Математический анализ, Коллоквиум 3

Балюк Игорь

@lodthe, GitHub

Дата изменения: 2020.02.16 в 19:55

Содержание

Предварительная дата проведения коллоквиума — 29 февраля.
Оригинальный список вопросов

1 Выпуклые и вогнутые функции. Выпуклость в терминах производной. Неравенство Йенсена. Примеры.

1.1 Выпуклые и вогнутые функции и их свзяь с производной

Определение. Функция f на интервале I называется **выпуклой**, если $\forall x, y \displaystyle\int I$ и для каждого $t \in [0; 1]$ выполнено $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.

Функция f на интервале I называется **вогнутой**, если функция $-f$ — выпуклая.

Лемма. Функция f на интервале I выпукла тогда и только тогда, когда для всех точек $x < y < z$ из этого интервала выполенно

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Доказательство. Зафиксируем $t \in [0; 1]$. Пусть $z = tx + (1-t)y$. Тогда $t = \dfrac{y - z}{y - x}$ и выпуклость f равносильна выполнению неравенства:

$$f(z) = f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) = \frac{y - z}{y - x} f(x) + \frac{z - x}{y - x} f(y)$$

Так как $y - x = y - z + z - x$, полученное неравенство равносильно неравенству из формлуировки леммы:

$$\begin{gathered}
f(z) \leqslant \frac{y - z}{y - x} f(x) + \frac{z - x}{y - x} f(y) \\
f(z) \cdot (y - z + z - x) \leqslant (y - z) f(x) + (z - x) f(y) \\
yf(z) - zf(z) + zf(z) - xf(z) \leqslant yf(x) - zf(x) + zf(y) - xf(y) \\
yf(z) - zf(z) - yf(x) + zf(x) \leqslant zf(y) - xf(y) - zf(z) + xf(z) \\
(f(z) - f(x)) \cdot (y - z) \leqslant (f(y) - f(z)) \cdot (z - x) \\
\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}
\end{gathered}$$

■

Теорема. Дифференцируемая функция f на интервале I выпукла тогда и толко тогда, когда f' — неубывает.

Доказательство. Если f выпукла, то по предыущей лемме для $x < y$ выполнено

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y).$$

Первая часть неравенства выполняется, если в лемме приближать z к x справа. Вторая часть неравенства выполняется, если значение z из леммы приближать к y слева. Полученное неравенство означает неубывание f'.

Наоборот, пусть теперь f' неубывает. По теореме Лагранжа для всех точек $x < z < y$ найдутся точки $\xi_1 \in (x; z)$ и $\xi_2 \in (z; y)$ для которых

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(\xi_2)$$

.

Так как $f'(\xi) \leqslant f'(\xi_2)$, то по предудыщей лемме получаем выпуклость f. ■

Заметим, что дважды дифференцируемая функция f на интервале I выпукла тогда и только тогда, когда $f''(x) \geqslant 0 \forall x \in I$.

1.2 Неравенство Йенсена

Теорема (Неравенство Йенсена) Пусть функция f выпукла на интервале I. Тогда для всех точек $x_1, \dots, x_n \in I$ и для всех чисел $t_1 \geqslant 0, \dots, t_n \geqslant 0$, для которых $t_1 + \dots + t_n = 1$, выполнено $f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n) \leqslant t_1 f(x_1) + \dots + t_n f(x_n)$.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n.

База: $n = 2$, по определению выпуклости.

Пусть утверждение выполнено для n точек. Проверим, что оно выполнено для $n+1$ точки. Пусть $t := t_1 + \dots + t_n$. Так как $\frac{t_1}{t} x_1 + \dots + \frac{t_n}{t} x_n \in I$ (проверяется подстановкой во все t_i минимального/максимального из t), то

$$f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1}) \leqslant t f\left(\frac{t_1}{t} x_1 + \dots + \frac{t_n}{t} x_n\right) + f_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$\leqslant t\left(\frac{t_1}{t} f(x_1) + \dots + \frac{t_n}{t} f(x_n)\right) + t_{n+1} f(x_{n+1}) = t_1 f(x_1) + \dots + t_{n+1} f(x_{n+1})$$

Первое неравенство верно из определения выпуклости, второе — воспользовались предположением индукции для n. ■

1.3 Примеры

С помощью неравенства Йенсена докажем неравенство о средних. Пусть $x_1, \dots, x_n > 0$. Тогда $\sqrt[n]{x_1 \times \dots \times x_n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Так как $f''(x) = e^x \geqslant 0$, то f — выпуклая функция. Теперь заметим, что

$$\sqrt[n]{x_1 \times \dots \times x_n} = f\left(\frac{1}{n} \ln x_1 + \dots + \frac{1}{n} \ln x_n\right) \leqslant \frac{1}{n} f(\ln x_1) + \dots + \frac{1}{n} f(\ln x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

■

2 Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность интеграла, формула интегрирования по частям и замены переменной.

2.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция F называется **первообразной** функции f на некотором интервале I, если F дифференцируема на I и $F'(x) = f(x) \forall x \in I$.

Лемма. Любимые две первообразные F_1 и F_2 функции f на интервале I отличаются на константу.

Доказательство. По теореме Лагранжа, применимой к функции $F := F_1 - F_2$, для произвольных точек $x, y \in I$ выполнено $F(x) - F(y) = F'(\xi)(x - y) = 0$. Что означает, что для двух первообразных, для каждой пары точек из интервала, их разность равна.

$F'(\xi)(x - y) = 0$, так как $F'(\xi) = F_1'(\xi) - F_2'(\xi) = f(\xi) - f(\xi) = 0$. ■

Определение. Множество всех первообразных функции f на некотором задонном интервале I называется **неопределенным интегралом** от f и обозначается $\int f(x)\, dx$.

Если F — некоторая первообразная функции f на некотором интервале I, то $\int f(x)\, dx = F + C$, где C — константа.

2.2 Линейность интеграла, формула интегрирования по частям и замены переменной

Теорема (Свойства неопределенного интеграла)

1. (**Линейность**) $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx + C$
2. (**Формула интегрирования по частям**) $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$
3. (**Формула замены переменной**) $\int f(x)\,dx = [x = \phi(t)] = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$

Доказательство.

1. Пусть F и G — первообразные f и g соответственно. Тогда $\alpha F + \beta G$ — первообразная функции $\alpha f + \beta g$, то есть $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha F + \beta G + C$.

   В то же время

   $$\int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx = \alpha F + \alpha C_1 + \beta G + \beta C_2 = \alpha F + \beta G + C$$

2. Так как $(fg)' = f'g + fg'$, то по линейности интеграла

   $$\int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx = f(x) + g(x) + C.$$

3. Если F — первообразная для f, то $(F(\phi(t))') = F'(\phi(t))\phi'(t)$.

■

3 **Вычислиение интеграла от рациональной функции. Примеры сведения интеграла к интегралу от рациональной функции.**

4 **Интегралы Римана: определение, примеры интегрриуемых и неинтегрируемых функций, линейность и монотонность интеграла, ограниченность интегрируемой функции.**

5 **Нижние и верхние суммы Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости ограниченной функции.**

6 **Переформулировка критерия Дарбу в терминах колебаний. Интегрируемость модуля и произвдеения интегрируемых функций. Интегрируемость на подотрезке, аддитивность интеграла.**

7 **Интегрируемость монотонных функций. Равномерная непрерывность. Примеры. Равновероятная непрерывность непрерывной на отрезке функции. Интегрируемость непрерывных функций.**

8 **Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Ряд Тейлора для функций** e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$ **(обоснование сходимости для** e^x **и** $\ln(1+x)$**). Площадь криволинейной трапеции и длина кривой.**

9 **Формула Стирлинга.**

10 **Несобственный интеграл Римана: определение и примеры. Регулярность и линейность несобственного интеграла, независимость сходимости интеграла от его «начала». Формула интегрирования по частям и замены переменной для несобственного интеграла.**

11 **Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Пример функции, интеграл от которой сходится условно. Исследования сходимости интеграла от неотрицательной функции с помощью неравенств и эквивалентности. Признаки Дирихле-Абеля сходимости несобственного интеграла.**