Математический Анализ
Подготовка к Коллок-4.

Филиппов Андрей (БПМИ193-2)

2020.06.03-?
2020.06.06 02:39:40

Автор не несёт ответственности за ваши нули (и ошибки в этом документе).

Содержание

Обозначения

- Обозначения, принятые в конспектах лекций.
- $\dfrac{d}{dt} f(x+th)\Big|_{t=0}$ – вычислить дифференциал функции $f(x+th)$, а потом найти его значение в точке $t=0$.

Содержание

Введение и основы [1-3]

1 Метрические и нормированные пространства. Скалярное произведение и евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Сходимость в метрических пространствах, открытые и замкнутые множества, предельные точки. Открытость открытого шара. Эквивалентное описание замкнутых множеств.

1.1 Метрические и нормированные пространства.

1.2 Скалярное произведение и евклидово пространство.

1.3 Неравенство Коши-Буняковского.

1.4 Сходимость в метрических пространствах, открытые и замкнутые множества, предельные точки.

1.5 Открытость открытого шара. Эквивалентное описание замкнутых множеств.

2 Полные метрические пространства, полнота $\mathbb{R}^k$. Непрерывные отображения в метрических пространствах: определения, доказательства их эквивалентностей, основные свойства.

2.1 Полные метрические пространства, полнота $\mathbb{R}^k$.

2.2 Непрерывные отображения в метрических пространствах: определения, доказательства их эквивалентностей, основные свойства.

3 Компакты в метрических пространствах: определение и основные свойства. Образ компакта при непрерывном отображении. Критерий компактности в $\mathbb{R}^k$. Свойства непрерывных на компакте функций.

3.1 Компакты в метрических пространствах: определение и основные свойства. Образ компакта при непрерывном отображении.

3.2 Критерий компактности в $\mathbb{R}^k$.

3.3 Свойства непрерывных на компакте функций.

Дифференциал и производные [4-8]

4 Дифференцируемость отображений из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$, дифференциал. Непрерывность дифференцируемых отображений. Производная вдоль вектора и ее связь с дифференциалом. Частные производные.

4.1 Дифференцируемость отображений из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$, дифференциал.

4.2 Непрерывность дифференцируемых отображений.

4.3 Производная вдоль вектора и ее связь с дифференциалом.

4.4 Частные производные.

5 Градиент функции и матрица Якоби отображения. Градиент, как направление наибольшего роста функции. Достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

5.1 Градиент функции и матрица Якоби отображения.

5.2 Градиент, как направление наибольшего роста функции.

5.3 Достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

6 Частные производные высоких порядков. Теоремы Шварца (б/д) и Юнга. Дифференциалы высоких порядков.

6.1 Частные производные высоких порядков.

6.2 Теоремы Шварца и Юнга.

6.3 Дифференциалы высоких порядков.

7 Дифференциал суммы и произведения. Дифференциал обратного отображения.

7.1 Дифференциал суммы и произведения.

7.2 Дифференциал обратного отображения.

8 Дифференциал композиции. Матрица Якоби композиции, правило вычисления частной производной сложной функции, инвариантность первого дифференциала.

8.1 Дифференциал композиции.

8.2 Матрица Якоби композиции, правило вычисления частной производной сложной функции, инвариантность первого дифференциала.

Разное продвинутое (Неявная функция, формула Тейлора, локальный экстремум) [9-11]

9 Теорема о неявной функции: постановка вопроса, формулировка общей теоремы и доказательство в случае функции двух переменных.

9.1 Теорема о неявной функции: постановка вопроса, формулировка общей теоремы.

9.2 Теорема о неявной функции: доказательство в случае функции двух переменных.

10 Многомерная формула Тейлора.

10.1 Многомерная формула тейлора.

11 Локальный экстремум: необходимое условие и достаточное условие.

11.1 Определение точки локального экстремума.

11.2 Необходимое условие локального экстремума.

11.3 Достаточное условие локального экстремума.

График, поверхность, касательная плоскость и касательное пространство (и ещё кое-что) [12-14]

12 График функции. Касательная плоскость и касательное пространство к графику функции. Описание касательного пространства, как множества скоростей кривых, проходящих через данную точку.

12.1 График функции.

12.2 Касательная плоскость и касательное пространство к графику функции.

12.3 Описание касательного пространства, как множества скоростей кривых, проходящих через данную точку.

13 Поверхность в $\mathbb{R}^k$ и касательное пространство к ней. Описание касательного пространства к поверхности, заданной системой уравнений (доказательство в случае одного уравнения).

13.1 Поверхность в $\mathbb{R}^k$ и касательное пространство к ней.

13.2 Описание касательного пространства к поверхности, заданной системой уравнений (доказательство в случае одного уравнения).

14 Формулировки теорем о неявном отображении и обратной функции. Параметрически заданные поверхности. Описание касательного пространства к поверхности, заданной параметрически.

14.1 Формулировка теоремы о неявном отображении.

14.2 Параметрически заданные поверхности. Описание касательного пространства к поверхности, заданной параметрически.

Условный экстремум [15]

15 Условный экстремум и метод множителей Лагранжа. Достаточное условие локального экстремума.

15.1 Условный экстремум и метод множителей Лагранжа.

15.2 Достаточное условие локального экстремума.

Конспект (hse-tex.me)

Общее

Пространство / Скалярное Произведение / Норма / Метрика

Вообще зачастую мы считаем, что:

— евклидово $\mathbb{R}^k$ – наше пространство;

— $(x,y)=\sum\limits_{i,j} x_i y_j$ – наше скалярное произведение;

— $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ – наша норма;

— $d(x,y)=\|x-y\|$ – наша метрика;

Непрерывно дифференцируемая функция в случае функций многих переменной:

В этом случае понятие непрерывно дифференцируемой функции может рассматриваться в двух видах:

функции, имеющие непрерывные частные производные по каждой из переменных;

функции, имеющие непрерывную производную по любому направлению.

На сколько я понял, мы используем первый вариант: «функции, имеющие непрерывные частные производные по каждой из переменных».

Прикол (мб ложь): разные обозначения в разных местах конспектов используются для обозначения одного и того же:

$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)=\dfrac{\partial f}{\partial e_j}(x)=\dfrac{d}{dt}f(x+te_j)\mid_{t=0}=\dfrac{d}{dt}f(x_1,\dots,x_{j-1},t,x_{j+1}\dots,x_k)\mid_{t=x_j}$

1

1.5

Пояснение:

1)

Там используется два свойства:

$d(a,b)\geq|d(a,c)-d(b,c)|$, докажем:

По определению метрики:

$d(a,b)+d(b,c)\geq d(a,c)$

$d(a,b)+d(a,c)\geq d(b,c)$ (подробнее: $d(a,b)+d(a,c)=d(b,a)+d(a,c)\geq d(b,c)$)

Тогда:

$d(a,b)\geq d(a,c)-d(b,c)$

$d(a,b)\geq d(b,c)-d(a,c)$

Значит:

$d(a,b)\geq|d(a,c)-d(b,c)|$

По этому свойству:

$|d(x_n,y_n)-d(x_n,y)|\leq d(y_n,y)$

$|d(x_n,y)-d(x,y)|\leq d(x_n,x)$

$|a-b|\leq|a-c|+|c-b|$, докажем:

Чтобы это понять, лучше нарисовать a,b,c на числовой прямой, тогда:

если c принадлежит отрезку между a и b, то $|a-c|+|c-b|=|a-b|$;

если c за отрезком между a и b, то $|a-c|+|c-b|\geq|a-b|$.

По этому свойству:

$|d(x_n,y_n)-d(x,y)|\leq|d(x_n,y_n)-d(x_n,y)|+|d(x_m,y)-d(x,y)|$

2)

2

2.1

Замечание по поводу определения:

Полное метрическое пространство — метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится (к элементу этого же пространства)[1].
(Источник: https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Полное_метрическое_пространство&oldid=98036451)

Опечатка (вроде бы):

В теореме в достаточности: $|(x_n)_i - a_i| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.

2.2

3

3.3

Пояснение:

Это теорема Вейерштрасса в случае компакта.

https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Теорема_Вейерштрасса_о_функции_на_компакте&oldid=105239953

Утверждение следует из ограниченности и замкнутости.

4

4.1

Пояснение: $\|Lh\| \le (\|L(e_1)\| + \cdots + \|L(e_k)\|) \cdot \max\limits_{1 \le j \le k} |h_j| \le C\,\|h\|$**:**

$$\begin{aligned}
\|Lh\| &= \|h_1 L(e_1) + \cdots + h_k L(e_k)\| \\
&\overset{\text{по определению нормы}}{\le} \|h_1 L(e_1)\| + \cdots + \|h_k L(e_k)\| \\
&= |h_1|\,\|L(e_1)\| + \cdots + |h_k|\,\|L(e_k)\| \\
&\le (\|L(e_1)\| + \cdots + \|L(e_k)\|) \cdot \max_{1 \le j \le k} |h_j| \\
&\le \underbrace{(\|L(e_1)\| + \cdots + \|L(e_k)\|)}_{=C}\,\|h\| \\
&= C\,\|h\|
\end{aligned}$$

Пояснение: «каждое линейное отображение непрерывно на $\mathbb{R}^k$»:

Видимо из леммы(2) из 2.2:

Лемма(2). Пусть (X, dX) и (Y, dY) — два метрических пространства. Отображение $f : X \to Y$ является непрерывным в каждой точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества в Y будет открытым множеством в X (такие отображения будем называть просто непрерывными).

4.2

Пояснение:

Для функции одной переменной дифференцируемая функция выглядит так:

$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0$

При этом $a = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Тогда если мы сможем явно найти a и будет понятно, что a линейно, значит $f(x)$ дифференцируемая.

(Источник: ttps://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Дифференцируемая_функция&oldid=105454107)

—

В нашем случай $g(t) = f(x + th)$.

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{g(t) - g(0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x + th) - f(x)}{t} = df(h)$ – линейная функция.

Итак, мы нашли дифференциал $g(x) = f(x + th)$, значит $g(x)$ дифференцируема.

4.3

Пояснение:

$df(h) = h_1 df(e_1) + \cdots + h_k df(e_k) = c_1 h_1 + \cdots + c_k h_k$

$f(x_1 + h1, \ldots, x_k + h_k) = f(x_1, \ldots, x_k) + df(h) + \overline{\overline{o}}(\|h\|) = f(x_1, \ldots, x_k) + c_1 h_1 + \cdots + c_k h_k + \overline{\overline{o}}(\|h\|)$

5

5.2

Опечатка (ошибка/помарка): Формулировка леммы:

Лемма. f – дифференцируема в точке x, $df \neq 0 \implies \max\limits_{\|v\|=1} \left|\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)\right|$ достигается при $v = \|\nabla f(x)\|^{-1} \nabla f(x)$.

Пояснение: Пример:

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \implies f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} = \dfrac{2r^2 \cos\varphi \sin\varphi}{r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)} = \sin(2\varphi)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{d}{dx} f(x, 0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{0}{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{0}{x^3} = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ – симметрично $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

5.3

Пояснение:

Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то в этом интервале существует хотя бы одна точка x_0, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$.
(Источник: https://hse-tex.me/mathematical_analysis_colloquium_02.pdf)

—

В данном случае:

$g(x) = f(x, x_2 + h_2)$

$g(x_1 + h_1) - g(x_1) = g'(\xi_1) h_1$ – по теореме Лагранжа.

$f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2+h_2) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2+h_2)h_1$

Аналогично:

$f(x_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2)h_2$

Пояснение:

В конспект уже добавили пояснение, но если всё равно не понятно, то смотри некоторые дополнительные пояснения здесь.

$$\lim_{h\to 0}\|\alpha(h)\| = \lim_{h\to 0}\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right)\frac{h_1}{\|h\|} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)\frac{h_2}{\|h\|}\right\| = 0$$

Потому что:

$\dfrac{h_1}{\|h\|} \le 1$ и $\dfrac{h_2}{\|h\|} \le 1$ — (потому что у нас вроде бы стандартная норма: $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2+h_2) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \to 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \to 0$ — из-за непрерывности частных производных.

6

7

7.2

Пояснение:

$f(a+h) - f(a) = df(h) + \alpha(h)\|h\|$

$q = f(a+h) - f(a) = df(h) + \alpha(h)\|h\|$

$$\lim_{\|q\|\to 0}\frac{\left\|f^{-1}(f(a)+q) - f^{-1}(f(a)) - (df)^{-1}(q)\right\|}{\|q\|} = \lim_{\|q\|\to 0}\frac{\left\|f^{-1}(f(a+h)) - f^{-1}(f(a)) - (df)^{-1}(df(h) + \alpha(h)\|h\|)\right\|}{\|df(h) + \alpha(h)\|h\|\|} =$$

$$= \frac{\left\|h - (df)^{-1}(df(h) + \alpha(h)\|h\|)\right\|}{\|df(h) + \alpha(h)\|h\|\|}$$

Числитель:

$$\left\|h - (df)^{-1}(df(h) + \alpha(h)\|h\|)\right\| = \left\|h - (df)^{-1}(df(h)) + (df^{-1})(\alpha(h)\|h\|)\right\| = \left\|h - h + \|h\|(df^{-1})(\alpha(h))\right\| = \|h\|\left\|(df^{-1})(\alpha(h))\right\|$$

Дробь:

$$\frac{\left\|h - (df)^{-1}(df(h) + \alpha(h)\|h\|)\right\|}{\|df(h) + \alpha(h)\|h\|\|} = \frac{\|h\|\left\|(df^{-1})(\alpha(h))\right\|}{\|df(h) + \alpha(h)\|h\|\|} \le \frac{C\|h\|\|\alpha(h)\|}{\|h\|(C^{-1} - \|\alpha(h)\|)} = \frac{C\|\alpha(h)\|}{C^{-1} - \|\alpha(h)\|} \to 0$$

8

8.1

Пояснение:

$$\|\gamma(h)\| = \|dg[\alpha(h)] + \beta(f(a+h) - f(a))\|df(h/\|h\|) + \alpha(h)\|\| \underbrace{\le}_{\text{как?}} \|dg[\alpha(h)]\| + \|\beta(f(a+h) - f(a))\|(\|df(h/\|h\|)\| + \|\alpha(h)\|)$$

$$\le B\|\alpha(h)\| + \|\beta(f(a+h) - f(a))\|^{\to 0}(A + \|\alpha(h)\|) \to 0$$

8.2

9

9.1

План доказательства теоремы:

1. Существование такой функции $f(x)$.

Для каждого x есть функция $y \mapsto f(a, y)$, для которой существует единственная точка y, что $F(x, y) = 0$.

2. Непрерывность такой функции $f(x)$.

3. Непрерывная дифференцируемость функции $f(x)$: явно находится формула производной функции $f(x)$, откуда видно, что она непрерывна: $f'(x) = -\dfrac{F_x'(x, y)}{F_y'(x, y)}$.

9.2

10

10.1

Пояснение:

$\varphi(t) = f(a + th)$ – сложная функция.

$d\varphi = \varphi'\,dt \implies \varphi' = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{d}{dt} f(a + th)$ – дифференциал функции по t.

Далее просто используем правило дифференцирования сложной функции (и для базы, и для шага индукции).

10.2

Пояснение:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_0^1 (1-t)^{m-1}\varphi^{(m)}(0)\,dt = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{(m-1)!}\cdot\int\limits_0^1 (1-t)^{m-1}\,dt = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{(m-1)!}\cdot\left(-\frac{(1-t)^m}{m}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{(m-1)!}\cdot\frac{(0-(-1))}{m} = \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0)$$

11

11.3

Опечатка:

$f(a + h) - f(a) \geq \|h\|^2 \left(\dfrac{m}{2} - \dfrac{m}{4}\right) = \dfrac{m\,\|h\|^2}{\mathbf{4}} > 0$

Пояснение: второй пункт $d^2 f|_a(h) < 0\,\forall h \neq 0$:

Так же как первый пункт, но с небольшими изменениями:

Там получается, что непрерывная функция $d^2 f\mid_a(q)$ достигает на сфере своего максимума:

$\max\limits_{\|q\|=1} d^2 f\mid_a(q) = m = d^2 f\mid_a(q_0) < 0$

Поэтому

$f(a + h) - f(a) \leq \|h\|^2 \left(\dfrac{m}{2} + \overline{\overline{o}}(1)\right)$

...

$f(a + h) - f(a) \leq \dots < 0$

12

12.3

Опечатка:

В предложении: $\gamma(t) \in \Gamma_f \, \forall t \in (\boldsymbol{-\varepsilon, \varepsilon})$.

Пояснение:

Пусть $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma_x}(t), \dot{\gamma}_y(t), \dot{\gamma}_z(t)) = (, \dot{\gamma}_y(t), \dot{\gamma}_z(t))$, тогда:

$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma_x}(t), \dot{\gamma}_y(t), \dot{\gamma}_z(t)) = (d\gamma_x, d\gamma_y, d\gamma_z)$ – функция, состоящая из дифференциалов по каждой координате.

13

13.1

Как стоит понимать: см. видео-запись.

13.2

Пояснение:

Само утверждение было в конспекте «Лекция 7».

Косов поясняет тут: https://youtu.be/mRfbzVBaDsw?t=3473.

14 (Очень странный билет, особенно 14.2, 14.3; я вообще не уверен, что конспект соответствует описанию билета)

14.1

14.2 и 14.3

15

15.1

Пояснение: $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \mid_{t=0} = 0$**:**

$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \mid_{t=0}$ – просто производная одномерной функции $f(\gamma(t))$, а мы знаем, что производная такой функции в точке локального экстремума равно 0.

Пояснение: «В частности, в случае, когда M задано уравнением $F(x) = 0$, получаем, что в точке условного локального экстремума $\nabla f(a) \perp h \forall h : h \perp \nabla F(a)$.»:

Потому что есть следующее предложение (см. 14.2):

Предложение. Пусть M задана уравнением $F(x) = 0$ и $\operatorname{rk} \nabla F(x) = 1 \, \forall x \in M$. Тогда $h \in T_a M \Leftrightarrow \langle \nabla F(a), h \rangle = dF \mid_a (h) = 0$.

Здесь (15.1) описано следующее предложение:

Предложение. (Необходимое условие локального экстремума). Если a — точка условного локального экстремума, то $\nabla f(a) \perp T_a M$.

Поэтому в итоге и получается это утверждение.

Пояснение: $\nabla f(a) = \lambda \nabla F(a) \iff dL_\lambda \mid_a = 0$**, где** $L_\lambda(x) = f(x) - \lambda F(x)$**:**

Потому что:

$L_\lambda(a) = f(a) - \lambda F(a)$ – возьмём дифференциал

$dL_\lambda \mid_a (h) = df \mid_a (h) + \lambda dF \mid_a (h) = (\nabla f(a), h) + \lambda(\nabla F(a), h) = (\nabla f(a) - \lambda \nabla F(a), h)$

$(\nabla f(a) - \lambda \nabla F(a), h) = 0 \, \forall h \iff \nabla f(a) - \lambda \nabla F(a) = 0$

Аналогично для $\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla F_1(a) + \dots + \lambda_{k-m} \nabla F_{k-m}(a)$.

15.2