INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 31-05-2021

Interpolação

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Interpolação

Um problema de grande importância prática é, dada uma função f e um valor x, calcular $f(x)$. Quando não conhecemos a forma analítica de f ou quando o cálculo de f é muito complicado podemos usar *métodos de interpolação* para encontrar uma *aproximação* para o valor de $f(x)$.

Para utilizar interpolação precisamos conhecer alguns pontos por onde passa a função. Seja f uma função que passa pelos pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, com $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ e $x_0 < x < x_n$. Devemos encontrar uma função f' que passa pelos pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ e usamos $f'(x)$ como uma aproximação para o valor de $f(x)$. Tal função f' é chamada de *função de interpolação*.

A função de interpolação pode ser uma função de diversos tipos: trigonométrica, logarítmica, exponencial, polinomial etc. Em nosso estudo usaremos apenas funções de interpolação polinomiais. Chamaremos a função de interpolação de *polinômio interpolador*.

Interpolação Linear

Para fazer interpolação linear precisamos conhecer os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) por onde passa a função f. Usamos o polinômio do primeiro grau $p_1(x) = ax + b$ que passa por (x_0, y_0), (x_1, y_1) como polinômio interpolador. Observe que:

$$\left.\begin{array}{l} p_1(x_0) = ax_0 + b = y_0 \\ p_1(x_1) = ax_1 + b = y_1 \end{array}\right\} SL$$

Resolvendo o sistema linear acima podemos obter os coeficientes do polinômio interpolador.

Ex: Estime o valor de $\text{sen}(\pi/5)$ usando interpolação linear baseada nos pontos da tabela a seguir.

x_i	$\text{sen}(x_i)$
0	0
$\pi/2$	1

$p_1(0) = a.0 + b = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 0$

$p_1(\pi/2) = a.\pi/2 + b = 1 \quad \Longrightarrow \quad a.\pi/2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = 2/\pi$

$p_1(x) = 2/\pi\ x$

$p_1(\pi/5) = 2/\pi\ .\ \pi/5 = 0{,}4$

Obs: $\text{sen}(\pi/5) \cong 0{,}587785252292473$ 😕

Interpolação Quadrática

Na interpolação quadrática conhecemos os pontos (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_2, y_2) por onde passa f. Usamos o polinômio do segundo grau $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ que passa por esses pontos como polinômio interpolador. Note que:

$$\left.\begin{aligned} p_2(x_0) &= ax_0^{\,2} + bx_0 + c = y_0 \\ p_2(x_1) &= ax_1^{\,2} + bx_1 + c = y_1 \\ p_2(x_2) &= ax_2^{\,2} + bx_2 + c = y_2 \end{aligned}\right\} SL$$

Resolvendo o sistema linear acima obtemos os coeficientes do polinômio interpolador.

Ex: Estime o valor de $\text{sen}(\pi/5)$ usando interpolação quadrática baseada nos pontos da tabela a seguir.

x_i	$\text{sen}(x_i)$
0	0
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$	1

$p_2(0) = a.0^2 + b.0 + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = 0$

$p_2(\pi/4) = a.(\pi/4)^2 + b.\pi/4 + c = \sqrt{2}/2 \quad \Longrightarrow a.\pi^2/16 + b.\pi/4 = \sqrt{2}/2 \ (\text{x} \, \text{-}2) \quad \Longrightarrow \ \text{-}a.\pi^2/8 - b.\pi/2 = \text{-}\sqrt{2}$

$p_2(\pi/2) = a.(\pi/2)^2 + b.\pi/2 + c = 1 \quad \Longrightarrow \quad a.\pi^2/4 + b.\pi/2 = 1$

$a.\pi^2/8 = 1 - \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad a = (8 - 8\sqrt{2})/\pi^2 \quad \Longrightarrow \quad a \cong \text{-}0{,}335749$

$\text{-}0{,}335749.\pi^2/4 + b.\pi/2 \cong 1 \quad \Longrightarrow \quad b.\pi/2 \cong 1 + 0{,}335749.\pi^2/4 \quad \Longrightarrow \quad b \cong 1{,}164013$

$p_2(x) \cong -0{,}335749x^2 + 1{,}164013x$

$p_2(\pi/5) \cong -0{,}335749.(\pi/5)^2 + 1{,}164013.\pi/5 \cong 0{,}598823$ 🙂

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Interpolação Polinomial

Na interpolação polinomial conhecemos os pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ por onde passa f. Usamos o polinômio de grau n $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ que passa por esses pontos como polinômio interpolador. Note que:

$$\left.\begin{aligned} p_n(x_0) &= a_n x_0^{\,n} + a_{n-1}x_0^{\,n-1} + ... + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ p_n(x_1) &= a_n x_1^{\,n} + a_{n-1}x_1^{\,n-1} + ... + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ &\;... \\ p_n(x_n) &= a_n x_n^{\,n} + a_{n-1}x_n^{\,n-1} + ... + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{aligned}\right\} SL$$

Resolvendo o sistema linear acima obtemos os coeficientes do polinômio interpolador. A matriz de coeficientes desse SL, também chamada de *Matriz de Vandermonde*, é:

$$\begin{bmatrix} {x_0}^n & {x_0}^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ {x_1}^n & {x_1}^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {x_n}^n & {x_n}^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

Ex: Estime o valor de sen($^{\pi}/_{5}$) usando interpolação polinomial baseada nos pontos da tabela a seguir.

x_i	sen(x_i)
0	0
$^{\pi}/_{6}$	0,5
$^{\pi}/_{4}$	$^{\sqrt{2}}/_{2}$
$^{\pi}/_{2}$	1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & ^{\pi}/_{6} & (^{\pi}/_{6})^2 & (^{\pi}/_{6})^3 & 0{,}5 \\ 1 & ^{\pi}/_{4} & (^{\pi}/_{4})^2 & (^{\pi}/_{4})^3 & ^{\sqrt{2}}/_{2} \\ 1 & ^{\pi}/_{2} & (^{\pi}/_{2})^2 & (^{\pi}/_{2})^3 & 1 \end{bmatrix}$$

$a_0 = 0$

$$\begin{bmatrix} ^{\pi}/_{6} & (^{\pi}/_{6})^2 & (^{\pi}/_{6})^3 & 0{,}5 \\ ^{\pi}/_{4} & (^{\pi}/_{4})^2 & (^{\pi}/_{4})^3 & ^{\sqrt{2}}/_{2} \\ ^{\pi}/_{2} & (^{\pi}/_{2})^2 & (^{\pi}/_{2})^3 & 1 \end{bmatrix}$$

$a_1 \cong 1{,}014228$, $a_2 \cong -0{,}049681$, $a_3 \cong -0{,}121411$

$p_3(x) \cong -0{,}121411x^3 - 0{,}049681x^2 + 1{,}014228x$

$p_3(^{\pi}/_{5}) \cong -0{,}121411.(^{\pi}/_{5})^3 - 0{,}049681.(^{\pi}/_{5})^2 + 1{,}014228.^{\pi}/_{5} \cong 0{,}58752895$

Obs: sen($^{\pi}/_{5}$) $\cong$ 0,587785252292473 😀

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Erro de Truncamento

O erro de truncamento da interpolação polinomial pode ser estimado usando-se a seguinte fórmula:

$E_T(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\frac{f^{n+1}(\epsilon)}{(n+1)!}$, onde $x_0 \leq \epsilon \leq x_n$.

Ex: O erro de truncamento ao usar interpolação polinomial com os pontos da tabela a seguir para calcular $\mathrm{sen}(\pi/_5)$ é:

$$E_T\left(\pi/_5\right) = (\pi/_5 - 0)(\pi/_5 - \pi/_6)(\pi/_5 - \pi/_4)(\pi/_5 - \pi/_2)\frac{\mathrm{sen}(\epsilon)}{4!}$$

$$E_T\left(\pi/_5\right) = \pi/_5 \cdot \pi/_{30} \cdot - \pi/_{20} \cdot - 3\pi/_{10}\,\frac{\mathrm{sen}(\epsilon)}{24}$$

$$E_T\left(\pi/_5\right) = \pi^4/_{10000}\,\frac{\mathrm{sen}(\epsilon)}{24} \leq \pi^4/_{240000} \cong 0{,}000406$$

x_i	$\mathrm{sen}(x_i)$
0	0
$\pi/_6$	0,5
$\pi/_4$	$\sqrt{2}/_2$
$\pi/_2$	1

Obs: $\mathrm{sen}(\pi/_5) - p_3(\pi/_5) = 0{,}587785252292473 - 0{,}58752895 \cong 0{,}000256$ ✅

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 07-06-2021

Fórmula de Lagrange

Prof: Glauber Cintra
glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Fórmula de Lagrange

É possível calcular $p_n(x)$ usando a Fórmula de Lagrange. Tal fórmula é obtida a partir dos *Polinômios de Lagrange*, conforme explicado nas páginas 165 a 167 do livro.

$L_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_n)$
$L_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_n)$
...
$L_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n-1})$

Para $j \neq i$, qual o valor de $L_i(x_j)$? $L_i(x_j) = 0$
E qual o valor de $L_i(x_i)$? $L_i(x_i) \neq 0$

Como os polinômios de Lagrange têm grau n, podemos escrever o polinômio interpolador como uma combinação linear dos polinômios de Lagrange:

$$p_n(x) = b_0 \,.\, L_0(x) + b_1 \,.\, L_1(x) + ... + b_n \,.\, L_n(x)$$

Note que $p_n(x_i) = b_0 \,.\, L_0(x_i) + b_1 \,.\, L_1(x_i) + ... + b_n \,.\, L_n(x_i) = b_i \,.\, L_i(x_i) \implies b_i = p_n(x_i) / L_i(x_i) = y_i / L_i(x_i)$

$p_n(x) = b_0 \,.\, L_0(x) + b_1 \,.\, L_1(x) + \ldots + b_n \,.\, L_n(x)$

Como $b_i = y_i / L_i(x_i)$ temos:

$$p_n(x) = \frac{y_0}{L_0(x_0)} . L_0(x) + \frac{y_1}{L_1(x_1)} . L_1(x) + \cdots + \frac{y_n}{L_n(x_n)} . L_n(x)$$

A Fórmula de Lagrange é:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i \frac{L_i(x)}{L_i(x_i)} \right)$$

Por exemplo: $p_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

O cálculo da Fórmula de Lagrange requer tempo da ordem de n^2 😀

Ex: Estime a população da cidade de Belo Horizonte em 1975 aplicando a Fórmula de Lagrange aos pontos da tabela a seguir.

Ano	**População**
1950	352.724
1960	683.908
1970	1.235.030
1980	1.814.990

	x_0 = 1950	**x_1 = 1960**	**x_2 = 1970**	**x_3 = 1980**	**prod**
x = 1975	dif_0 = 25	dif_1 = 15	dif_2 = 5	dif_3 = -5	$prod_x$ = -9375
x_0 = 1950		-10	-20	-30	$prod_0$ = -6000
x_1 = 1960	10		-10	-20	$prod_1$ = 2000
x_2 = 1970	20	10		-10	$prod_2$ = -2000
x_3 = 1980	30	20	10		$prod_3$ = 6000

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex: Estime a população da cidade de Belo Horizonte em 1975 aplicando a Fórmula de Lagrange aos pontos da tabela a seguir.

Ano	População
1950	352.724
1960	683.908
1970	1.235.030
1980	1.814.990

	x_0 = 1950	x_1 = 1960	x_2 = 1970	x_3 = 1980	prod
x = 1975	dif_0 = 25	dif_1 = 15	dif_2 = 5	dif_3 = -5	prod_x = -9375
x_0 = 1950		-10	-20	-30	prod_0 = -6000
x_1 = 1960	10		-10	-20	prod_1 = 2000
x_2 = 1970	20	10		-10	prod_2 = -2000
x_3 = 1980	30	20	10		prod_3 = 6000

Observe que $L_i(x) = \text{prod}_x / \text{dif}_i$ e $L_i(x_i) = \text{prod}_i$. Assim:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left(y_i \frac{L_i(x)}{L_i(x_i)}\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(y_i \frac{\frac{prod_x}{dif_i}}{prod_i}\right)$$

$$p_3(x) = y_0 \frac{\frac{prod_x}{dif_0}}{prod_0} + y_1 \frac{\frac{prod_x}{dif_1}}{prod_1} + y_2 \frac{\frac{prod_x}{dif_2}}{prod_2} + y_3 \frac{\frac{prod_x}{dif_3}}{prod_3}$$

Ex: Estime a população da cidade de Belo Horizonte em 1975 aplicando a Fórmula de Lagrange aos pontos da tabela a seguir.

Ano	População
1950	352.724
1960	683.908
1970	1.235.030
1980	1.814.990

	x_0 = 1950	x_1 = 1960	x_2 = 1970	x_3 = 1980	prod
x = 1975	dif_0 = 25	dif_1 = 15	dif_2 = 5	dif_3 = -5	$prod_x$ = -9375
x_0 = 1950		-10	-20	-30	$prod_0$ = -6000
x_1 = 1960	10		-10	-20	$prod_1$ = 2000
x_2 = 1970	20	10		-10	$prod_2$ = -2000
x_3 = 1980	30	20	10		$prod_3$ = 6000

$$p_3(1975) = 352.724 \times \frac{\frac{-9375}{25}}{-6000} + 683.908 \times \frac{\frac{-9375}{15}}{2000} + 1.235.030 \times \frac{\frac{-9375}{5}}{-2000} + 1.814.990 \times \frac{\frac{-9375}{-5}}{6000}$$

$$p_3(1975) = 352.724 \times 0{,}0625 + 683.908 \times -0{,}3125 + 1.235.030 \times 0{,}9375 + 1.814.990 \times 0{,}3125$$

$$p_3(1975) = 1.533.349$$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 11-06-2021

Fórmula de Newton

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Diferenças Divididas

A derivada de primeira ordem de uma função *f* num ponto x_0 é definida como sendo:

$$f'(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

A *diferença dividida* de primeira ordem de *f* no ponto x_0, denotada por $f[x, x_0]$, é:

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Observe que $f[x, x_0] = f[x_0, x]$.

Podemos denotar $f[x_i, x_{i+1}]$ por Δy_i, onde $f(x_i) = y_i$. Assim:

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

A diferença dividida de ordem zero em relação a y_i é $\Delta^0 y_i = f[x_i] = f(x_i) = y_i$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Generalizando, a diferença dividida de ordem n em relação a y_i é:

$$\Delta^n y_i = \frac{\Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i}$$

Ex: Calcule as diferenças divididas para os pontos da tabela a seguir:

i	x_i	y_i ($\Delta^0 y_i$)	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1950	352.724	33.118,4	1.099,69	-31,85
1	1960	683.908	55.112,2	144,19	-
2	1970	1.235.030	57.996	-	-
3	1980	1.814.990	-	-	-

Fórmula de Newton

É possível calcular $p_n(x)$ usando a Fórmula de Newton. Tal fórmula utiliza diferenças divididas, conforme explicado nas páginas 179 e 180 do livro.

$$p_n(x) = y_o + \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta^i y_o \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)$$

Por exemplo: $p_3(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) + \Delta^3 y_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

O cálculo da Fórmula de Newton requer tempo da ordem de n^2 😀

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex: Estime a população da cidade de Belo Horizonte em 1975 aplicando a Fórmula de Newton aos pontos da tabela a seguir.

i	x_i	y_i ($\Delta^0 y_i$)	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$dif_i = (x - x_i)$	$prod_i$
0	1950	352.724	33.118,4	1.099,69	-31,85	dif_0 = 25	$prod_0$ = 25
1	1960	683.908	55.112,2	144,19	–	dif_1 = 15	$prod_1$ = 375
2	1970	1.235.030	57.996	–	–	dif_2 = 5	$prod_2$ = 1875
3	1980	1.814.990	–	–	–	–	–

A Fórmula de Newton por ser reescrita da seguinte maneira: $p_n(x) = y_o + \sum_{i=1}^{n} prod_{i-1} \Delta^i y_o$

$$p_3(x) = y_0 + prod_0 \Delta y_0 + prod_1 \Delta^2 y_0 + prod_2 \Delta^3 y_0$$

$$p_3(1975) = 352.724 + 25 \times 33.118{,}4 + 375 \times 1.099{,}69 + 1.875 \times -31{,}85$$

$$p_3(1975) = 352.724 + 827.960 + 412.383,75 - 59.718{,}75$$

$$p_3(1975) = 1.533.349$$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 14-06-2021

Fórmula de Gregory-Newton

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Fórmula de Gregory-Newton

É possível simplificar a Fórmula de Newton **se os pontos (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) forem *monoespaçados***, ou seja, se $x_i - x_{i-1} = h$ ($i = 1, 2, ..., n$).

Para isso vamos introduzir a variável $z = \frac{x - x_o}{h}$. Note que:

$(x - x_0) = hz$
$(x - x_1) = (x - (x_0 + h)) = (x - x_0 - h) = hz - h = h(z - 1)$
$(x - x_2) = (x - (x_1 + h)) = (x - x_1 - h) = h(z - 1) - h = h(z - 2)$
...
$(x - x_{n-1}) = h(z - n + 1)$

Podemos então reescrever a Fórmula de Newton:

$$p_n(x) = y_o + \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta^i y_o h^i \prod_{j=0}^{i-1}(z - j)\right)$$

Por exemplo: $p_3(x) = y_0 + hz\Delta y_0 + h^2 z(z-1)\Delta^2 y_0 + h^3 z(z-1)(z-2)\Delta^3 y_0$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Diferenças Finitas

Vamos agora introduzir o conceito de *diferença finita*. A diferença finita de ordem zero em relação a y_i é definida como sendo $\Delta^0 y_i = y_i$. A diferença finita de ordem n em relação a y_i é:

$$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$$

Ex: Calcule as diferenças finitas para os pontos da tabela a seguir:

i	x_i	y_i ($\Delta^0 y_i$)	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1950	352.724	331.184	219.938	-191.100
1	1960	683.908	551.122	28.838	-
2	1970	1.235.030	579.960	-	-
3	1980	1.814.990	-	-	-

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Teorema: $\Delta^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n! h^n}$.

Prova: Por indução em *n*. Base: *n* = 0. Note que $\Delta^0 y_i = y_i = \frac{\Delta^0 y_i}{0! h^0}$. Suponha que $\Delta^{n-1} y_i = \frac{\Delta^{n-1} y_i}{(n-1)! h^{n-1}}$ (H.I.). Observe que:

$$\Delta^n y_i = \frac{\Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i} = \frac{\frac{\Delta^{n-1} y_{i+1}}{(n-1)!\, h^{n-1}} - \frac{\Delta^{n-1} y_i}{(n-1)!\, h^{n-1}}}{nh} = \frac{\frac{\Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i}{(n-1)!\, h^{n-1}}}{nh} = \frac{\Delta^n y_i}{(n-1)!\, h^{n-1}} \cdot \frac{1}{nh} = \frac{\Delta^n y_i}{n!\, h^n} \blacksquare$$

Chegamos então à Fórmula de Gregory-Newton:

$$p_n(x) = y_o + \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta^i y_o h^i \prod_{j=0}^{i-1} (z - j) \right) = y_o + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta^i y_0}{i!\, h^i} h^i \prod_{j=0}^{i-1} (z - j) \right) \Rightarrow p_n(x) = y_o + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta^i y_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (z - j) \right)$$

Por exemplo: $p_3(x) = y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex: Estime a população da cidade de Belo Horizonte em 1975 aplicando a Fórmula de Gregory-Newton aos pontos da tabela a seguir.

i	x_i	$y_i\ (\Delta^0 y_i)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$(z-i)$	$prod_i$	$i\,!$
0	1950	352.724	331.184	219.938	-191.100	2,5	$prod_0$ = 2,5	1
1	1960	683.908	551.122	28.838	–	1,5	$prod_1$ = 3,75	1
2	1970	1.235.030	579.960	–	–	0,5	$prod_2$ = 1,875	2
3	1980	1.814.990	–	–	–	–	–	6

A Fórmula de Gregory-Newton por ser reescrita da seguinte maneira: $p_n(x) = y_o + \sum_{i=1}^{n} prod_{i-1} \frac{\Delta^i y_0}{i!}$

$$p_3(1975) = 352.724 + 2{,}5 \times 331.184 + 3{,}75 \times \frac{219.938}{2!} + 1{,}875 \times \frac{-191.100}{3!}$$

$$p_3(1975) = 352.724 + 827.960 + 412.383{,}75 - 59.718{,}75$$

$$p_3(1975) = 1.533.349$$

Erro de Truncamento da Fórmula Gregory-Newton

Vimos que o erro de truncamento da interpolação polinomial é:

$$E_T(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\frac{f^{n+1}(\epsilon)}{(n+1)!}$$

O erro de truncamento adaptado para a Fórmula de Gregory-Newton é:

$E_T(x) = z(z-1)\cdots(z-n)h^{n+1}\frac{f^{n+1}(\epsilon)}{(n+1)!}$, onde $x_0 \leq \epsilon \leq x_n$.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 18-06-2021

Integração Numérica – Regra dos Trapézios

Prof: Glauber Cintra
glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Integração Numérica

Um problema de grande importância prática é calcular $I = \int_a^b f(x)dx$.

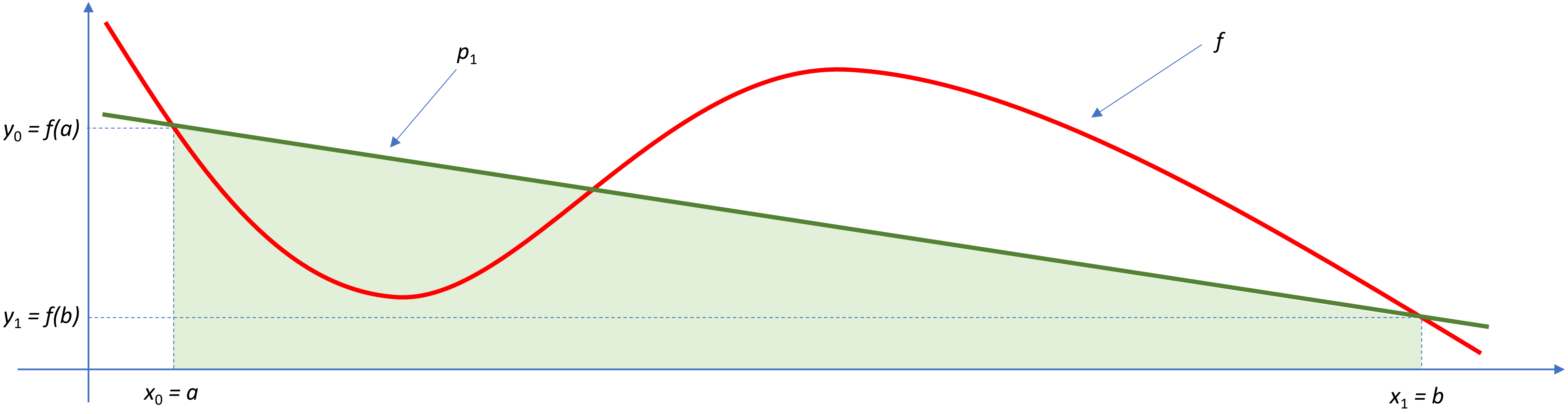
Sabemos que $I = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, onde $F(x)$ é chamada de *primitiva* de f e é tal que $F'(x) = f(x)$.

Nas situações em que é difícil obter a primitiva de *f* ou quando a forma analítica de *f* não é conhecida podemos usar métodos de integração numérica para estimar o valor de $\int_a^b f(x)dx$.

Estudaremos a Regra dos Trapézios, a Primeira e a Segunda Regra de Simpson e ainda a Extrapolação de Richardson que se aplicada às regras anteriores produz estimativas ainda mais precisas.

Regra dos Trapézios (RT)

A Regra dos Trapézios consiste em usar o polinômio do primeiro grau p_1 que passa pelos pontos (*a*, *f*(*a*)) e (*b*, *f*(*b*)) como uma aproximação para *f*. Assim, $I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_1(x)dx$.



Para obter a fórmula da RT vamos considerar que $x_0 = a$, $x_1 = b$, $y_0 = f(a)$ e $y_1 = f(b)$.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Como x_0 e x_1 são monoespaçados, podemos usar a Fórmula de Gregory-Newton para p_1. Assim:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_1(x)dx = \int_a^b (y_o + z\Delta y_0)dx$$

Note que:

$$z = \frac{x - x_o}{h} \Longrightarrow dx = hdz$$

Observe ainda que para $x = x_0$ temos $z = 0$ e para $x = x_1$ temos $z = 1$. Dessa forma:

$$I \cong \int_0^1 (y_o + z\Delta y_0)hdz \ = h\left[y_0 z + \frac{z^2}{2}\Delta y_0\right]_0^1 = h\left(y_0 + \frac{1}{2}(\Delta^0 y_1 - \Delta^0 y_0)\right) \ = h\left(y_0 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_0\right)$$

$$I \cong \frac{h}{2}(y_o + y_1) \qquad \text{(Fórmula simples da RT)}$$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex: Estime o valor de $I = \int_3^{3{,}6} \frac{1}{x} dx$ usando a RT.

i	x_i	y_i
0	3	1/3
1	3,6	1/3,6

h = 0,6
I ≅ 0,6/2 x (1/3 + 1/3,6) = 0,1833333333
Obs: $\int_3^{3{,}6} \frac{1}{x} dx = \ln 3{,}6 - \ln 3 \cong$ 0,1823215567
Erro de aproximadamente -0,0010117765 🙂

O erro de truncamento da fórmula simples da RT é $E = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_1(x)dx$.
Observe que $E_T(x) = f(x) - p_1(x)$. Integrando os dois lados dessa equação em relação a x de a até b obtemos o erro de truncamento da fórmula simples da RT:

$$E = \int_a^b E_T(x)dx = \int_a^b z(z-1)h^2 \frac{f''(\epsilon)}{2!} dx = \int_0^1 z(z-1)h^2 \frac{f''(\epsilon)}{2!} hdz = \frac{f''(\epsilon)}{2} h^3 \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{f''(\epsilon)}{2} h^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

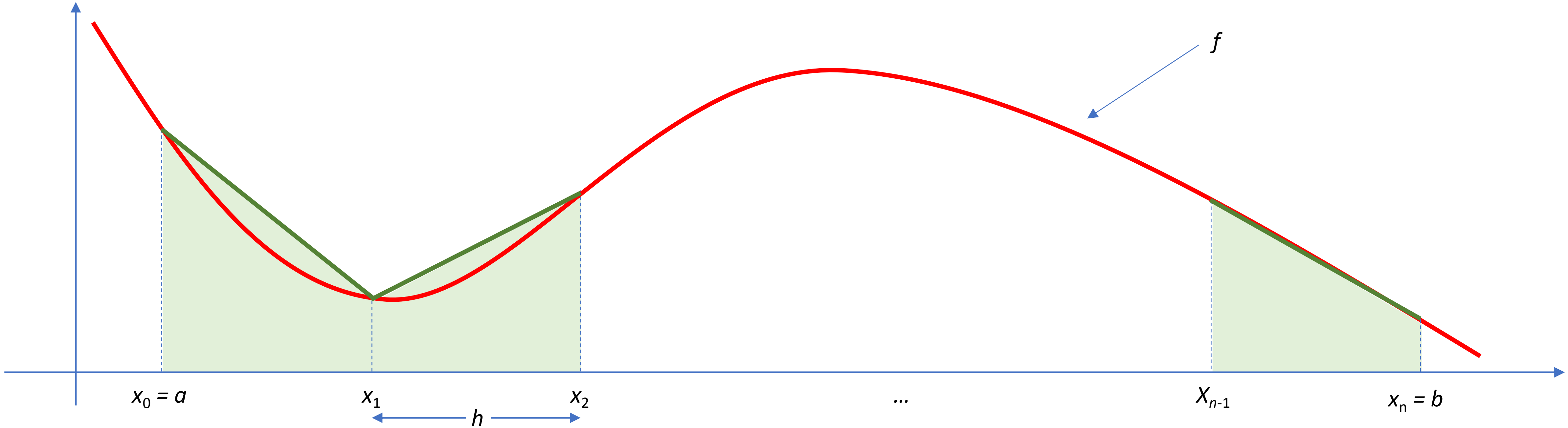
$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\epsilon), \text{ onde } a \leq \epsilon \leq b.$$

Ex: Estime o erro de truncamento ao aplicar a RT para calcular $\int_3^{3{,}6} \frac{1}{x} dx$.

$$E = -\frac{0{,}6^3}{12} . \frac{2}{\epsilon^3} \leq -\frac{0{,}216}{12} . \frac{2}{27} = -0{,}0013333333$$

Fórmula Composta da Regra dos Trapézios

Podemos melhorar a precisão da RT se subdividirmos o intervalo [*a*, *b*] em *n* subintervalos e aplicar a RT em cada subintervalo. Por conveniência, vamos usar subintervalos que têm o mesmo tamanho *h*.



$$I \cong \frac{h}{2}(y_o + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \cdots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n) = \frac{h}{2}(y_o + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$I \cong h\left(\frac{y_o}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$ (Fórmula composta da RT)

Ex: Estime o valor de $I = \int_3^{3,6} \frac{1}{x}\,dx$ usando a RT com 6 subintervalos.

i	x_i	y_i
0	3	1/3
1	3,1	1/3,1
2	3,2	1/3,2
3	3,3	1/3,3
4	3,4	1/3,4
5	3,5	1/3,5
6	3,6	1/3,6

h = 0,1

$I \cong$ 0,1 x (1/6 + 1/3,1 + 1/3,2 + 1/3,3 + 1/3,4 + 1/3,5 + 1/7,2) = 0,1823498437

Obs: $\int_3^{3,6} \frac{1}{x}\,dx = \ln 3{,}6 - \ln 3 \cong$ 0,1823215567

Erro de aproximadamente -0,000028287 😀

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

O erro de truncamento da fórmula composta da RT é obtido somando os erros de truncamento em cada um dos subintervalos:

$$E = -\frac{h^3}{12}f''(\epsilon_1) - \frac{h^3}{12}f''(\epsilon_2) - \cdots - \frac{h^3}{12}f''(\epsilon_n) \quad = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\epsilon_i)$$, onde $x_{i-1} \leq \epsilon_i \leq x_i$

Note que existe $a \leq \epsilon \leq b$ tal que $f''(\epsilon) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\epsilon_i)}{n}$, e isso implica que $nf''(\epsilon) = \sum_{i=1}^{n} f''(\epsilon_i)$. Assim:

$$E = -\frac{h^3}{12}nf''(\epsilon) = -\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 nf''(\epsilon)$$

$$E = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\epsilon)$$, onde $a \leq \epsilon \leq b$.

Ex: Estime o erro de truncamento ao aplicar a RT com 6 subintervalos para calcular $\int_3^{3,6} \frac{1}{x}dx$.

$$E = -\frac{0{,}6^3}{12 \times 36} . \frac{2}{\epsilon^3} \leq -\frac{0{,}216}{432} . \frac{2}{27} = -0{,}000037037$$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 21-06-2021

Primeira Regra de Simpson

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

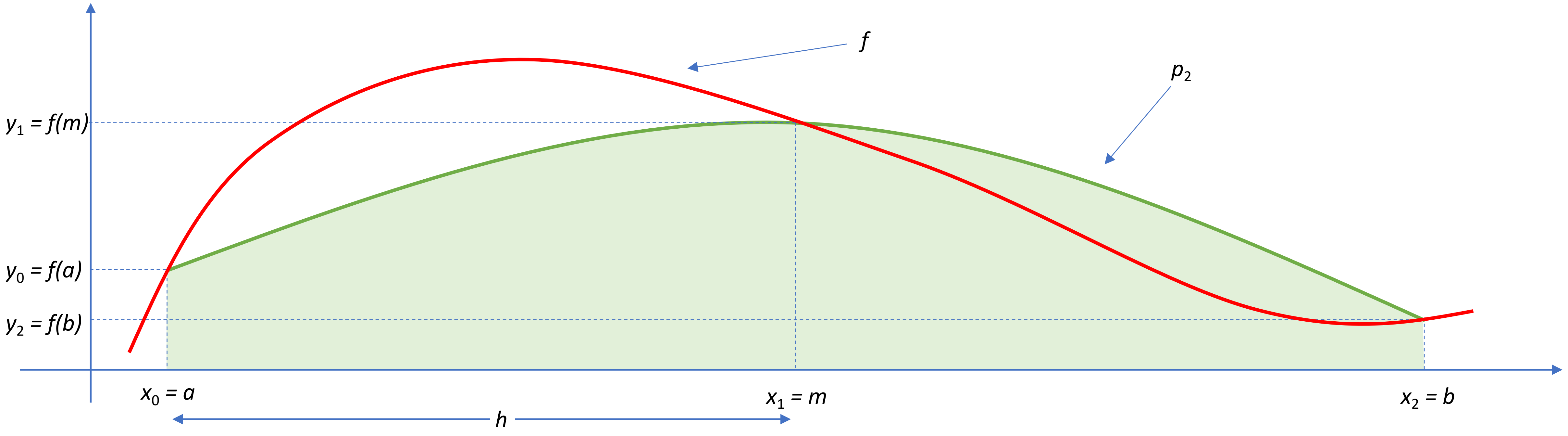
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Primeira Regra de Simpson (1RS)

Para usar a *Primeira Regra de Simpson* precisamos conhecer o ponto (m, f(m)), onde m é o ponto médio do intervalo [a, b]. A 1RS consiste em usar o polinômio do segundo grau p_2 que passa pelos pontos (a, f(a)), (m, f(m)) e (b, f(b)) como uma aproximação para f. Assim, $I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_2(x)dx$.



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Como x_0, x_1 e x_2 são monoespaçados, podemos usar a Fórmula de Gregory-Newton para p_2. Assim:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_2(x)dx = \int_a^b (y_o + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!})dx$$

Note que $z = \frac{x - x_o}{h} \Longrightarrow dx = hdz$ e para $x = x_0$ temos $z = 0$ e para $x = x_2$ temos $z = 2$. Dessa forma:

$$I \cong \int_0^2 \left(y_o + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\right) hdz \quad = h\left[y_0 z + \frac{z^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right)\frac{\Delta^2 y_0}{2}\right]_0^2$$

$$= h\left(2y_0 + \frac{4}{2}(\Delta^0 y_1 - \Delta^0 y_0) + \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right)\frac{(\Delta y_1 - \Delta y_0)}{2}\right) = h\left(2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{2}{3}\frac{(\Delta^0 y_2 - \Delta^0 y_1 - (\Delta^0 y_1 - \Delta^0 y_0))}{2}\right)$$

$$= h\left(2y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right) \quad = h\left(\frac{1}{3}y_0 + \frac{4}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2\right)$$

$$I \cong \frac{1}{3}h(y_o + 4y_1 + y_2)$$ (Fórmula simples da 1RS)

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex: Estime o valor de $I = \int_3^{3,6} \frac{1}{x}\,dx$ usando a 1RS.

i	x_i	y_i
0	3	1/3
1	3,3	1/3,3
2	3,6	1/3,6

h = 0,3

$I \cong 0,3/3 \times (1/3 + 4/3,3 + 1/3,6) = 0,1823232323$

Obs: $\int_3^{3,6} \frac{1}{x}\,dx = \ln 3,6 - \ln 3 \cong 0,1823215567$

Erro de aproximadamente -0,0000016755 😀

O erro de truncamento da fórmula simples da 1RS é:

$$E = -\frac{h^5}{90} f''''(\epsilon), \text{ onde } a \leq \epsilon \leq b.$$

Fórmula Composta da Primeira Regra de Simpson

Podemos melhorar a precisão da 1RS se subdividirmos o intervalo [*a*, *b*] em *n* subintervalos (*n* par) e aplicar a 1RS a cada dois subintervalos consecutivos. Por conveniência, vamos usar subintervalos que têm o mesmo tamanho *h*.

$$I \cong \frac{1}{3}h(y_o + 4y_1 + y_2) + \frac{1}{3}h(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{1}{3}h(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$I \cong \frac{1}{3}h(y_o + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)$$ (Fórmula composta da 1RS)

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex: Estime o valor de $I = \int_3^{3,6} \frac{1}{x} dx$ usando a 1RS com 6 subintervalos.

i	x_i	y_i
0	3	1/3
1	3,1	1/3,1
2	3,2	1/3,2
3	3,3	1/3,3
4	3,4	1/3,4
5	3,5	1/3,5
6	3,6	1/3,6

h = 0,1

I ≅ 0,1/3 x (1/3 + 4/3,1 + 2/3,2 + 4/3,3 + 2/3,4 + 4/3,5 + 1/3,6) = 0,182321578

Obs: $\int_3^{3,6} \frac{1}{x} dx = \ln 3,6 - \ln 3 \cong$ 0,1823215567

Erro de aproximadamente -0,0000000212 😀

O erro de truncamento da fórmula composta da 1RS é:

$$E = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f''''(\epsilon), \text{ onde } a \leq \epsilon \leq b.$$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 25-06-2021

Segunda Regra de Simpson

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

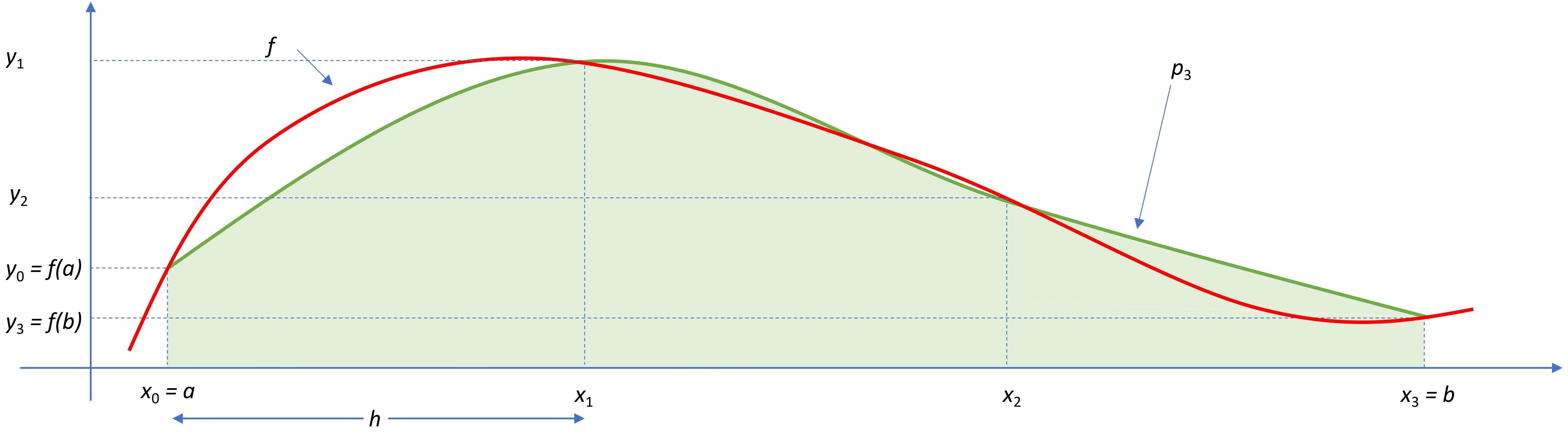
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Segunda Regra de Simpson (2RS)

Para usar a *Segunda Regra de Simpson* usamos os pontos monoespaçados (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), onde $x_0 = a$, $x_3 = b$ e $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, 3$). Na 2RS usamos o polinômio do terceiro grau p_3 que passa por esses pontos como uma aproximação para f. Assim, $I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_3(x)dx$.



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Como x_0, x_1, x_2 e x_3 são monoespaçados, podemos usar a Fórmula de Gregory-Newton para p_3. Assim:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_3(x)dx = \int_a^b \left(y_o + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!} \right) dx$$

Note que $z = \frac{x - x_o}{h} \Longrightarrow dx = hdz$ e para $x = x_0$ temos $z = 0$ e para $x = x_3$ temos $z = 3$. Dessa forma:

$$I \cong \int_0^3 \left(y_o + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!} \right) hdz$$

$$= h\left[y_0 z + \frac{z^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right)\frac{\Delta^2 y_0}{2} + \left(\frac{z^4}{4} - \frac{2z^3}{3} - \frac{z^3}{3} + \frac{2z^2}{2}\right)\frac{\Delta^3 y_0}{6} \right]_0^3$$

$$= h\left(3y_0 + \frac{9}{2}(\Delta^0 y_1 - \Delta^0 y_0) + \left(9 - \frac{9}{2}\right)\frac{(\Delta y_1 - \Delta y_0)}{2} + \left(\frac{81}{4} - 27 + 9\right)\frac{(\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0)}{6} \right)$$

$$= h\left(3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(\Delta^0 y_2 - \Delta^0 y_1 - (\Delta^0 y_1 - \Delta^0 y_0)) + \frac{3}{8}(\Delta y_2 - \Delta y_1 - (\Delta y_1 - \Delta y_0)) \right)$$

$$= h\left(\frac{9}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_0 + \frac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{3}{8}(\Delta^0 y_3 - \Delta^0 y_2 - 2(\Delta^0 y_2 - \Delta^0 y_1) + \Delta^0 y_1 - \Delta^0 y_0) \right) = h\left(\frac{3}{4}y_0 + \frac{9}{4}y_2 + \frac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) \right)$$

$$= h\left(\frac{3}{8}y_0 + \frac{9}{8}y_1 + \frac{9}{8}y_2 + \frac{3}{8}y_3 \right)$$

$$I \cong \frac{3}{8}h(y_o + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$ (Fórmula simples da 2RS)

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex: Estime o valor de $I = \int_3^{3,6} \frac{1}{x} dx$ usando a 2RS.

i	x_i	y_i
0	3	1/3
1	3,2	1/3,2
2	3,4	1/3,4
3	3,6	1/3,6

$h = 0,2$

$I \cong 3/8 \times 0,2\ (1/3 + 3/3,2 + 3/3,4 + 1/3,6) = 0,1823223039$

Obs: $\int_3^{3,6} \frac{1}{x} dx = \ln 3,6 - \ln 3 \cong 0,1823215567$

Erro de aproximadamente -0,0000007471 😀

O erro de truncamento da fórmula simples da 2RS é:

$$E = -\frac{3h^5}{80} f''''(\epsilon), \text{ onde } a \leq \epsilon \leq b.$$

Fórmula Composta da Segunda Regra de Simpson

Podemos melhorar a precisão da 2RS se subdividirmos o intervalo [*a*, *b*] em *n* subintervalos (*n* múltiplo de 3) e aplicar a 2RS a cada três subintervalos consecutivos. Por conveniência, vamos usar subintervalos que têm o mesmo tamanho *h*.

$$I \cong \frac{3}{8}h(y_o + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + \frac{3}{8}h(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) + \cdots + \frac{3}{8}h(y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n)$$

$$I \cong \frac{3}{8}h(y_o + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n)$$ (Fórmula composta da 2RS)

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex: Estime o valor de $I = \int_3^{3,6} \frac{1}{x} dx$ usando a 2RS com 6 subintervalos.

i	x_i	y_i
0	3	1/3
1	3,1	1/3,1
2	3,2	1/3,2
3	3,3	1/3,3
4	3,4	1/3,4
5	3,5	1/3,5
6	3,6	1/3,6

h = 0,1

I ≅ 3/8 x 0,1x (1/3 + 3/3,1 + 3/3,2 + 2/3,3 + 3/3,4 + 3/3,5 + 1/3,6) = 0,1823216044

Obs: $\int_3^{3,6} \frac{1}{x} dx = \ln 3{,}6 - \ln 3 \cong$ 0,1823215567

Erro de aproximadamente -0,0000000476 😀

O erro de truncamento da fórmula composta da 2RS é:

$$E = -\frac{(b-a)^5}{80n^4} f''''(\epsilon), \text{ onde } a \leq \epsilon \leq b.$$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 28-06-2021

Extrapolação de Richardson

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Extrapolação de Richardson

Podemos obter uma aproximação ainda melhor para $I = \int_a^b f(x)dx$ se após usarmos a RT, a 1RS ou a 2RS aplicarmos a *Extrapolação de Richardson*.

Sejam I_1 a aproximação para I obtida aplicando a RT com n_1 subintervalos e E_1 o respectivo erro de truncamento. Sejam I_2 a aproximação para I obtida através da RT com n_2 subintervalos ($n_1 \neq n_2$) e E_2 o erro de truncamento. Note que $I = I_1 + E_1$ e $I = I_2 + E_2$, logo $I_1 + E_1 = I_2 + E_2$. Assim, $I_2 - I_1 = E_1 - E_2$.

$$I_2 - I_1 = -\frac{(b-a)^3}{12{n_1}^2} f''(\epsilon) + \frac{(b-a)^3}{12{n_2}^2} f''(\epsilon) \quad = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\epsilon)\left(\frac{1}{{n_2}^2} - \frac{1}{{n_1}^2}\right) \; = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\epsilon)\frac{{n_1}^2 - {n_2}^2}{{n_2}^2.{n_1}^2}$$

$$\frac{(b-a)^3}{12} f''(\epsilon) = (I_2 - I_1)\frac{{n_1}^2.{n_2}^2}{{n_1}^2 - {n_2}^2}$$

Observe ainda que:

$$I = I_2 + E_2 = I_2 - \frac{(b-a)^3}{12{n_2}^2} f''(\epsilon) = I_2 - \frac{1}{{n_2}^2}(I_2 - I_1)\frac{{n_1}^2.{n_2}^2}{{n_1}^2 - {n_2}^2}$$

$$I = I_2 + \; (I_2 - I_1)\frac{{n_1}^2}{{n_2}^2 - {n_1}^2}$$ Extrapolação de Richardson para a RT

Ex: Estime o valor de $I = \int_3^{3,6} \frac{1}{x}\,dx$ usando a Extrapolação de Richardson para a RT com n_1 = 1 e n_2 = 6 subintervalos.

i	x_i	y_i
0	3	1/3
1	3,1	1/3,1
2	3,2	1/3,2
3	3,3	1/3,3
4	3,4	1/3,4
5	3,5	1/3,5
6	3,6	1/3,6

I_1 = 0,1833333333

I_2 = 0,1823498437

$$I = I_2 + (I_2 - I_1)\frac{{n_1}^2}{{n_2}^2 - {n_1}^2}$$

$I \cong$ 0,1823498437 + (0,1823498437 – 0,1833333333).1/(36 – 1) = 0,1823217439

Obs: $\int_3^{3,6} \frac{1}{x}\,dx = \ln 3{,}6 - \ln 3 \cong$ 0,1823215567 😀

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Sejam I_1 a aproximação para I obtida aplicando a 1RS com n_1 subintervalos e E_1 o respectivo erro de truncamento. Sejam I_2 a aproximação para I obtida através da 1RS com n_2 subintervalos ($n_1 \neq n_2$) e E_2 o erro de truncamento. Note que $I = I_1 + E_1$ e $I = I_2 + E_2$, logo $I_1 + E_1 = I_2 + E_2$. Assim, $I_2 - I_1 = E_1 - E_2$.

$$I_2 - I_1 = -\frac{(b-a)^5}{180{n_1}^4} f''''(\epsilon) + \frac{(b-a)^5}{180{n_2}^4} f''''(\epsilon) = \frac{(b-a)^5}{180} f''''(\epsilon)\left(\frac{1}{{n_2}^4} - \frac{1}{{n_1}^4}\right) = \frac{(b-a)^5}{180} f''''(\epsilon)\frac{{n_1}^4 - {n_2}^4}{{n_2}^4.{n_1}^4}$$

$$\frac{(b-a)^5}{180} f''''(\epsilon) = (I_2 - I_1)\frac{{n_1}^4.{n_2}^4}{{n_1}^4 - {n_2}^4}$$

Como:

$$I = I_2 + E_2 = I_2 - \frac{(b-a)^5}{180{n_2}^4} f''''(\epsilon) = I_2 - \frac{1}{{n_2}^4}(I_2 - I_1)\frac{{n_1}^4.{n_2}^4}{{n_1}^4 - {n_2}^4}$$

$$I = I_2 + (I_2 - I_1)\frac{{n_1}^4}{{n_2}^4 - {n_1}^4}$$ Extrapolação de Richardson para as regras de Simpson

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex: Estime o valor de $I = \int_3^{3,6} \frac{1}{x} dx$ usando a Extrapolação de Richardson para a 1RS com n_1 = 2 e n_2 = 6 subintervalos.

i	x_i	y_i
0	3	1/3
1	3,1	1/3,1
2	3,2	1/3,2
3	3,3	1/3,3
4	3,4	1/3,4
5	3,5	1/3,5
6	3,6	1/3,6

I_1 = 0,1823232323

I_2 = 0,182321578

$$I = I_2 + (I_2 - I_1)\frac{{n_1}^4}{{n_2}^4 - {n_1}^4}$$

$I \cong$ 0,182321578 + (0,182321578 – 0,1823232323).16/(1296 – 16) = 0,1823215573

Obs: $\int_3^{3,6} \frac{1}{x} dx = \ln 3{,}6 - \ln 3 \cong$ 0,1823215567 😀

Podemos estimar o valor da integral de uma função definida por uma tabela de pontos multiespaçados. Para isso, podemos usar a RT, a 1RS e a 2RS nas sequências de pontos monoespaçados, aplicando sempre a regra que apresenta maior precisão, como no exemplo a seguir, no qual calculamos uma aproximação para $\int_0^9 f(x)dx$ sendo *f* uma função que passa pelos pontos da tabela abaixo.

i	x_i	y_i
0	0	118
1	2	44
2	3	-59
3	4	-190
4	5	-307
5	7	-211
6	9	1045

RT

2RS

1RS

$$\int_0^2 f(x)dx \cong \frac{2}{2}(118 + 44) = 162$$

$$\int_2^5 f(x)dx \cong \frac{3}{8}(44 + 3\times-59 + 3\times-190 - 307) = -378{,}75$$

$$\int_5^9 f(x)dx \cong \frac{1}{3}\times2(-307 + 4\times-211 + 1045) = -70{,}6666666667$$

$$\int_0^9 f(x)dx \cong 162 - 378{,}75 - 70{,}6666666667 = -287{,}4166666667$$

Obs: A função usada para gerar os pontos da tabela acima foi $x^4 - 7x^3 - 6x^2 - 5x + 118$

$$\int_0^9 (x^4 - 7x^3 - 6x^2 - 5x + 118)dx = -270{,}45$$