Математический Анализ
Конспект Семинара 23.
(2020.03.10)

Филиппов Андрей (БПМИ193-2)

2020.03.10-2020.03.10
2020.03.10 13:33:17

Содержание

---

1 Обозначения

- Обозначения, принятые в конспектах лекций;
- C – любая возможная константа.

---

2 Семинар: Функции многих переменных (двух переменных)

2.1 Теория: Непрерывность

Пусть:

$f(x, y) : G \to \mathbb{R}$

$(x_0, y_0) \in G.$

По Коши: $f(x,y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0), ели $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : d((x,y),(x_0,y_0)) < \delta(\varepsilon) \implies |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$

Возможные «расстояния» (метрики): $d_2((x,y),(x_0,y_0)) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ $d_1((x,y),(x_0,y_0)) = \lvert x-x_0\rvert + \lvert y-y_0\rvert$ – таксомоторная метрика

По Гейне: ну, понятно.

——————————

<пример про параболу, который показывает, что очень сложно определить непрерывность функции в общем случае>:

$y = x^2 \implies f(x,y) = 1$

$y \neq x^2 \implies f(x,y) = 0$

2.2 Задание

Найти A, чтобы $f(x,y)$ стало непрерывной (в точке $(0,0)$?):

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & , x^2+y^2 \neq 0 \\ A & , x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Реш 1:

$x = y \implies A = 0$

$$D = \left| \underbrace{0}_{=f(x_0,y_0)} - \underbrace{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}_{=f(x,y)} \right| = \left| \frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{x^2+y^2} \right| = |x+y| \left| 1 - \frac{xy}{x^2+y^2} \right| = \begin{bmatrix} x^2+y^2 \geq 2\,|xy| \\ \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} < 2\,|x+y| < 2\,(|x|+|y|)$$

$\delta < \dfrac{\varepsilon}{2} \implies D < \varepsilon$

Доказали непрерывность в точке $(0,0)$.

Реш 2:

Полярная замена координат: $r = \sqrt{x^2+y^2} \in [0; +\infty)$ $\varphi \in [0; 2\pi)$ $x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$

Используем полярную замену координат:

$x^2 + y^2 = r^2$

$$f(r,\varphi) = \frac{r^3\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right)}{r^2} = r\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right) \to 0 \text{ при } x \to 0+0, \varphi \in [0; 2\pi)$$

Доказали.

2.3 Задание

Найти A или доказать, что A не существует, чтобы $f(x,y)$ была непрерывна в $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & , x^2+y^2 \neq 0 \\ A & , x^2+y^2 \neq 0 \end{cases}$$

Реш 1:

Докажем, что такого A нет, по Гейне.

Выбираем две последовательности:

$x_n = y_n$

$x_n = y_n^2$

$\implies \dfrac{2x_n \cdot x_n}{x_n^2 + x_n^2} = 1$

$\implies \dfrac{2y_n^2 \cdot y_n}{y_m^4 \cdot y_n^2} = \dfrac{2y_n}{y_n^2 + 1} \underbrace{\to}_{y_n \to 0} 0$

Для них разные пределы, поэтому такого A не существует.

Реш 2:

Используем полярную замену координат:

$f(r, \varphi) \underbrace{=}_{r \to 0} \dfrac{2r^2 \cos\varphi \sin\varphi}{r^2} = \sin(2\varphi)$ – не должно зависеть от φ, поэтому A не существует

<что-то про синус и несчётное количество чего-то>

2.4 Задание

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 y}{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ A & , x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Реш:

$x_n = y_n \implies f(x_n, y_n) = \dfrac{2x_n^3}{2x_n^2} \to 0,\ x_n \to 0$

Поэтому кандидат $A = 0$.

$\left|0 - \dfrac{2x^2 y}{x^2 + y^2}\right| = \left|\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}\right| \cdot |x| \leq 1 \cdot |x| < \varepsilon$

————

Используем полярную замену координат:

$f(r, \varphi) = \dfrac{2\cos^2\varphi \sin\varphi \cdot r^3}{r^2} = r \sin(2\varphi)\cos(\varphi) \to 0$

2.5 Задание

Такое же, для нового $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ A & , x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Реш 1:

$x_n = y_n$: $f(x_n, y_n) = \dfrac{x_n^3 + x_n^2}{x_n^2 + x_n^2} = \dfrac{x_n + 1}{2} \to \dfrac{1}{2}$

$x_n^3 = y_n^2$: $f(x_n, y_n) = \dfrac{2y_n^2}{y_n^{4/3} + y_n^2} = \dfrac{2}{y_n^{-2/3} + 1} \to 0$

Разные пределы, поэтому A не существует.

Реш 2:

$f(x, y) = \dfrac{r^3 \cos^3\varphi + r^2 \sin^2\varphi}{r^2} = \underbrace{r\cos^3\varphi}_{\to 0} + \sin^2\varphi$ – зависит от φ, поэтому A не существует.

2.6 Теория: Пределы с двумя переменными

Двойной предел (кратный предел): $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2} \not\to$ (или $\lim_{x\to0,y\to0} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$??)

Повторный предел: $\lim_{y\to0} \lim_{x\to0} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to0} \dfrac{y^2}{y^2} = 1$

Повторный предел: $\lim_{x\to0} \lim_{y\to0} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \dfrac{x^3}{x^2} = 0$

2.7 Задание

$f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =?$

$\lim_{y\to0} \lim_{x\to0} f(x,y) =?$

$\lim_{x\to0} \lim_{y\to0} f(x,y) =?$

Реш:

1-ая последовательность:

$x_n = \dfrac{1}{\pi x}$; y_n

$f(x_n, y_n) = (x_n + y_n)\sin(\pi n)\sin\dfrac{1}{y_n} = 0$

2-ая последовательность:

$x_n = \dfrac{2}{4\pi n + \pi}$; y_n

$f(x_n, y_n) = (x_n + y_n)\sin(\pi/2 + 2\pi n)\sin\dfrac{1}{y_n} = (x_n + y_n)\sin\dfrac{1}{y_n} \to y_n \sin\dfrac{1}{y_n} \to 0$

Итог:

В общем, у нас не получилось то, чего мы хотели. Мы хотели показать, что двойной предел не существует, для этого мы хотели показать, что повторные пределы различные (но при этом не всегда это означает, что двойной предел не существует, так что потом нужно ещё покукарекать). В итоге у нас получилось, что повторные пределы равны.

Но вот тогда способ показать, что двойной предел существует:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y} = \left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right| < |x| + |y| \le |x| + |y| \to 0$

Тут Мажуга залип из-за неожиданного поворота, потому что сначала думал, что двойной предел не существует.

2.8 Задание

$f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =?$

$\lim_{y\to0} \lim_{x\to0} f(x,y) =?$

$\lim_{x\to0} \lim_{y\to0} f(x,y) =?$

Реш:

$\lim_{y\to0} \lim_{x\to0} f(x,y) = \lim_{y\to0} \dfrac{-y}{y} = -1$

$\lim_{x\to0} \lim_{y\to0} f(x,y) = \lim_{x\to0} \dfrac{y}{y} = 1$

$x_n = y_n$

$x_n = 0$; $y_n \to 0$

————————–

<далее какие-то графики и пояснения...>:

В общем, мы не можем доопределить функцию на прямой $x = -y$:

$\lim_{y \to -x} \dfrac{x-y}{x+y} \to +\infty$

————————–

$x = \sqrt{y}$

$\dfrac{\sqrt{y} - y}{\sqrt{y} + y} = \dfrac{1 - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}} \underbrace{\to}_{y \to 0+0} 1$

Короче $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 1$??.