Теория Вероятностей и Математическая Статистика
Семинар 5.

Филиппов Андрей (БПМИ193-2)

2020.10.05-2020.10.05
2020.10.11 22:38:18

Содержание

Обозначения

- Обозначения, принятые в конспектах лекций.

Семинар

Листок 3.

5.

Решение:

$\lambda \qquad \forall k \in \mathbb{Z}_+$

$P(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$\xi \sim Pois(\lambda_1), \ldots, \xi_n \sim Pois(\lambda_n)$

$P(X_1+X_2=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X_1=i)\cdot P(X_2=k-i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}\cdot e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}\cdot e^{-\lambda_2}=$

$=e^{-\lambda_1\cdot-\lambda_2}\cdot\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\cdot\lambda_1^i\cdot\lambda_2^{k-i}=e^{-\lambda_1\cdot-\lambda_2\cdot\frac{1}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k}$

$X_1+X_2\sim Pois(\lambda_1+\lambda_2)$

$X_1+\dots+X_n\sim Pois(\lambda_1+\dots+\lambda_n)$

Ответ: ?.

Математическое ожидание и дисперсия

$E(c\xi_1)=cE\xi_1$

$E(\xi_1+\xi_2)=E(\xi_1)+E(\xi_2)$

$E(\xi\eta)=E(\xi)E(\eta)$, если ξ и η независимы

Ещё одно свойство:

$E(\xi)\geq 0 \impliedby P(\xi\geq 0)=1$

$D(\xi)=E(\xi-E\xi)^2=E\left(\xi^2-2\xi E\xi+(E\xi)^2\right)=E\xi^2-E(2\xi\cdot E\xi)+(E\xi)^2=$

$=E\xi^2-2(E\xi)^2+(E\xi)^2=E\xi^2-(E\xi)^2$

$D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)$, если ξ и η независимы

$D(\alpha\xi)=\alpha^2$ *ЧТОО??*

————

$E\xi=\sum_{k=0}^{\infty}P(\xi=k)\cdot k$

————

$P(\xi=x_i)=p_i$

$E\xi=\sum p_i\cdot x_i$

$Ef(\xi)=\sum f(x_i)\cdot p_i$

Листок 4.

1.

В коробке 7 красных и 5 белых шаров. Случайным образом из коробки вынимают два шара. Найдите математическое ожидание и дисперсию количества красных шаров. Изменится ли ответ, если вынимать шары следующим образом: вытащили первый шар и положили обратно, а затем вытащили второй шар?

Решение:

а)

$P(\xi=0)=\frac{C_5^2}{C_{12}^2}$

$P(\xi=1)=\frac{5\cdot 7}{C_{12}^2}$

$P(\xi=2)=\frac{C_7^2}{C_{12}^2}$

$E\xi=\frac{5\cdot 7}{C_{12}^2}+\frac{2\cdot C_7^2}{C_{12}^2}=\frac{35}{C_{12}^2}+\frac{42}{C_{12}^2}=\frac{77}{\frac{12\cdot 11}{2}}=\frac{154}{132}=\frac{77}{66}=\frac{7}{6}$

б)

ξ – одно доставание

$P(\xi = 0) = \dfrac{5}{12}$

$P(\xi = 1) = \dfrac{7}{12}$

$E2\xi = 2E\xi = \dfrac{7}{6}$

Такой же ответ, как в **a**! Почему?

Тут какие-то философские рассуждения про то, почему результат такой же.

$E(\xi_1 + \xi_2)$

$\xi_1 = 0 \quad \dfrac{5}{12}$

$\xi_1 = 1 \quad \dfrac{7}{12}$

$P(\xi_1) = \dfrac{7}{12} \cdot \dfrac{6}{11} + \dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{7}{11} = \dfrac{42+35}{12 \cdot 11} = \dfrac{77}{12 \cdot 11} = \dfrac{77}{12}$

Дисперсия:

$E\xi^2 = \dfrac{35}{66} + 4 \cdot \dfrac{21}{66} = \dfrac{35+84}{66} = \dfrac{119}{66}$

$D\xi = \dfrac{119}{66} - \dfrac{49}{36} = \dfrac{119 \cdot 6 - 11 \cdot 49}{96 \cdot 11} = \dfrac{714 - 539}{396} = \dfrac{175}{396}$

$D(\xi_1 + \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2) = 2D\xi = 2\left(\dfrac{7}{12} - \dfrac{49}{144}\right) = \dfrac{35}{72}$

$E\xi^2 = \dfrac{7}{12}$

$(E\xi)^2 = \dfrac{7}{12}$

Ответ: $\frac{7}{6}; \frac{7}{6}; \frac{175}{396}$.

2.

Найдите $\mathbb{E}X$, $\mathbb{D}X$ и $\mathbb{E}e^X$, если X имеет

(a) распределение Пуассона $Pois(\lambda)$;

(b) геометрическое распределение с параметром p.

Решение:

(a)

$P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} k \dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$

$EX^2 = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot k = e^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{(k-1)!} \right) = \lambda^2 + \lambda$

$DX = \lambda$

(b)

$P(X = k) = q^{k-1} p$

$EX = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p \cdot k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x^k p\right)_q^{'} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k p\right)_q^{'} =$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{x}{1-x}}$$

$$= \left(p\frac{x}{1-x}\right)'_q = \left(p\frac{x}{1-x}\right)'_q = p\left(-1+\frac{1}{1-q}\right)'_q = p\frac{1}{(1-q)^2} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

... *(какие-то устные обсуждения)*

ДЗ:

$\#2$ $(Ee^X, \quad X \sim Pois(\lambda)$

$DX, Ee^X, \quad X \sim geom(p)\ )$

$\#8$

$\#3$ (EX, DX)