Математический Анализ
Семинар 20.

Филиппов Андрей (БПМИ193-2)

2020.02.18-2020.03.03
2020.03.03 17:06:03

Содержание

---

1 Обозначения

- Обозначения, принятые в конспектах лекций;
- C – любая возможная константа.

---

2 Семинар

2.1 Теория

...

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

Далее идут задача из «Листок 4».

2.2 1.

2.2.1 a)

$$\begin{aligned}
&g = x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2\left(x^2 - 4x + 4\right) = x^2\,(x-2)^2 \geq 0 \\
&f = \cos \pi x - 1 \leq 0
\end{aligned}$$

<картиночка площади, которую нужно найти>

$$\int_0^2 (g - f)\,dx = \int_0^2 \left(x^2\,(x-2)^2 - \cos \pi x + 1\right) dx = \frac{46}{15}$$

2.2.2 b)

$$\begin{aligned}
&x^3 = x^2 - y^2 \\
&y^2 = x^2 - x^3 \implies y = \pm\sqrt{x^2\,(1-x)} = \pm\,|x|\,\sqrt{1-x}
\end{aligned}$$

$|x|\,\sqrt{1-x}, x \leq 1$ <картиночка графиков $+\,|x|\,\sqrt{1-x}$ и $-\,|x|\,\sqrt{1-x}$>

$$s = \int_0^1 |x|\,\sqrt{1-x} - \left(-\,|x|\,\sqrt{1-x}\right) dx = 2\int x\sqrt{1-x}\,dx = \begin{bmatrix} 1 - x = t^2 \\ \ldots \end{bmatrix} = \cdots = \frac{8}{15}$$

2.3 2.

2.3.1 Длина пространственной кривой

$\varphi : (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ (или, например, $t \in [a; +\infty)$

$x(t), y(t), z(t) \in C^{(1)}(a, b)$ (есть первая производная)

$\implies l_\varphi = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$

$$x(t) = e^{-t} \cos t$$
$$ty(t) = e^{-t} \sin t$$
$$z(t) = e^{-t}$$
$$t \in [0; +\infty)$$

$$x'(t) = (-\sin t - \cos t)\, e^{-t}$$
$$y'(t) = (\cos t - \sin t)\, e^{-t}$$
$$z'(t) = -e^{-t}$$

$$l_\varphi = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{3e^{-2t}}\, dt = ??? = \lim_{b \to +\infty} -\sqrt{3}e^{-b} - \left(-\sqrt{3}e^{-0}\right)$$
$$= \lim_{b \to +\infty} -\sqrt{3}e^{-b} + \lim_{b \to +\infty} -\left(-\sqrt{3}e^{-0}\right) = 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

2.4 Теория: Несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\, dx$$
$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a \to 0+0} \int\limits_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

2.5 3.

2.5.1 a)

$$\int\limits_0^1 \ln x\, dx = \lim_{a \to 0+0} \int\limits_a^1 \ln x\, dx = (x \ln x - x)\,|_0^1 = (1 \ln 1 - 1) - \lim_{a \to 0+0} (a \ln a - a) = 0$$
$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x$$

$$\lim_{a \to 0+0} x^\alpha \left(\ln x??\right)^\beta = 0, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$$

2.5.2 b)

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{c} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{c}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(c = 0)$$

$$= \arcsin x|_{-1}^{0} + \arcsin x|_{0}^{1}$$

$$= \arcsin 0^{=0} - \lim_{a \to -1+0} \arcsin a^{=-\frac{\pi}{2}} - 0^{=0} + \lim_{b \to 1-0} \arcsin b^{=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

<можно было воспользоваться нечётностью $\arcsin x$???>: $\int_{-1}^{1} = 2\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \dots = \pi$

2.6 Теория: Разбиение определённого интеграла с особенностью в точке не на границе промежутка

Собственный интеграл по Римману -> Несобственный интеграл -> Несобственный интеграл по Коши (последнее мы не прошли и пока об этом задумываться не надо)

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\,|_{-1}^{0} + \ln|x|\,|_{0}^{1}$$

$$\overset{*}{=} \lim_{\epsilon_1 \to 0-0} (\ln|\epsilon_1|) + \lim_{\epsilon_2 \to 0+0} (\ln|\epsilon_2|) = 0$$

Суть в том, что при переходе $*$ нужно быть аккуратным, нельзя сразу записать limиты вместе, они должны быть независимы (один из них может не существовать, тогда печаль...), поэтому выше они показательно записаны от разных величин (ϵ_1, ϵ_2).

2.7 Задание

2.7.1 c)

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax} \cos bx\,dx, a > 0$$

$$= \left(\frac{b}{a^2+b^2}\sin bx - \frac{a}{a^2+b^2}\cos bx\right) e^{-ax}|_0^{+\infty} = 0 + \frac{a}{a^2+b^2} \cdot e^{-0} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

2.7.2 d)

2.8 Теория (не теория): Гамма-функция

$$\Gamma(a) = \int\limits_{0}^{+\infty} t^{a-1} e^{-t}\,dt, a \in (0; +\infty)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

2.9 Задание

$$\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx \overset{\text{ВР}}{=} -e^{-x}x^n\big|_0^{+\infty} + n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -e^{-x}x^n + e^{-0}0^n$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1)$$

$$= n(n-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} x^0 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\big|_0^{+\infty} = 1$$

$$\Gamma(n+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$$

2.10 Задание

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)\,dx$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(\sin x\right)\,dx = I$$

$$= \int\limits_0^{\pi} f\left(\sin x\right)\,dx \overset{?}{=} 2\int\limits_0^{\pi/2} f\left(\sin x\right)\,dx$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} f\left(\sin x\right)\,dx \overset{?}{=} \int\limits_0^{\pi/2} f\left(\cos x\right)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos\left(\pi/2+0-x\right)^{=\sin x}\right)\,dx$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} f\left(\sin x\right)\,dx + \int\limits_0^{\pi} f\left(\sin x\right)\,dx = -\int f\left(\sin x\right)???$$

2.11 Ещё что-то

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln 2\,dx + \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx + \int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx$$

$$= \pi/2\cdot\ln 2 + 2I$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln\sin t\,dt = I = \pi/2\cdot\ln 2 + 2I \implies I = \pi/2\cdot\ln 2$$

2.12 4.

?

2.13 5.

Исследовать на сходимость интеграл.

(все такие p, при которых интеграл сходится)

I.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} x^{1-p}|_1^{+\infty} & , p \neq 1(1) \\ \ln x|_1^{+\infty} & , p = 1(2) \end{cases}$$

(1)

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p}$$

$$\iff$$

$$1-p<0$$

$$\exists \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \iff p>1$$

II.

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} x^{1-p}|_0^{1} & , p \neq 1(1) \\ \ln x|_0^{1} & , p = 1(2) \end{cases}$$

(1)

$$\exists \lim_{x\to 0+0} x^{1-p}$$

$$\iff$$

$$1-p>0$$

(2)

$$\lim_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$$

$$\exists \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^p}\,dx \iff p<1$$

III.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \underbrace{\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^p}\,dx}_{p<1} + \underbrace{\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx}_{p>1} \implies \nexists$$

2.14 Теория: Теорема. Мажорантный признак Вейерштрасса

Пусть

$\int_a^{+\infty} |f(x)| \, dx^{=I_1}$, $\int_a^{+\infty} g(x) \, dx^{=I_2}$ и $\exists A \in (a; +\infty) : \forall x \in [A; +\infty) \implies |f(x)| \leq g(x)$

Абсолютно сходящийся, условно сходящийся

$\implies I_2$ сход. $\implies I_1$сход $\qquad$ I_1сход $\implies \int_a^{+\infty} f(x) \, dx$

I_1 расх. $\implies I_2$расх

2.15 Задание

$$\int\limits_1^{+\infty} \underbrace{\left| \frac{\operatorname{arctg}\left(\sin\left(x^2 + e^x\right)\right)}{x^2 + \sin x} \right|}_{|f(x)|} dx$$

$$|f(x)| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^2 - 1} \underset{\text{финально}}{\leq} \underbrace{4 \cdot \frac{1}{x^2}}_{g}$$

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{4}{x^2} \, dx \implies \int\limits_A |f(x)| \, dx$$