INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 16-03-2021

Apresentação da Disciplina

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Conteúdo – 1ª etapa

- Conceitos, notações e termos básicos
- Estruturas de dados para representação de grafos
- Percursos em grafos: passeios, trilhas e caminhos
- Conexidade
- Aresta-conexidade
- Vértice-conexidade
- Ciclos em grafos
- Árvore geradora de custo mínimo
- Problema do caminho mínimo
- Planaridade

Conteúdo – 2ª etapa

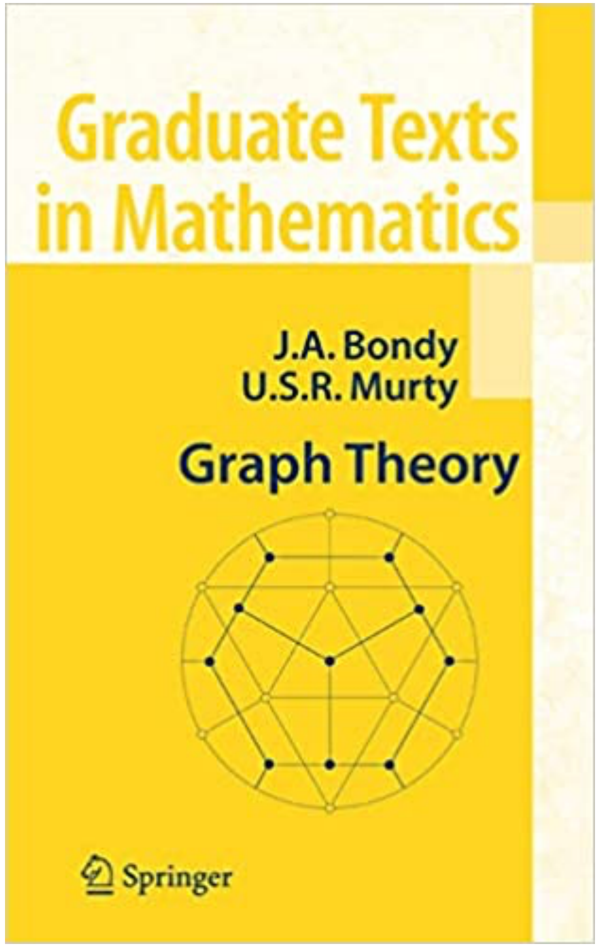
- Trilhas de Euler
- Coloração de arestas
- Coloração de vértices
- Emparelhamentos em grafos bipartidos
- Fluxos em redes

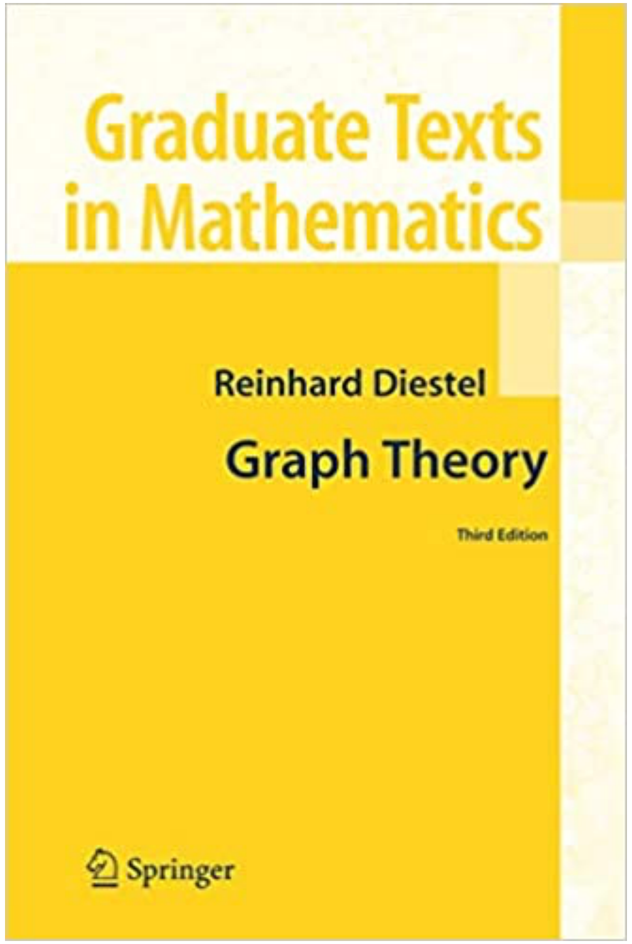
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Bibliografia

Bondy & Murty, Graph Theory

Diestel, Graph Theory





Frequência

Controle através do Meet Attendance

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 18-03-2021

Conceitos, termos e notações – Parte 1

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

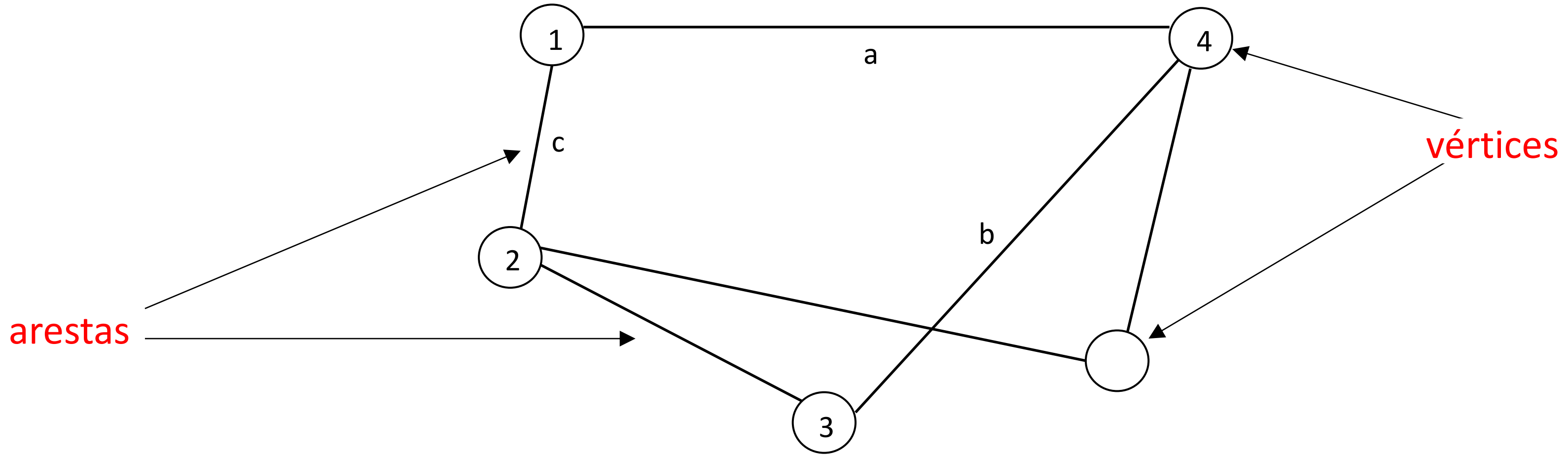
Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Conceitos, termos e notações

Um *grafo* é uma estrutura constituída de vértices ligados por arestas. Os vértices e as arestas podem ou não ser rotulados.

Ex:



Formalmente, um grafo é uma tripla ordenada na qual o primeiro elemento da tripla é um conjunto de vértices, o segundo elemento é um conjunto de arestas e o terceiro é uma função que associa cada aresta a um par de vértices.
A notação $G = (V, E, \delta)$ indica que G é um grafo constituído pelo conjunto V de vértices, E de arestas e $\delta: E \longrightarrow V^2$ é uma função que associa cada aresta a um par de vértices. Por simplicidade, vamos denotar $G = (V, E)$.

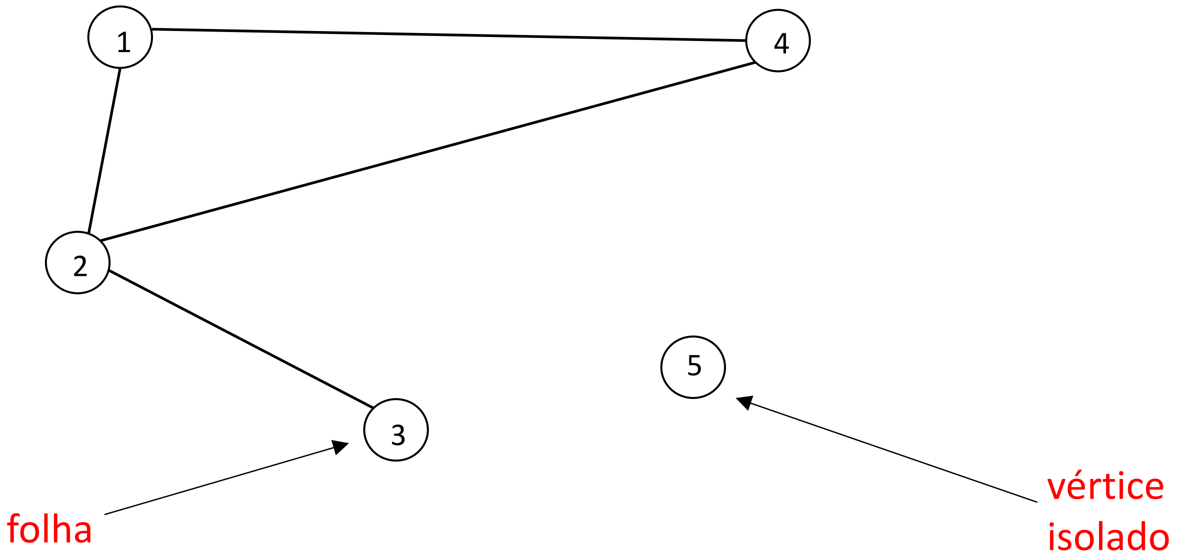
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

A *ordem* de G, denotada por ordem(G), é a quantidade de vértices de G. O *tamanho* de G, denotado por tam(G), é a quantidade de arestas de G.
Se uma aresta conecta os vértices u e v dizemos que ela *incide* em u e em v. O *grau* de um vértice é a quantidade de extremidades de arestas que incidem nesse vértice. O grau de um vértice v é denotado por d(v). Um vértice de grau 0 é chamado de *vértice isolado*. Um vértice de grau 1 é chamado de *folha*.

Ex:

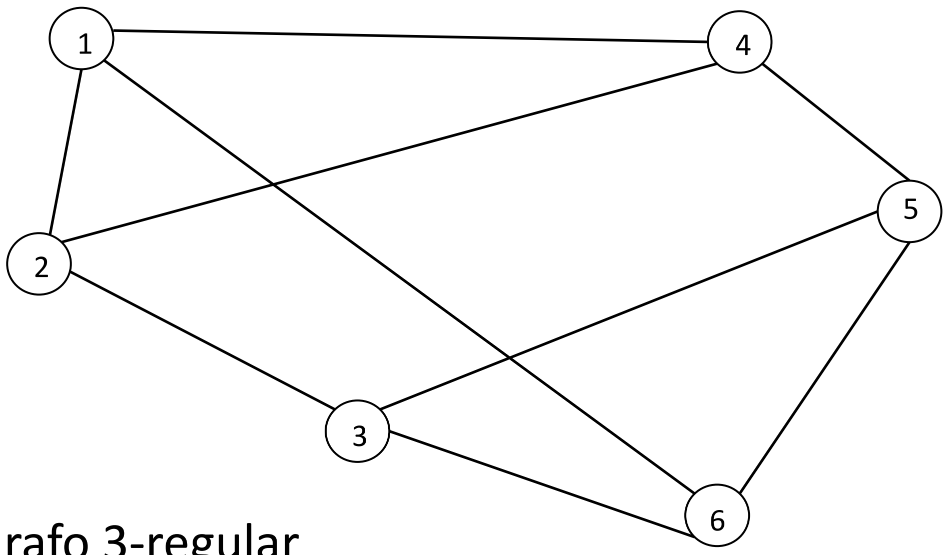
G

ordem(G) = 5
tam(G) = 4
d(2) = 3



O *grafo vazio* é o grafo que não possui nenhum vértice. Um grafo é *dito trivial* (ou *singular*) se possui apenas um vértice (e nenhuma aresta).
Um grafo é dito *regular* se todos os seus vértices têm o mesmo grau. Se todos os vértices de um grafo têm grau *k*, dizemos que ele é *k-regular*.

Ex:

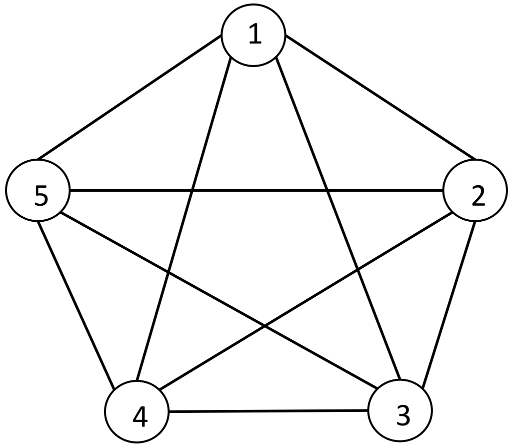


Grafo 3-regular

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Um grafo é dito *completo* se cada um de seus vértices está ligado a todos os demais vértices. O grafo completo de ordem n é chamado de k_n.

Ex:

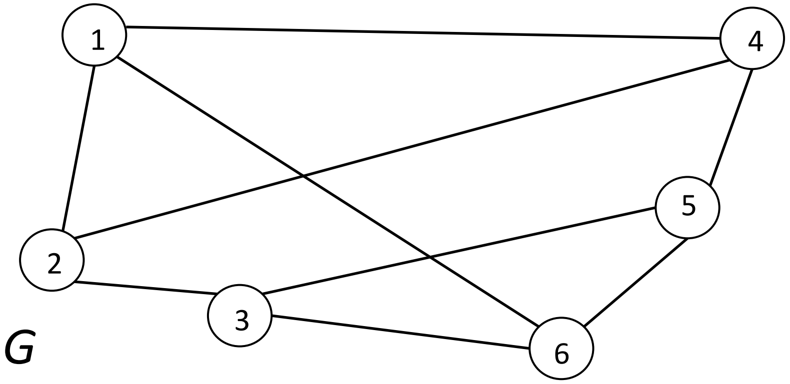


k_5

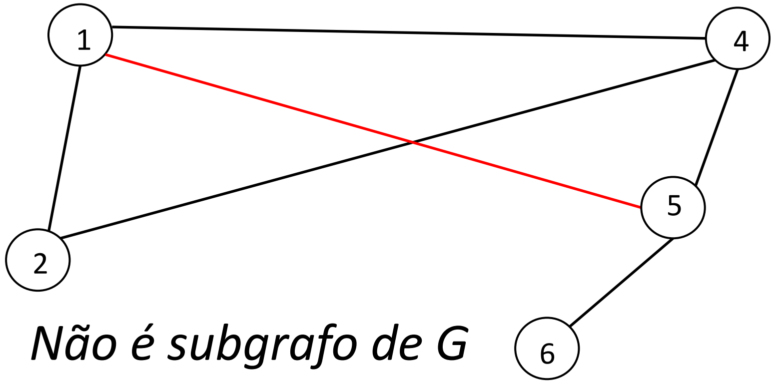
Diversão para casa: qual o tamanho do k_n?

Sejam $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$. Se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$ dizemos que G' é um *subgrafo* de G. Dizemos também que G é um *supergrafo* de G'. Nesse caso, se $G' \neq G$, dizemos que G' é um *subgrafo próprio* de G e que G é um *supergrafo próprio* de G'.

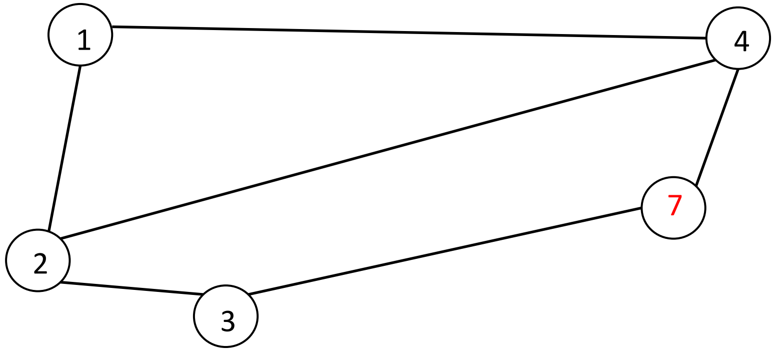
Ex:



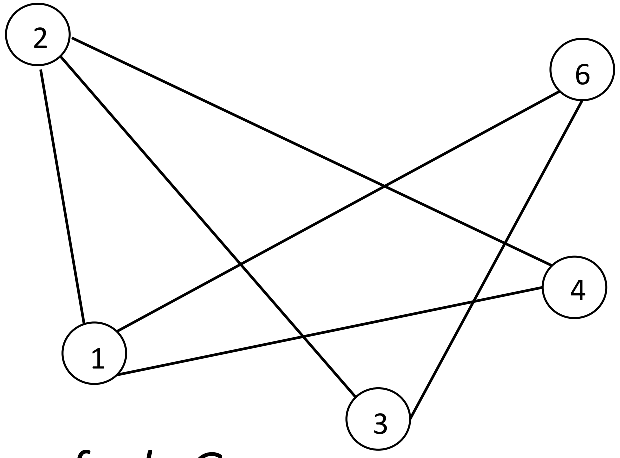
G



Não é subgrafo de G



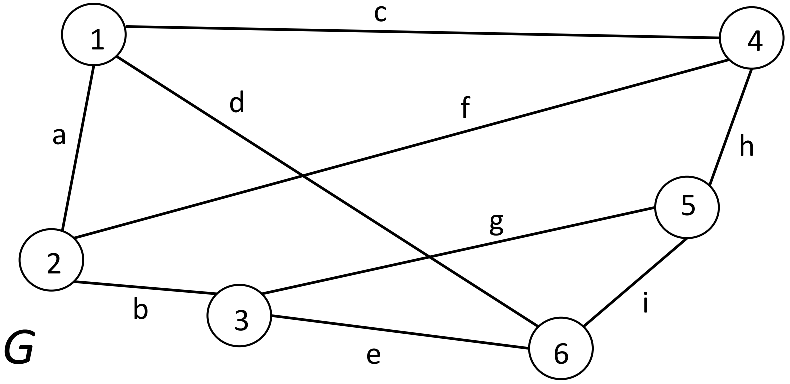
Não é subgrafo de G



Subgrafo de G

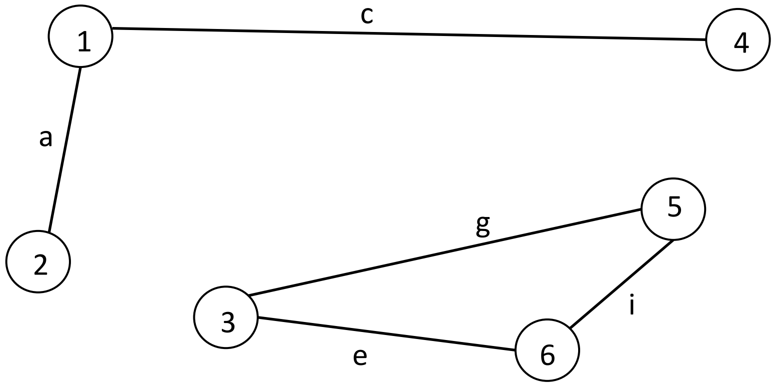
Sejam $G = (V, E)$ e $E' \subseteq E$. O subgrafo de G induzido por E', denotado por $G[E']$, é o subgrafo de G que contém todos os vértices de G mas apenas as arestas de E'.
Seja $V' \subseteq V$. O subgrafo de G induzido por V', denotado por $G[V']$, é o grafo obtido a partir de G removendo todos os vértices que não pertencem a V' e naturalmente todas as arestas incidentes nos vértices removidos.

Ex:

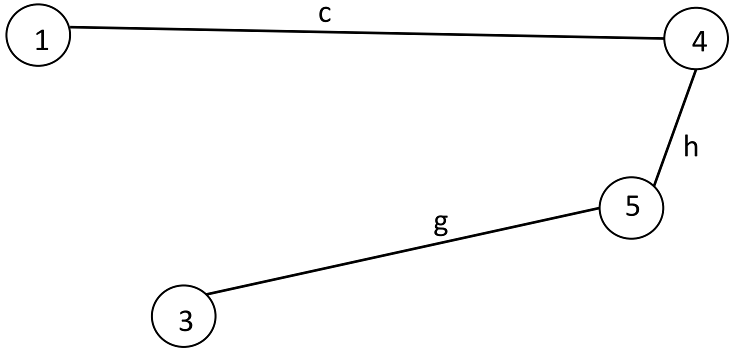


G

$E' = \{a, c, e, g, i\}$
$V' = \{1, 3, 4, 5\}$



$G[E']$



$G[V']$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 23-03-2021

Conceitos, termos e notações – Parte 2

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

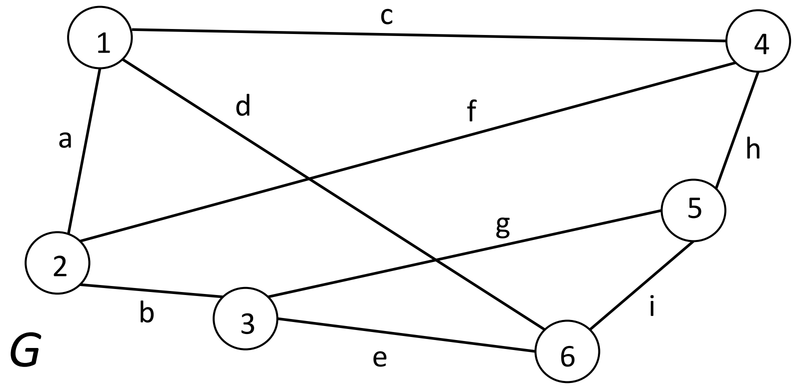
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Conceitos, termos e notações

Dizemos que dois vértices são *adjacentes* se existe uma aresta entre eles.
Dizemos que duas arestas são *adjacentes* se elas incidem num mesmo vértice.

Ex:



1 e 6 são adjacentes
1 e 5 não são adjacentes

a e b são adjacentes
b e h não são adjacentes

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

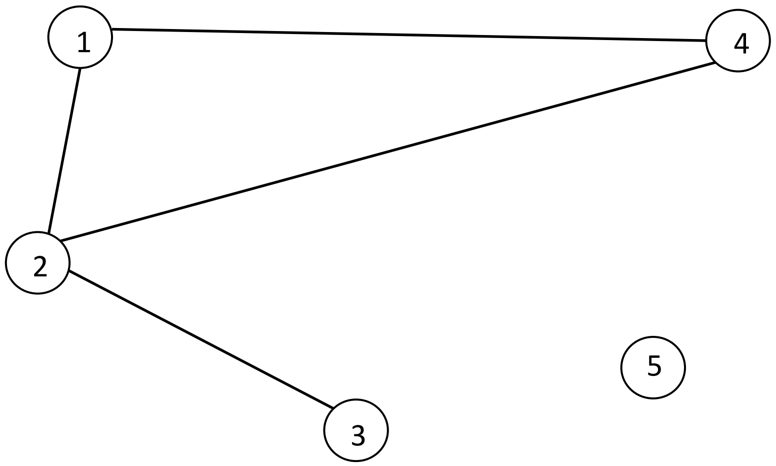
O *grau máximo* de um grafo G, denotado por $\Delta(G)$, é o grau de um vértice que tem o maior grau em G.
O *grau mínimo* de um grafo G, denotado por $\delta(G)$, é o grau de um vértice que tem o menor grau em G.

Ex:

G

$\Delta(G) = 3$

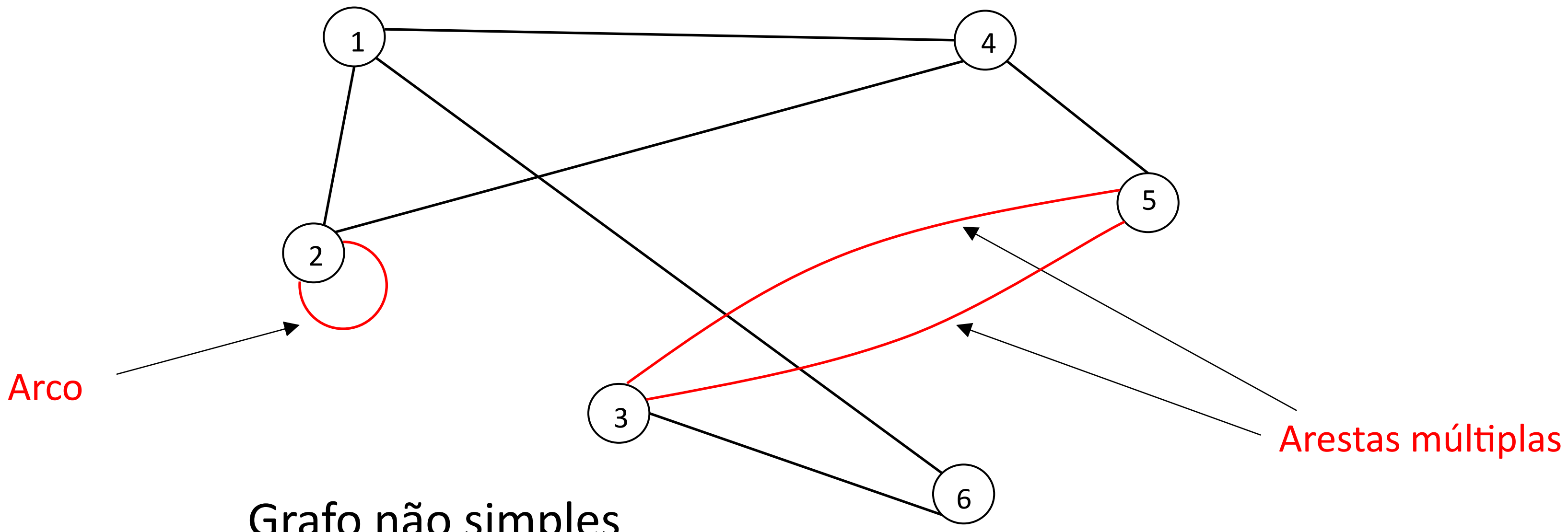
$\delta(G) = 0$



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Um *laço* é um aresta que incide duas vezes num mesmo vértice.
Se duas arestas incidem num mesmo par de vértices dizemos que elas são *arestas múltiplas*.
Um grafo que possui laços ou arestas múltiplas é chamado de *não simples*. A não ser quando explicitamente indicado em contrário, trabalharemos apenas com grafos *simples*.

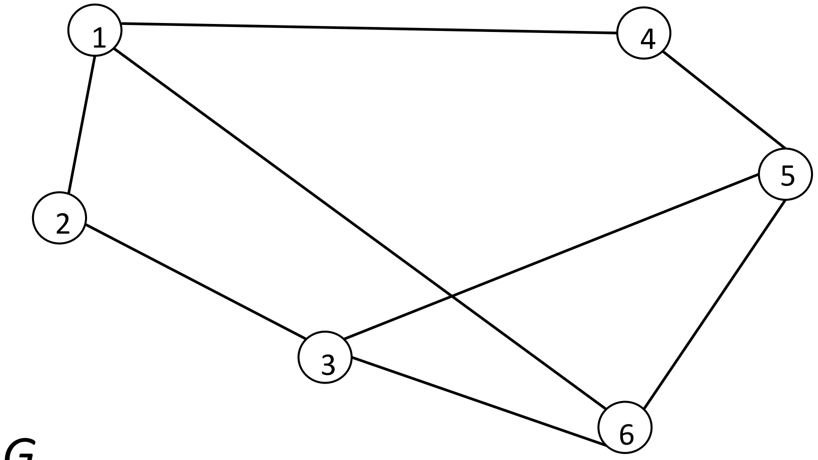
Ex:



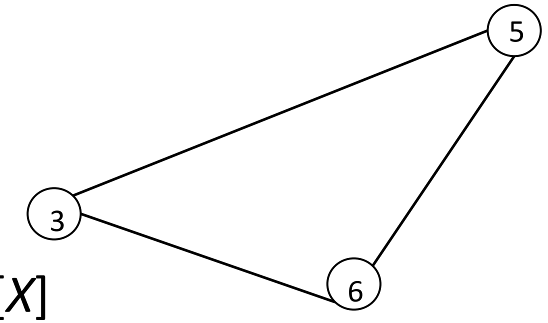
Grafo não simples

Seja X um conjunto de vértices de um grafo G. Dizemos que X é um *clique* de G se os vértices de X são todos *dois-a-dois adjacentes*. Note que $G[X]$ é um grafo completo.
Se os vértices de X são todos *dois-a-dois não adjacentes* dizemos que X é um *conjunto independente* (ou *estável*) de vértices de G. Observe que $G[X]$ contém apenas vértices isolados.

Ex:

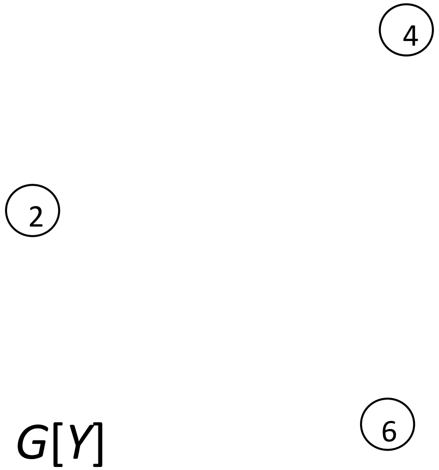


G



$G[X]$

X é um clique de G



$G[Y]$

Y é um conjunto independente de G

$X = \{3, 5, 6\}$
$Y = \{2, 4, 6\}$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 30-03-2021

Estruturas de dados para representação de grafos

Prof: Glauber Cintra
glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

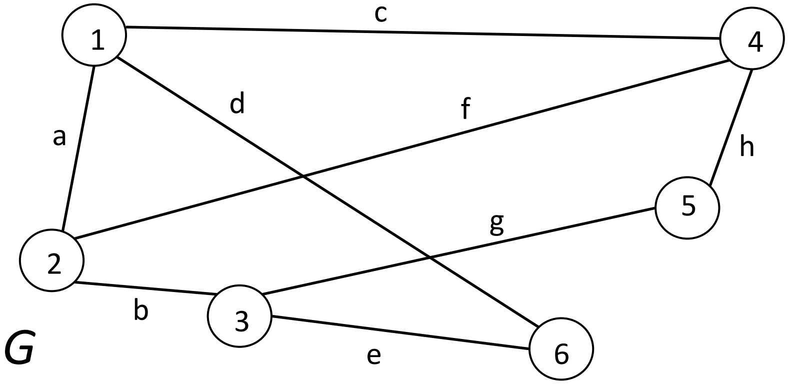
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Lista de Adjacências

A lista de adjacências (LA) de um grafo é constituída de um vetor com uma posição para cada vértice do grafo. Nesse vetor, a posição correspondente ao vértice *i* aponta para uma *lista ligada* que contém todos os vértices adjacentes ao vértice *i*.

Ex:



G

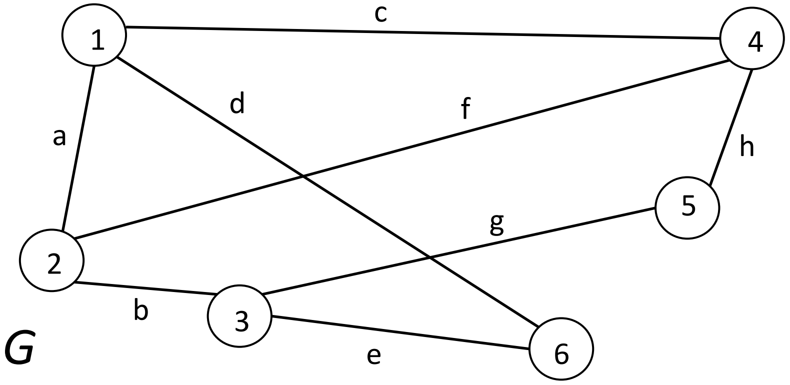
1 → 2 → 4 → 6
2 → 1 → 3 → 4
3 → 2 → 5 → 6
4 → 1 → 2 → 5
5 → 3 → 4
6 → 1 → 3

LA de *G*

Lista de Incidências

A lista de incidências (LI) de um grafo é constituída de um vetor com uma posição para cada vértice do grafo. Nesse vetor, a posição correspondente ao vértice *i* aponta para uma *lista ligada* que contém todas as arestas incidentes no vértice *i*.

Ex:



G

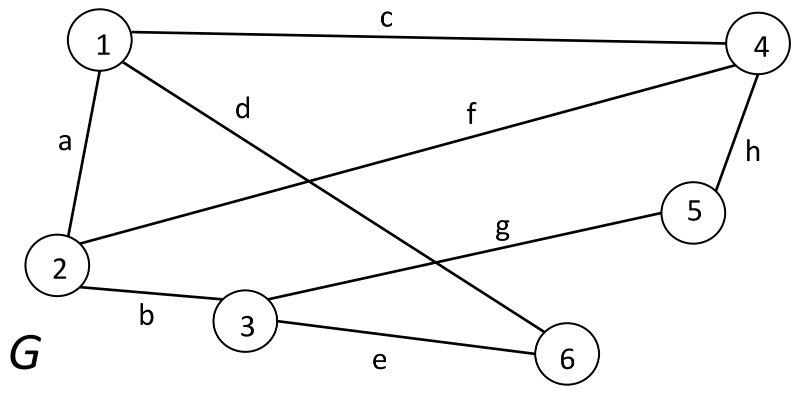
1 → a → c → d
2 → a → b → f
3 → b → e → g
4 → c → f → h
5 → g → h
6 → d → e

LI de *G*

Matriz de Adjacências

A matriz de adjacências (MA) de um grafo é constituída de uma linha e uma coluna para cada vértice do grafo. A posição (*i*, *j*) da matriz indica se o vértice *i* é adjacente ao vértice *j*.

Ex:



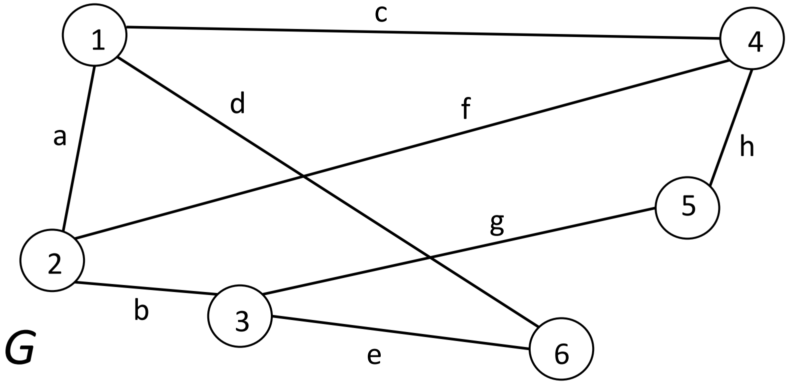
	1	2	3	4	5	6
1		1		1		1
2	1		1	1		
3		1			1	1
4	1	1			1	
5			1	1		
6	1		1			

MA de *G*

Matriz de Incidências

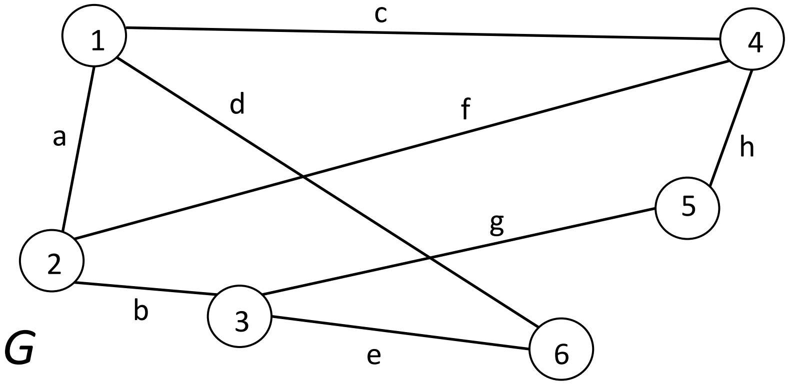
A matriz de incidências (MI) de um grafo é constituída de uma linha para cada vértice e uma coluna para cada aresta do grafo. A posição (*i*, *j*) da matriz indica se a aresta *j* incide no vértice *i*.

Ex:



	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1		1	1				
2	1	1				1		
3		1			1		1	
4			1			1		1
5							1	1
6				1	1			

MI de *G*



G

	1	2	3	4	5	6
1		1		1		1
2	1		1	1		
3		1			1	1
4	1	1			1	
5			1	1		
6	1		1			

MA

1 → 2 → 4 → 6
2 → 1 → 3 → 4
3 → 2 → 5 → 6
4 → 1 → 2 → 5
5 → 3 → 4
6 → 1 → 3

LA

1 → a → c → d
2 → a → b → f
3 → b → e → g
4 → c → f → h
5 → g → h
6 → d → e

LI

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1		1	1				
2	1	1				1		
3		1			1		1	
4			1			1		1
5							1	1
6				1	1			

MI

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Vamos denotar por n a quantidade vértices e por m a quantidade de arestas de um grafo.
A quantidade de memória requerida por cada uma das estruturas de dados é:

LA	$\Theta(n + m)$
LI	$\Theta(n + m)$
MA	$\Theta(n^2)$
MI	$\Theta(n.m)$

Seja C uma classe de grafos. Se $m \in O(n)$ dizemos que C é uma classe de grafos *esparsos*.
Se $m \in \Theta(n^2)$ dizemos que C é uma classe de grafos *densos.* Nesse caso, a quantidade de memória requerida é:

	Grafos esparsos	Grafos densos
LA	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$
LI	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$
MA	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
MI	$O(n^2)$	$\Theta(n^3)$

Vejamos o tempo requerido para realizar algumas operações nessas estruturas de dados.

	LA	LI	MA	MI
Verificar se dois vértices *u* e *v* são adjacentes				
Determinar o grau de *v*				
Inserir um novo vértice				
Inserir uma nova aresta (*u*, *v*)				
Remover um vértice				
Remover a aresta (*u*, *v*)				

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 06-04-2021

Estruturas de dados para representação de grafos

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

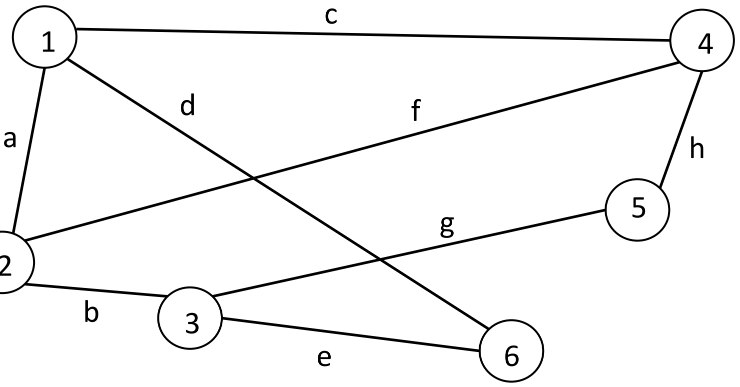
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Lista de Adjacências

A lista de adjacências (LA) de um grafo é constituída de um vetor com uma posição para cada vértice do grafo. Nesse vetor, a posição correspondente ao vértice *i* aponta para uma *lista ligada* que contém todos os vértices adjacentes ao vértice *i*.

Ex:



G

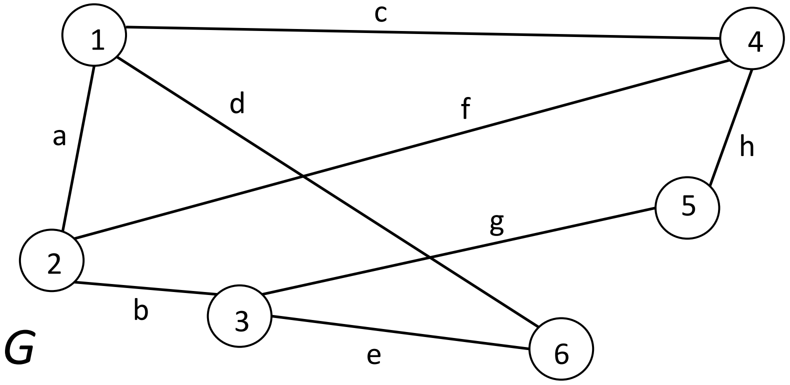
1	→ 2 → 4 → 6
2	→ 1 → 3 → 4
3	→ 2 → 5 → 6
4	→ 1 → 2 → 5
5	→ 3 → 4
6	→ 1 → 3

LA de *G*

Lista de Incidências

A lista de incidências (LI) de um grafo é constituída de um vetor com uma posição para cada vértice do grafo. Nesse vetor, a posição correspondente ao vértice *i* aponta para uma *lista ligada* que contém todas as arestas incidentes no vértice *i*.

Ex:



G

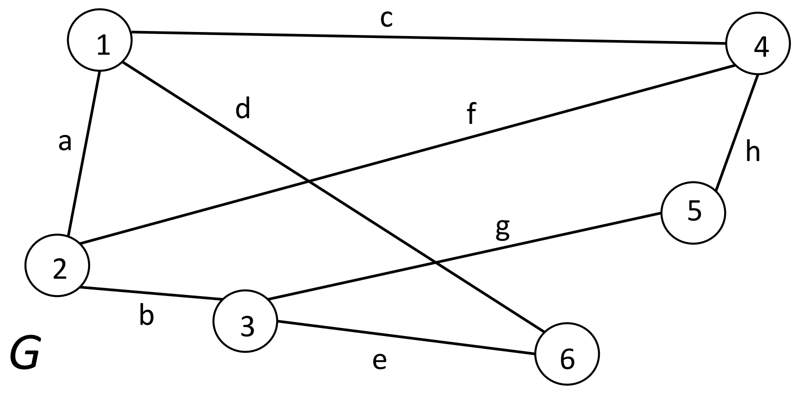
1 → a → c → d
2 → a → b → f
3 → b → e → g
4 → c → f → h
5 → g → h
6 → d → e

LI de *G*

Matriz de Adjacências

A matriz de adjacências (MA) de um grafo é constituída de uma linha e uma coluna para cada vértice do grafo. A posição (*i*, *j*) da matriz indica se o vértice *i* é adjacente ao vértice *j*.

Ex:



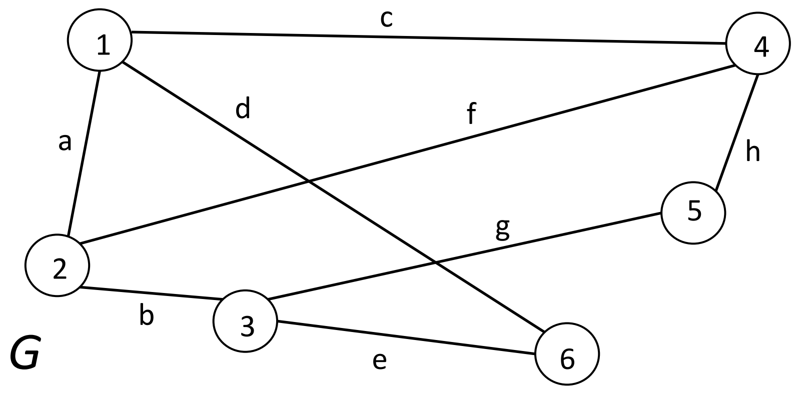
	1	2	3	4	5	6
1		1		1		1
2	1		1	1		
3		1			1	1
4	1	1			1	
5			1	1		
6	1		1			

MA de *G*

Matriz de Incidências

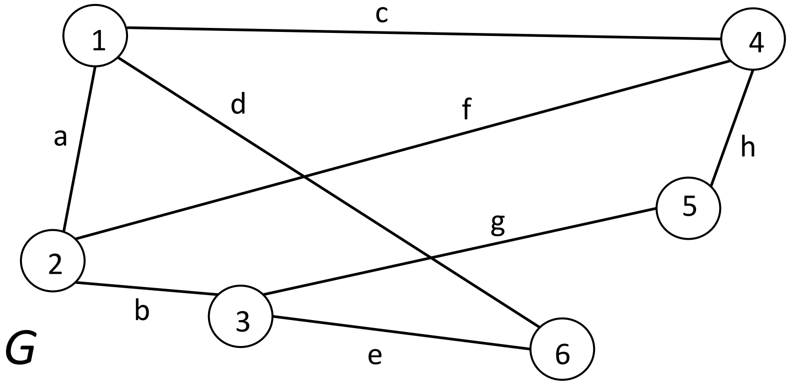
A matriz de incidências (MI) de um grafo é constituída de uma linha para cada vértice e uma coluna para cada aresta do grafo. A posição (*i, j*) da matriz indica se a aresta *j* incide no vértice *i*.

Ex:



	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1		1	1				
2	1	1				1		
3		1			1		1	
4			1			1		1
5							1	1
6				1	1			

MI de *G*



	1	2	3	4	5	6
1		1		1		1
2	1		1	1		
3		1			1	1
4	1	1			1	
5			1	1		
6	1		1			

MA

1		→ 2 → 4 → 6
2		→ 1 → 3 → 4
3		→ 2 → 5 → 6
4		→ 1 → 2 → 5
5		→ 3 → 4
6		→ 1 → 3

LA

1		→ a → c → d
2		→ a → b → f
3		→ b → e → g
4		→ c → f → h
5		→ g → h
6		→ d → e

LI

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1		1	1				
2	1	1				1		
3		1			1		1	
4			1			1		1
5							1	1
6				1	1			

MI

Vamos denotar por n a quantidade vértices e por m a quantidade de arestas de um grafo.
A quantidade de memória requerida por cada uma das estruturas de dados é:

LA	$\Theta(n + m)$
LI	$\Theta(n + m)$
MA	$\Theta(n^2)$
MI	$\Theta(n.m)$

Seja C uma classe de grafos. Se $m \in O(n)$ dizemos que C é uma classe de grafos *esparsos*.
Se $m \in \Theta(n^2)$ dizemos que C é uma classe de grafos *densos.* Nesse caso, a quantidade de memória requerida é:

	Grafos esparsos	Grafos densos
LA	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$
LI	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$
MA	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
MI	$O(n^2)$	$\Theta(n^3)$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Vejamos o tempo requerido para realizar algumas operações nessas estruturas de dados.

	LA	LI	MA	MI
Verificar se dois vértices *u* e *v* são adjacentes	O(d(u) + d(v))	O((d(u) + d(v)) * logd(u))	O(1)	O(m)
Determinar o grau de *v*	Θ(d(*v*))	Θ(d(*v*))	Θ(n)	Θ(m)
Inserir um novo vértice	Θ(n)	Θ(n)	Θ(n^2)	Θ(n*m)
Inserir uma nova aresta (*u*, *v*)	O(d(u) + d(v))	O((d(u) + d(v)) * logd(u))	O(1)	O(n*m)
Remover um vértice	O(n + m)	O(n + m)	Θ(n^2)	Θ(n*m)
Remover a aresta (*u*, *v*)	O(d(u) + d(v))	O((d(u) + d(v)) * logd(u))	O(1)	Θ(n*m)

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 08-04-2021

Percursos em Grafos

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

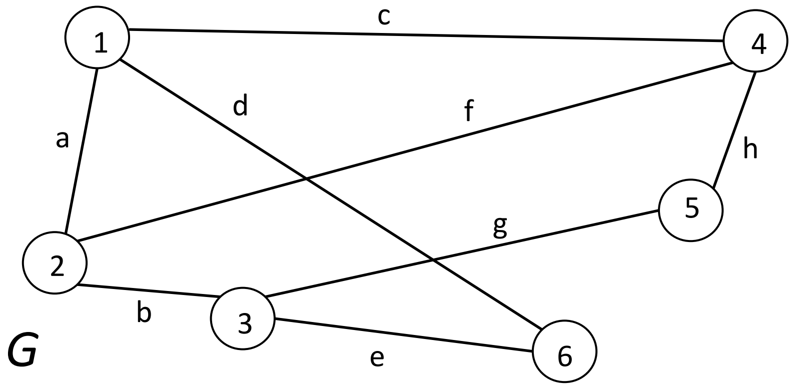
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Passeios

Um *passeio* é uma sequência de arestas de um grafo tal que:

- Se duas arestas distintas são consecutivas no passeio então elas são adjacentes no grafo
- Se três arestas distintas (a_1, a_2, a_3) são consecutivas no passeio então a_3 não pode incidir no mesmo vértice que a_1 e a_2 incidem.

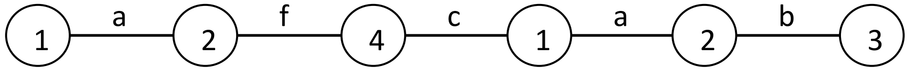
Ex:



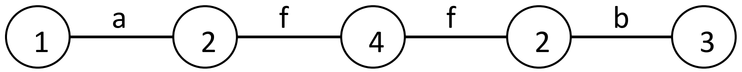
(a, f, g) não é passeio

(a, f, b) não é passeio

(a, f, c, a, b) é passeio

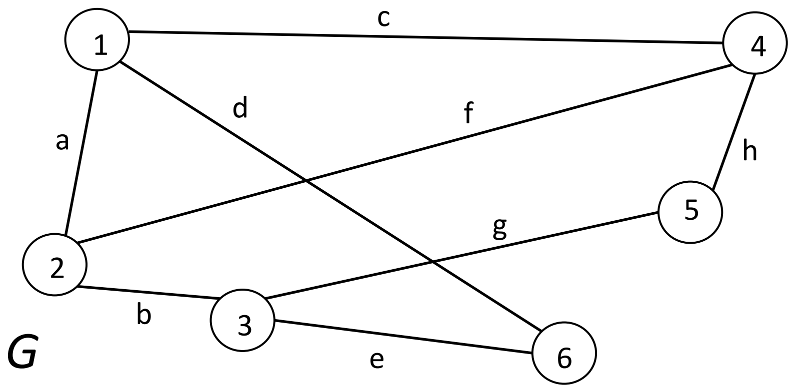


(a, f, f, b) é passeio

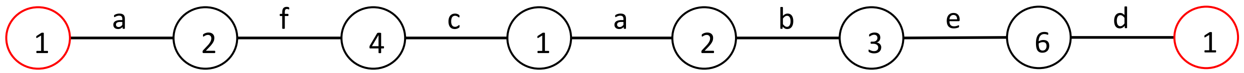


Um passeio é *fechado* se ele começa e termina num mesmo vértice

Ex:



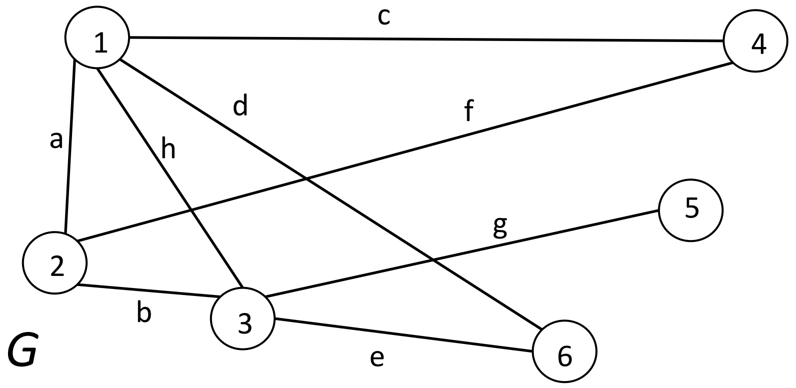
Passeio fechado: (*a, f, c, a, b, e, d*)



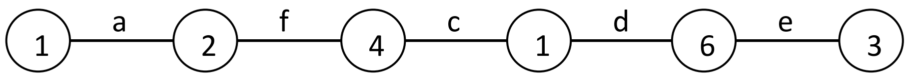
Trilhas

Uma *trilha* é um passeio sem arestas repetidas. Uma *trilha fechada* (*ciclo*) é uma trilha que começa e termina no mesmo vértice.

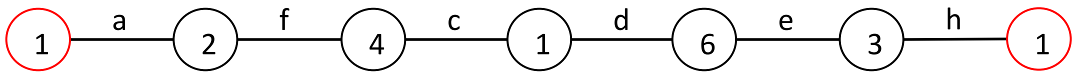
Ex:



Trilha: (*a, f, c, d, e*)



Trilha fechada: (*a, f, c, d, e, h*)

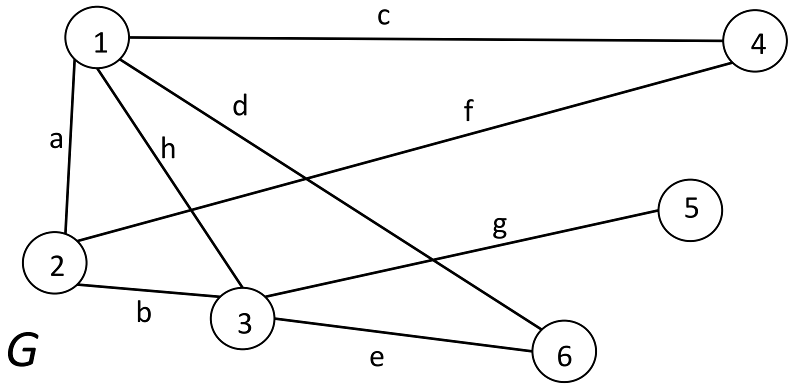


INSTITUTO FEDERAL
Ceará

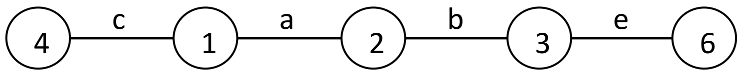
Caminhos

Um *caminho* é uma trilha que não passa mais de uma vez pelo mesmo vértice. Um *caminho fechado* (*circuito*) é um caminho que começa e termina no mesmo vértice.

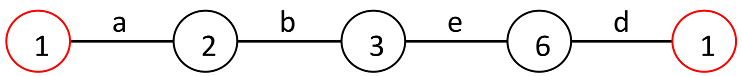
Ex:



Caminho: (*c, a, b, e*)

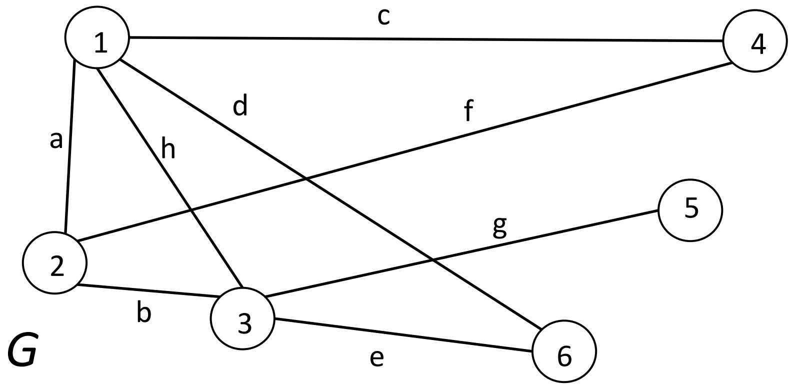


Circuito: (*a, b, e, d*)

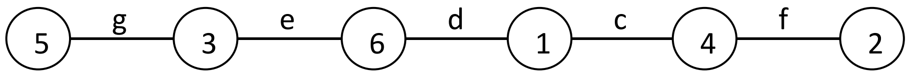


O *comprimento* de um passeio é a quantidade de elementos da sequência de arestas que compõem o passeio.
A *cintura* de um grafo *G*, denotada por G(*G*), é o comprimento de um caminho aberto mais longo de *G*.

Ex:



Caminho mais longo: (*g, e, d, c, f*)



G(*G*) = 5

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 13-04-2021

Conexidade

Prof: Glauber Cintra
glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

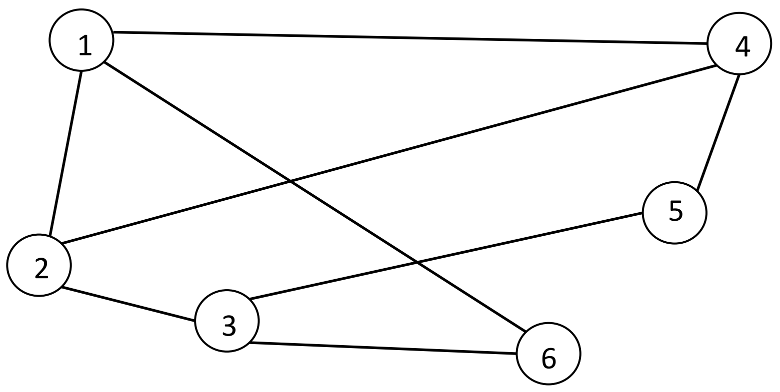
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

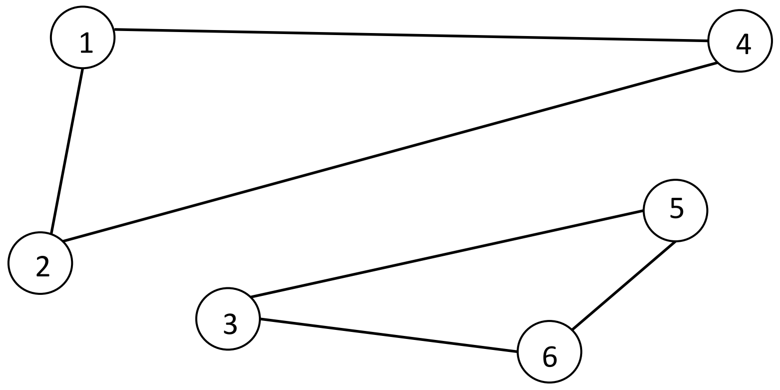
Conexidade

Um grafo é dito *conexo* se para todo par de vértices do grafo sempre existe um caminho entre eles.

Ex:



Grafo conexo

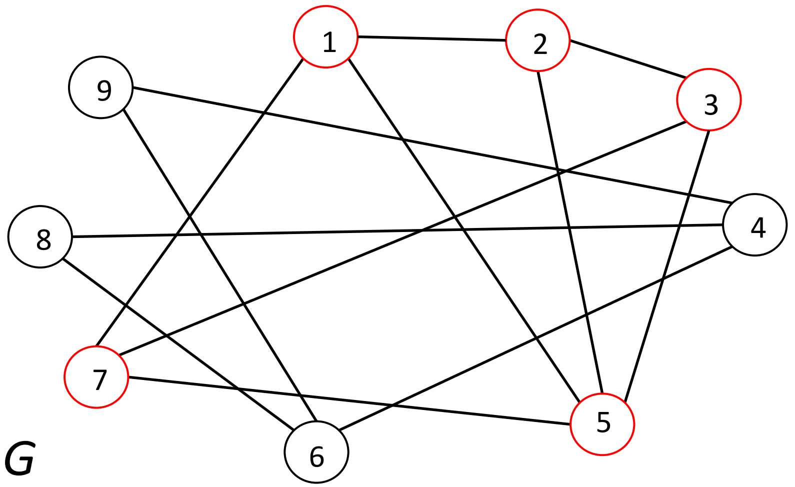


Grafo desconexo

Como testar se um grafo é conexo?

Algoritmo Conexo

```
Entrada: um grafo G com n vértices e m arestas
Saída: Sim, se G é conexo; Não, caso contrário
visitado[1] = verdadeiro
para i = 2 até n
        visitado[i] = falso
crie uma fila F com n posições
insira o vértice 1 em F
enquanto F não estiver vazia
        remova de F obtendo u
        para cada vértice w adjacente a u
                se visitado[w] = falso
                        visitado[w] = verdadeiro
                        insira w em F
Se existir vértice v tal que visitado[v] = falso
        devolva Não
se não
        devolva Sim
```



G

LA de G

1	→ 2 → 5 → 7
2	→ 1 → 3 → 5
3	→ 2 → 5 → 7
4	→ 6 → 8 → 9
5	→ 1 → 2 → 3 → 7
6	→ 4 → 8 → 9
7	→ 1 → 3 → 5
8	→ 4 → 6
9	→ 4 → 6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
visitado	V	V	V		V		V		

F = ~~1~~, ~~2~~, ~~5~~, ~~7~~, ~~3~~

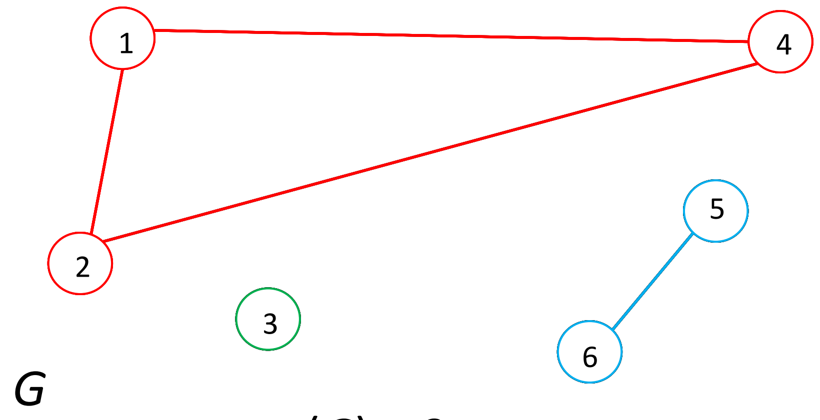
u = 1, 2, 5, 7, 3

Obs: O Algoritmo Conexo requer tempo $O(n + m)$ e espaço $\Theta(n)$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Uma *componente conexa* de G é um subgrafo não vazio de G que é *conexo e maximal*.
A quantidade de componentes conexas de G é denotada por $w(G)$.

Ex:



$w(G) = 3$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 15-04-2021

Aresta-conexidade

Prof: Glauber Cintra
glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

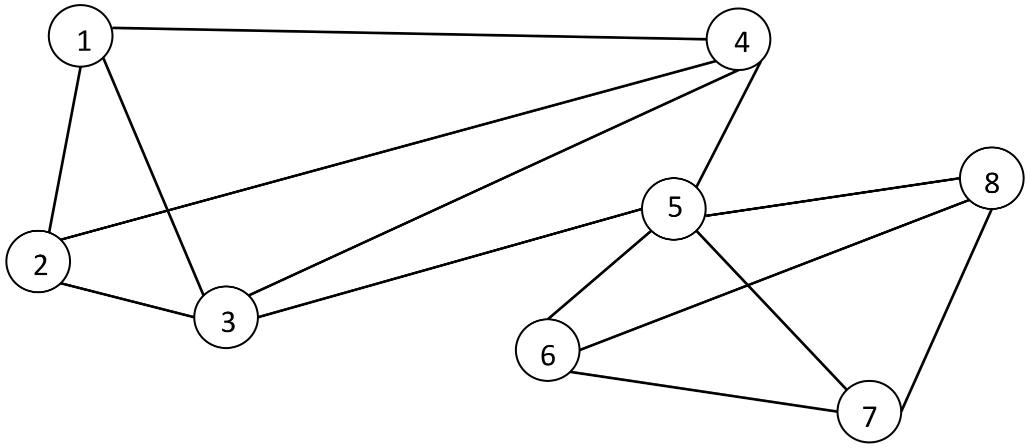
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Aresta-conexidade

Dizemos que um grafo é *k-aresta-conexo* se é preciso remover pelo menos *k* de suas arestas para desconectá-lo.

Ex:



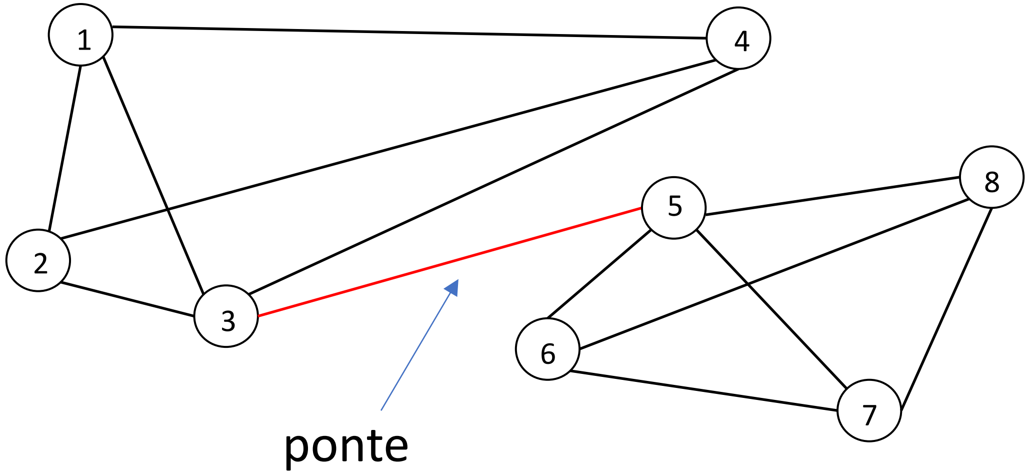
Grafo 2-aresta-conexo

A *aresta-conexidade* de um grafo *G* é o maior *k* tal que *G* é *k*-aresta-conexo.

A aresta-conexidade do grafo acima é 2.

Uma *ponte* é uma aresta cuja remoção aumenta o número de componentes conexas do grafo.

Ex:



Proposição 1: Uma aresta é ponte se e somente se ela não está contida em nenhum ciclo do grafo.

Proposição 2: Um grafo conexo é 2-aresta-conexo se e somente se ele não contém nenhuma ponte.

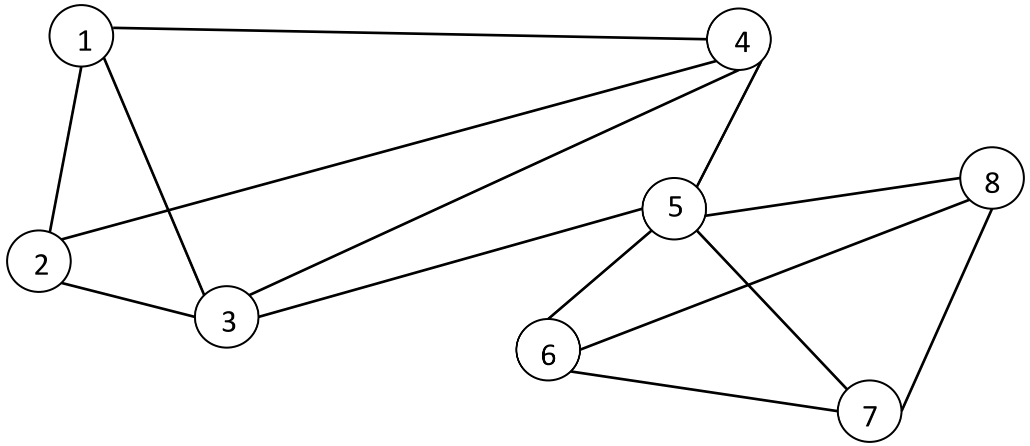
Proposição 3: A aresta-conexidade do K_n é $n - 1$.

Proposição 4: A aresta-conexidade de um grafo G é no máximo $\delta(G)$.

Algoritmo Aresta-conexo

Entrada: um grafo G com n vértices e m arestas e um inteiro positivo k
Saída: *Sim*, se G é k-aresta-conexo; *Não*, caso contrário

se $k > \delta(G)$
  devolva *Não* e pare
se $k = 1$
  devolva conexo(G) e pare
para $i = 1$ até m
  $G' = G - \{\text{aresta } i\}$
  se Aresta-conexo(G', $k - 1$) = *Não*
    devolva *Não* e pare
devolva *Sim*



Obs: O Algoritmo Aresta-conexo requer tempo $O(m^k)$ e espaço $O(n)$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 20-04-2021

Vértice-conexidade

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

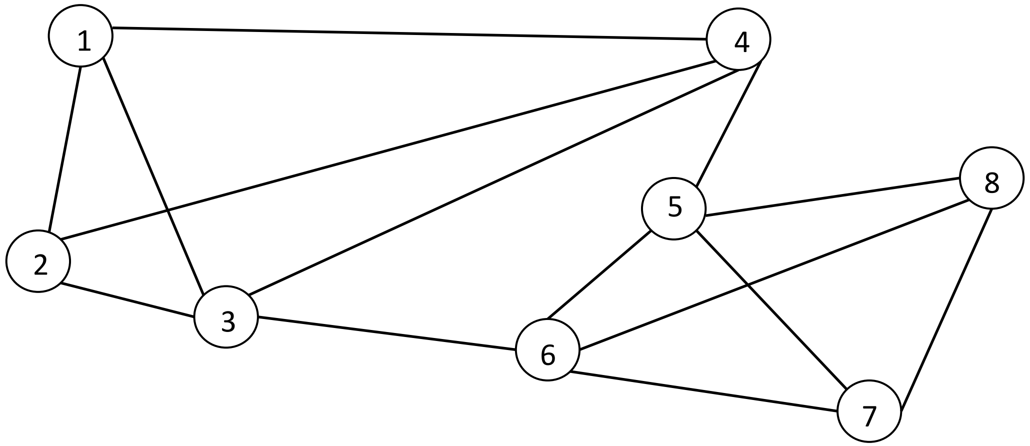
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Vértice-conexidade

Dizemos que um grafo é *k-vértice-conexo* (ou simplesmente *k-conexo*) se é preciso remover pelo menos *k* de seus vértices para desconectá-lo.

Ex:



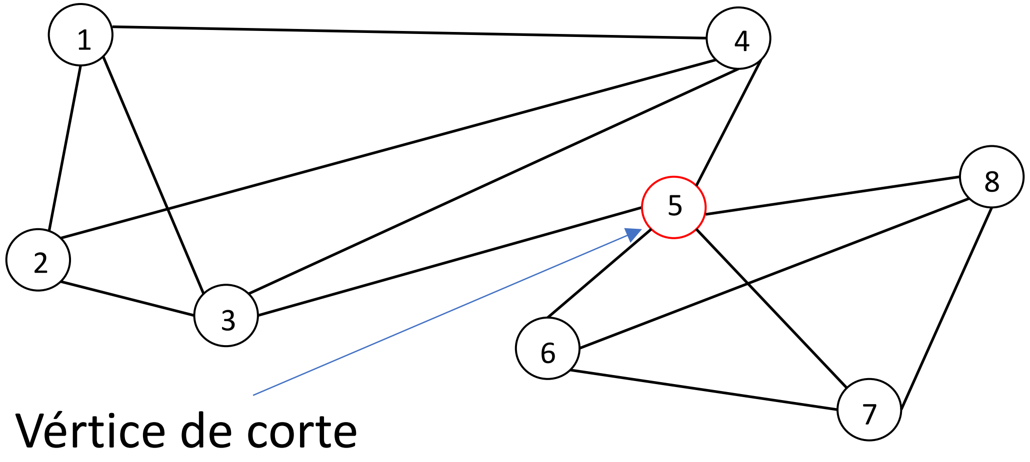
Grafo 2-vértice-conexo

A *vértice-conexidade* de um grafo *G* é o maior *k* tal que *G* é *k*-conexo.

A vértice-conexidade do grafo acima é 2.

Um *vértice de corte* é um vértice cuja remoção aumenta o número de componentes conexas do grafo.

Ex:



Proposição 1: Um grafo conexo é 2-conexo se e somente se ele não contém nenhum vértice de corte.

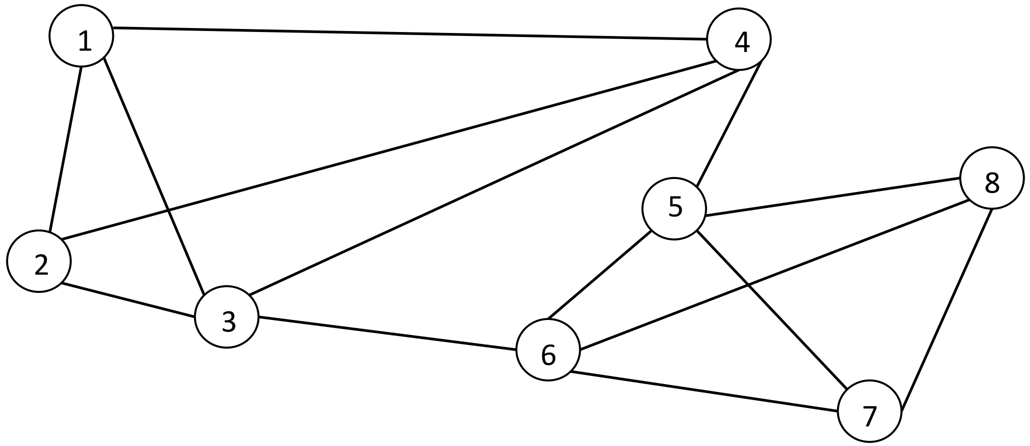
Não é possível desconectar um grafo completo removendo alguns de seus vértices. Dizemos que a vértice-conexidade dos grafos completos é *infinita*.

Proposição 2: Se G não é completo então a vértice-conexidade de G é no máximo $\delta(G)$.

Algoritmo Vértice-conexo

Entrada: um grafo G com n vértices e m arestas e um inteiro positivo k
Saída: *Sim*, se G é k-vértice-conexo; *Não*, caso contrário

se G é completo
    devolva *Sim* e pare
se $k > \delta(G)$
    devolva *Não* e pare
se $k = 1$
    devolva conexo(G) e pare
para $i = 1$ até n
    $G' = G - \{\text{vértice } i\}$
    se Vértice-conexo(G', $k - 1$) = *Não*
        devolva *Não* e pare
devolva *Sim*



Obs: O Algoritmo Vértice-conexo requer tempo $O(n^{k+1})$ e espaço $O(n)$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 29-04-2021

Ciclos em grafos

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

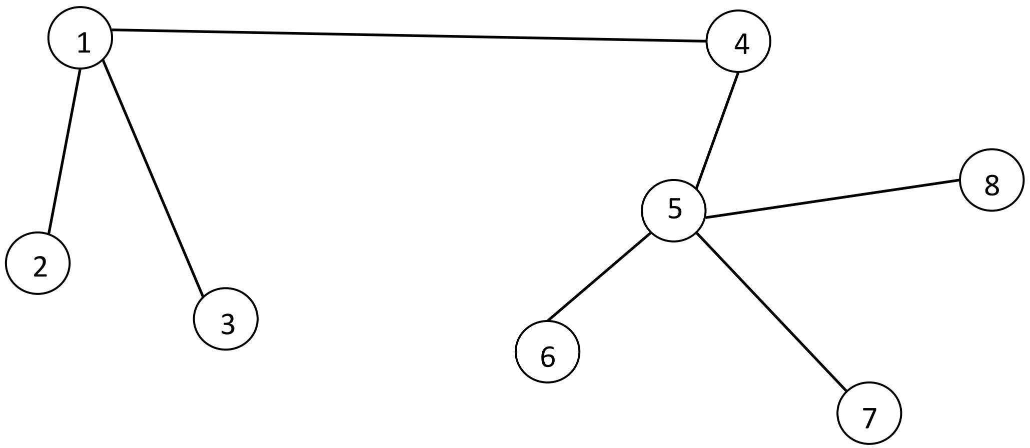
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

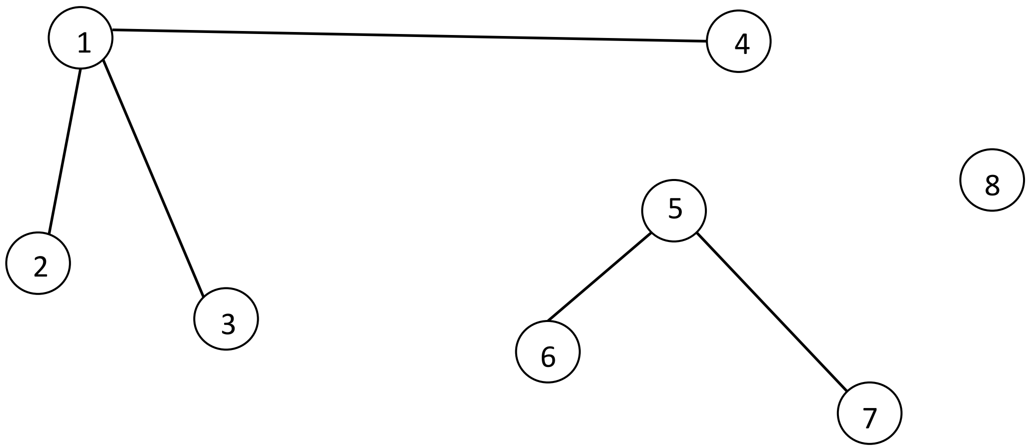
Ciclos em grafos

Uma *árvore* é um grafo conexo que não contém ciclos. Um grafo que não contém ciclos é chamado de *floresta* porque cada uma de suas componentes conexas é uma árvore.

Ex:



Árvore



Floresta

Teorema: Seja G uma árvore não vazia com n vértices. Então tam(G) = $n - 1$.

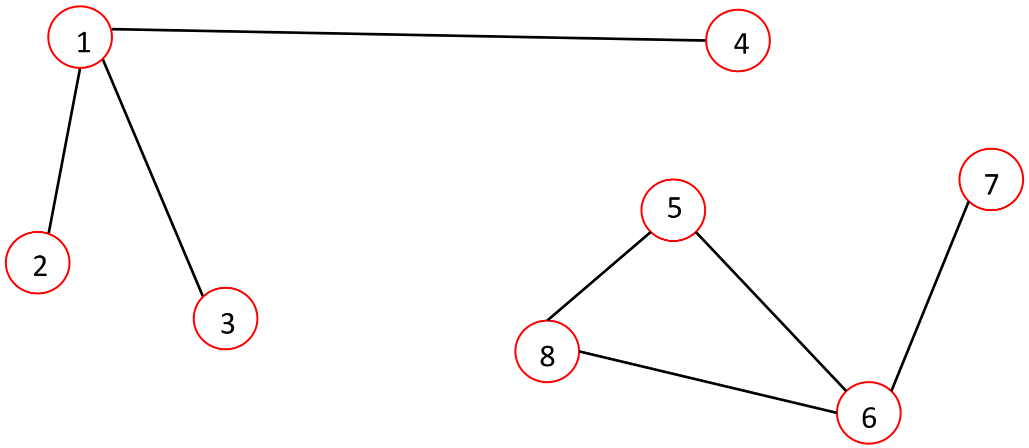
Corolário: Seja F uma floresta não vazia com n vértices. Então tam(F) = n – w(F).

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Algoritmo Floresta

Entrada: um grafo *G* com *n* vértices e *m* arestas
Saída: *Sim*, se *G* é floresta; *Não*, caso contrário

```
se m ≥ n devolva Não e pare
para i = 1 até n
        visitado[i] = falso, anterior[i] = 0
crie uma fila F com n posições
enquanto existir vértice i tal que visitado[i] = falso
        visitado[i] = verdadeiro
        insira o vértice i em F
        enquanto F não estiver vazia
                remova de F obtendo u
                para cada vértice w adjacente a u
                        se anterior[u] ≠ w
                                se visitado[w] = falso
                                        visitado[w] = verdadeiro
                                        anterior[w] = u
                                        insira w em F
                                se não
                                        devolva Não e pare
devolva Sim
```



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
visitado	V	V	V	V	V	V	V	V	
anterior		1	1	1		5	6	5	

F = ~~1~~ , ~~2~~ , ~~3~~ , ~~4~~ , ~~5~~ , ~~6~~ , 8 , 7

u = 1, 2, 3, 4, 5, 6

Não é floresta

Obs: O Algoritmo Floresta requer tempo e espaço O(*n*)

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 04-05-2021

Árvores Geradoras Mínimas

Algoritmo de Kruskal

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

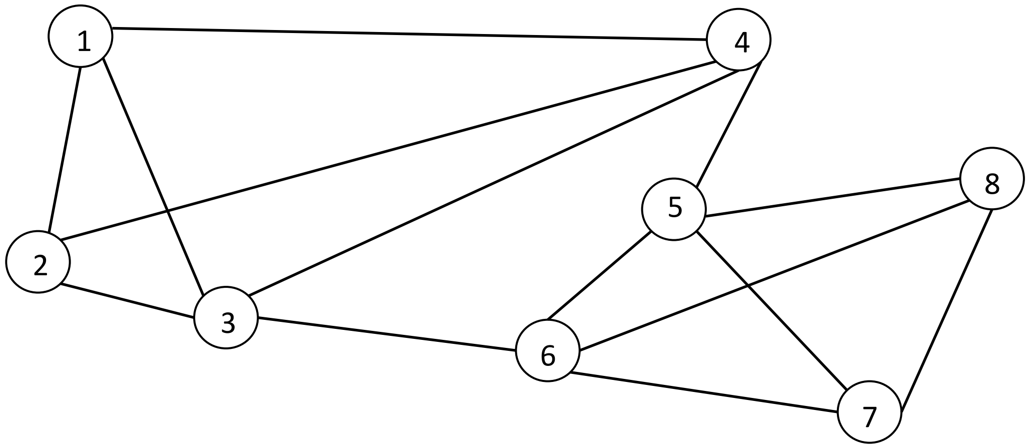
Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

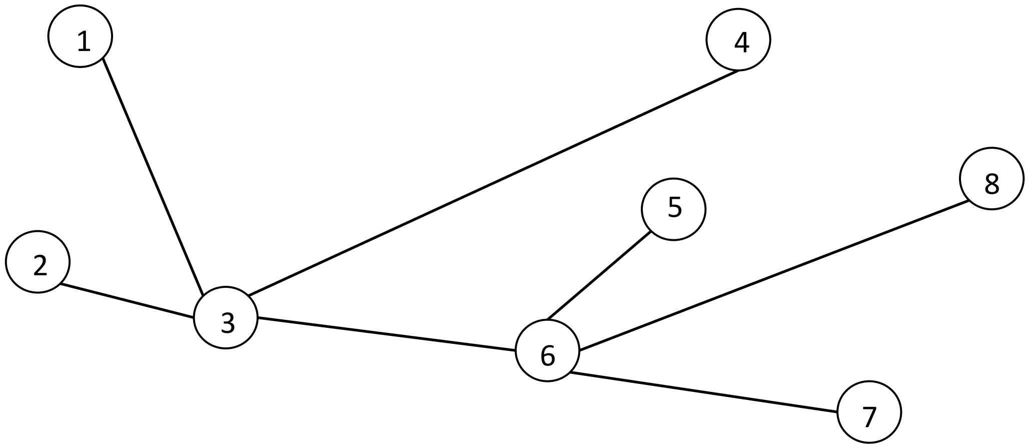
Árvore Geradora

Seja G um grafo conexo. Uma *árvore geradora* de G é um subgrafo de G que é conexo, acíclico e que contém todos os vértices de G.

Ex:



G



Árvore geradora de G

Problema da Árvore Geradora Mínima

No *problema da árvore geradora mínima* (AGM) temos um grafo conexo no qual cada aresta possui um custo e queremos encontrar uma árvore geradora do grafo na qual a soma dos custos das arestas seja a menor possível.

Podemos resolver esse problema usando o *Algoritmo de Kruskal*. Trata-se de um algoritmo guloso surpreendentemente simples que, se bem implementado, é extremamente rápido.

Nesse algoritmo colocamos as arestas em ordem crescente de custo e depois escolhemos para a AGM as arestas nessa ordem sem permitir a formação de ciclos.

Apesar do algoritmo ser simples, a demonstração de sua corretude não é trivial 😕

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Algoritmo de Kruskal

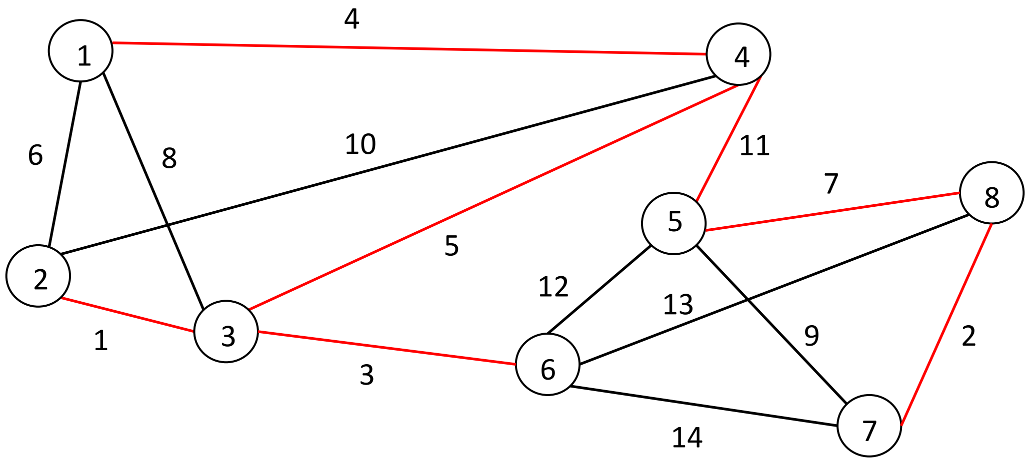
Entrada: um grafo conexo G com n vértices e m arestas no qual cada aresta possui um custo
Saída: um conjunto de arestas T tal que $G[T]$ é uma AGM de G

coloque as arestas de G em ordem crescente de custo
$i = 1$
$T = \{ \}$
enquanto $|T| < n - 1$
    Se $G[T \cup \{\text{aresta } i\}]$ é floresta
        $T = T \cup \{\text{aresta } i\}$
    i++
devolva T

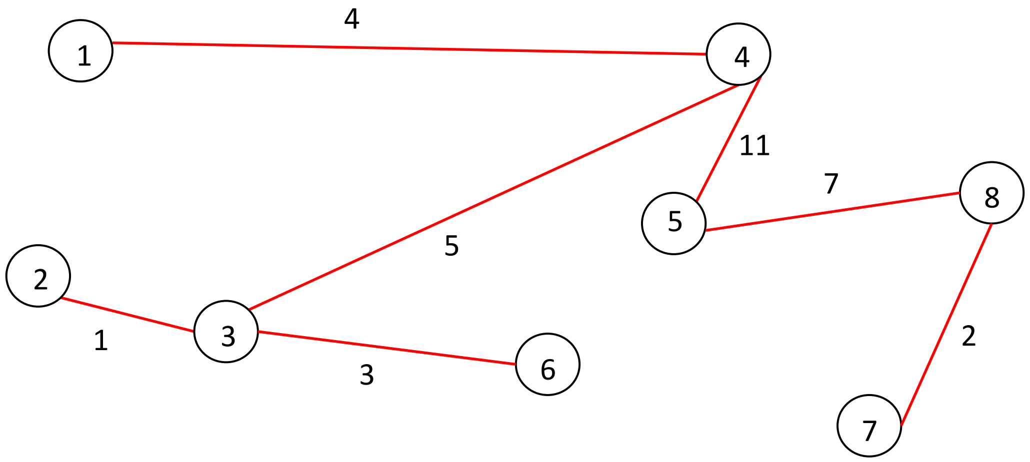
Obs: uma implementação ingênua do Algoritmo de Kruskal tem complexidade temporal O(mn)

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex:



Ex:

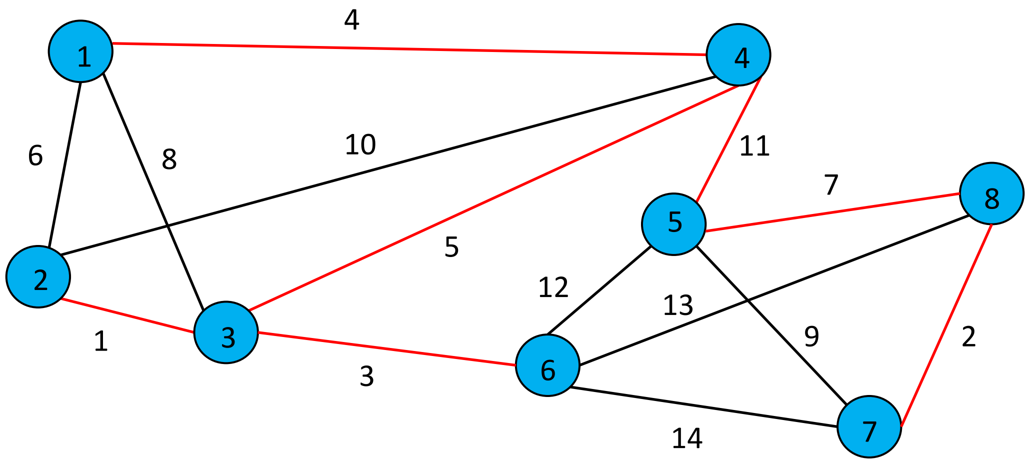


Custo da árvore Geradora: 33

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Se usarmos uma estrutura de dados conhecida como *union-find*, podemos implementar o Algoritmo de Kruskal de modo que sua complexidade temporal seja O($m$log$n$).

Ex:



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 06-05-2021

Árvores Geradoras Mínimas

Algoritmo de Prim

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

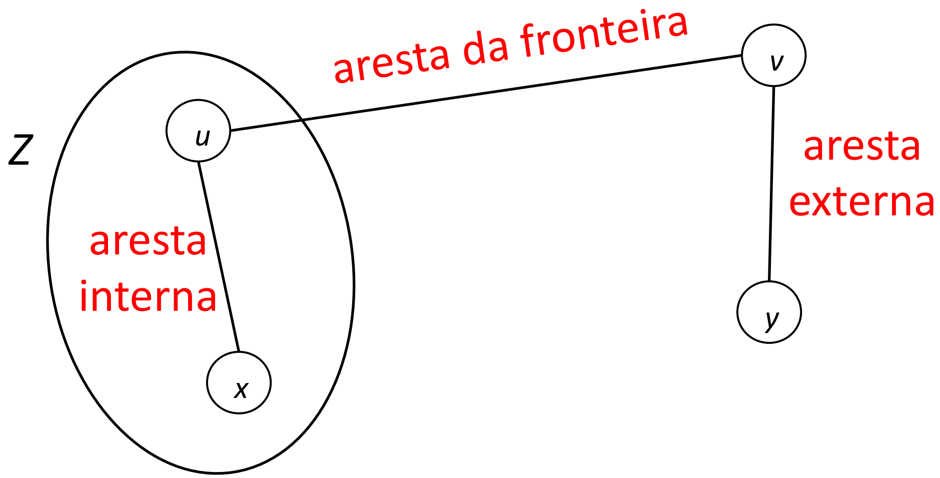
Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Algoritmo de Prim

Podemos resolver o problema da AGM usando o *Algoritmo de Prim*. Tal algoritmo também é guloso, simples e rápido. Antes de descrevê-lo, precisamos de uma definição.

Seja Z um conjunto de vértices. Dizemos que uma aresta uv está na fronteira de Z se $u \in Z$ e $v \notin Z$ ou $v \in Z$ e $u \notin Z$.

Ex:



Iniciamos o Algoritmo de Prim com um conjunto Z de vértices contendo um único vértice. A cada iteração escolhemos uma aresta da fronteira de Z que possua o menor custo para fazer parte da AGM. Seja uv a aresta escolhida, com $u \in Z$ e $v \notin Z$. Incluímos o vértice v em Z e iniciamos uma nova iteração.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

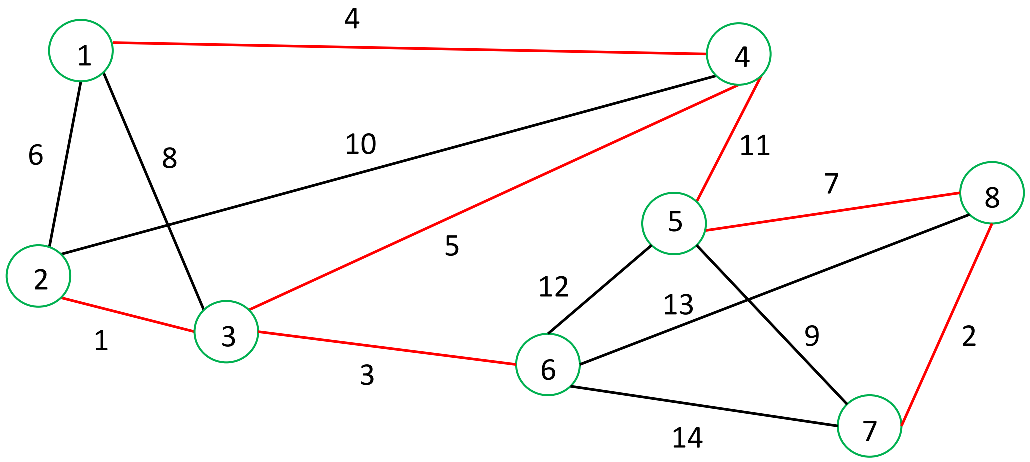
Algoritmo de Prim

Entrada: um grafo conexo G com n vértices e m arestas no qual cada aresta possui um custo
Saída: um conjunto de arestas T tal que $G[T]$ é uma AGM de G

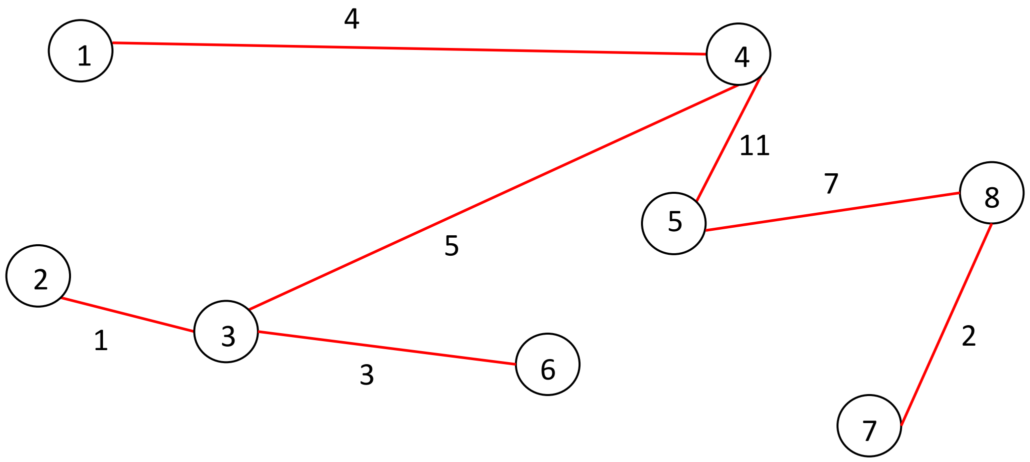
T = { }
Z = {vértice 1}
enquanto existir aresta na fronteira de Z
    Seja uv uma aresta da fronteira de Z que possua custo mínimo, com $u \in Z$ e $v \notin Z$
    $T = T \cup \{uv\}$
    $Z = Z \cup \{\text{vértice } v\}$
devolva T

Obs: uma implementação ingênua do Algoritmo de Prim tem complexidade temporal $O(mn)$

Ex:



Ex:



Custo da árvore geradora: 33

Se usarmos uma estrutura de dados conhecida como *heap binário* para armazenar as arestas da fronteira de *Z*, podemos implementar o Algoritmo de Prim de modo que sua complexidade temporal seja O(*m*log*n*).

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 11-05-2021

Problema do Caminho Mínimo

Algoritmo de Dijkstra

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

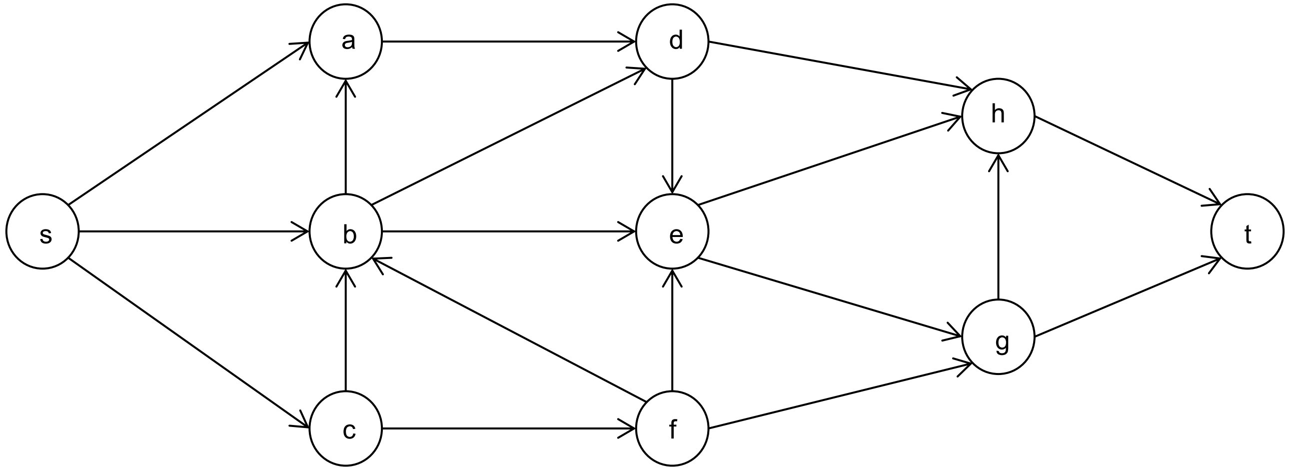
Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Grafos Dirigidos

Um *arco* é uma aresta dirigida. O arco $\overrightarrow{uv}$ tem *origem* no vértice *u* e *destino* no vértice *v*.

Um grafo que contém arcos é chamado de *grafo dirigido* ou *digrafo*.

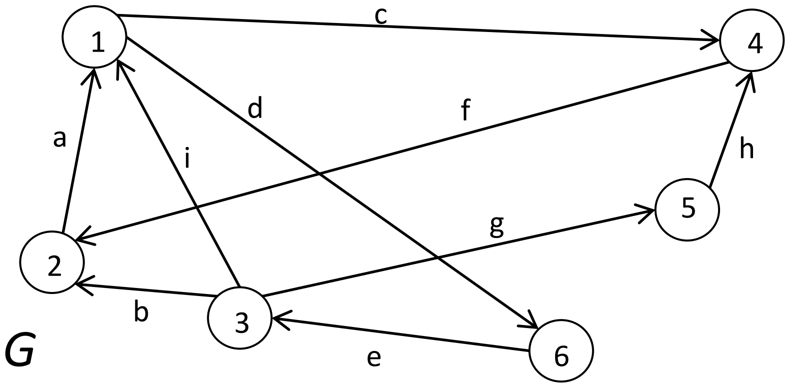
Ex:



Num digrafo, dizemos que o vértice *v* é adjacente ao vértice *u* se existe o arco $\overrightarrow{uv}$ no grafo. Um arco *y* é adjacente a um arco *x* se a origem de *y* é o destino de *x*.

Ex: O vértice *b* é adjacente a vértice *s*
O vértice *s* **não** é adjacente ao vértice *b*
O arco $\overrightarrow{bd}$ é adjacente ao arco $\overrightarrow{fb}$
O arco $\overrightarrow{fb}$ **não** é adjacente ao arco $\overrightarrow{bd}$

As definições de *passeio dirigido*, *trilha dirigida* e *caminho dirigido* são análogas às definições de passeio, trilha e caminho. Nos percursos dirigidos os arcos têm que estar todos na mesma direção.



G

Passeio dirigido: (*a, c, f, a, d*) $\quad 2 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{c} 4 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{d} 6$

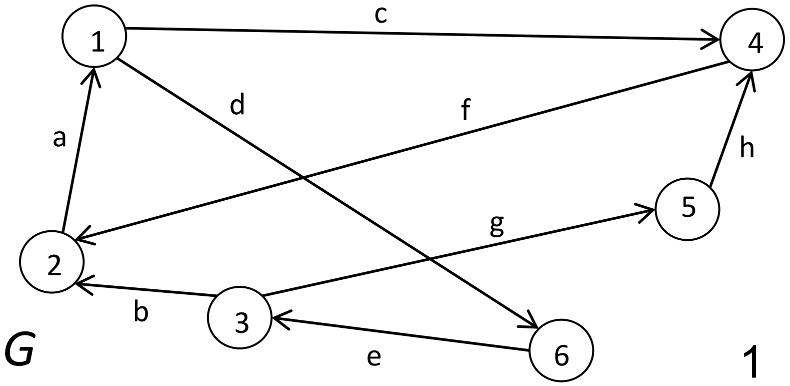
Passeio dirigido fechado: (*a, c, f, a, d, e, b*) $\quad 2 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{c} 4 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{d} 6 \xrightarrow{e} 3 \xrightarrow{b} 2$

Trilha dirigida: (*c, f, a, d*) $\quad 1 \xrightarrow{c} 4 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{d} 6$

Trilha dirigida fechada: (*c, f, a, d, e, i*) $\quad 1 \xrightarrow{c} 4 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{d} 6 \xrightarrow{e} 3 \xrightarrow{i} 1$

Caminho dirigido: (*e, b, a, c*) $\quad 6 \xrightarrow{e} 3 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{c} 4$

Caminho dirigido fechado (circuito dirigido): (*d, e, b, a*) $\quad 1 \xrightarrow{d} 6 \xrightarrow{e} 3 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{a} 1$



G

	1	2	3	4	5	6
1		1				
2			1	1		
3						1
4	1				1	
5			1			
6	1					

MA

1 → 2
2 → 3 → 4
3 → 6
4 → 1 → 5
5 → 3
6 → 1

LA

1 → a
→ c → d
2 → b → f
→ a
3 → e
→ b → g
4 → c → h
→ f
5 → g
→ h
6 → d
→ e

LI

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1		-1	-1				
2	-1	1				1		
3		-1			1		-1	
4			1			-1		1
5							1	-1
6				1	-1			

MI

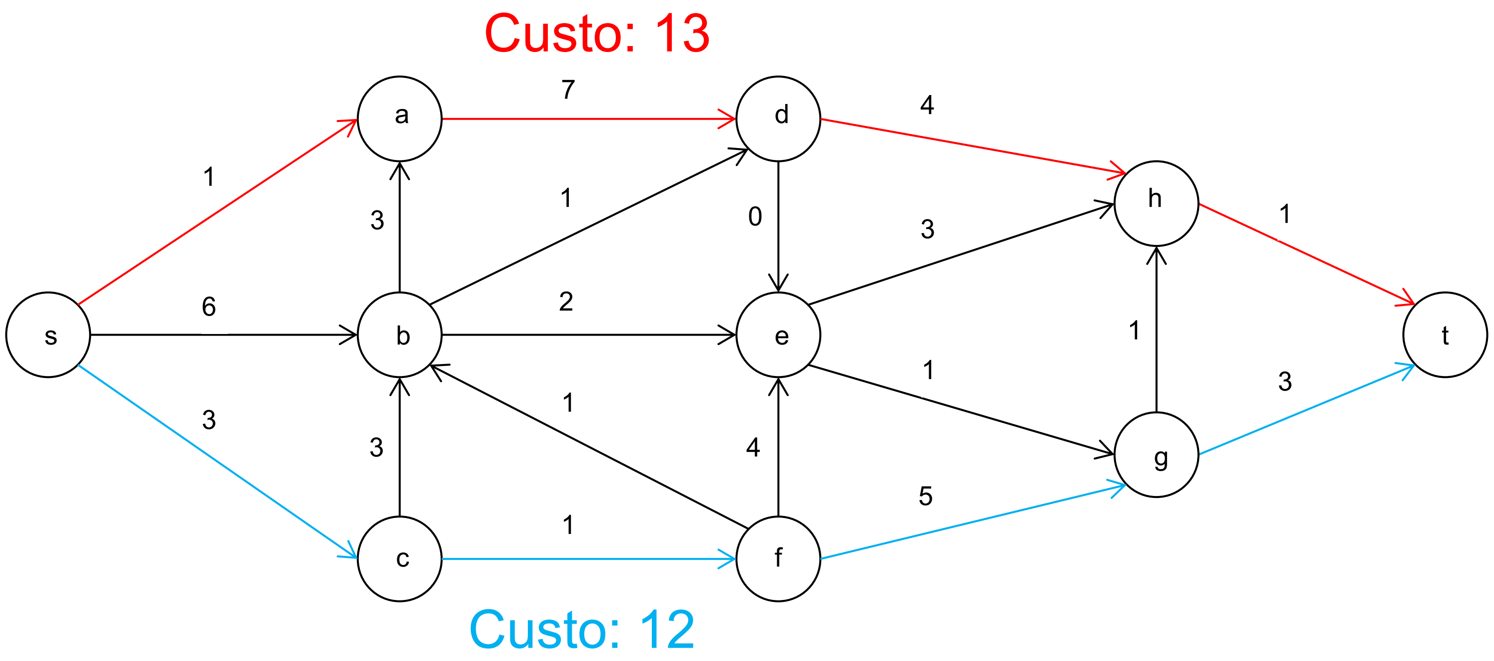
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Problema do Caminho Mínimo

No *Problema do Caminho Mínimo* (PCM) é dado um grafo dirigido no qual cada arco *e* possui um custo c_e, e dois vértices especiais *s* (origem) e *t* (destino).

Desejamos encontrar um caminho dirigido de *s* a *t* que possua custo mínimo.

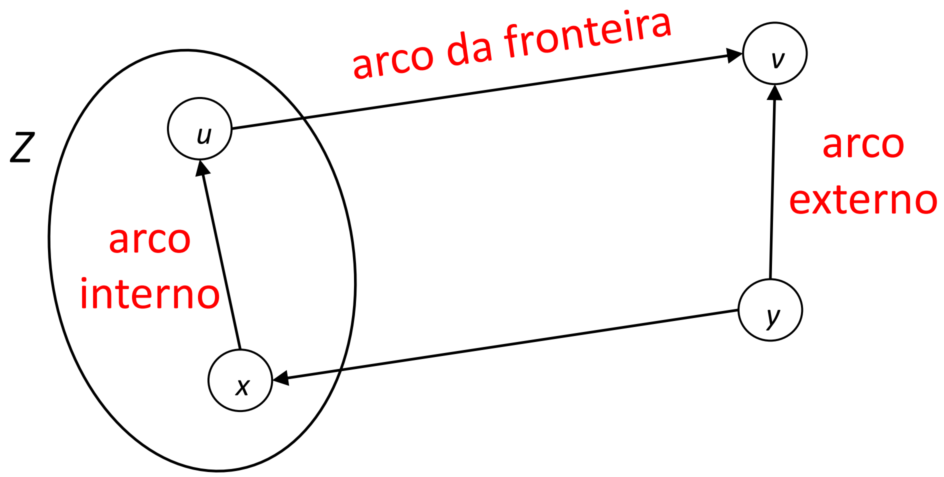
Ex:



Esses caminhos dirigidos de *s* a *t* possuem custo mínimo?

Se o digrafo não possui arcos de custo negativo, podemos resolver o PCM usando o *Algoritmo de Dijkstra*. Antes de descrevê-lo, precisamos de uma definição.

Seja Z um conjunto de vértices. Dizemos que um arco $\overrightarrow{uv}$ está na fronteira de Z se $u \in Z$ e $v \notin Z$.



Algoritmo de Dijkstra

Inicialização: associe a cada vértice *v* um valor *c(v)* que indica o custo mínimo de um caminho dirigido de *s* a *v*. Faça *c(s) = 0* e *c(v)* = +∞, para todo $v \neq s$. Para cada vértice *v* faça *anterior(v)* = 0. Defina um conjunto de vértices *Z* contendo inicialmente apenas *s*.

Em cada iteração escolha um arco $\overrightarrow{uv}$ da fronteira de *Z* tal que $c(u) + c_{uv}$ seja mínimo. Faça $c(v) = c(u) + c_{uv}$, *anterior(v)* = *u* e inclua *v* em *Z*.

O algoritmo para quando incluirmos *t* em *Z* ou quando não houver mais arcos na fronteira de *Z*. Ao final da execução *c(t)* indicará o custo mínimo de um caminho dirigido de *s* a *t* (obs: se *c(t)* = +∞ então não existe caminho dirigido de *s* a *t*).

Podemos reconstruir o caminho mínimo de *s* a *t* usando o vetor *anterior*.

Complexidade temporal:
Uma implementação ingênua do Algoritmo de Dijkstra requer tempo $O(mn)$ 😕
Usando heap binário para armazenar os arcos da fronteira de *Z* a complexidade cai para $O(m\log n)$ 😀
Em grafos esparsos a complexidade é $O(n)$ 😳

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

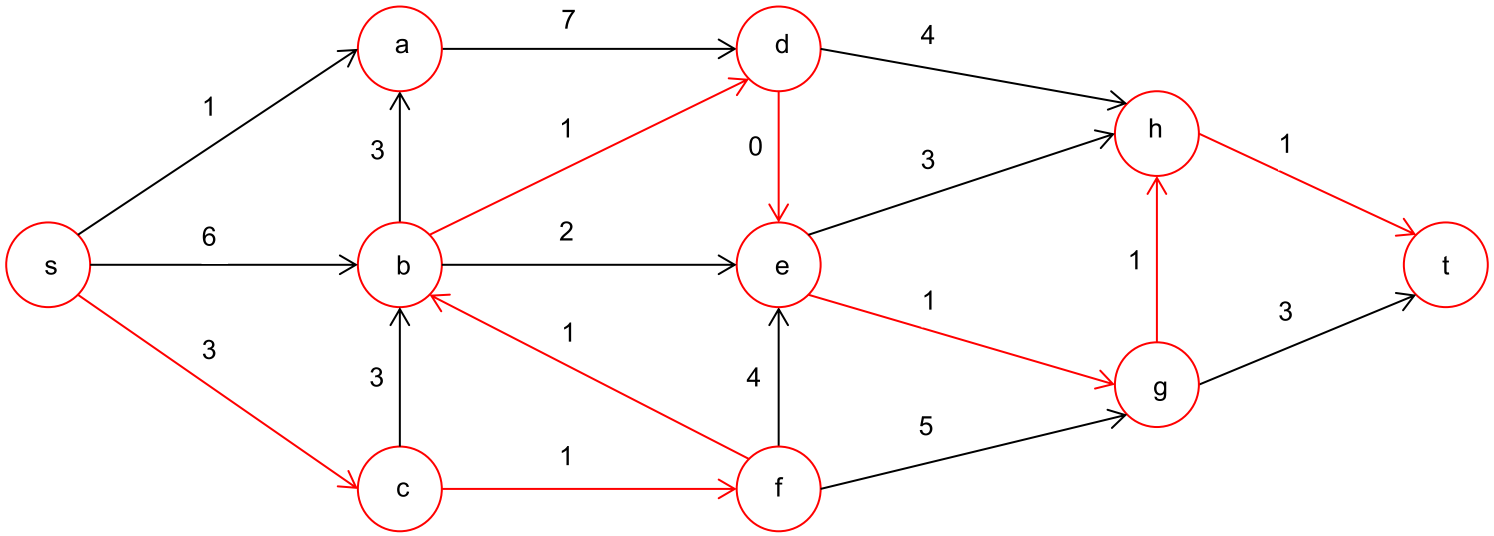
Algoritmo de Dijkstra

Entrada: um digrafo $\vec{G}$ com n vértices no qual cada arco possui um custo não negativo
e os vértices s e t

Saída: um caminho dirigido de s a t (codificado no vetor anterior) que possui custo mínimo
e o custo desse caminho, se houver tal caminho; caso contrário, devolve c(t) = +∞

para i = 1 até n
    c(i) = +∞
    anterior(i) = 0
c(s) = 0
Z = { s }
enquanto existir arco na fronteira de Z e $t \notin Z$
    seja $\overrightarrow{uv}$ um arco da fronteira de Z tal que c(u) + c_{uv} seja mínimo
    c(v) = c(u) + c_{uv} // c_{uv} é o custo do arco uv
    anterior(v) = u
    $Z = Z \cup$ {vértice v}
devolva anterior e c(t)

Ex:

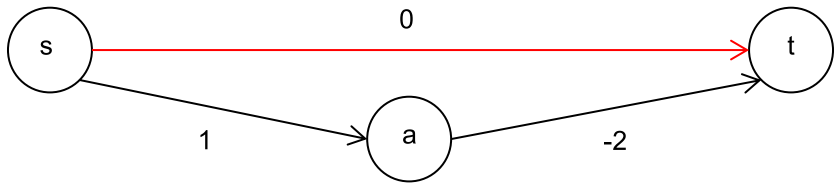


	s	a	b	c	d	e	f	g	h	t
c	0	1	5	3	6	6	4	7	8	9
anterior		s	f	s	b	d	c	e	g	h

O caminho mínimo de *s* a *t* tem custo 9 e é constituído pelos arcos em vermelho

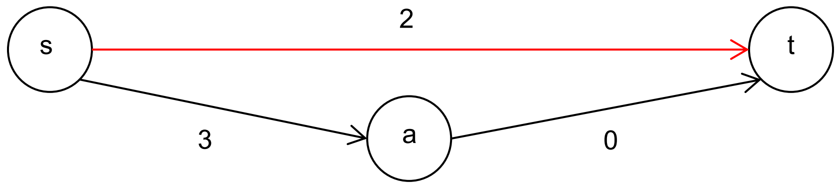
Se o grafo tiver arco de custo negativo, o Algoritmo de Dijkstra pode não funcionar 😕

Ex:



Nesse exemplo o Algoritmo de Dijkstra vai indicar que o caminho mínimo é constituído do arco $\overrightarrow{st}$, o que é incorreto 😔

Uma maneira de resolver o problema seria adicionar 2 ao custo de todos os arcos, fazendo que com não existisse mais arco de custo negativo, e então aplicar o Algoritmo de Dijkstra, certo?



Infelizmente o Algoritmo de Dijkstra continuaria indicando que o caminho constituído do arco $\overrightarrow{st}$ 😔

Quando existem arcos de custo negativo podemos usar o Algoritmo de Bellman-Ford ou o Algoritmo de Floyd-Warshall.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Grafos

Aula 18-05-2021

Planaridade

Teorema de Kuratowski

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

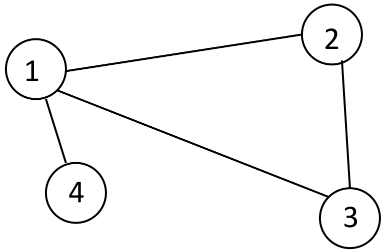
Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

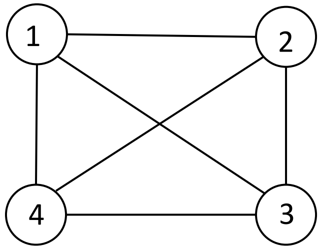
Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Planaridade

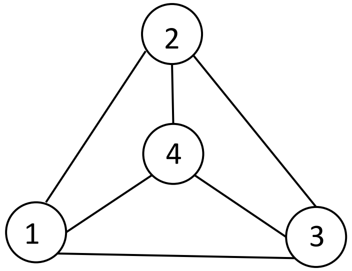
Um grafo é dito *planar* se ele pode ser representado no plano sem que suas arestas se cruzem.



Grafo Planar

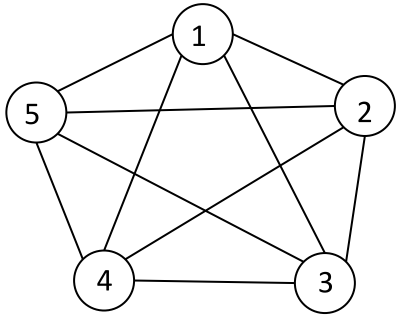


k_4



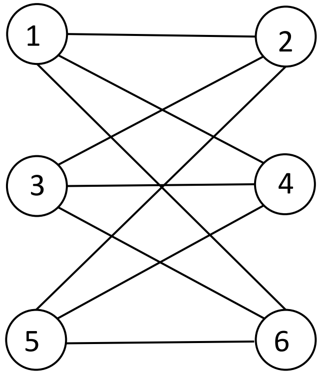
k_4

Grafo Planar



k_5

Grafo Não Planar



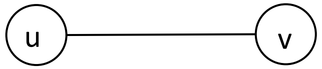
$k_{3,3}$

Grafo Não Planar

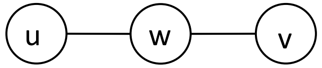
Teorema de Kuratowski

O glorioso Teorema de Kuratowski estabelece uma condição que é necessária e suficiente para que um grafo seja planar. Antes de enunciá-lo precisamos de duas definições.

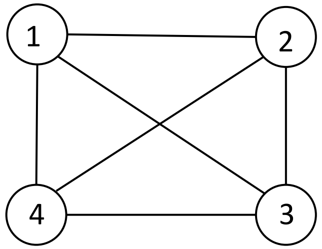
Subdividir uma aresta *uv* significa criar um novo vértice, digamos *w*, e substituir a aresta *uv* pelas arestas *uw* e *wv*.



Subdivisão de *uv* $\Rightarrow$

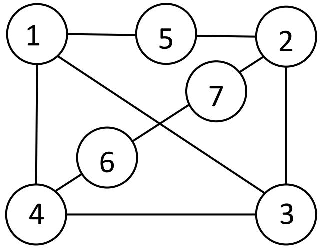


Dizemos que um grafo G' é uma ***subdivisão de G*** se podemos obter G' a partir de G fazendo uma sequência de subdivisões de arestas.



k_4

Subdivisão do $k_4 \Rightarrow$



Teorema de Kuratowski: Um grafo é planar se e somente se ele não possui uma subdivisão do k_5 nem do $k_{3,3}$.

Teorema: Seja G um grafo planar com n (≥ 3) vértices e m arestas. Então $m \leq 3n - 6$.

Consequentemente, os grafos planares são *esparsos*.