Линейная алгебра

Бобень Вячеслав
@darkkeks, GitHub
Большую часть исходного кода предоставила Левина Александра.
Благодарность выражается Левину Александру за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

"К коллоку можете даже не готовиться".

— Роман Сергеевич Авдеев

Содержание

1 Лекция 09.09.2019

1.1 Матрицы

Определение 1. *Матрица размера* $n \times m$ — это прямоугольная таблица высоты m и ширины n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} – элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца

Краткая запись – $A = (a_{ij})$

Множество всех матриц размера $m \times n$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ (множество всех действительных чисел) — $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ или $\mathrm{Mat}_{n\times m}$

Определение 2. Две матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$ и $B \in \mathrm{Mat}_{p\times q}$ называются *равными*, если $m = p$, $n = q$, и соответствующие элементы равны

Пример. $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$

1.2 Операции над матрицами

Для любых $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$

- *Сложение* $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$
- *Умножение на скаляр* $\alpha \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij})$

Свойства суммы и произведения на скаляр

$\forall A, B, C \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1) $A + B = B + A$ (коммутативность)
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность)
3) $A + 0 = 0 + A = A$, где

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ — нулевая матрица.}$$

4) $A + (-A) = 0$
   $-A = (-a_{ij})$ – противоположная матрица
5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
7) $\lambda(\mu A) = \lambda(\mu A)$
8) $1A = A$

Упражнение на дом. *Доказать эти свойства.*

Замечание. Из свойств 1) – 8) следует, что $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ является векторным пространством над $\mathbb{R}$

1.3 Пространство $\mathbb{R}^n$, его отождествление с матрицами-столбцами высоты n

$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n\}$

$\mathbb{R}$ – числовая прямая

$\mathbb{R}^2$ – плоскость

$\mathbb{R}^3$ – трехмерное пространство

Договоримся отождествлять $\mathbb{R}^n$ со столбцами высоты n

$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – *вектор столбец*

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \ldots, n \right\} = \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

$$\left[x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right] \implies [x = y \iff x_i = y_i \ \forall i]$$

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_i := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

1.4 Транспонирование матриц, его простейшие свойства

$$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T \in \mathrm{Mat}_{n\times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A^T — *транспонированная матрица*

Свойства:
1) $(A^T)^T = A$
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

1.5 Умножение матриц

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$

$A_{(i)} = \big(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\big)$ — i-я строка матрицы A

$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ — j-й столбец матрицы A

1) Частный случай: умножение строки на столбец той же длинны

$$\underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{1\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n$$

2) Общий случай:

   A - матрица размера $m \times \underline{n}$

   B - матрица размера $\underline{n} \times p$

   Количество строк матрицы A равно количеству столбцов матрицы B — условие согласованности матриц

   $AB := C \in \mathrm{Mat}_{m\times p}$, где $C_{ij} = A_{(i)}B^{(j)}$

Пример. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \dots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \dots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_m & \dots & x_ny_m \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

2 Лекция 12.09.2019

2.1 Отступление о суммах

Пусть $S_p, S_{p+1}, \dots, S_q$ – набор чисел.

Тогда, $\sum_{i=p}^{q} S_i := S_p + S_{p+1} + \dots + S_q$ – сумма по i от p до q

Например, $\sum_{i=1}^{100} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$

Свойства сумм:

1. $\lambda \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda S_i$
2. $\sum_{i=1}^{n}(S_i + T_i) = \sum_{i=1}^{n} S_i + \sum_{i=1}^{n} T_i$
3. $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} S_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} S_{ij}$ — сумма всех элементов матрицы $S = (S_{ij})$

2.2 Основные свойства умножения матриц

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n},\ B \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$

1. $\underbrace{A(B+C)}_{x} = \underbrace{AB + AC}_{y}$ — левая дистрибутивность.

   Доказательство.

$$\begin{aligned} x_{ij} = A_{(i)}(B+C)^{(j)} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \\ &= A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

2. $(A+B)C = AC + BC$ — правая дистрибутивность, доказывается аналогично.
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
4. $(AB)C = A(BC)$ — ассоциативность.

   Доказательство. $\underbrace{(AB)}_{u} C = x, A \underbrace{(BC)}_{v} = y$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} (a_{il}b_{lk}c_{kj}) \\ &= \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} (a_{il}b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^{p} a_{il} \sum_{k=1}^{n} (b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^{p} a_{il}v_{lj} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

5. $\underbrace{(AB)^T}_{x} = \underbrace{B^T A^T}_{y}$

   Доказательство. $x_{ij} = [AB]_{ji} = A_{(j)}B^{(i)} = B^T_{(i)}(A^T)^{(j)} = y_{ij}$ ■

Умножение матриц не коммутативно
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Определение 3. $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ называется *квадртаной матрицей* порядка n

Обозначение $M_n := \mathrm{Mat}_{n\times n}$
$A \in M_n$

2.3 Диагональные матрицы

Определение 4. Матрица $A \in M_n$ называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \implies A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Лемма 2.1. $A = diag(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

1. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{n\times p} \implies AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$

2. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \implies BA = \begin{pmatrix} a_1 B^{(1)} & a_2 B^{(2)} & \dots & a_n B^{(n)} \end{pmatrix}$

Доказательство. 1. $[AB]_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i b_{ij}$

2. $[BA]_{ij} = \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ a_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = b_{ij} a_j$

■

2.4 Единичная матрица и её свойства

Определение 5. Матрица $E = E_n = diag(1, 1, \dots, 1)$ называется *единичной матрицей* порядка n.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства:

1. $EA = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$
2. $AE = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{p\times n}$
3. $AE = EA = A \quad \forall A \in M_n$

2.5 След квадратной матрицы и его свойства

Определение 6. *Следом* матрицы $A \in M_n$ называется число $trA = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Свойства:

1. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$
2. $\operatorname{tr} \lambda A = \lambda \operatorname{tr} A$
3. $\operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A$
4. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$
   $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}, B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$

Доказательство. $AB = x \in M_m$, $BA = y \in M_n$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} x = \sum_{i=1}^{m} x_{ii} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{ji}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(b_{ji}a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} y_{jj} = \operatorname{tr} y.\end{aligned}$$

■

Пример. $A = (1,2,3), B = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

$tr(AB) = tr(1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6) = 32$

$tr(BA) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\ 5 & 10 & 15\\ 6 & 12 & 18\end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$

2.6 Системы линейных уравнений.

Линейное уравнение: $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$.
$a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ – коэффициенты.
$x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные.

Система линейных уравнений (СЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m уравнений, n неизвестных

Определение 7.

1. *Решение одного уравнения* – это такой набор значений неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, при подстановке которого в уравнение получаем тождество.

2. *Решение СЛУ* – такой набор значений неизвестных, который является решением каждого уравнения СЛУ.

Основная задача: решить СЛУ, т.е. найти все решения.

Пример. $n = m = 1$
$ax = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, x – неизвестная

1. $a \neq 0 \implies x = \frac{b}{a}$ – единственное

2. $a = 0 \implies 0x = b$

   $b \neq 0 \implies$ решений нет.

   $b = 0 \implies x$ – любое $\implies$ бесконечно много решений.

2.6.1 Совместные и несовместные системы

Определение 8. СЛУ называется
– *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение
– *несовместной*, если решений нет

2.6.2 Матричная форма записи СЛУ

$AX = B$.

$$A \in Mat_{m\times n}(R) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – матрица коэффициентов}$$

$$B \in \mathrm{Mat}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ – столбец правых частей}$$

$$X \in \mathrm{Mat}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – столбец неизвестных}$$

3 Лекция 14.09.2019

3.1 Расширенная матрицы системы линейных уравнений

$Ax = b$, $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$
Полная информация о СЛУ содержится в её *расширенной матрице.*

$$\left(A \mid b\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

3.2 Эквивалентные системы

Определение 9. Две системы уравнений от одних и тех же неизвестных называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

Пример. Рассмотрим несколько СЛУ

A) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

B) $\begin{cases} 2x_1 = 1 \\ 2x_2 = 1 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

C) $x_1 + x_2 = 1 \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

A и B эквиваленты, так как обе имеют единственное решение $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
A и C не эквивалентны, так как C имеет бесконечно много решений.

3.3 Как решить СЛУ?

Идея: выполнить преобразование СЛУ, сохраняющее множество её решений, и привести её к такому виду, в котором СЛУ легко решается.

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$

3.3.1 Элементарные преобразования СЛУ и соответствующие преобразования строк её расширенной матрицы

тип	СЛУ	расширенная матрица
1.	К i-му уравнению прибавить j-ое, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ $(i \neq j)$	$Э_1(i, j, \lambda)$
2.	Переставить i-е и j-е уравнения $(i \neq j)$	$Э_2(i, j)$
3.	Умножить i-ое уравнение на $\lambda \neq 0$	$Э_3(i, \lambda)$

1. $Э_1(i, j, \lambda)$: к i-ой строке прибавить j-ую, умноженную на λ (покомпонентно),
   $a_{ik} \mapsto a_{ik} + \lambda a_{jk}$ $\forall k = 1, \dots, n$,
   $b_i \mapsto b_i + \lambda b_j$.
2. $Э_2(i, j)$: переставить i-ую и j-ую строки.
3. $Э_3(i, \lambda)$: умножить i-ю строку на λ (покомпонентно).

$Э_1, Э_2, Э_3$ называются *элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы.*

3.3.2 Сохранение множества решений системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях

Лемма 3.1. Элементарные преобразования СЛУ не меняют множество решений

Доказательство. Пусть мы получили СЛУ($\star\star$) из СЛУ($\star$) путем применения элементарных преобразований.

1. Всякое решение системы ($\star$) является решением ($\star\star$).
2. ($\star$) получается из ($\star\star$) путем элементарных преобразований.

$(\star) \to (\star\star)$	$(\star\star) \to (\star)$
$Э_1(i, j, \lambda)$	$Э_1(i, j, -\lambda)$
$Э_2(i, j)$	$Э_2(i, j)$
$Э_3(i, \lambda)$	$Э_3(i, \frac{1}{\lambda})$

Следовательно, всякое решение ($\star\star$) является решением ($\star$) $\implies$ множества решений совпадают. ∎

3.4 Ступенчатые матрицы

Определение 10. Строка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется *нулевой*, если $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ и *ненулевой* иначе $(\exists i : a_i \neq 0)$.

Определение 11. *Ведущим элементом* ненулевой строки называется первый её ненулевой элемент.

Определение 12. Матрица $M \in \mathrm{Mat}_{m \times n}$ называется *ступенчатой*, или имеет ступенчатый вид, если:

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк строго возрастают.

2. Все нулевые строки стоят в конце.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \diamond & * & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \diamond & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \diamond & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\diamond \neq 0$, $*$ – что угодно.

3.4.1 Улучшенный ступенчатый вид матрицы

Определение 13. M имеет *улучшенный ступенчатый вид*, если:

1. M имеет обычный ступенчатый вид.
2. Все ведущие элементы равны 1.
3. В одном столбце с любым ведущим элементом стоят только нули.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.2. *1) Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду.*
2) Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

Следствие. Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к **улучшенному** ступенчатому виду.

Доказательство.

1. Алгоритм. Если M - нулевая, то конец. Иначе:

Шаг 1: Ищем первый ненулевой столбец, пусть j — его номер.

Шаг 2: Переставляем строки, если нужно, добиваемся того, что $a_{1j} \neq 0$

Шаг 3: Зануляем элементы в этом столбце используя первую строку – $Э_1(2, 1, -\frac{a_{2j}}{a_{1j}}), \ldots, Э_1(m, 1, -\frac{a_{mj}}{a_{1j}})$.
В результате $a_{ij} = 0$ при $i = 2, 3, \ldots m$.

Дальше повторяем все шаги для подматрицы M' (без первой строки и столбцов $1, \dots, j$).

2. Алгоритм. Пусть $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ – ведущие элементы ступенчатой матрицы.

Шаг 1: Выполняем $Э_3(1, \frac{1}{a_{1j_1}}), \dots, Э_3(r, \frac{1}{a_{rj_r}})$, в результате все ведущие элементы равны 1.

Шаг 2: Выполняем $Э_1(r-1, r, -a_{r-1,\, j_r}), Э_1(r-2, r, -a_{r-2,\, j_r}), \dots, Э_1(1, r, -a_{1,\, j_r})$. В результате все элементы над a_{rj_r} равны 0.

Аналогично обнуляем элементы над всеми остальными ведущими.

Итог: матрица имеет улучшенный ступенчатый вид. ■

3.5 Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения слева на подходящую матрицу

Всякое элементарное преобразование строк матрицы реализуется умножением как умножение слева на подходящую "элементарную матрицу".

- $Э_1(i, j, \lambda)$: $A \mapsto U_1(i, j, \lambda)A$, где

$$U_1(i,j,\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, на i-м j-м месте стоит λ, остальные элементы нули)

- $Э_2(i, j)$: $A \mapsto U_2(i, j)A$, где

$$U_2(i,j) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & i & & & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i-го и j-го столбца (на i-м j-м и j-м i-м местах стоит 1, остальные нули)

- $Э_3(i, \lambda)$: $A \mapsto U_3(i, \lambda)A$, где

$$U_3(i,\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & i & & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i-го столбца, там λ, остальные элементы нули)

Элементарные преобразования столбцов — умножение на соответствующую матрицу справа.

Упражнение на дом. Доказательство.

4 Лекция 19.09.2019

Дана СЛУ с расширенной матрицей $(A \mid b)$.
Было: элементарные преобразования строк в $(A \mid b)$ сохраняют множество решений.

4.1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Прямой ход метода Гаусса.
Выполняя элементарные преобразования строк в $(A|b)$, приведем A к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_{ij_1} & * & \dots & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2j_2} & * & \dots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{rj_r} & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Случай 1 $\exists i \geqslant r+1 : b_i \neq 0$ (в A есть нулевая строка с $b_i \neq 0$)

Тогда в новой СЛУ i-е уравнение $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i$, т.е. $0 = b_i \implies$ СЛУ несовместна.

Случай 2 либо $r = m$, либо $b_i = 0 \quad \forall i \geqslant r+1$

Выполняя элементарные преобразования строк приводим матрицу к улучшенному ступенчатому виду – обратный ход метода Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ называются *главными*, а остальные *свободными*, где j_i – индексы столбцов с ведущими элементами.

Подслучай 2.1 $r = n$, т.е. все неизвестные – главные

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \quad\vdots \\ x_r = b_r \end{cases} \quad \text{— единственное решение.}$$

Подслучай 2.2 $r < n$, т.е. есть хотя бы одна свободная неизвестная

Перенесем в каждом уравнении все члены со свободными неизвестными в правую часть, получаем выражения всех главных неизвестных через свободные, эти выражения называется *общим решением исходной СЛУ.*

Пример. Улучшенный ступенчатый вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Главные неизвестные: x_1, x_3.
Свободные неизвестные: x_2, x_4.
$x_2 = t_1, x_4 = t_2$ – параметры.

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3t_1 - t_2 \\ x_2 = t1 \\ x_3 = 4 + 2t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3t_1 - t_2 \\ t_1 \\ 4 + 2t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 4 + 2x_4 \end{cases}$$

Следствие. Всякая СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ имеет либо 0 решений, либо одно решение, либо бесконечно много решений.

4.2 Однородные системы линейных уравнений

Определение 14. СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если все её правые части равны 0. Расширенная матрица: $(A \mid 0)$

Очевидный факт. Всякая ОСЛУ имеет нулевое решение ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$).

Следствие. Всякая ОСЛУ либо имеет ровно 1 решение (нулевое), либо бесконечно много решений.

Следствие. Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение

Доказательство. В ступенчатом виде будет хотя бы одна свободная неизвестная. Придавая ей ненулевое значение, получим ненулевое решение ■

4.3 Связь между множеством решений системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей однородной системы.

Пусть дана совместная СЛУ $Ax = b$
Частное решение СЛУ — это какое-то одно её решение.

Утверждение 4.1. *Пусть $Ax = b$ – совместная СЛУ.*
x_0 – частное решение $Ax = b$
$S \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений ОСЛУ $Ax = 0$
$L \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений $Ax = b$.
Тогда, $L = x_0 + S$, где $x_0 + S = \{x_0 + v \mid v \in S\}$

Доказательство.

1. Пусть $u \in L$ (u – решение $Ax = b$), положим $v = u - x_0$

   Тогда, $Av = A(u - x_0) = Au - Ax_0 = b - b = 0 \implies v \in S \implies L \subseteq x_0 + S$

2. Пусть $v \in S$ (v – решение $Ax = 0$), положим $u = x_0 + v$.

   Тогда, $Au = A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b \implies u \in L \implies x_0 + S \subseteq L$

Значит, $x_0 + S = L$. ■

4.4 Матричные уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$, общий метод их решения

Два типа матричных уравнений:

1. $AX = B$

   A и B известны, X – неизвестная матрица

2. $XA = C$

   A и C известны, X – неизвестная матрица

Из второго типа получается первый транспонированием матриц: $XA = C \iff A^T X^T = B^T$, то есть достаточно уметь решать только уравнения первого типа.

4.4.1 Тип 1

$\underset{n\times m}{A}\underset{m\times p}{X} = \underset{n\times p}{B}$ – это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} AX^{(1)} = B^{(1)} \\ AX^{(2)} = B^{(2)} \\ \qquad\vdots \\ AX^{(p)} = B^{(p)} \end{cases}$$

Этот набор СЛУ надо решать одновременно методом Гаусса.
Записываем матрицу $(A \mid B)$ и элементарными преобразованиями строк с ней приводим A к улучшенному ступенчатому виду.
Получаем $(A' \mid B')$, где A' имеет улучшенный ступенчатый вид.
Остается выписать общее решение для каждой СЛУ

$$\begin{cases} A'x^{(1)} = B'^{(1)} \\ A'x^{(2)} = B'^{(2)} \\ \qquad\vdots \\ A'x^{(p)} = B'^{(p)} \end{cases}$$

4.5 Обратные матрицы

Определение 15. Матрица $B \in M_n$ называется *обратной*, к A, если $AB = BA = E$.
Обозначение: $B = A^{-1}$

Факты:

1. Если $\exists A^{-1}$, то она определена однозначно

   Доказательство. Пусть B, B' – две матрицы, обратные к A. Тогда $B = B(AB') = (BA)B' = B'$. ■

2. Если $AB = E$ для некоторой $B \in M_n$, то $BA = E$ автоматически и тогда $B = A^{-1}$

   Замечание. Доказывается на Лекции 8.

Следствие. A^{-1} является решение матричного уравнения $AX = E$ (если решение существует)

4.6 Перестановки на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$

Определение 16. *Перестановкой (подстановкой)* на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется всякое биективное (взаимно однозначное) отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя.

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

S_n – множество всех перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Запись:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ либо } \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \sigma(i_3) & \ldots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}.$$
Здесь, $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Замечание. Количество всех перестановок длины n: $|S_n| = n!$

5 Лекция 23.09.2019

5.1 Инверсии в перестановке

Обозначение: S_n – множество всех перестановок из n элементов.

Пусть $\sigma \in S_n$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$

Определение 17. Пара $\{i, j\}$ (неупорядоченная) образует *инверсию* в σ, если числа $i - j$ и $\sigma(i) - \sigma(j)$ имеют разный знак (то есть либо $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$, либо $i > j$ и $\sigma(i) < \sigma(j)$).

5.2 Знак и чётность перестановки

Определение 18. *Знак* перестановки σ – это число $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{<\text{число инверсий в } \sigma>}$.

Определение 19. Перестановка σ называется *четной*, если $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ (четное количество инверсий), и *нечетной* если $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ (нечетное количество инверсий).

Примеры.

σ	$\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$
число инверсий	0	1
$\operatorname{sgn}(\sigma)$	1	-1
четность	четная	нечетная

σ	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}$
число инверсий	0	1	2	3	2	1
$\operatorname{sgn}(\sigma)$	1	-1	1	-1	1	-1
четность	четная	нечетная	четная	нечетная	четная	нечетная

Замечание. число инверсий в $\sigma \in S_n \leqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, равенство достигается при $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ n & n-1 & \ldots & 1\end{pmatrix}$

5.3 Произведение перестановок

Определение 20. *Произведением* (или *композицией*) двух перестановок $\sigma, \rho \in S_n$ называется такая перестановка $\sigma\rho \in S_n$, что $(\sigma\rho)(x) := \sigma(\rho(x)) \quad \forall x \in \{1, \ldots, n\}$.

Пример.
$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$
$\sigma\rho = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$
$\rho\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$
Видно, что $\sigma\rho \neq \rho\sigma \implies$ произведение перестановок не обладает свойством коммутативности.

5.4 Ассоциативность произведения перестановок

Утверждение 5.1. *Умножение перестановок ассоциативно, то есть* $\sigma(\tau\pi) = (\sigma\tau)\pi \ \forall \sigma, \tau, \pi \in S_n$.

Доказательство. $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеем
$[\sigma(\tau\pi)](i) = \sigma((\tau\pi)(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$
$[(\sigma\tau)\pi](i) = (\sigma\tau)(\pi(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$ ∎

5.5 Тождественная перестановка

Определение 21. Перестановка $id = \begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\1 & 2 & \ldots & n\end{pmatrix} \in S_n$ называется *тождественной* перестановкой.

Свойства:
$\forall \sigma \in S_n \quad id \cdot \sigma = \sigma \cdot id = \sigma$.
$\operatorname{sgn}(id) = 1$.

5.6 Обратная перестановка и её знак

Определение 22. $\sigma \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \implies$ подстановка $\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ называется *обратной* к σ перестановкой.

Свойства: $\sigma \cdot \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \cdot \sigma$

5.7 Теорема о знаке произведения перестановок

Теорема 5.2. *$\sigma, \rho \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho$.*

Доказательство. Для каждой пары $i < j$ введем следующие числа:

$$\alpha(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \text{ образует инверсию в } \rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\beta(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\rho(i),\rho(j)\} \text{ образует инверсию в } \sigma \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\gamma(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \text{ образует инверсию в } \sigma\rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

"число инверсий в ρ" $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha(i,j)$

"число инверсий в $\sigma\rho$" $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \gamma(i,j)$

"число инверсий в σ" $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \beta(i,j)$ – Почему?

Когда $\{i,j\}$ пробегает все неупорядоченные пары в $\{1,2,\dots,n\}$, пара $\{\rho(i),\rho(j)\}$ тоже пробегает все неупорядоченные пары в $\{1,2,\dots,n\}$.

Зависимость $\gamma(i,j)$ от $\alpha(i,j)$ и $\beta(i,j)$:

$\alpha(i,j)$	0	0	1	1
$\beta(i,j)$	0	1	0	1
$\gamma(i,j)$	0	1	1	0

Вывод: $\alpha(i,j) + \beta(i,j) \equiv \gamma(i,j) \pmod 2$.

Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma\rho) = (-1)^{\sum\gamma(i,j)} = (-1)^{\sum\beta(i,j)+\sum\alpha(i,j)} = (-1)^{\sum\alpha(i,j)} \cdot (-1)^{\sum\beta(i,j)} = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho$. ∎

Следствие. *$\sigma \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.*

Доказательство. $\sigma\sigma^{-1} = id \implies \operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(id) \implies \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\sigma^{-1} = 1 \implies \operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$. ∎

Упражнение на дом: *Показать, что число инверсий в σ^{-1} такое же, как в σ.*

5.8 Транспозиции, знак транспозиции

Пусть $i, j \in \{1,2,\dots,n\}$, $i \neq j$.
Рассмотрим перестановку $\tau_{ij} \in S_n$, такую что
$\tau_{ij}(i) = j$.
$\tau_{ij}(j) = i$.
$\tau_{ij}(k) = k \quad \forall k \neq i,j$.

Определение 23. Перестановки вида τ_{ij} называются *транспозициями.*

Замечание. τ – траспозиция $\implies \tau^2 = id, \tau^{-1} = \tau$.

Определение 24. Перестановки вида $\tau_{i,i+1}$ называются *элементарными траспозициями.*

Лемма 5.3. *$\tau \in S_n$ – транспозиция $\implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$.*

Доказательство. Пусть $\tau = \tau_{ij}$, можем считать, что $i < j$.

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Посчитаем инверсии:
$\{i, j\}$
$\{i, k\}$ при $i+1 \leqslant k \leqslant j-1$, всего $= j-i-1$
$\{k, j\}$ при $i+1 \leqslant k \leqslant j-1$, всего $= j-i-1$
Значит, всего инверсий $2(j-i-1)+1 \equiv 1 \pmod 2 \implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$. ■

Следствие. При $n \geqslant 2$ отображение $\sigma \to \sigma\tau_{12}$ является биекцией между множеством четных перестановок в S_n и множеством нечетных перестановок в S_n.

Следствие. При $n \geqslant 2$ количество нечетных перестановок в S_n равно количеству четных перестановок в S_n и равно $\frac{n!}{2}$.

Теорема 5.4. *Всякая перестановка $\sigma \in S_n$ может быть разложена в произведение конечного числа элементарных транспозиций.*

Доказательство.

$$\sigma \in S_n := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\sigma\tau_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

При умножении справа на $\tau_{i,i+1}$ в нижней строке меняются местами i-ый и $(i+1)$-ый элементы.

Тогда, домножив σ на подходящее произведение $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k$ элементарных траспозиций, можем добиться, что нижняя строка есть $(1, 2, \dots, n) \implies \sigma\tau_1\tau_2\dots\tau_k = id$.

Теперь, домножая справа на $\tau_k\tau_{k-1}\dots\tau_1$, получим $\sigma = \tau_k\tau_{k-1}\dots\tau_1$. ■

5.9 Определитель квадратной матрицы

Определение 25. Определителем матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

($\sum_{\sigma \in S_n}$ – сумма по всем перестановкам)

Другие обозначения: $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

5.10 Определители порядков 2 и 3

- $n = 2$
  $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $n = 3$
  $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$
  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$

6 Лекция 26.09.2019

Напомним что такое определитель:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \tag{$\star$}$$

Замечание. Каждое слагаемое содержит ровно 1 элемент из каждой строки и ровно 1 элемент из каждого столбца.

6.1 Свойства определителей

Свойство T $\det A = \det A^T$.

Доказательство. Пусть $B = A^T$, тогда $b_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{aligned}
\det A^T = \det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)^{-1}} a_{2\sigma(2)^{-1}} \dots a_{n\sigma(n)^{-1}} \quad // \text{ замена } \sigma^{-1} = p\ // \\
&= \sum_{p \in S_n} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)} = \det A.
\end{aligned}$$

■

Свойство 0 Если в A есть нулевая строка или нулевой столбец, то $\det A = 0$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Так как в каждом слагаемом ($\star$) присутствует элемент из каждой строки, то все слагаемые в ($\star$) равны 0 $\implies$ $detA = 0$. ■

Свойство 1 Если в A все элементы одной строки или одного столбца домножить на одно и то же число λ, то $\det A$ тоже умножается на λ.

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda * & \lambda * & \lambda * & \lambda * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

$A_{(i)} \to \lambda A_{(i)} \implies a_{ij} \to \lambda a_{ij}\ \forall j \implies$ в ($\star$) каждое слагаемое умножается на $\lambda \implies \det A$ умножается на λ. ■

Свойство 2 Если $A_{(i)} = A^1_{(i)} + A^2_{(i)}$, то $\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^1_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^2_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Аналогично, если $A^{(j)} = A^{(j)}_1 + A^{(j)}_2$, то $\det A = \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_1 \cdots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_2 \cdots A^{(n)})$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Пусть $A^1_{(i)} = (a'_{i1}a'_{i2}\cdots a'_{in})$, $A^2_{(i)} = (a''_{i1}a''_{i2}\dots a''_{in}) \implies a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$.

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)})\dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a'_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a''_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \det A_1 + \det A_2
\end{aligned}$$

■

Свойство 3 Если в A поменять местами две строки или два столбца, то $\det A$ поменяет знак.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n$, $B = (b_{ij}) \in M_n$ – матрица, полученная из A перестановкой p-ой и q-ой строк.

Пусть $\tau = \tau_{pq}$.

$$b(i,j) = a_{\tau(i)j} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \neq p, q \\ a_{qj}, & \text{если } i = p \\ a_{pj}, & \text{если } i = q \end{cases}$$

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j}\ \forall i, j \implies a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(i),(\sigma\tau)(\tau(i))}$$

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\dots b_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1),\sigma(1)}a_{\tau(2),\sigma(2)}\dots a_{\tau(n),\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1),(\sigma\tau)(\tau(1))}a_{\tau(2),(\sigma\tau)(\tau(2))}\dots a_{\tau(n),(\sigma\tau)(\tau(n))} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,(\sigma\tau(1))}a_{2,(\sigma\tau(2))}\dots a_{n,(\sigma\tau(n))} \\
&= -\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) a_{1,(\sigma\tau(1))}a_{2,(\sigma\tau(2))}\dots a_{n,(\sigma\tau(n))} \qquad \text{// замена } \rho = \sigma\tau \text{ //} \\
&= -\sum_{\rho\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,\rho(1)}a_{2,\rho(2)}\dots a_{n,\rho(n)} \\
&= -\det A.
\end{aligned}$$

■

Свойство 4 Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженный на скаляр, то $\det A$ не изменится.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

$$A \to A' = \begin{pmatrix} \dots \\ A_{(i)} + \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda 0 = |A|$$

.

■

Свойство 5 Если в A есть две одинаковые строки (столбца), то $\det A = 0$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

При перестановке двух одинаковых строк (столбцов):

– A не изменится $\implies$ $\det A$ не изменится

– по свойству 3: $\det A$ меняет знак

Значит, $\det A = -\det A \implies \det A = 0$. ■

Определение 26. Матрица называется *верхнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, *нижнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ $i < j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – верхнетреугольная}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – нижнетреугольная}$$

Замечание. Всякая ступенчатая квадратная матрица верхнетреугольна.

Свойство 6 Если A верхнетреугольная или нижнетреугольная, то $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Выделим в ($\star$) слагаемые, которые могут быть отличны от нуля.

$$a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n,\sigma(n)} \neq 0$$

$$\implies a_{n\sigma(n) \neq 0} \implies \sigma(n) = n.$$

$$\implies a_{n-1,\sigma(n-1)} \neq 0 \implies \sigma(n-1) \in \{n-1, n\},$$

но n уже занято, значит $\sigma(n-1) = n-1$, и так далее.

Рассуждая аналогично, получаем $\sigma(k) = k \ \forall k \implies \sigma = id$ – это единственное слагаемое в ($\star$), которое может быть не равно 0.

$$\operatorname{sgn}(id) = +1 \implies \det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

■

Следствие. $\det \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 a_2 \dots a_4$.

Следствие. $\det E = 1$

6.2 Поведение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов)

$Э_1(i, j, \lambda)$: $\det A$ не меняется.
$Э_2(i, j)$: $\det A$ меняет знак.
$Э_3(i, \lambda)$: $\det A$ умножается на λ.

Алгоритм. Элементарными преобразованиями строк A приводится к ступенчатому ($\to$ верхнетреугольному) виду, в котором $\det A$ легко считается.

7 Лекция 30.09.2019

7.1 Определитель с углом нулей

Предложение.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right) \text{ или } A = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array}\right),\ P \in M_k,\ R \in M_{n-k} \implies \det A = \det P \det R.$$

Матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

НЕ матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

Доказательство. В силу свойства T достаточно доказать для строк.

1. Элементарными преобразованиями строк в A, приведем $(P \mid Q)$ к виду $(P' \mid Q')$, в котором P' имеет ступенчатый вид. При этом $\det A$ и $\det P$ умножаются на один и тот же скаляр $\alpha \neq 0$.

2. Элементарными преобразованиями строк в A, приведем $(0 \mid R)$ к виду $(0 \mid R')$, в котором R' имеет ступенчатый вид. При этом $\det A$ и $\det R$ умножаются на один и тот же скаляр $\beta \neq 0$.

$\begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix}$ – верхнетреугольная $\implies \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R'$.

$$\alpha\beta \det A = \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R' = (\alpha \det P)(\beta \det R) = \alpha\beta \det P \det R.$$

∎

7.2 Определитель произведения матриц

Теорема 7.1. $A, B \in M_n \implies \det(AB) = \det A \det B$.

Доказательство. Выполним с матрицей A одно элементарное преобразование строк, получим матрицу A'.

$$A \rightsquigarrow A' = UA.$$

Такое же преобразование строк с AB.

$$AB \rightsquigarrow U(AB) = (UA)B = A'B.$$

Таким образом, сначала выполнив элементарное преобразование и домножив на матрицу B, либо домножив на B и затем применив элементарное преобразование, получим тот же результат.

Тогда, цепочка элементарных преобразований строк:

$$A \rightsquigarrow C \text{ – улучшенный ступенчатый вид.}$$

Так же цепочка для AB:

$$AB \rightsquigarrow CB.$$

При этом, $\det A$ и $\det AB$ умножились на один и тот же скаляр $\alpha \neq 0$

$$\det C = \alpha \det A.$$

$$\det CB = \alpha \det AB.$$

Случай 1 Последняя строка состоит из нулей:

$$\begin{aligned} &C_{(n)} = (0 \dots 0) \\ &\implies [CB]_{(n)} = C_{(n)}B = (0 \dots 0) \\ &\implies \det CB = 0 = 0 \cdot \det B = \det C \det B. \end{aligned}$$

Случай 2 Последняя строка ненулевая:

$$C_{(n)} \implies C = E,$$

так как матрица C имеет улучшенный ступенчатый вид.

Значит,

$$\det CB = \det B = 1 \cdot \det B = \det C \cdot \det B.$$

Из этих двух случаем следует, что $\det CB = \det C \det B$.
Сокращая α получаем,

$$\det CB = \det C \det B \implies \det AB = \det A \det B.$$

■

Замечание. Пусть $A \in M_n$, $A_{\text{ул}}$ – её улучшенный ступенчатый вид.

$$\det A \neq 0 \iff A_{\text{ул}} = E.$$

7.3 Дополнительные миноры и алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы

Определение 27. *Дополнительным минором* к элементу a_{ij} называется определитель $(n-1) \times (n-1)$ матрицы, получающейся из вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Обозначение: $\overline{M}_{ij}$.

Определение 28. *Алгебраическим дополнением к* элементу a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_{ij}$.

7.4 Лемма об определителе матрицы, содержащей ровно один ненулевой элемент в некоторой строке

Лемма 7.2. Пусть $a_{ik} = 0$ при всех $k \neq j$. Тогда $\det A = a_{ij} \cdot A_{ij}$.

Доказательство.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} P & U & Q \\ \hline 0\ldots0 & a_{ij} & 0\ldots0 \\ \hline R & V & S \end{array}\right).$$

Переставляя соседние строки $i-1$ раз, вытолкнем i-ю строку наверх.

$$A' = \left(\begin{array}{c|c|c} 0\ldots0 & a_{ij} & 0\ldots0 \\ \hline P & U & Q \\ \hline R & V & S \end{array}\right)$$

Переставляя соседние столбцы $j-1$ раз, переместим j-й столбец на первое место.

$$A'' = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{ij} & 0\ldots0 & 0\ldots0 \\ \hline U & P & Q \\ \hline V & R & S \end{array}\right)$$

$$\det A'' = a_{ij} \det \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right) = a_{ij}\overline{M}_{ij}.$$

$$\implies detA = (-1)^{i-1+j-1} \det A'' = (-1)^{i+j} a_{ij}\overline{M}_{ij} = a_{ij}A_{ij}.$$

■

7.5 Разложение определителя по строке (столбцу)

Теорема 7.3. *При любом фиксированном* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – разложение по } i\text{-й строке.}$$

Аналогично, для любого фиксированного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – разложение по } j\text{-у столбцу.}$$

Доказательство. В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

$$A_{(i)} = (a_{i1}, 0, \ldots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, a_{in}).$$

Требуемое следует из свойства 2 определителей и леммы. ■

7.6 Лемма о фальшивом разложении определителя

Лемма 7.4.

1. При любых $i, k \in \{1, 2, \ldots, n\} : i \neq k \implies \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$.
2. При любых $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\} : j \neq k \implies \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$

Доказательство. В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

Пусть $B \in M_n$ – матрица, полученная из A заменой k-й строки на i-ю.

$$B = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \ldots \\ A_{(i)} \\ \ldots \\ A_{(i)} \\ \ldots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

В B есть две одинаковые строки $\implies \det B = 0$.

Разлагая $\det B$ по k-й строке, получаем

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}B_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}.$$

■

7.7 Обратная матрица, её единственность

Пусть дана $A \in M_n$.

Определение 29. Матрица $B \in M_n$ называется *обратной* к A, если $AB = BA = E$.

Обозначение: A^{-1}.

Лемма 7.5. Если $\exists A^{-1}$, то она единственна.

Доказательство. Пусть $B, C \in M_n$ такие, что $AB = BA = E$ и $AC = CA = E$. Тогда,

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C \Rightarrow B = B'.$$

■

7.8 Невырожденные матрицы

Определение 30. Матрица $A \in M_n$ называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, и *вырожденной* иначе (то есть $\det A = 0$).

7.9 Определитель обратной матрицы

Лемма 7.6. Если $\exists A^{-1}$, то $\det A \neq 0$.

Доказательство. $AA^{-1} = E \implies \det(AA^{-1}) = \det E \implies \det A \det(A^{-1}) = 1$. ■

7.10 Присоединённая матрица

Определение 31. *Присоединенной* к А матрицей называется матрица $\widehat{A} = (A_{ij})^T$.

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

7.11 Критерий обратимости квадратной матрицы, явная формула для обратной матрицы

Теорема 7.7. *A обратима (то есть $\exists A^{-1}$) $\iff$ A невырождена ($\det A \neq 0$), при этом $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A}$.*

Доказательство. Утверждение в одну сторону следует из леммы 2.

Пусть $\det A \neq 0$. Покажем, что $\frac{1}{detA}\widehat{A} = A^{-1}$. Для этого достаточно доказать, что $A\widehat{A} = \widehat{A}A = \det(A) \cdot E$.
Для $X = A\widehat{A}$ имеем

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}[\widehat{A}]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} detA, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

Для $Y = \widehat{A}A$ имеем

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\widehat{A}]_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \begin{cases} detA, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

■

8 Лекция 2.11.2019

8.1 Следствия из критерия обратимости квадратной матрицы

Следствие. Если $AB = E$, то $BA = E$ (и тогда $A = B^{-1}$, $B = A^{-1}$).

Доказательство.

$$AB = E \implies \det A \det B = 1 \implies \det A \neq 0 \implies \exists A^{-1}.$$

$$BA = EBA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}A = E.$$

■

Следствие. $A, B \in M_n \implies AB$ обратима $\iff$ обе A, B обратимы. При этом $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказательство. Эквивалентность ($\iff$) следует из условия $\det AB = \det A \det B$.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E.$$

■

8.2 Формулы Крамера

Пусть есть СЛУ $Ax = b(\star)$, $A \in M_n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Также, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i = (A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$.

Теорема 8.1. *Если* $\det A \neq 0$, *то СЛУ* ($\star$) *имеет единственное решение и его можно найти по формулам:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Доказательство. $\det A \neq 0 \implies \exists A^{-1} \implies (\star) \iff x = A^{-1}b$ – единственное решение.

$$b = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_n A^{(n)}.$$

$$\begin{aligned}
\det A_i &= \det\left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}\right) \\
&= x_1 \det\left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(1)}, A^{(i+1)}), \dots A^{(n)}\right) \\
&\quad + x_2 \det\left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(2)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}\right) \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + x_n \det\left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}\right) \\
&= x_i \det A \qquad \text{// Все слагаемые кроме i-го равны 0.}
\end{aligned}$$

■

8.3 Понятие поля.

Определение 32. *Полем* называется множество F, на котором заданы две операции "сложение" ($(a, b) \to a + b$) и "умножение" ($(a, b) \to a \cdot b$), причем $\forall a, b, c \in F$ выполнены следующие условия:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$ (нулевой элемент)
4. $\exists(-a) \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$ (противоположный элемент)
   $\uparrow$ абелева группа $\uparrow$
5. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность)
6. $ab = ba$ (коммутативность умножения)
7. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
8. $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1a = a1 = a$ (единица)
9. Если $a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in F : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (обратный элемент)

8.4 Простейшие примеры.

$\mathbb{Q}$ – Рациональные числа.
$\mathbb{R}$ – Действительные числа.
$F_2 = \{0, 1\}$, сложение и умножение по модулю 2.

8.5 Построение поля комплексных чисел.

Ближайшая цель — построить поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.
Неформально, $\mathbb{C}$ – это наименьшее поле со следующими свойставми:

1. $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.
2. Многочлен $x^2 + 1$ имеет корень, то есть $\exists i : i^2 = -1$.

8.5.1 Формальная конструкция поля $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

Неформально, каждой такой паре (a, b) соответствует комплексное число $a + bi$:

- $(a, b) \iff a + bi$
- $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2\underbrace{i^2}_{=-1} = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

8.5.2 Проверка аксиом

1, 2. Очевидны.

3. $0 = (0, 0)$.
4. $-(a, b) = (-a, -b)$.
5. Дистрибутивность – *Упражнение на дом.*
6. Из явного вида формулы для умножения.
7. $$\begin{aligned}(a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3) &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)(a_3, b_3) \\ &= (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3).\end{aligned}$$
8. $1 = (1, 0)$.
9. $(a, b) \neq 0 \implies a^2 + b^2 \neq 0$. Тогда, $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.

   $(a, b)(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) = (\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}) = (1, 0)$.

Итак, $\mathbb{C}$ – поле.

Проверка свойств:

1. $a \in \mathbb{R} \leftrightarrow (a, 0) \in \mathbb{C}$.

   $a + b \leftrightarrow (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$.

   $ab \leftrightarrow (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$

   Значит, $\mathbb{R}$ отождествляется в $\mathbb{C}$.
2. $i = (0, 1) \implies i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

8.6 Алгебраическая форма комплексного числа, его действительная и мнимая части.

Определение 33. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $a+bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$ называется его *алгебраической формой*. Число i называется *мнимой единицей*.

$a =: Re(z)$ – *действительная* часть числа z. $b =: Im(z)$ – *мнимая* часть числа z.

Числа вида bi, где $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, называются *чисто мнимыми*.

8.7 Комплексное сопряжение.

Определение 34. Число $\overline{z} := a - bi$ называется *комплексно сопряженным* к числу $z = a + bi$.

Операция $z \to \overline{z}$ называется *комплексным сопряжением*.

8.7.1 Свойства комплексного сопряжения

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Доказательство – прямая проверка (*упражнение на дом*).

8.8 Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация сложения и сопряжения в этой модели.

Числу $z = a+bi$ соответствует точка (или вектор) на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (a, b). Сумме $z+w$ соответствует сумма соответствующих векторов. Сопряжение $z \to \overline{z}$ – это отражение z относительно действительной оси.

9 Лекция 7.11.2019

9.1 Модуль комплексного числа, его свойства

Определение 35. Число $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ называется *модулем числа* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (то есть длина соответствующего вектора).

Свойства

1. $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (неравенство треугольника).
3. $z\overline{z} = |z|^2$.
   $z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i = a^2 + b^2 = |z|^2$
4. $|zw| = |z||w|$
   $|zw|^2 = (zw)\cdot(\overline{zw}) = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = |z|^2|w|^2$

Замечание. Из 3) следует, что для $\forall z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, то есть $(a+bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

9.2 Аргумент комплексного числа

Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.
Тогда, $z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right)$, при этом $\left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}i\right)^2 = 1$
Значит, $\frac{a}{|z|}$ и $\frac{b}{|z|}$ являются синусом и косинусом некоторого угла.

Определение 36. *Аргументом числа* $z = a + bi \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ называется число $\varphi \in \mathbb{R}$, такое что

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

В геометрических терминах, φ есть угол между осью Ox и соответствующим вектором.

Замечание. При $z \neq 0$, аргумент определен с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание. При $z = 0$, удобно считать что любое φ является аргументом.

9.3 Тригонометрическая форма комплексного числа

$Arg(z) :=$ множество всех аргументов числа z.
$arg(z) :=$ единственное значение из $Arg(z)$, лежащее в $[0; 2\pi)$.
$Arg(z) = arg(z) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
$Arg(z) = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid \cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \sin\varphi = \frac{b}{|z|}\}$
Тогда, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi \in Arg(z)$.

Определение 37. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется его *тригонометрической формой.*

9.4 Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Предложение. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= |z_1||z_2|((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

■

Следствие. В условиях предложения, предположим, что $z_2 \neq 0$.
Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.
В частности, $\frac{1}{|z_2|}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)) = \frac{1}{|z_2|}(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) = \frac{\overline{z}_2}{|z_2|^2}$.

9.5 Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра

Следствие. Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \text{ – формула Муавра.}$$

Замечание. В комплексном анализе функция $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to e^x$, доопределяется до функции $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to e^z$ с сохранением всех привычных свойств.

Доказывается $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\forall\varphi \in \mathbb{C}$ – формула Эйлера.
Тогда $\forall z \in \mathbb{C}$ представляется в виде $z = |z|e^{i\varphi}$, где $\varphi \in Arg(z)$ – *показательная форма.*

9.6 Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Определение 38. *Корнем степени* n (или *корнем n-й степени)* из числа z называется всякое число $w \in \mathbb{C}$, что $w^n = z$.

Положим $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$.

Опишем множество $\sqrt[n]{z}$.
$w = \sqrt[n]{z} \implies w^n = z \implies |w|^n = |z|$.
Если $z = 0$, то $|z| = 0 \implies |w| = 0 \implies w = 0 \implies \sqrt[n]{0} = \{0\}$.

Далее считаем, что $z \neq 0$.
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$
$z = w^n = |w|^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi))$
Отсюда,

$$z = w^n \iff \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n}, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

С точностью до $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, получается ровно n различных значений для ψ, при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
В результате $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, где $w_m = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$

Замечание. Числа $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ лежат в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат.

Примеры.
$\sqrt{1} = \{\pm 1\}$
$\sqrt{-1} = \{\pm i\}$
$\sqrt[3]{1} = \{1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$
$\sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\}$

9.7 Основная теорема алгебры комплексных чисел (без доказательства)

$\sqrt[n]{z} = \{$ корни многочлена $x^n - z\}$.

Теорема 9.1. *Всякий многочлен степени* $\geqslant 1$ *с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

Пусть $f = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z_1 + a_0$, $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, тогда $\exists c \in \mathbb{C} : f(c) = 0$.

Замечание. Свойство поля $\mathbb{C}$, сформулированное в теореме, называется *алгебраической замкнутостью.*

9.8 Деление многочленов с остатком

Пусть $\mathbb{F}$ – поле.
$\mathbb{F}[x]$:= все многочлены от переменной x с коэффициентами из $\mathbb{F}$.
$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0 \implies \deg f = n$.
$\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.

Определение 39. Многочлен $f(x) \in F[x]$ *делится* на $g(x) \in F[x]$, если $\exists h(x) \in F[x]$, такой что $f(x) = g(x)h(x)$.

Если $f(x)$ не делится на $g(x)$, то можно поделить с остатком.

Предложение (деление с остатком)**.** Если $f(x), g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$, то $\exists! q(x), r(x) \in F[x]$, такие что

$$\begin{cases} f(x) = q(x)g(x) + r(x) \\ \text{либо } r(x) = 0, \text{ либо } \deg r(x) < \deg g(x) \end{cases}$$

Пример. $f(x) = x^3 - 2x$, $g(x) = x + 1$.
$f(x) = (x^2 - x - 1)(x + 1) + 1$, $q(x) = (x^2 - x - 1)$, $r(x) = 1$.

9.9 Теорема Безу

Частный случай: $g(x) = x - c$, $\deg g(x) = 1$:
$f(x) = q(x)(x - c) + r(x)$, где либо $r(x) = 0$, либо $\deg r(x) < g(x) = 1$
Значит, $r(x) \equiv r = const \in F$.

Теорема 9.2. $r = f(c)$.

Доказательство. Подставить $x = c$ в $f(x) = (x - c)g(x) + r(x)$. ■

Следствие. Элемент $c \in F$ является корнем многочлена $f(x) \in F[x]$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $(x - c)$.

9.10 Кратность корня многочлена

Определение 40. *Кратностью* корня $c \in F$ многочлена $f(x)$ называется наибольшее целое k такое что, $f(x)$ делится на $(x - c)^k$.

9.11 Утверждение о том, что всякий многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней с учётом кратностей

Следствие. Пусть $f(z) \in F[z]$, $\deg f = n \geqslant 1$.
$f(x) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$.
$c_1, \dots c_s$ – корни f, $k_1, \dots, k_s$ – их кратности.

Любой многочлен с комплексными коэффициентами разлагается в произведение линейных множителей:

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_s)^{k_s}.$$

Иными словами, $f(z)$ имеет ровно n корней с учетом кратностей.

10 Лекция 14.11.2019

10.1 Векторные пространства, простейшие следствия из аксиом

10.1.1 Определение векторного пространства

Фиксируем поле F (можно считать, что $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

Определение 41. Множество V называется *векторным (линейным) пространством* над полем F, если на V заданы две операции

- "сложение": $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- "умножение на скаляр": $F \times V$, $(\alpha \in F, x \in V) \mapsto \alpha x$.

а также, $\forall x, y, z \in V$ и $\alpha, \beta \in F$ выполнены следующие условия (называются *аксиомами векторного пространства*):

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. $\exists \overrightarrow{0} \in V : x + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + x = x$ (нулевой элемент).
4. $\exists -x : -x + x = x + (-x) = \overrightarrow{0}$ (противоположный элемент).
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
8. $1 \cdot x = x$.

Определение 42. Элементы векторного пространства называются (абстрактными) *векторами.*

Пример.

1. $\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$ (или F над F).
2. Пространство $\mathbb{R}^n$ над $\mathbb{R}$ (или F^n над F) реализованное как пространство столбцов или строк длины n.
3. $\mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.
4. $F[x]$ – многочлены то переменной x с коэффициентами в $\mathbb{R}$.
5. Пространство функций на множестве M с значениями в F:

   $f : M \to \mathbb{R}$

   - сложение $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$.
   - умножение на скаляр $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$.

   – это векторное пространство над F.

   Например, множество всех функций $[0, 1] \to R$.

10.1.2 Простейшие следствия из аксиом

$\forall \alpha \in F, x \in V$.

1. Элемент $\overrightarrow{0}$ единственный.

   Если $\overrightarrow{0}'$ – другой такой ноль, то $\overrightarrow{0}' = \overrightarrow{0}' + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

2. Элемент $-x$ единственный.

   Если $(-x)'$ – другой такой противоположный элемент, то

$$(-x)' = (-x)' + \overrightarrow{0} = (-x)' + (x + (-x)) = ((-x)' + x) + (-x) = \overrightarrow{0} + (-x) = -x.$$

3. $\alpha \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
4. $\alpha(-x) = -(\alpha x)$.
5. $0 \cdot x = \overrightarrow{0}$.
6. $(-1) \cdot x = -x$.

10.2 Подпространства векторных пространств

Пусть V – векторное пространство над F.

Определение 43. Подмножество $U \subseteq V$ называется *подпространством* (в V), если

1. $\overrightarrow{0} \in U$.
2. $x, y \in U \implies x + y \in U$.
3. $x \in U, \alpha \in F \implies \alpha x \in U$.

Замечание. Всякое подпространство само является векторным пространством относительно тех же операций.

Пример.

1. $\{\overrightarrow{0}\}$ и V – всегда подпространства в V.

   они называются *несобственными* подпространствами, остальные называются *собственными.*

2. Множество всех верхнетреугольных, нижнетреугольных, диагональных матриц в $M_n(F)$.

3. $F[x]_{\leqslant n}$ все многочлены в $F[x]$ степени $\leqslant n$ – подпространство в $F[x]$.

10.3 Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными является подпространством в F^n

Предложение. Множество решений любой ОСЛУ $Ax = 0$ ($A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$, $x \in F^n$) является подпространством в F^n.

Доказательство. Пусть S – множество решений ОСЛУ Ax $=$ 0.

1. $\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S$.

2. $x, y \in S \implies Ax = \overrightarrow{0}$ и $Ay = \overrightarrow{0} \implies A(x+y) = Ax + Ay = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies x + y \in S$.

3. $x \in S, \alpha \in F \implies Ax = \overrightarrow{0} \implies A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies \alpha x \in S$. ∎

10.4 Линейная комбинация конечного набора векторов

Пусть V – векторное пространство над F и $v_1, \ldots, v_k \in V$ – набор векторов.

Определение 44. *Линейной комбинацией* векторов $v_1, \ldots, v_k$ называется всякое выражение вида $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_k v_k$, где $\alpha_i \in F$.

10.5 Линейная оболочка подмножества векторного пространства, примеры

Пусть $S \subseteq V$ – подмножество векторного пространства.

Определение 45. *Линейной оболочкой* множества S называются множество всех векторов из V, представимых в виде линейной комбинации какого-то конечного набора векторов из S.

Обозначение: $\langle S \rangle$.

Если $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ конечно и состоит из векторов $v_1, \ldots, v_k$, то еще пишут $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ и говорят “линейная оболочка векторов $v_1, \ldots, v_k$”.

Соглашение: $\langle \varnothing \rangle = \{\overrightarrow{0}\}$.

Пример.

1. $\langle \overrightarrow{0} \rangle = \{\overrightarrow{0}\}$.

2. $V = \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, $\langle v \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ – прямая.

3. $V = \mathbb{R}^3$, v_1, v_2 – пара неколлинеарных векторов.

   Тогда, $\langle v_1, v_2 \rangle = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ – плоскость натянутая на v_1, v_2.

11 Лекция 21.11.2019

Напомним, если V – векторное пространство над полем F, то при $S \subseteq V$, линейная оболочка $\langle S\rangle = \{$все линейные комбинации конечных наборов векторов из $S\}$

Пример.

4. $V = F^n$, $S = \{e_1, \dots, e_n\}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \dots, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\langle S\rangle = \langle e_1, \dots, e_n\rangle = F^n$.

Так как для любого $x \in F^n \implies x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$.

11.1 Утверждение о том, что линейная оболочка системы векторов является подпространством объемлющего векторного пространства

Пусть V – векторное пространство, $S \subseteq V$.

Предложение. $\langle S\rangle$ является подпространством в V.

Доказательство.

1. Два случая:
   $S = \varnothing \implies \langle\varnothing\rangle = \{\overrightarrow{0}\} \implies \overrightarrow{0} \in \langle S\rangle$.
   $S \neq \varnothing \implies \exists V \in S \implies \underbrace{0V}_{\in\langle S\rangle} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \in \langle S\rangle$.

2. Пусть $v, w \in \langle S\rangle$:
   $v = \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_mv_m$,
   $w = \beta_1w_1 + \dots + \beta_nw_n$, где $v_i, w_i \in S$, $\alpha_i, \beta_i \in F$.
   Тогда, $v + w = \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_mv_m + \beta_1w_1 + \dots + \beta_nw_n \in \langle S\rangle$.
   (если $v_i = w_j$, то $\alpha_iv_i + \beta_jw_j = (\alpha_i + \beta_j)w_j$)

3. $v \in \langle S\rangle$, $\alpha \in F \implies v = \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_mv_m$
   $\implies \alpha v = (\alpha\alpha_1)v_1 + \dots + (\alpha\alpha_m)v_m \in \langle S\rangle$. ■

11.2 Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Определение 46. Линейная комбинация $\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_nv_n$ называется *тривиальной*, если $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ и *нетривиальной* иначе (то есть $\exists i : a_i \neq 0$ или $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$).

Пример. $v + (-v)$ – нетривиальная линейная комбинация векторов v и $-v$.

Определение 47.

1. Векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ называются *линейно зависимыми* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная $\overrightarrow{0}$ (то есть $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, такие что $\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_nv_n = \overrightarrow{0}$) и *линейно независимыми* иначе (то есть из условия $\alpha_1v_1 + \dots \alpha_nv_n = \overrightarrow{0}$ следует $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$).

2. Множество $S \subseteq V$ (возможно бесконечное, возможно с повторяющимися элементами) называется *линейно зависимым* если существует конечное линейно зависимое подмножество, и *линейно независимым* если любое конечное подмножество линейно независимо.

Соглашение. *Система векторов* – множество векторов, в котором возможны повторения.

Пример.

1. $S = \{\overrightarrow{0}\}$ $\quad 1 \cdot \overrightarrow{0}$ – нетривиальная линейная комбинация $\implies \overrightarrow{0}$ линейно зависимо.

2. $S = \{v\}$, $v \neq \overrightarrow{0}$ – линейно независимо.

   Пусть $\lambda v = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{0} = \lambda^{-1}\overrightarrow{0} = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$ – противоречие.

3. $S = \{v_1, v_2\} \implies S$ линейно зависимо тогда и только тогда, когда v_1 и v_2 пропорциональны (то есть либо $v_2 = \lambda_1 v_1$, $\lambda_1 \in F$, либо $v_1 = \lambda_2 v_2$, $\lambda_2 \in F$).

   Доказательство.

   $(\implies)$ $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = \overrightarrow{0}$, $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$.
   Если $\mu_1 \neq 0$, то $v_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1} v_2$.
   Аналогично для $\mu_2 \neq 0$.

   $(\impliedby)$ $v_2 = \lambda_1 v_1 \implies \lambda_1 v_1 + (-1)v_2 = \overrightarrow{0} \implies v_1, v_2$ линейно зависимы.
   Аналогично для $v_1 = \lambda_2 v_2$. ■

4. $V = F^n$, $S = \{e_1, \ldots, e_n\} \implies S$ линейно независимо.

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = \overrightarrow{0} \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

11.3 Критерий линейной зависимости конечного набора векторов

Предложение. Пусть $v_1, \ldots, v_n \in V$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$, такой что $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}\,(\star)$ и $\alpha_i \neq 0$.
2. $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

Доказательство.

(1) $\implies$ (2) $\alpha_i \neq 0$ в $(\star) \implies v_i = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \cdots - \dfrac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \dfrac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \cdots - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n \in \langle v_1, \ldots v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

(2) $\implies$ (1) $v_i = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \beta_n v_n \implies$

$$b_1 v_1 + \cdots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \beta_n v_n = \overrightarrow{0}.$$

(нетривиальная линейная комбинация с i-м скаляром $\neq 0$). ■

Следствие. Векторы $v_1, \ldots, v_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$, такое что $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

11.4 Основная лемма о линейной зависимости

Лемма 11.1. Пусть есть две системы векторов $v_1, \ldots, v_m$ и $w_1, \ldots, w_n$, причем $m < n$ и $w_i \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \quad \forall i = 1, \ldots, n$. Тогда векторы $w_1, \ldots, w_n$ линейно зависимы.

Доказательство.

$$w_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{m1} v_m = (v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$\ldots$$

$$w_n = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{mn} v_m = (v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\implies (w_1, \ldots, w_n) = (v_1, \ldots, v_m) A, \tag{$\star$}$$

где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

Так как $m < n$, то ОСЛУ $Ax = \overrightarrow{0}$ имеет ненулевое решение $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix} \in F^n$.

Тогда умножим ($\star$) справа на z:

$$(w_1, \ldots, w_n) \cdot z = (v_1, \ldots, v_m) \cdot \underbrace{A \cdot z}_{=\overrightarrow{0}} = (v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}.$$

$$\implies (w_1, \ldots, w_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \implies z_1 w_1 + \ldots z_n w_n = \overrightarrow{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация, так как $z \neq 0$.
Следовательно, $w_1, \ldots, w_n$ линейно зависимы. ∎

Пример. Любые $n+1$ векторов в F^n линейно зависимы, так как $F^n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$.

11.5 Базис векторного пространства

Определение 48. Подмножество $S \subseteq V$ называется *базисом* пространства V, если
1. S линейно независимо,
2. $\langle S \rangle = V$.

Пример. $e_1, \ldots, e_n$ – это базис в F^n. Он называется *стандартным базисом* в F^n.

Замечание. Всякая линейно независимая система векторов является базисом своей линейной оболочки.

11.6 Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства

Определение 49. Векторное пространство V называется *конечномерным*, если в нем есть конечный базис, и *бесконечномерным* иначе.

11.7 Независимость числа элементов в базисе векторного пространства от выбора базиса

Предложение. V – конечномерное векторное пространство. Тогда, все базисы в V содержат одно и то же количество элементов.

Доказательство. V конечномерно, тогда существует конечный базис $e_1, \ldots, e_n$.
Пусть $S \subseteq V$ – другой базис. Так как $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = V$, то $\forall v \in S \implies v \in \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$. Тогда любые $n+1$ векторов в S линейно зависимы по основной лемме о линейной зависимости. Но S линейно независимо, значит $|S| \leqslant n$.
Пусть $S = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$, где $m \leqslant n$. Тогда $\forall i = 1, \ldots, n \quad e_i \in \langle e'_1, \ldots, e'_m \rangle$, по основной лемме о линейной зависимости получаем $n \leqslant m$.
То есть $m = n$. ∎

11.8 Размерность конечномерного векторного пространств

Определение 50. *Размерностью* конечномерного векторного пространства называется число элементов в (любом) его базисе.
Обозначение: $\dim V$.

Пример.

1. $\dim F^n = n$,
2. $V = \{\overrightarrow{0}\} \implies \dim V = 0$ так как базисом V будет $\varnothing$.

12 Лекция 28.11.2019

Пусть V – векторное пространство над полем F.
Обозначение $\dim V < \infty$ – V конечномерно.

12.1 Характеризация базисов в терминах единственности линейного выражения векторов

Утверждение 12.1. *Пусть* $\dim V < \infty$, $e_1, \dots, e_n \in \langle V \rangle$.
$e_1, \dots, e_n$ *— базис* V *тогда и только тогда, когда,* $\forall v \in V$ *единственным образом представим в виде*

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad x_i \in F.$$

Доказательство.

$\implies$ Пусть есть два представления $v = x_1 e_1 + \dots x_n e_n = x'_1 e_1 + \dots + x'_n e_n$.
Тогда, $(x_1 - x'_1)e_1 + \dots + (x_n - x'_n)e_n = \overrightarrow{0}$.
Так как $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, то $(x_1 - x'_1) = \dots = (x_n - x'_n) = 0$.
Значит, $x_i = x'_i \quad \forall i$.

$\impliedby$ $\forall v \in V$ имеем $v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.
Значит, $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$.
Для $v = \overrightarrow{0}$ существует единственное представление $\overrightarrow{0} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.
Но мы знаем, что $\overrightarrow{0} = 0e_1 + \dots + 0e_n$.
Следовательно $\alpha_1 = \dots \alpha_n = 0$, то есть $e_1, \dots, e_n$ линейно независимо.

Итог: $e_1, \dots, e_n$ – базис V. ∎

12.2 Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$$Ax = 0 \text{ – ОСЛУ.} \tag{$\star$}$$

$A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$.
$S \subseteq F^n$ – множество решений.
Знаем, что S – подпространство в F^n.

Определение 51. *Фундаментальной системой решений* (ФСР) для ОСЛУ ($\star$) называется всякий базис пространства её решений.

Замечание. У одной ОСЛУ может быть много разных ФСР.

12.3 Метод построения фундаментальной системы решений

Приведем матрицу к улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразовиями строк.

$$(A|\overrightarrow{0}) \rightsquigarrow (B|\overrightarrow{0}) \quad \leftarrow \text{ улучшенный ступенчатый вид.}$$

Пусть r – число ненулевых строк в B.
Тогда будет r главных неизвестных и $n - r$ свободных.
Выполнив перенумерацию будем считать что,

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_r &\text{ – главные неизвестные,} \\ x_{r+1}, \dots, x_n &\text{ – свободные.} \end{aligned}$$

Тогда, общее решение для ($\star$) имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \dots + c_{n-r}x_n \\ x_2 &= c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \dots + c_{n-r}x_n \\ &\dots \\ x_r &= c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \dots + c_{n-r}x_n. \end{aligned}$$

Предъявим некоторую систему решений

$$u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{r1} \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{r2} \\ 0 \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ u_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \dots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \underline{1} \end{pmatrix}.$$

$u_1, \dots, u_{n-r} \in S$

Предложение. $u_1, \dots, u_{n-r}$ – это ФСР для ОСЛУ ($\star$).

Доказательство.

1. Линейная независимость.
   Пусть $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r} = \overrightarrow{0}$.
   При любом $k \in \{1, \dots, n-r\}$, $(r+k)$-я координата левой части равна α_k, значит $\alpha_k = 0$.
   Следовательно $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-r} = 0$.
2. $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$.

   “$\subseteq$” Верно, так как $u_1, \dots, u_{n-r} \in S$.

   “$\supseteq$” Пусть $u \in S$, тогда

   $$u = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} \text{ для некоторых } \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in F.$$

   Положим $v := u - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{n-r} u_{n-r}$.
   Тогда, $v \in S$, но

   $$v = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Тогда формулы для общего решения дают $v = \overrightarrow{0}$.
   Поэтому $u = \alpha_i u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r}$.

   Значит $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$. ■

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

Тогда ФСР:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12.4 Утверждение о возможности выбора из конечной системы векторов базиса её линейной оболочки

Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{F}$.
Наблюдение: если $v, v_1, \ldots, v_m \in V$ и $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$, тогда $\langle v, v_1, \ldots, v_m \rangle = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$

Предложение. Из всякой конечной системы векторов $S \subseteq V$ можно выбрать подсистему, которая является базисом в линейной оболочке $\langle S \rangle$.

Доказательство. Пусть $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$.
Индукция по m.

База $m = 1$: $S = \{v_1\}$.

Если $v_1 = \overrightarrow{0}$, то $\langle S \rangle = \{\overrightarrow{0}\}$, значит в качестве базиса берем $\varnothing$.

Если $v_1 \neq 0$, то S линейно независимо.

Следовательно S – базис в $\langle S \rangle$.

Шаг Пусть доказано для $< m$, докажем для m.

Если $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимо, то $v_1, \ldots, v_m$ – это уже базис в $\langle S \rangle$.

Иначе, $\exists i : v_i \in \langle S \setminus \{v_i\} \rangle$.

Положим $S' := S \setminus \{v_i\}$.

Тогда, $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$.

Так как $|S'| = m - 1 < m$, то по предположению индукции в S' можно выбрать базис для $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$. ■

12.5 Дополнение конечной линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства

Предложение. Пусть $\dim V < \infty$, тогда всякую линейно независимую систему векторов в V можно дополнить до базиса всего пространства V.

Доказательство. Пусть $v_1, \ldots, v_m$ – данная линейно независимая система.
Так как $\dim V < \infty$, в V есть конечный базис $e_1, \ldots, e_n$.
Рассмотрим систему векторов $v_1, \ldots, v_m, e_1, \ldots, e_n$.
Пройдемся по этим векторам слева направо и выбросим те, которые линейно выражаются через предыдущие (не выброшенные).
При этом:
1) линейная оболочка системы сохраняется и равна $\langle v_1, \ldots, v_m, e_1, \ldots, e_n \rangle = V$;
2) $v_1, \ldots, v_m$ останутся в системе, так как они линейно независимы;
3) в новой системе никакой вектор линейно не выражается через предыдущие.

Пусть новая система - это $S' = \{v_1, \ldots, v_m, e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}\}$.
Докажем, что S' – базис в V.
По свойству 1) имеем, что $\langle S' \rangle = V$.
Осталось доказать, что S' линейно независимо.
Пусть $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n + \beta_1 e_{i_1} + \cdots + \beta_t e_{i_t} = \overrightarrow{0}$.
Предположим, что эта линейная комбинация нетривиальна.
Так как $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы, то $\exists k : \beta_k \neq 0$.
Выберем k максимальным с этим свойством.
Тогда, e_{i_k} линейно выражается через предыдущие — противоречие. ■

Следствие. Если $\dim V = n$ и $v_1, \ldots, v_n$ – линейно независимая система, тогда $v_1, \ldots, v_m$ – базис V.

12.6 Лемма о добавлении вектора к конечной линейной независимой системе

Лемма 12.2. Пусть $v, v_1, \ldots, v_m \in V$ и $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы, тогда либо $v, v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы, либо $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

Доказательство. Пусть $v, v_1, \ldots, v_m$ линейно зависимы, тогда $\exists (\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq (0, \ldots, 0)$, такой что

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0}.$$

Но, так как $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы, то $\alpha \neq 0$. Значит, $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ по предложению. ■