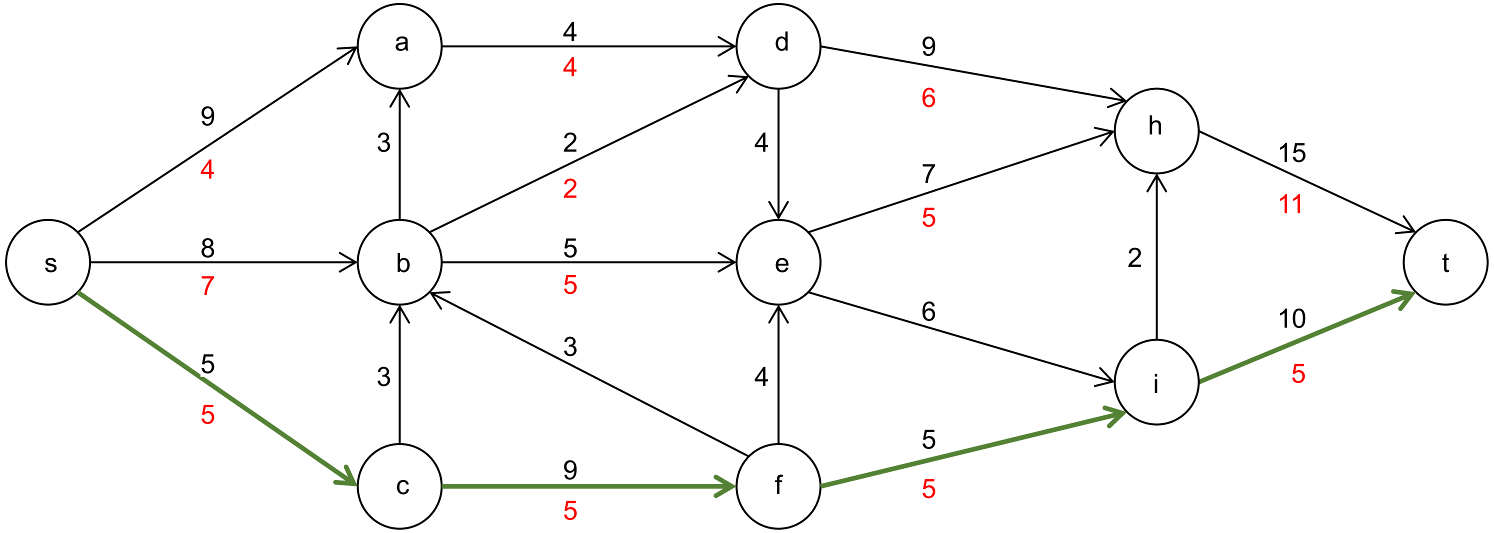


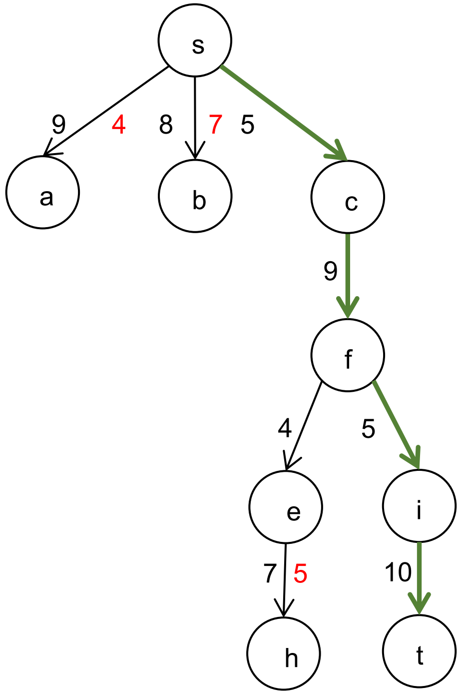
α = min({6, 5, 7, 9, +∞}) = 5
β = min({+∞}) = +∞
λ = min(5, +∞) = 5
vol(F) = 11

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex:







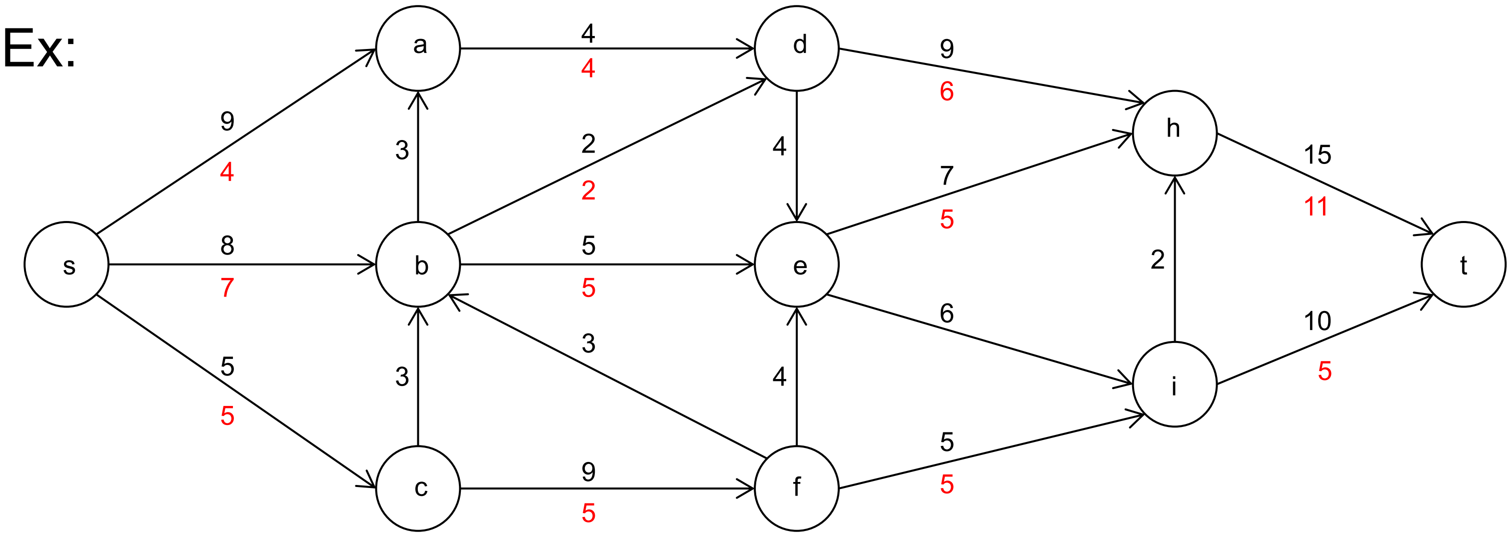
$\alpha = \min(\{5, 9, 10, +\infty\}) = 5$

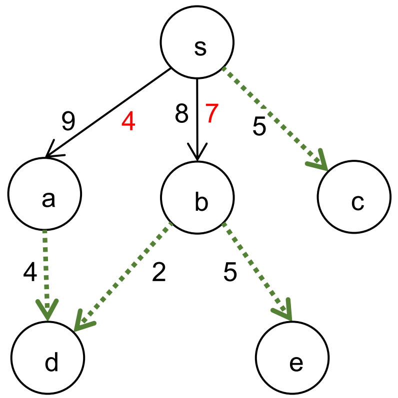
$\beta = \min(\{+\infty\}) = +\infty$

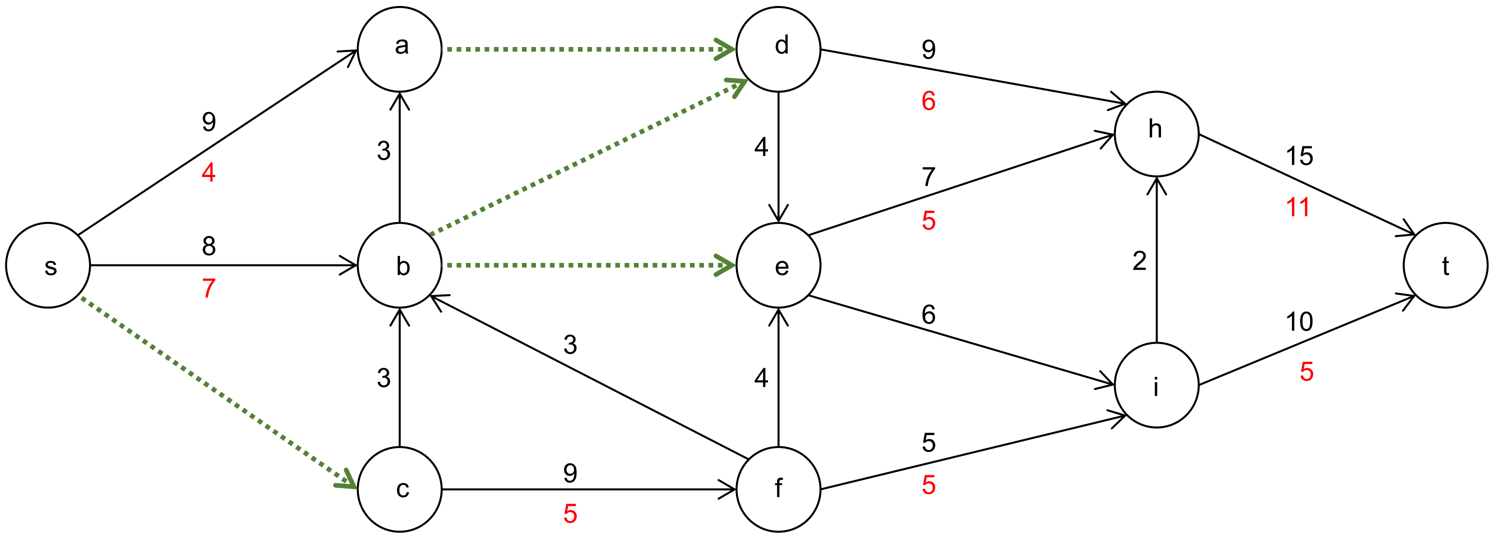
$\lambda = \min(5, +\infty) = 5$

$\mathrm{vol}(F) = 16$

Ex:







$C = \{\overrightarrow{sc}, \overrightarrow{ad}, \overrightarrow{bd}, \overrightarrow{be}\}$

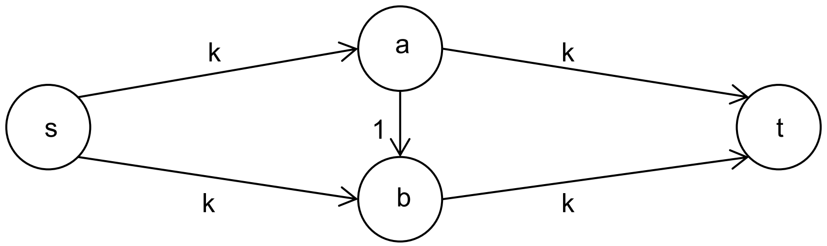
C é um (s, t)-corte

$\text{cap}(C) = 16$

$\text{vol}(F) = 16$

Edmonds e Karp mostraram que o Algoritmo de Ford-Fulkerson pode requerer tempo infinito, mas somente se existirem capacidades que sejam números irracionais. Como números irracionais não podem ser representados em computadores, qualquer implementação computacional do Algoritmo de Ford-Fulkerson irá requerer tempo finito.

Eles mostraram ainda que o Algoritmo de Ford-Fulkerson pode requerer tempo exponencial. Considere a instância abaixo. Claramente a solução ótima tem valor $2k$. No entanto, se o arco $\overrightarrow{ab}$ fizer parte de todos os caminhos aumentadores usados no algoritmo, serão necessárias $2k$ iterações.



Eles mostraram ainda que se o algoritmo for implementado de forma a encontrar em cada iteração o caminho aumentador mais curto o algoritmo irá requerer tempo $O(n^5)$. Para isso, em cada iteração é necessário construir a árvore em largura. Isso pode ser feito usando-se uma fila ao percorrer o digrafo.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 29-06-2021

Problema do Transporte

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

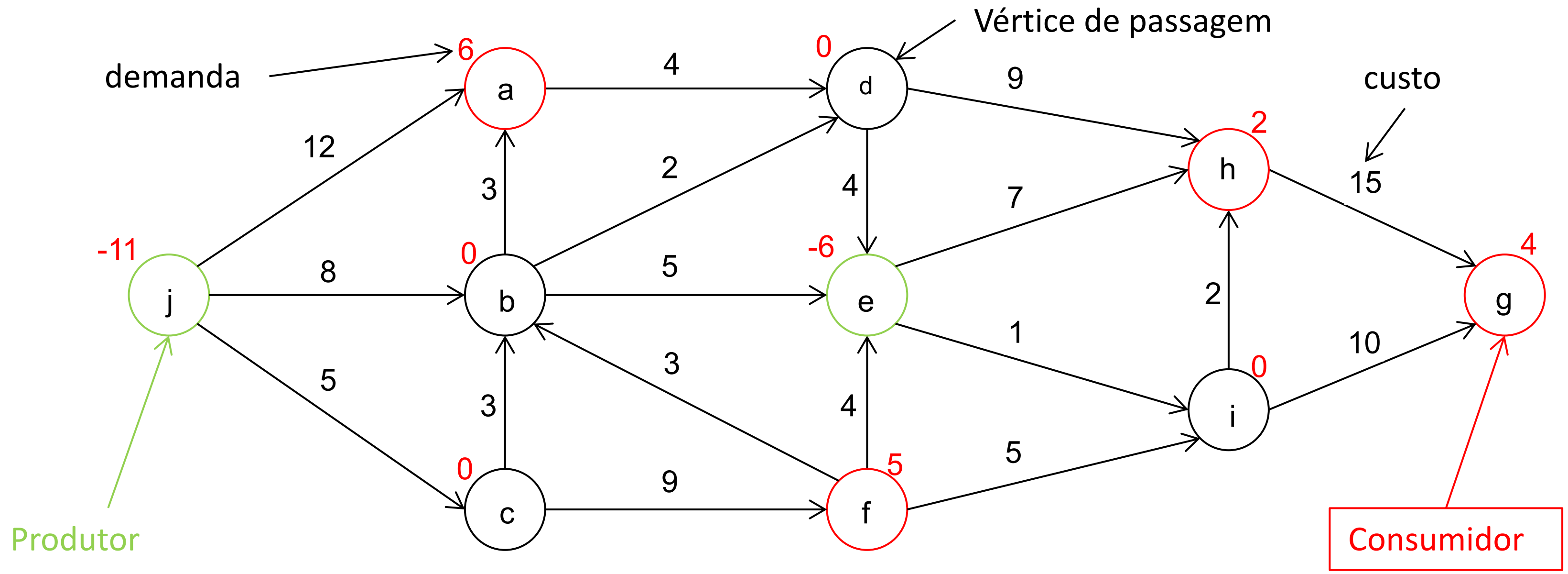
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Problema do Transporte

No Problema do Transporte (PT) temos um digrafo $\vec{G}$ no qual cada vértice v possui uma *demanda* d_v. Além disso, cada arco i possui um *custo* c_i.

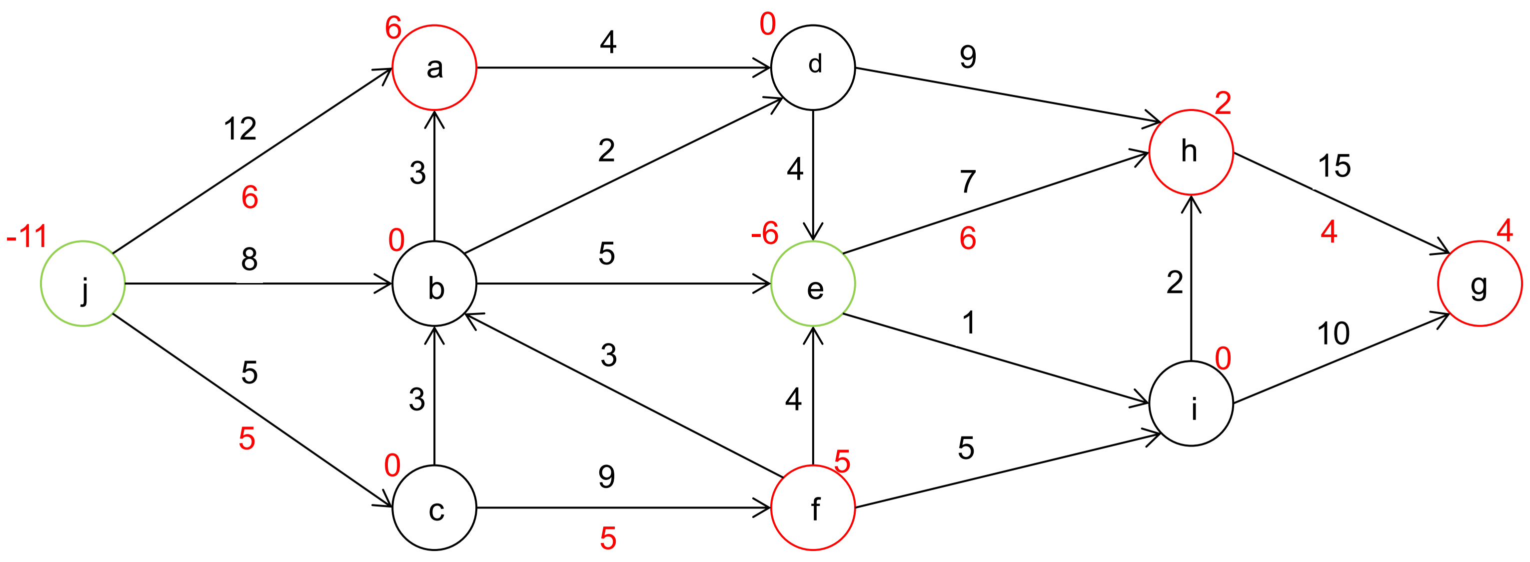
Se a demanda de um vértice é positiva ele é um *consumidor*, se é negativa ele é um vértice *produtor*, se é zero é um *vértice de passagem*.



O objetivo é determinar o fluxo em cada arco de modo a atender a demanda de cada vértice, de tal forma que o custo de transporte seja o menor possível. O custo do transporte é obtido multiplicando-se o fluxo em cada arco pelo custo do arco e somando o resultado das multiplicações.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Na figura abaixo temos um atribuição de fluxo aos arcos representada pelos valores vermelhos juntos aos arcos (os arcos sem valor vermelho têm fluxo 0).



Para que um fluxo seja viável é preciso que para todo vértice *v* de $\vec{G}$ tenhamos $\sum_{i\in\delta^+(v)} f_i - \sum_{i\in\delta^-(v)} f_i = d_v$.

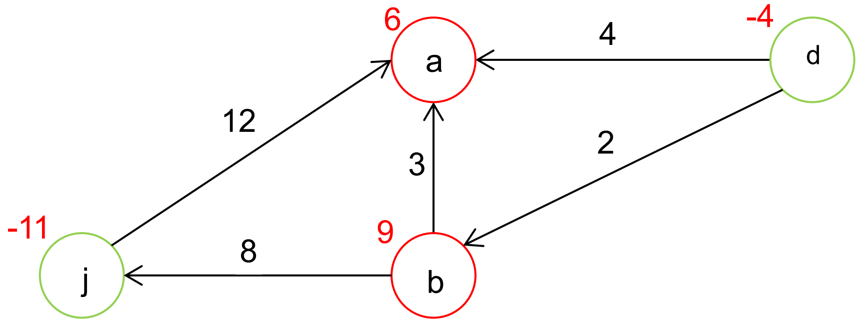
Observe que essa é uma solução viável, pois todos os vértices têm sua demanda atendida. O custo do transporte é 244. Esta solução é ótima?

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Para que uma instância do PT tenha solução é preciso que as seguintes condições sejam atendidas:

- Todo vértice produtor tem que ser origem de algum arco
- Todo vértice consumidor tem que ser destino de algum arco
- O somatório das demandas dos vértices de $\vec{G}$ tem que ser zero

No entanto, tais condições não são suficientes para garantir que a instância tenha solução. Veja o exemplo abaixo:



Para que uma instância do PT tenha solução é necessário e suficiente que para todo subconjunto *S* dos vértices de $\vec{G}$ as seguintes condições sejam atendidas:

- Se *S* é um *conjunto produtor*, ou seja $\sum_{v \in S} d_v < 0$, tem que existir um arco com origem num dos vértices de *S* e destino num vértice fora de *S*
- Se *S* é um *conjunto consumidor*, ou seja $\sum_{v \in S} d_v > 0$, tem que existir um arco com origem num vértice fora de *S* e destino num dos vértices de *S*

Infelizmente, não podemos verificar tais condições em tempo polinomial pois a quantidade de subconjuntos dos vértices de $\vec{G}$ é exponencial 😔

Podemos no entanto modelar o PT como sendo um problema de programação linear (PL)

$\min \sum_{\forall i} c_i f_i$ (função objetivo)

$\sum_{i \in \delta^+(v)} f_i - \sum_{i \in \delta^-(v)} f_i = d_v$, $\forall v \in \vec{G}$
$f_i \geq 0$, $\forall i \in \vec{G}$ (restrição de não-negatividade)

É possível resolver um PL é tempo polinomial 😄

Se o produto transportado no digrafo não pode ser fracionado, temos que exigir que f_i seja inteiro, para todo arco *i* do digrafo (restrição de integralidade). Temos então um *problema de programação linear inteira* (PLI):

$$\min \sum_{\forall i} c_i f_i$$

$$\sum_{i \in \delta^+(v)} f_i - \sum_{i \in \delta^-(v)} f_i = d_v, \forall v \in \vec{G}$$

$$f_i \geq 0 \text{ e inteiro}, \forall i \in \vec{G}$$

Em geral, resolver um PLI é um problema *NP-difícil* 😔

Teorema da Integralidade [Schrijver]: Seja $Ax \leq b$ um sistema de inequações lineares (SL). Se A é uma *matriz totalmente unimodular* (TU) e b é um vetor de inteiros, então todos os vértices do poliedro associado ao SL são *pontos reticulados*, ou seja, são pontos de coordenadas inteiras. 😳

Na formulação do PT como um PLI, a matriz de coeficientes é a matriz de incidências de $\vec{G}$ e tal matriz é TU.

Logo, podemos resolver o PLI como sendo um PL, o que pode ser feito em tempo polinomial 😄🎊🎉

Uma matriz é *totalmente unimodular* (TU) se o determinante de todas as suas submatrizes quadradas é 0, 1 ou -1.

Para mostrar que uma matriz é TU basta mostrar que todas as suas submatrizes quadradas de ordem 2 têm determinante 0, 1 ou -1.

Na matriz de incidências (MI) de um digrafo, todos os elementos são 0, 1 ou -1.

Se numa submatriz quadrada de ordem 2 da MI existir um 0 então seu determinante será 0, 1 ou -1.

$$\begin{bmatrix} 0 & \\ & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Temos ainda duas possibilidades: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Nas duas o determinante será 0, 1 ou -1, logo a MI de um digrafo é TU 😄

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Podemos usar o Solver do Excel para resolver instâncias (pequenas) do PT. Abaixo está a planilha com os dados e a configuração do Solver para resolver a instância que apresentamos anteriormente, cuja solução ótima tem valor 186.

U2 =SOMARPRODUTO(B2:S2;B$13:S$13)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	Vértice	ja	jb	jc	ad	ba	bd	be	cb	cf	dh	de	eh	ei	fe	fi	hg	ih	ig	Demanda	Total
2	a	1			-1	1														6	6
3	b		1			-1	-1	-1	1											0	0
4	c			1					-1	-1										0	0
5	d				1		1				-1	-1								0	0
6	e							1				1	-1	-1	1					-6	-6
7	f									1					-1	-1				5	5
8	g																1		1	4	4
9	h										1		1				-1	1		2	2
10	i													1		1		-1	-1	0	0
11	j	-1	-1	-1																-11	-11
12	Custo	12	8	5	4	3	2	5	3	9	9	4	7	1	4	5	15	2	10		186
13	Fluxo	0	6	5	0	6	0	0	0	5	0	0	0	6	0	0	0	2	4