Математический анализ
Конспект Семинара 22.
(2020.03.03)

Филиппов Андрей (БПМИ193-2)

2020.03.03-2020.03.03
2020.03.03 14:12:26

Содержание

---

1 Обозначения

- Обозначения, принятые в конспектах лекций;
- C – любая возможная константа.

2 Обозначения служебные

- ??? – место, в котором что-то не написано;
- ?? – место, в котором прослушано, поэтому не факт, что верно;
- $(a?b)$ – место, в котором не понятно, что было: a или b.

---

3 Про КР

- Будет 5 задач.
- Важнее идти по правильному пути, чем не допускать ошибки.
- Глупые вещи доделывать в последний момент: интегрирование рациональных дробей и др.

4 Семинар

4.1 Задание

Исследовать на сходимость

$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{x^{5/2}}{\left(1+x^2\right)^2}}_{=f(x)??} dx$ – *вот эту штуку мы сможем посчитать на втором курсе)))*

$f(x) \sim_{x \to +\infty} \frac{x^{5/2}}{x^4} = \frac{1}{x^{3/2}}$

$\int^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \to \iff p > 1$

$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \to \iff p > 1$

???

4.2 Задание

Исследовать на сходимость

$\int_1^{+\infty} \frac{x^8 \sin\left(x^5\right)}{1+x^5} dx = \begin{bmatrix} x^5 = s \\ x = t^{1/5} \\ dx = \frac{1}{5} t^{-4/5} dt \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \int_1^{+\infty} \frac{t^{4/5} \sin t}{1+t} dt$

$g(t) = \frac{t^{4/5}}{1+t} - \to 0$ *(нужно ещё доказать, что монотонна, обычно она монотонна, поэтому на КР, чтобы не тратить время, можно откладывать доказательство монотонности напоследок)*

$f(t) = \sin t$

По признаку Дирихле-Абеля: ???

...

4.3 Задание

Найти интеграл

$\int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x + 6\cos x + 8}}_{=f(x)}$

$x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4) \implies \cos^2 x + 6\cos x + 8 = (\cos x + 2)(\cos x + 4)$

Раскладываем подынтегральную дробь:

$f(x) = \frac{1}{\cos x + 2} - \frac{1}{\cos x + 4}$

$\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x + 2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x + 4} = \dots$

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x + a} \, [a \neq 0] = 2\int_0^1 \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + a} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \dots$

Формула
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-a}{x+e} ??????☺ \right| + C$ – *Мажуга не помнит формулу))))*
Вообще она такая:
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-x}{a+x} \right| + C$

...

4.4 Задание

Найти интеграл

$\int \frac{dx}{A\sin x + B\cos x + C}$
???

4.5 Теория: Вспоминаем: Замена для $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

4.6 Задание

Найти интеграл

$\int x^3 \cdot \operatorname{arctg}^2 x \, dx$

Лайфхак
При интегрировании по частям для интегралов с подынтегральными выражениями вида
$P \cdot \sin x$
$P \cdot \cos x$
$P \cdot \operatorname{arc} \ldots x$
$P \cdot e^x$
, где P – полином, почти всегда P нужно дифференцировать, а другую функцию интегрировать.

$x \operatorname{arctg}^2 x$ – интегрируем

x^2 – дифференцируем

$= \frac{1}{4} x^4 \operatorname{arctg}^2 x - \frac{1}{4} \int x^4 \cdot \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$ (что-то (всё) $= I$, а ещё выделено всё кроме $\operatorname{arctg} x$)

$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int \frac{x^4 - 1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} dx = \underbrace{\frac{1}{3} x^3 - x + \operatorname{arctg} x}_{=g(x)} + C$

$I = g \cdot \operatorname{arctg} x - \int \left(\frac{1}{3} x^3 - x + \operatorname{arctg} x \right) \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$

$\implies \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C$

Очевидная Формула
$\int f \cdot \underbrace{f' \, dx}_{=df} = \int f \, df = \frac{1}{2} f^2 + C$

...

4.7 Задание

Когда нужно сесть и заботать, то распределение оценок имеет два холма.

Найти интеграл

$\int \frac{1}{\left(x^2-1\right)^3} dx = (\circ)$

$\frac{1}{(x-1)^3 (x+1)^3}$ – *про такой-то способ, в котором мы ляжем*

Вспоминаем: Метод Остроградского
$\int \frac{P}{Q} dx = \frac{P_1}{Q_1} + \int \frac{P_2}{Q_2} dx$
$Q = Q_1 \cdot Q_2$, где Q_2 – без кратных корней
$\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q_1} \right)' + \frac{P_2}{Q_2}$

$Q_1 = Q_2^2$

$Q_2 = (x-1)(x+1)$

$(\circ) = \frac{P_1}{(x-1)^2 (x+1)^2} + \int \frac{P_2}{Q_2} dx$

$\frac{1}{Q_2^3} = \left(\frac{P_1}{Q_2^2} \right)' + \frac{P_2}{Q_2}$

$$\frac{P_1' \cdot Q_2^{\cancel{2}} - P_1 \cdot 2 \cancel{Q_2} \cdot Q_2'}{Q_2^{\cancel{4}3}} + \frac{P_2}{Q_2}$$

$$1 = P_1' \cdot Q_2 - P_1 \cdot 2 \cdot Q_2' + P_2 \cdot Q_2^2 \quad (*)$$

Теперь методом неопределённых коэффициентов подставляем в $(*)$ и находим P_1 и P_2:

$$P_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$P_2 = Ex + F$$

Ну, тут неприятно находить коэффициенты. Сначала что-нибудь подставим, в данном случае $x = \pm 1$, чтобы получить несколько уравнений, а потом страдаем, чтобы получить остальные уравнения.

4.8 Задание

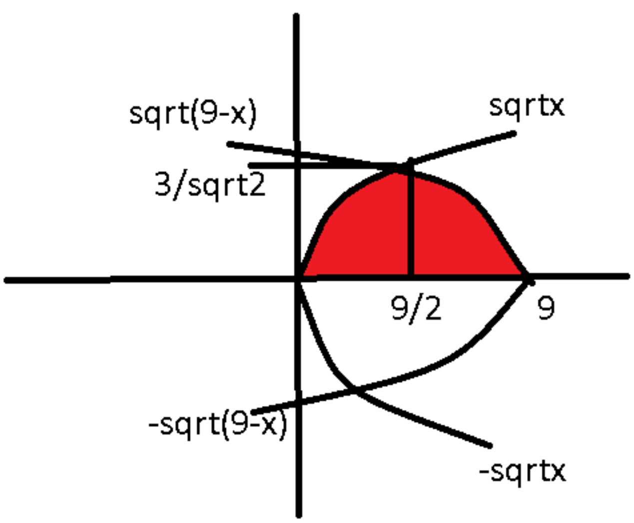
Найти интеграл

$$\int_0^{+\infty} 5^{-\sqrt{x}} dx = \begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int_0^{+\infty} 5^{-t} \cdot 2t\,dt = \underbrace{-\frac{1}{\ln 5} 5^{-t} \cdot 2t \Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{2}{\ln 5} \int_0^{+\infty} 5^{-t} \cdot 1 \cdot dt =?? \frac{2}{\ln 5} \cdot \left(-\frac{1}{\ln 5} 5^{-t}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{(\ln 5)^2}$$

4.9 Задание

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$x = y^2$, $x = 9 - y^2$



$y = \pm\sqrt{x}$, $y = \pm\sqrt{9 - x}$

$$\int_0^{9/2} \sqrt{x} dx + \int_{9/2}^{9} \sqrt{9 - x} dx = \ldots$$

$=$

$$= 2\int_0^{3/\sqrt{2}} \left(9 - y^2 - y^2\right) dy = 2\int_0^{3/\sqrt{2}} \left(9 - 2y^2\right) dy = 2 \cdot \left(9y - \frac{2}{3} y^3\right)\Big|_0^{3/\sqrt{2}}$$

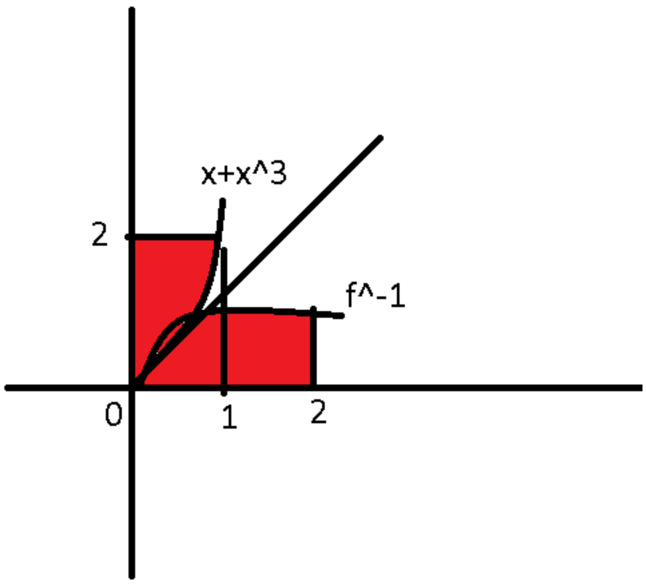
Вспоминаем: Формула площади между кривыми на отрезке $[a; b]$
$\int_a^b (f - g)\,dx$

4.10 Задание

$x + x^3 = f(x)$

f^{-1}

$\int_0^2 f^{-1}(x)\,dx$



– это про то, что обратная функция есть отражение относительно $y = x$, поэтому, когда просят искать какую-то площадь (определённый интеграл), связанную с обратной функцией, то нужно понять, как свести это к необратной функции. – *есть фотка этого рисунка на доске*

4.11 Задание [быстро в конце семинара]

$I = \int_0^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x^{1/(3?5)}}{3x^2 + 2x + 3} dx$

$x = \dfrac{1}{t}$

$\operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

??? – *тут какое-то пояснение по поводу дальнейшего решения*