Математический Анализ
Конспект Семинара 21.

Филиппов Андрей (БПМИ193-2)

2020.02.25-?
2020.03.02 17:31:00

Содержание

---

1 Обозначения

- Обозначения, принятые в конспектах лекций;
- C – любая возможная константа.

---

2 Семинар

2.1 Теория: Вспоминаем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{B \to b-0} \int\limits_a^B f(x)dx$$

????

$\int\limits_a^c + \int\limits_c^b$ – должны сходится оба, тогда сходится результат: $\int\limits_a^b$

????

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сход $<=>$ $(\alpha > 1)$

$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ сход $<=>$ $(\alpha < 1)$

????

2.2 Теория: Признак Вейерштрасса

1) $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$

2) $\forall x \in [a, b] \implies |f(x)| \leq g(x)$

3) $\forall B \in (a, b) \implies f \in \Re[a, B]$

4) $\exists \int\limits_a^b g(x)dx$

$\implies \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$ сход $\implies \int\limits_a^b f(x)dx$ сход

2.3 Задание

$\exists ? \int\limits_1^\infty \underbrace{\frac{\ln x}{x^{1.1}}}_{=f(x)} dx$

$\int\limits_1^\infty = \int\limits_1^n + \int\limits_n^{+\infty}$

финально – с какого-то x и больше

$\underbrace{\frac{\ln x}{x^{1.1}}}_{=f(x)} \leq \frac{x^{0.05}}{x^{1.1}} = \underbrace{\frac{1}{x^{1.05}}}_{=g(x)}$

по пр. Вейерштрасса $\implies \int \exists$

$$\int\limits_1^{+\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{arctg}\left(e^{\sin^2 x}\right)}{x^2+1}}_{=f(x)} dx$$

$$|f(x)| \underset{[1,+\infty)}{\leq} \frac{n/2}{x^2}$$

т. к. $\exists \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \implies$ исход. инт. сход.

2.4 Теория: Сходимость эквивалентных функция

1) $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$

2) $\forall x \in [a, b) \implies f(x), g(x) > 0$

3) $\lim_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0, \pm\infty$

$\implies \int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ имеют один. сходимость

2.5 Задание

$$\int\limits_0^{+\infty} \underbrace{\frac{x^2-5x+1}{x^4+18x+90}}_{=f(x)} dx = \int\limits_0^n + \int\limits_n^{+\infty} \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx - \text{сх.}$$

сх. – сходится

??? – что-то про знаки при $\lim_{x\to\infty}$, например, $\dfrac{\sin x}{x}$ меняет знак

2.6 Задание

$$\int\limits_1^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x+\sin x}}_{=f(x)} dx \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} - \text{сх.}$$

?????^^^^????

$f(x) \sim \dfrac{1}{x}$ $(x \to +\infty)$

????

2.7 Задание

$$\int\limits_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}}_{=f(x)} dx = \underbrace{\int\limits_0^1}_{=I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty}}_{=I_2}$$

Рассматриваем I_2:

$\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \sim \dfrac{\pi/2}{x^\alpha}$, $x \to +\infty$; сх. $<=>$ $\alpha > 1$

Рассматриваем I_1:

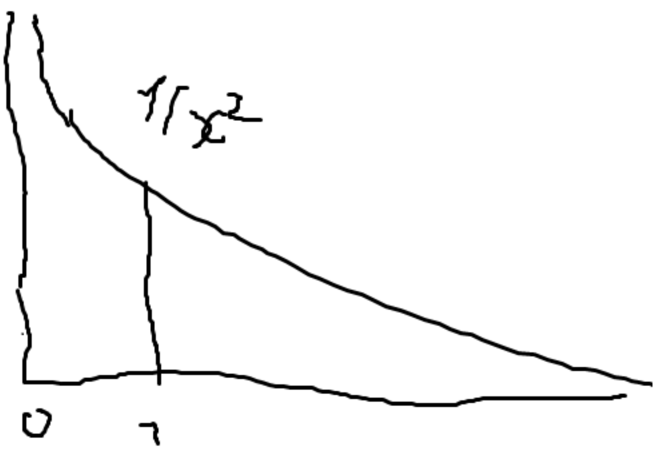
$x \to 0+0$: $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} = \underbrace{\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}}_{\to 1,\, x \to 0+0} \cdot \dfrac{x}{x^\alpha}$

$f(x) \sim \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$, $x \to 0+0$

$\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^{\alpha-1}} dx$ сх. $<=>$ $\alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2$

Итог:

$\int\limits_0^{+\infty}$ сх. $<=>$ $\alpha \in (1, 2)$



– какое-то пояснение ?????

2.8 Задание

$\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^\alpha} dx = \underbrace{\int\limits_0^1}_{=I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty}}_{=i_2}$ (I_1 сх. $\iff \alpha{<}2$, I_2 сх. $\iff \alpha{>}0$, поэтому для исходный инт. сх. при $\alpha \in (0, 2)$)

$\dfrac{\sin x}{x^\alpha} \underset{x \to 0+0}{\sim} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{x}{x^\alpha} \sim \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$

$(\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^\alpha} dx$ сх.$)$ $<=>$ $(\alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2)$

$\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^\alpha} dx = \underbrace{-\dfrac{\cos x}{x^\alpha}\Big|_1^{+\infty}}_{\text{сх при } \alpha>0} - \alpha \int\limits_1^{+\infty} \underbrace{\dfrac{\cos x}{x^{\alpha+1}}}_{=f(x)} dx$

$|f(x)| \leq \dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$ – сход. при $\alpha > 0$, значит $f(x)$ точно сходится при $\alpha > 0$

– пояснение того, как ведёт себя $\dfrac{\sin x}{x}$ при $\alpha < 0$

if and only if = iff (тогда и только тогда, когда) – общепринятое обозначение, которое можно использовать

——

$\dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$ – что это?????

2.9 Теория: Признаки сходимости Дирихле-Абеля

Дирихле

1) f непр. на $[a;b)$

2) F огранич.. на $[a,b)$

3) $g \in C^{(1)}(a,b)$

4) g монот. на $[a,b)$

5) $g(x) \to 0, x \to b-0$

Абель

1) —″—

2) $\exists \int\limits_a^b f(x)dx$

3) —″—

4) —″—

5) $g \in B([a,b))$ – *то есть ограниченная на* $[a,b)$

———————

Дирихле или Абель $\implies \exists \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$

2.10 Задание

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

$\alpha > 0$

$f = \sin x$

$g = \frac{1}{x^2}$

$\implies$ при $\alpha > 0$ инт. сход. по Дирихле

Если не получилось доказать сходимость по Дирихле или Абелю, то не факт, что не сходится.

$F(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x}$ – первообразная для $\frac{\sin x}{x}$ – *TODO, про то, как можно восстановить первообразную, если она не в элементарных, но мы знаем, что она точно существует*

2.11 Задание

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx \implies \text{сход. если } \alpha > 0 \text{ (расход. при } \alpha \leq 0 \text{)}$$

$f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}$ непрер. на $[1, +\infty)$

$g(x) = \operatorname{arctg} x$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}$ сход. $<=>$ $\alpha > 0$ (было доказано раньше, в другом задании)

$3, 4, 5$ вып. ?? $\implies$ инт. сход. если $\alpha > 0$

2.12 Задание

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx$ *(как предыдущее задание, только теперь от* 0*; в таком случае проблема в том, что старая* $f(x)$ *может быть не непрерывна)*

$$f =_{x \to 0+0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}_{\to 1} \cdot \frac{x^2}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-2}} \text{ сх. } <=> \alpha - 2 < 1 \iff \alpha < 3$$

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin x \cdot \operatorname{arctg} x}{x^\alpha}}_{f} dx = \underbrace{\int_0^1}_{\text{сх. } <=> \ \alpha < 3} + \underbrace{\int_1^{+\infty}}_{\text{сх.} <=> \alpha > 0} - \text{сх. } <=> \alpha \in (0, 3)$$

2.13 Задание

$$\int_0^1 \underbrace{\sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \frac{1}{1-x}}_{f \cdot g} dx$$

Будем доказывать по Дирихле.

$f = \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$

$g = 1 - x$

$F(x) = -\cos\frac{1}{1-x}$ – первообразная f (нашли устно) $\implies$ 2 вып.

Итого, сх. по Дирихле.