1ª Avaliação de Grafos
Professor: Glauber Cintra

Envie esta avaliação pelo Classroom até 25/05/2021 às 15:30h.

Avaliação enviada! ///////////////////////////////

Aluno: João Gabriel Carneiro Medeiros | Eng. Comp | Cadeira: Grafos | Prof. Glauber Cintra | IFCE | 2021.1 |

----

1) (**3 pontos**) Seja G o grafo representado pela lista de incidências abaixo. Desenhe G. Forneça a lista de adjacências, a matriz de adjacências e a matriz de incidências de G. Determine ordem(G), tamanho(G), $\Delta(G)$, $\delta(G)$, $w(G)$ e $d(v_6)$. G é uma floresta? G é conexo? Qual a cintura do grafo? Exiba uma trilha de comprimento 6 e um circuito de comprimento 5 em G.

v_1	A
v_2	A
v_3	B $\rightarrow$ C
v_4	B $\rightarrow$ D $\rightarrow$ E $\rightarrow$ F
v_5	E $\rightarrow$ G
v_6	C $\rightarrow$ D $\rightarrow$ G
v_7	F

2) (**1 ponto**) Escreva um algoritmo que receba a lista de adjacências de um grafo G e devolva $\Delta(G)$.

3) (**1 ponto**) Na matriz de adjacências abaixo é representado o grafo G. Seja x o maior número tal que G é x-aresta-conexo e y o maior número tal que G é y-vértice-conexo. Determine x e y. Justifique suas respostas.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_1			1		1		1		1
v_2			1	1		1		1	
v_3	1	1			1	1			1
v_4		1				1		1	
v_5	1		1				1		1
v_6		1	1	1				1	
v_7	1				1				1
v_8		1		1		1			
v_9	1		1		1		1		

4) (**1 ponto**) Escreva um algoritmo que receba um grafo e um vértice v e devolva a quantidade de vértices da componente conexa que contém v.

5) (**1 ponto**) Encontre uma **árvore geradora mínima** do grafo representado pela matriz de incidências abaixo (desenhe a árvore enraizada no vértice 1 e informe seu custo).

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}	e_{21}
v_1					1			1				1		1							
v_2				1					1		1	1	1		1		1				
v_3	1		1														1		1		
v_4	1	1					1				1							1		1	
v_5				1						1				1		1		1	1		
v_6						1		1					1			1				1	1
v_7		1			1				1												1
v_8			1			1	1			1					1						

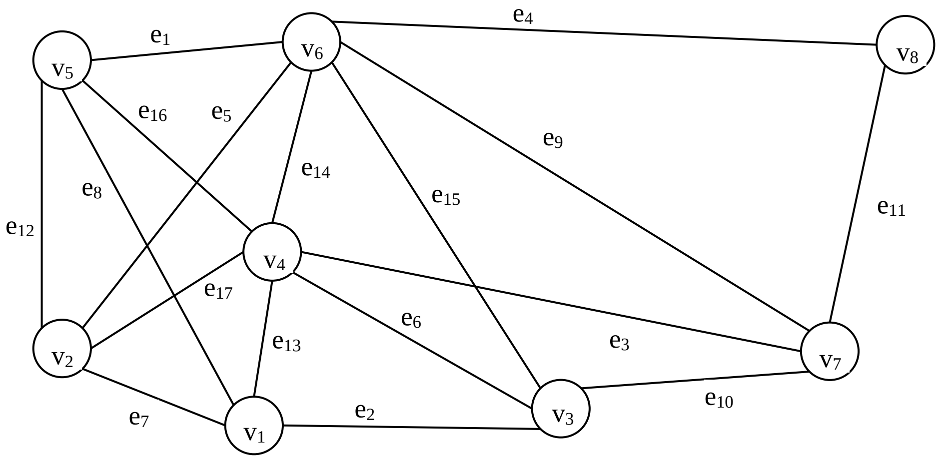
Peso	5	12	15	19	8	10	16	9	14	4	6	18	20	2	21	7	3	11	17	13	1

6) (**1 ponto**) Dada a matriz de incidências abaixo, onde 1 indica que o arco chega ao vértice e –1 indica que o arco sai do vértice, encontre um caminho mínimo entre os vértices v_1 e v_{10}.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}
v_1	-1	-1	-1																
v_2	1			-1	-1														
v_3		1			1	-1	-1	1											
v_4			1					-1	-1			1							
v_5				1						-1	1								
v_6						1					-1	-1	-1	-1		1			
v_7							1		1				1		-1				
v_8										1						-1	-1	-1	
v_9														1	1		1		-1
v_{10}																		1	1
Custo	2	1	6	1	0	5	8	1	1	1	1	0	2	3	1	1	4	5	1

7) (**1 ponto**) Se $\delta(G) > 1$ então G possui pelo menos um *circuito*. Prove ou refute esta afirmação.

8) (**1 ponto**) Seja *G* o grafo abaixo. Exiba uma representação planar de *G*. Se não for possível, justifique.



----

*Obs.

- As soluções foram feitas no software “Paint” (Windows) para facilitar o entendimento das mesmas pelo professor!

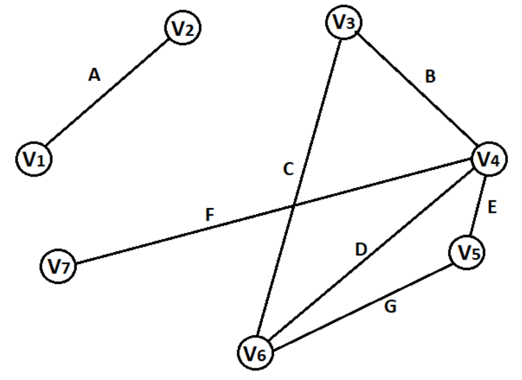
- Quanto aos comentários que realizo nas questões e “definições” que apresento, tudo foi baseado no que foi apresentado nas aulas e nos slides da cadeira até o atual momento.

----

*Soluções do aluno –
---//

1) Desenhe G.

i) *Com base na Lista de Incidências (LI) dada pela questão e no que foi apresentado em sala pelo professor até agora sobre como funciona a estrutura dessa lista podemos "remontar completamente" o grafo 'G' pedido a partir de sua representação nessa LI dada (Que é dita ser uma 'estrutura aresta-orientada' exatamente por essa possibilidade de permitir essa reconstrução):



** Desenho de *G*

V_1	A
V_2	A
V_3	B → C
V_4	B → D → E → F
V_5	E → G
V_6	C → D → G
V_7	F

* LI de *G*

Forneça a lista de adjacências, a matriz de adjacências e a matriz de incidências de G.

i) lista de adjacências,

Baseado no que foi explicado pelo professor em aulas até aqui ministradas forneçer a "Lista de Adjacências (LA)" de um grafo é forneçer um vetor com uma posição para cada vértice do grafo. Nesse vetor, a posição correspondente ao "vertice i" aponta para uma lista ligada que contém todos os vértices adjacentes ao vértice i, assim, para nosso grafo G temos:

V_1	**V_2**
V_2	**V_1**
V_3	**V_4 → V_6**
V_4	**V_3 → V_6 → V_5 → V_7**
V_5	**V_4 → V_6**
V_6	**V_3 → V_4 → V_5**
V_7	**V_4**

* LA de *G*

ii) matriz de adjacências

Também, no que foi visto em aula, a 'matriz de adjacências (MA)' de G é fornecida pela constituição de uma linha e uma coluna para cada vértice do grafo. A posição (i,j) da matriz indicará se o vértice i é adjacente ao vértice j. Portanto, temos:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
V_1	0	1	0	0	0	0	0
V_2	1	0	0	0	0	0	0
V_3	0	0	0	1	0	1	0
V_4	0	0	1	0	1	1	1
V_5	0	0	0	1	0	1	0
V_6	0	0	1	1	1	0	0
V_7	0	0	0	1	0	0	0

* MA de *G*

iii) matriz de incidências

Do mesmo modo, o fornecimento da 'matriz de incidencias (MI)' de G é fornecido pela constituição de uma linha para cada vértice e uma coluna para cada aresta do grafo. A posição (i,j) da matriz indica se a aresta j incide no vértice i. Portanto, temos:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
A	1	1	0	0	0	0	0
B	0	0	1	1	0	0	0
C	0	0	1	0	0	1	0
D	0	0	0	1	0	1	0
E	0	0	0	1	1	0	0
F	0	0	0	1	0	0	1
G	0	0	0	0	1	1	0

* MI de *G*

Determine ordem(G), tamanho(G), Δ(*G*), δ(*G*), *w*(*G*) e *d*(v_6).

***Aqui, temos definições 'básicas' e 'essenciais' tiradas do estudo de grafos feito nas aulas até aqui, portanto, podemos entender cada um dos fatores pedidos como:**

i) ordem(G),

É nada mais do que a quantidade de vétices de G:

7

ii) tamanho(G),

A quantidade de arestas de G:

7

iii) Δ(*G*),

O grau máximo de G, é o grau de um vértice que tem o maior grau em G:

4

iV) δ(*G*),

O grau mínimo de G, é o grau de um vértice que tem o menor grau em G:

1

V) *w*(*G*)

A quantidade de componentes conexas de G:

2

Vi) *d*(v_6)

O grau de um vértice, que é a quantidade de arestas que incidem sobre ele (aqui no caso, sobre V_6):

3

***E o grafo G contem ciclos nele!**

G é uma floresta?

i) **NÃO, G não é uma floresta!** Isso, baseado em nosso entendimento adquirido pelas aulas ministradas até aqui de que para ser uma "floresta" um determinado grafo não deve conter ciclos nele (Sem falar que cada uma de suas componentes conexas deve ser uma árvores).

G é conexo?

i) **Não, G não é conexo!** Isso, baseado em nosso entendimento adquirido nas aulas ministradas até aqui de que para ser "conexo" um determinado grafo deve admitir que para todo par de vértices do grafo sempre existe um caminho entre eles, não significando que vai-se ter uma aresta ligando cada par de vértices mas que é possível percorrer uma serie de arestas até chegar no destino, e aqui em G, isso não pode ser possível para os vértices V1 e V2 que não possuem caminho algum com os outros vértices do grafo além do (único) caminho (aresta A) definido entre eles!

Qual a cintura do grafo?

i) Sabendo que a cintura de G, ou 'G(*G*)', é o comprimento de um caminho aberto mais longo de G temos que:

G(G) = 4

Um exemplo pode ser: (C,G,E,F)

$V_3 \overset{C}{—} V_6 \overset{G}{—} V_5 \overset{E}{—} V_4 \overset{F}{—} V_7$

Exiba uma trilha de comprimento 6 e um circuito de comprimento 5 em G.

i) uma trilha de comprimento 6

Sabendo que uma 'trilha' é um tipo específico de passeio onde não se é permitido que arestas sejam repetidas (Segundo o que foi apresentado em aula é claro), temos o seguinte exemplo como uma trilha de comprimento 6 em G:

(F,B,C,D,E,G) → $V_7 \overset{F}{—} V_4 \overset{B}{—} V_3 \overset{C}{—} V_6 \overset{D}{—} V_4 \overset{E}{—} V_5 \overset{G}{—} V_6$

ii) um circuito de comprimento 5

Segundo o que foi apresentado em sala, um 'caminho fechado (circuito)' é 'um caminho que começa e termina no mesmo vértice', e para comprimento 5 não existe circuito possível em G que satisfaça tal condição. **Logo, não podemos exibir um circuito de comprimento 5 em G pois este não existe no grafo em questão.**

***(Obs. Inclusive, o maior compriemnto possível para circuito em G é 4!)**

//

2)

- Abaixo, o algoritmo imaginado pelo aluno (Em pseudo - código):

******Entrada***: Uma *lista de adjacências* de um grafo *G* com *M* *vetores de adjacências*, cada um com *N* *endereços de vértices* em *G*.**

--

******Saída***: *Δ(G)* de *G*.**

--

*** *Algoritmo* "*Devolve_Grau_Maximo_de_G*":**

--//

```
Δ(G) = 0

Para cada vetor de adjacência na lista de adjacências:
        contador = 0

        Para cada endereço de vértice no vetor de adjacência:
                contador += 1

        Se contador > Δ(G):
                Δ(G) = contador

devolva Δ(G)
```

//--

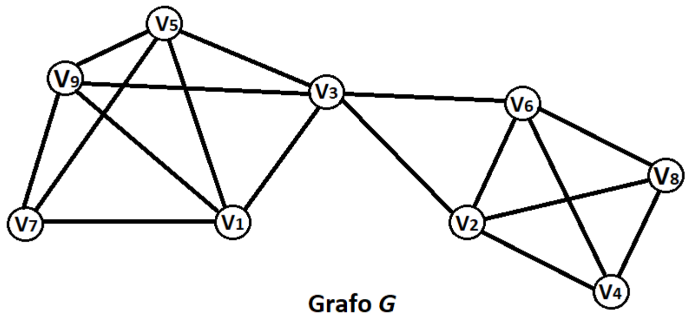
( ) [ ] [ ]
[ ] [ ]
[ ] [ ] [ ]
[ ] [ ]

--

//

3)

i) Primeiro, vamos desenhar o grafo *G* a partir da 'Matriz de Adjacências (MA)' dada:



Grafo *G*

ii) Para o valor de 'x' temos: $\boxed{x = 2}$

Segundo o enunciado da questão: *x* o maior número tal que *G* é *x*-aresta-conexo

Lembrando da definição apresentada em aula sobre 'Aresta Conexidade' sabemos que um grafo *G* só é 'k-aresta-conexo' (Onde , nessa questão, 'k = x') quando for preciso remover PELO MENOS 'k' de suas arestas para 'desconecta-lo' ('Desconectar o grafo'). Assim, para satisfazer essa condição o maior valor possível assumido por x deve ser 2, já que ao remover no máximo DUAS das arestas de *G* (mais precisamente 'V_6,V_3' e 'V_2,V_3') o grafo em questão já se 'desconecta'. Portanto, *G* é '2-aresta-conexo' e , também, é 1-aresta-conexo (Pois se um grafo é 'k-aresta-conexo' ele também deve ser '(k-1)-aresta-conexo', e do mesmo jeito '(k-2)-aresta-conexo' e assim por diante até o mínimo possível de arestas que satisfaçam a condição), mas como o valor de x é dito ser o 'maior número' devemos associá-lo ao maior valor possível assumido por k, que aqui é 2.

iii) Para o valor de 'y' temos: $\boxed{y = 1}$

Segundo o enunciado da questão: *y* o maior número tal que *G* é *y*-vértice-conexo

Lembrando da definição apresentada em aula sobre 'Vértice Conexidade' sabemos que um grafo G só é 'k-vértice-conexo' (Onde , nessa questão, 'k = y') quando for preciso remover PELO MENOS 'k' de seus vértices para 'desconectá-lo'. Assim, para satisfazer essa condição o maior valor possível assumido por y é 1, já que o grafo *G* possúi um 'Vértice de Corte' (Que é V_3) e sua única e simples remoção já aumenta em muito o número de componentes conexas de *G*, logo, *G* é '1-vértice-conexo'.

///

4)

- Abaixo, o algoritmo imaginado pelo aluno (Em pseudo - código):

***_Entrada_: Um grafo _G_ com _N_ vértices e _M_ arestas e um vértice _V_ desse grafo.**

***_Saída_: A quantidade de vértices da componente conexa que contém o vértice _V_.**

*** _Algoritmo_ " _Devolve_Numero_de_Vertices_da_Componente_Conexa_de_V_ ":**

---//

_n_ = Quantidade _N_ de vértices em _G_
_vertices_visitados_ = Vetor de _n_ posições iniciadas em zero
_Fi_ = Fila de _n_ posições

_vertices_visitados_ [_V_] = 1
_vertice_conexo_ = 0

Insere _V_ em _Fi_

Enquanto a fila _Fi_ não estiver vazia

    removido = frente da _Fi_
    Remove 1 elemento da fila _Fi_

    _vertice_conexo_ += 1

    Para cada vértice adjacente _VA_ a variável _removido_

        Se _vertices_visitados_ [_VA_] for igual a zero

            Insere _VA_ em _Fi_
            _vertices_visitados_ [_VA_] = 1

Devolva _vertice_conexo_

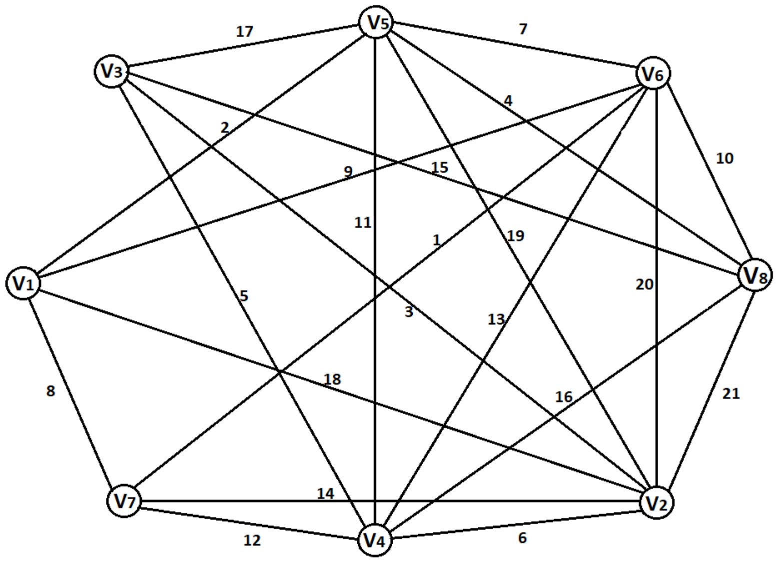
//---

( ) [ ] [ ]
[ ] [ ]
[ ] [ ] [ ]
[ ] [ ]

///

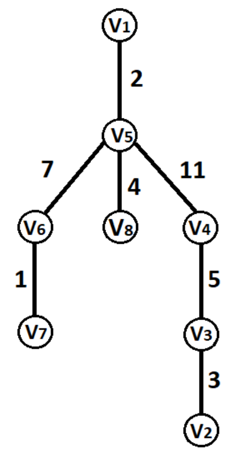
5)

i) Primeiro, vamos desenhar o grafo *G* a partir da 'Matriz de Incidências (MI)' dada colocando, também, os Custos nas devidas arestas:



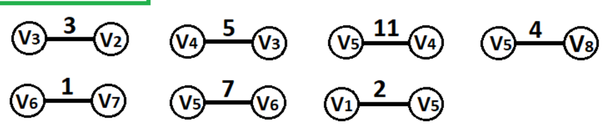
Grafo *G*

ii) Para achar uma **<u>'árvore geradora mínima (AGM)'</u>** de *G* primeiro vamos nos recordar de como achar uma **<u>'árvore geradora (AG)'</u>** de *G*: Deve ser, sendo *G* conexo primeiramente, um subgrafo de G que seja <u>conexo</u>, <u>acíclico</u> e que <u>contenha TODOS os vértices de *G*</u> (Definição seguindo o que foi ensinado até o momento). Logo, para achar uma **<u>'AGM'</u>** de *G* devemos encontrar uma <u>árvore geradora</u> nesse na qual a <u>soma dos custos das arestas seja a MENOR POSSÍVEL</u>. Cientes dessas definições, para o grafo dado na questão temos:



Árvore geradora mínima de *G*
**(Enraizada no vértice 1)*

Custo =



=

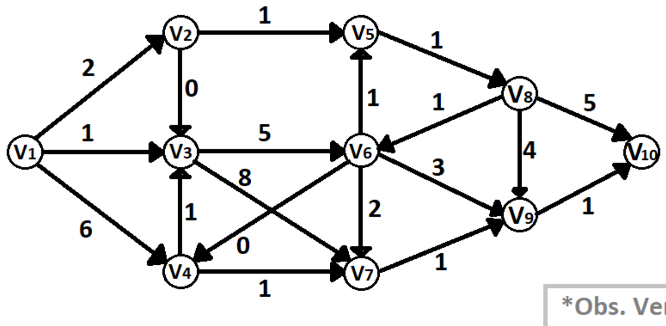
Custo = 3 + 5 + 11 + 4 + 1 + 7 + 2 =

$\boxed{\textbf{Custo = 33}}$

---

6)

i) Primeiro, vamos desenhar o grafo *G* a partir da 'Matriz de Incidências (MI)' dada colocando, também, os Custos nas devidas arestas e seguindo as orientações de 'chegadas' e 'saídas' dos arcos em relação aos seus respectivos vértices:

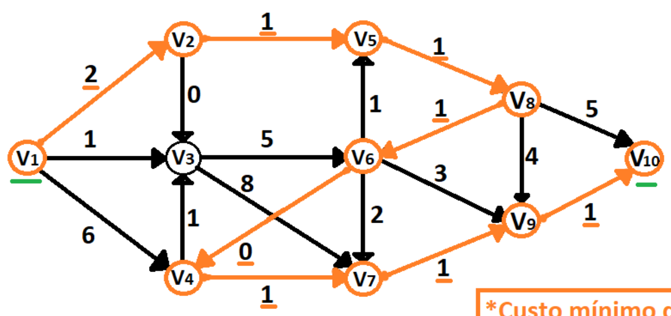


Grafo *G*

*Obs. Vemos que G é um grafo que contém arcos nele, ou seja, é um grafo dirigido (Ou digrafo).

ii) encontre um caminho mínimo entre os vértices v_1 e v_{10}.

Nos lembrando do que foi dito em aula pelo professor sobre o 'Problema do caminho mínimo (PCM)' sabemos que o que esse problema aborda é um grafo dirigido no qual cada arco possui um custo 'Ce', e dois vértices especiais s(origem) e t(destino), e deseja-se encontrar um caminho dirigido de s a t que possua custo mínimo. Sabendo disso, podemos encontrar como um caminho mínimo de G que esteja entre os vértices V_1 e V_{10} o seguinte exemplo de custo igual a 8:



*Custo mínimo de:
$2 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8.$

$V_1 \to V_2, V_2 \to V_5, V_5 \to V_8, V_8 \to V_6, V_6 \to V_4, V_4 \to V_7, V_7 \to V_9, V_9 \to V_{10}$.

Um caminho mínimo entre os vértices V_1 e V_{10} de *G*, com custo = 8.

*Em nosso caminho mínimo escolhido admitimos que V_1 = s(origem) e V_{10} = t(destino) !

**Lembre, também, que o fato de usarmos a palavra 'custo' nesse problema se dá pelo fato de estarmos trabalhando com um grafo com custos nos arcos, por isso, por 'custo de um caminho', nos referimos a soma dos custos dos arcos do caminho!

7)

i) Se $\delta(G) > 1$ então G possui pelo menos um *circuito*. Prove ou refute esta afirmação.

OK!

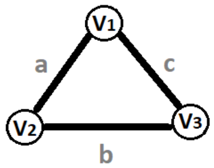
*** Antes de provar ou refutar qualquer coisa, devemos interpretá-la certo? Vamos, então, compreender o que a afirmação está dizendo:**

***Obs. Lembrar que o 'grau de um vértice' é dado pelo número de arestas que lhe são incidentes!**

- "$\delta(G) > 1$": $\delta(G)$ já é um símbolo 'familiar' para nós até esse momento na cadeira e se refere ao grau do vértice de menor grau no grafo *G*. Portanto, dizer que '$\delta(G) > 1$' é o mesmo que afirmar que o grau do vértice de menor grau em G é maior que 1!

- "possui pelo menos um *circuito*": Que o grafo G deve adimitir pelo menos um caminho que começa e termina no mesmo vértice (Onde por 'caminho' nos referimos: "*A uma 'trilha' que não passe mais de uma vez pelo mesmo vértice*". E por 'trilha' queremos dizer um "*tipo específico de 'passeio' no grafo G onde não é permitido a repetição de arestas*").

**** Tendo em mente as definições lembradas que existem na afirmação podemos entender que: { "Se o grau do vértice de menor grau de G é maior que 1, temos PELO MENOS na estrutura de tal grafo que 2 arestas devem estar convectadas a outros 2 vértices distintos". } <<< O menor grafo que é possível se construir baseado nessa interpretação pode ser representado na seguinte forma:**



Grafo *G* (K3)

(Menor exemplo de um grafo G onde $\delta(G)>1$)

Alguns possíveis circuitos de *G ao lado podem ser*:

- (a,b,c): $V_1 \xrightarrow{a} V_2 \xrightarrow{b} V_3 \xrightarrow{c} V_1$
- (b,c,a): $V_2 \xrightarrow{b} V_3 \xrightarrow{c} V_1 \xrightarrow{a} V_2$
- (c,a,b): $V_3 \xrightarrow{c} V_1 \xrightarrow{a} V_2 \xrightarrow{b} V_3$

...

***** Do exemplo acima, reiteramos a firmação de que se $\delta(G)>1$ o grafo G irá conter ao menos 1 caminho de 'tamanho' $\delta(G)$, bem como um circuito de tamanho mínimo $\delta(G) + 1$ (Que foi provado/afirmado nos argumento anteriores junto ao exemplo do grafo K3 mostrado acima, que é o menor exemplo de grafo com $\delta(G)>1$ e que possúi ao menos um circuito). Dito isso, para garantir que essa afirmação se preserve, também, em outros grafos além do nosso K3 usado como 'exemplo' introdutório basta ligarmos sempre a K3 um novo vértice com duas arestas no mesmo (No grafo K3 e assim sucessivamente para os grafos resultantes dessas ligações tendo K3 como base inicial dessas ligações), pois, assim, iremos garantir que nos novos grafos formados a partir dessas ligações o próprio grafo K3 'original' esteja dentro desses (agora como um subgrafo), o que tornará possível fazer nesse grafos (Que seguem essa característica de se formarem através dessa ligação de vertices com duas arestas que garante que $\delta(G)>1$) ao menos um circuito possível, o do próprio K3 que estará dentro deles pois é a 'base' usada para formá-los, logo, temos sim que é possível sim, para $\delta(G)>1$, que um grafo G (aqui, sendo no mínimo K3 ou um outro formado pela ligação de vértices com duas arestas ligadas nesse mesmo grafo) possa ter ao menos 1 circuito.**

(Que é o que queriamos provar!)

8) i) Exiba uma representação planar de *G*. Se não for possível, justifique.

(I) (II)

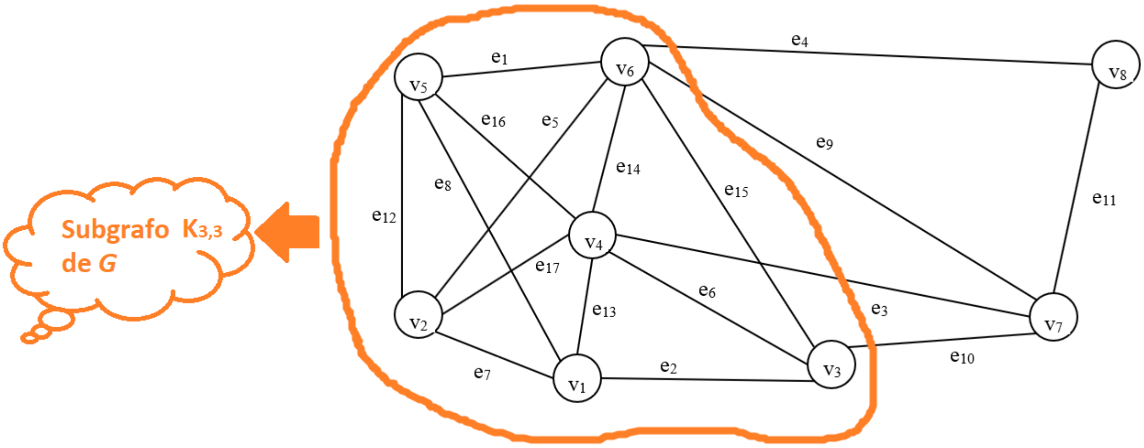
(I) Primeiro, vamos nos lembrar, com base no que foi definido em aula, do conceito de 'planaridade' que diz que para um grafo ser dito 'planar' ele deve ser representado no plano sem que suas arestas se cruzem! Portanto, para que seja possível exibir uma representação planar de *G* o mesmo deve seguir tal definição (Seja o próprio grafo em si ou qualquer uma das suas subdivisões possíveis).

(II) *Sabendo o que a questão nos pede para exibir e olhando o grafo *G* que nos é dado, concluímos que não é possível obter uma representação planar de *G*. Pois, *G* possúi um subgrafo $K_{3,3}$ o que entra numa das condições definidas no Teorema de Kuratowski mostrado (E definido) em sala para um grafo não ser planar: "Um grafo é planar se e somente se ele não possui uma subdivisão K_5 nem do $K_{3,3}$".

subdivisão

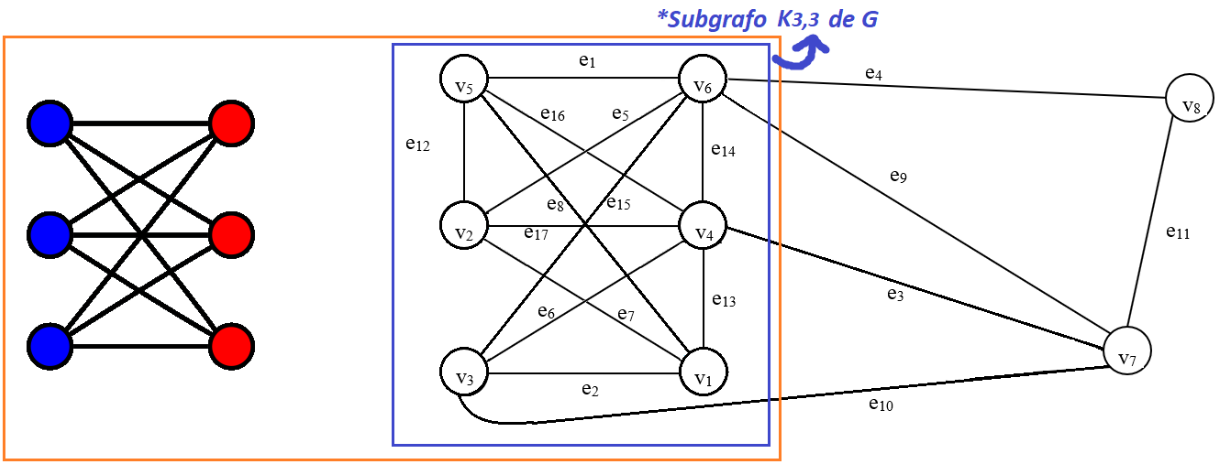
Que é o nosso caso!

**Abaixo o desenho desse subgrafo $K_{3,3}$ de *G*:



Grafo *G*

***Mesmo destacando o subgrafo $K_{3,3}$ de *G* acima, abaixo 'redesenhei' esse subgrafo de *G* de forma a ficar mais 'visível' sua semelhança com a estrutura mais comumente associada a um grafo $K_{3,3}$, veja:



Grafo não-planar $K_{3,3}$
(Com o menor número de arestas possível)

Grafo *G*
(Redesenhado pelo aluno)

De fato, reorganizando as estruturas podemos ver melhor que *G* possúi um subgrafo $K_{3,3}$ e realmente não pode ter uma representação planar!

( ) [ ] [ ]
[ ] [ ]
[ ] [ ] [ ]
[ ] [ ]

~Fim*

//--

-- ---

Excelente!!

Questão 1: 3 pontos
Questão 2: 1 ponto
Questão 3: faltou afirmar que g não possui ponte e é conexo 0,8 pontos
Questão 4: deveria devolver a quantidade de vértices da componente conexa de v 0,8 pontos
Questão 5: 1 ponto
Questão 6: 1 ponto
Questão 7: nem todo grafo com grau mínimo maior que 1 contém o K3 0,4 pontos
Questão 8: 1 ponto

***Obs. Ao lado as 3 questões que não acertei 100%, ainda, assim, se quiser ver a resolução das questões certas de forma detalhada pode ver esse arquivo!**