Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
Coordenação de Matemática
Equações diferenciais
Terceira lista em 13/03/2012
Prof. Stálio

1. Lembre-se que $\cosh bt = \frac{e^{bt} + e^{-bt}}{2}$ e que $\operatorname{senh} bt = \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2}$. Encontre a transformada de Laplace da função dada; a e b são constantes reais.

   a) $f(t) = \cos bt$

   b) $g(t) = \operatorname{senh} bt$

   c) $h(t) = e^{at} \cos bt$

2. A **Função Gama** é denotada por $\Gamma(p)$ e definida pela integral

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx$$

   A integral converge quando $x \to \infty$ para todo p. Para $p < 0$ é uma integral imprópria também em 0, já que o integrando torna-se ilimitado quando $x \to 0$. No entanto, pode-se mostrar que a integral converge em $x = 0$ para $p > -1$.

   a) Mostre que, para $p > 0$,

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

   b) Mostre que $\Gamma(1) = 1$.

   c) Se n é um inteiro positivo, mostre que

$$\Gamma(n+1) = n!$$

   Como $\Gamma(p)$ também está definida quando p não é inteiro, essa função fornece uma extensão da função fatorial para valores não-inteiros da variável independente. Note que também é consistente definir $0! = 1$.

   d) Mostre que, para $p > 0$,

$$p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1) = \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}$$

   Assim, $\Gamma(p)$ pode ser determinado para todos os valores positivos de p se $\Gamma(p)$ for conhecido em um único intervalo de comprimento um, por exemplo, em $0 < p \leqslant 1$. É possível mostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Encontre $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ e $\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)$.

3. Considere a transformada de Laplace de t^p, onde $p > -1$.

   a) Mostre que
   $$\pounds\left[t^p\right] = \int_0^\infty e^{-st} t^p dt = \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^p dx = \frac{\Gamma\left(p+1\right)}{s^{p+1}},\ s > 0$$

   b) Seja n um inteiro positivo; mostre que
   $$\pounds\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{p+1}},\ s > 0$$

   c) Mostre que
   $$\pounds\left[t^{-1/2}\right] = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx,\ s > 0$$
   É possível mostrar que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; portanto, $\pounds\left[t^{-1/2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$, $s > 0$.

   d) Mostre que
   $$\pounds\left[t^{1/2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}},\ s > 0$$

4. Encontre a transformada de Laplace inversa das funções:

   a) $f\left(t\right) = \frac{4}{(s-1)^3}$

   b) $g\left(t\right) = \frac{3s}{s^2-s-6}$

   c) $h\left(t\right) = \frac{2s+1}{s^2-2s+2}$

5. Use a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial dado.

   a) $y^{''} - y^{'} - 6y = 0$, $y\left(0\right) = 1$ e $y^{'}\left(0\right) = -1$.
   b) $y^{''} - 4y^{'} + 4y = 0$, $y\left(0\right) = 1$ e $y^{'}\left(0\right) = 1$.
   c) $y^{''} + \omega^2 y = \cos 2t$, $\omega^2 \neq 4$; $y\left(0\right) = 1$ e $y^{'}\left(0\right) = 0$.
   d) $y^{''} - 2y^{'} + 2y = e^{-t}$, $y\left(0\right) = 0$ e $y^{'}\left(0\right) = 1$.

6. Esboce o gráfico das funções dada no intervalo $t \geqslant 0$.

   a) $f\left(t\right) = \left(t-3\right) u_2\left(t\right) - \left(t-2\right) u_3\left(t\right)$
   b) $g\left(t\right) = f\left(t-3\right) u_3\left(t\right)$, onde $f\left(t\right) = \operatorname{sen} t$

7. Encontre a transformada de laplace das funções

$$a)\ \ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 2 \\ (t-2)^2 & \text{se} \quad t \geqslant 2 \end{cases}$$

$$b)\ \ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 1 \\ t^2 - 2t + 2 & \text{se} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

$$c)\ \ h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < \pi \\ t - \pi & \text{se} \quad \pi \leqslant t < 2\pi \\ 0 & \text{se} \quad t \geqslant \pi \end{cases}$$

8. Suponha que $\pounds[f(t)] = \varphi(s)$ existe para $s > a \geqslant 0$.

   a) Mostre que, se c é uma constante positiva, então

   $$\pounds[f(ct)] = \frac{1}{c}\varphi\left(\frac{s}{c}\right), \ s > ca$$

   b) Mostre que, se k é uma constante positiva, então

   $$\pounds^{-1}[\varphi(kt)] = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)$$

   c) Mostre que, se a e b são constantes positiva com $a > 0$, então

   $$\pounds^{-1}[\varphi(at+b)] = \frac{1}{a}e^{-bt/a}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

9. Use o exercício anterior para encontrar a transformada de Laplace inversa das funções:

   a) $\varphi(s) = \frac{2^{n+1}n!}{s^{n+1}}$

   b) $\varphi(s) = \frac{2s+1}{4s^2+4s+5}$

   c) $\varphi(s) = \frac{1}{9s^2-12s+3}$

   d $\varphi(s) = \frac{e^2e^{-4s}}{2s-1}$

10. Prove a comutatividade, a distributividade e a associatividade para a convolução.

a) $f * g = g * f$

b) $f * (g + h) = f * g + f * h$

c) $f * (g * h) = (f * g) * h$

11. Encontre a transformada de Laplace das funções:

a) $f(t) = \int_0^t (t-u)^2 \cos 2u du$

b) $g(t) = \int_0^t e^{-(t-u)} \operatorname{sen} u du$

c) $h(t) = \int_0^t (t-u) e^u du$

12. Encontre a transformada de Laplace inversa da função dada usando o teorema sobre convoluções.

a) $\varphi(s) = \frac{1}{s^4(s^2+1)}$

b) $\varphi(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+4)}$

c) $\varphi(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$