

# Математический анализ, Коллоквиум 2

Балюк Игорь

@lodthe, [GitHub](#)

2019 — 2020

## Содержание

<b>1</b>	<b>Вопросы предварительной части коллоквиума</b>	<b>3</b>
1.1	Определение непрерывности функции в точке..	3
1.2	Точки разрыва, их классификация..	3
1.3	Теорема о непрерывности сложной функции..	3
1.4	Формулировки первой и второй теорем Вейерштрасса..	3
1.5	Понятие производной функции в точке..	4
1.6	Геометрический и физический смысл производной..	4
1.7	Уравнение касательной к графику функции в точке..	4
1.8	Понятие дифференцируемости функции в точке..	4
1.9	Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного)..	4
1.10	Формула вычисления производной сложной функции..	4
1.11	Таблица производных основных элементарных функций..	4
1.12	Понятие дифференциала (первого) функции в точке..	5
1.13	Геометрический смысл дифференциала..	5
1.14	Определение локального экстремума. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма)..	5
1.15	Формулы Лагранжа и Коши..	5
1.16	Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной..	6
1.17	Формулы Маклорена для основных элементарных функций..	6
1.18	Правило Лопиталя..	7
<b>2</b>	<b>Вопросы на знание доказательств</b>	<b>7</b>
2.1	Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. Точки разрыва, их классификация..	7
2.2	Непрерывность основных элементарных функций..	8
2.3	Арифметические свойства непрерывных функций..	8
2.4	Теорема о непрерывности сложной функции..	8
2.5	Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса)..	8
2.6	Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения..	9
2.7	Понятие производной функции в точке..	10
2.8	Геометрический и физический смысл производной..	10
2.9	Уравнение касательной к графику функции в точке..	10
2.10	Понятие дифференцируемости функции в точке..	10
2.11	Необходимое условие дифференцируемости..	11
2.12	Правила дифференцирования..	11
2.13	Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции..	11
2.14	Теорема о дифференцируемости обратной функции..	12
2.15	Таблица производных основных элементарных функций..	13
2.16	Производные функций, графики которых заданы параметрически..	13
2.17	Понятие дифференциала (первого) функции в точке..	13
2.18	Геометрический смысл дифференциала. [На коллоквиуме будет отсутствовать].	14
2.19	Инвариантность формы первого дифференциала. [На коллоквиуме будет отсутствовать].	14

2.20	Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке. [На коллоквиуме будет только производная высших порядков]. . . . .	14
2.21	Понятие об экстремумах функции одной переменной. . . . .	15
2.22	Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).. . . . .	15
2.23	Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши. . . . .	15
2.24	Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.. . . . .	17
2.25	Формулы Маклорена для основных элементарных функций.. . . . .	17
2.26	Правило Лопиталю.. . . . .	18
2.27	Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке.. . . . .	18
2.28	Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]. . . . .	18
2.29	Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]. . . . .	19
2.30	Достаточные условия выпуклости (вогнутости). [На коллоквиуме будет отсутствовать]. . . . .	19
2.31	Точки перегиба.. . . . .	19
2.32	Необходимые и достаточные условия для точки перегиба. [На коллоквиуме будет отсутствовать]. . . . .	19
2.33	Асимптоты графика функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]. . . . .	19

# 1 Вопросы предварительной части коллоквиума

Список вопросов предварительной части коллоквиума, ответ на которые необходим для подготовки к основной части.

## 1. Определение непрерывности функции в точке.

Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , если она определена на некоторой окрестности этой точки и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Другими словами,  $A = f(x_0)$  и справедливы следующие определения предела функции в точке  $x_0$ :

- **По Коши:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- **По Гейне:**

$$\forall \{x_n\} : x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

**Другое определение:**

Пусть  $f(x)$  — функция, определенная на промежутке  $I$  ( $I$  — это её область определения) и пусть  $c$  — произвольная точка из  $I$ . Предположим, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ :

$$\forall x \in I : |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Тогда функция  $f(x)$  **непрерывна** в точке  $c$ .

Заметьте, если  $c$  — это левая граница  $I$ , то условие имеет вид (функция непрерывна в точке  $c$  справа, аналогично для непрерывности слева).

$$\forall x \in I : c < x < c + \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

**Теорема.** Также, функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ . Тогда найдётся такое  $\delta > 0$ , что функция  $f(x)$  ограничена окрестностью  $U_\delta(a)$  точки  $a$ .

## 2. Точки разрыва, их классификация.

Пусть  $f(x)$  определена в некоторой окрестности  $U_\delta(a)$  и функция разрывна в  $a$ . Тогда этот разрыв является одним из следующих:

- **Устранимый разрыв:** пределы  $f(x)$  справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$$

- **Неустраняемый разрыв первого рода:** пределы  $f(x)$  справа и слева существуют, но не равны друг другу
- **Неустраняемый разрыв второго рода:** хотя бы один из односторонних пределов  $f(x)$  не существует или равен бесконечности.

## 3. Теорема о непрерывности сложной функции.

**Теорема.** Пусть функция  $g(x)$  непрерывна в точке  $a_0$  и функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $b_0 = g(a_0)$ . Тогда функция  $f(g(x))$  непрерывна в точке  $a_0$ .

## 4. Формулировки первой и второй теорем Вейерштрасса.

**Теорема Вейерштрасса (первая)** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена на этом отрезке.

**Теорема Вейерштрасса (вторая)** Непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  достигает на нем своих нижней и верхней граней. То есть существуют такие точки  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , так что для любого  $x \in [a, b]$ , выполняются неравенства:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

## 5. Понятие производной функции в точке.

Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку  $x_0$ . Тогда функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$ , и ее производная определяется формулой

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

если предел существует.

## 6. Геометрический и физический смысл производной.

**Геометрический смысл производной.** Производная в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке.

**Физический смысл производной.** Если точка движется вдоль оси  $OX$  и ее координата изменяется по закону  $x(t)$ , то мгновенная скорость точки:  $v(t) = x'(t)$ .

## 7. Уравнение касательной к графику функции в точке.

Пусть дана функция  $f$ , которая в некоторой точке  $x_0$  имеет конечную производную  $f'(x_0)$ . Тогда прямая, проходящая через точку  $(x_0; f(x_0))$ , имеющая угловой коэффициент  $f'(x_0)$ , называется касательной.

Итак, пусть дана функция  $y = f(x)$ , которая имеет производную  $y = f'(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Тогда в любой точке  $x_0 \in (a; b)$  к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

## 8. Понятие дифференцируемости функции в точке.

Функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$  своей области определения  $D[f]$ , если существует такая константа  $A$ , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

и

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

## 9. Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют производные в точке  $x_0$ . Тогда,

$$\begin{aligned}(g + f)'(x_0) &= g'(x_0) + f'(x_0) \\ (g \cdot f)'(x_0) &= g'(x_0) \cdot f(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)\end{aligned}$$

Если  $g(x_0) \neq 0$ , то

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

## 10. Формула вычисления производной сложной функции.

Если  $g(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f(x)$  дифференцируема в точке  $y_0 = g(x_0)$ , тогда,

$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

## 11. Таблица производных основных элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	$0$
$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$
$e^x$	$e^x$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

## 12. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.

Функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$  своей области определения  $D[f]$ , если существует такая константа  $A$ , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

Тогда выражение  $f'(x_0)dx$  называют дифференциалом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ . Обозначение:  $df = df(x_0, dx)$ . Обратите внимание, что  $df$  зависит и от точки, и от  $dx$ .

## 13. Геометрический смысл дифференциала.

Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции  $y = f(x)$  в данной точке, когда аргумент  $x$  получает приращение  $\Delta x$ .

[Подробнее тут](#)

## 14. Определение локального экстремума. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

Точка  $x_0$  называется точкой локального максимума (минимума) функции  $f$ , если существует такая окрестность  $U_\delta(x_0)$  точки  $x_0$ , что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leq f(x_0) \text{ (для минимума соответственно } f(x) \geq f(x_0))$$

$x_0$  называется точкой строгого локального максимума (минимума), если

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \implies f(x) < f(x_0) \text{ (для минимума соответственно } f(x) > f(x_0))$$

**Теорема Ферма** Если функция имеет в точке локального экстремума производную, то эта производная равна нулю.

## 15. Формулы Лагранжа и Коши.

**Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , то в этом интервале существует хотя бы одна точка  $x_0$ , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

**Теорема Коши. Обобщает формулу конечных приращений Лагранжа.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ , причем  $g'(x) \neq 0$  при всех  $x \in (a, b)$ . Тогда в этом интервале существует точка  $x = \xi$  такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

## 16. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной.

Предположим, что имеется некоторая функция  $f(x)$  и надо исследовать ее поведение в некоторой точке  $x_0$  или ее окрестности. Сама функция может быть при этом достаточно сложной, и поэтому непосредственное вычисление  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (как пример того, что мы хотим узнать о функции в  $x_0$ ) окажется крайне трудоемким. Идея в том, чтобы найти такой многочлен  $P_n(x)$ , что  $f(x) \sim P_n(x - x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$ , а затем исследовать его. Работать с многочленами практически всегда намного проще.

Предположим пока, что  $x_0 = 0$ . Тогда  $P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ .  $P_n(0) = c_0$ , а  $P'_n(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$ , из чего следует, что  $c_1 = P'_n(0)$ . По аналогии можно получить, что  $c_2 = \frac{P''_n(0)}{2!}, \dots, c_n = \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}$ . Т.е. получаем, что  $P_n(x) = P_n(0) + \frac{P'_n(0)}{1!}x + \dots + \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}x^n$ .

Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0)$ , тогда справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(f, x)$$

Эта формула называется **формулой Тейлора** и обычно записывается в виде:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_n(f, x)}_{\text{остаточный член}}$$

## 17. Формулы Маклорена для основных элементарных функций.

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$$

$$2. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$$

$$3. (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \bar{o}(x^n)$$

Например  $(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right)x^2 + \bar{o}(x^2) = \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + \bar{o}(x^2)$

$$4. \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n-1})$$

$$5. \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \bar{o}(x^{2n-2})$$

$$6. \operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} \cdot x^{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1}), \text{ где } B_{2n} - \text{ числа Бернулли}$$

Но достаточно помнить, что  $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \bar{o}(x^5)$ , т.е. общая формула для семинаров не нужна

$$7. \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \cdot x^{2n+1} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

Достаточно знать  $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \bar{o}(x^5)$

$$8. \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$9. \operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1})$$

## 18. Правило Лопиталя.

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , дифференцируемые в некоторой проколотой окрестности  $\overset{\circ}{U}(a)$  точки  $a$  обладают следующими свойствами

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  или  $\infty$
2.  $g'(x) \neq 0$  в окрестности  $U$
3. Существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

## 2 Вопросы на знание доказательств

### 1. Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. Точки разрыва, их классификация.

Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , если она определена на некоторой окрестности этой точки  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Другими словами,  $A = f(x_0)$  и справедливы следующие определения предела функции в точке  $x_0$ :

- **По Коши:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- **По Гейне:**

$$\forall \{x_n\} : x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

**Теорема.** Определения предела функции в точке по Коши и Гейне эквивалентны

*Доказательство.* Пусть  $f$  определена на множестве  $X$  и число  $A$  является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  в смысле Коши. Выберем произвольную подходящую последовательность  $x_n, n \in \mathbb{N}$ , т.е. такую, для которой  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Покажем, что  $A$  является пределом в смысле Гейне.

Зададим произвольное число  $\varepsilon > 0$  и укажем для него такое  $\delta > 0$ , что  $\forall x \in X$  из условия  $0 < |x - x_0| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . В силу того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , для  $\delta > 0$  найдется такой номер  $N \in \mathbb{N}$ , что для всех  $n \geq N$  будет выполняться неравенство  $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

Докажем теперь обратное утверждение: предположим, что  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  в смысле Гейне, и покажем, что число  $A$  является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  в смысле Коши. Предположим, что это неверно, т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in X : 0 < |x_\delta - x_0| < \delta : |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon$$

В качестве  $\delta$  рассмотрим  $\delta = \frac{1}{n}$ , а соответствующие значения  $x_\delta$  будем обозначать  $x_n$ . Тогда при любом  $n \in \mathbb{N}$  выполняются условия  $x_n \neq x_0, |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$  и  $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$ . Отсюда следует, что последовательность  $\{x_n\}$  является подходящей, но число  $A$  не является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$ . Получили противоречие. ■

### Классификация разрывов:

Пусть  $f(x)$  определена в некоторой окрестности  $U_\delta(a)$  и функция разрывна в  $a$ . Тогда говорят, что функция имеет

- **Устранимый разрыв:** пределы  $f(x)$  справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$$

- **Неустранимый разрыв первого рода:** пределы  $f(x)$  справа и слева существуют, но не равны друг другу
- **Неустранимый разрыв второго рода:** хотя бы один из односторонних пределов  $f(x)$  не существует или равен бесконечности.

## 2. Непрерывность основных элементарных функций.

TODO(): Спросить, что тут требуется.

## 3. Арифметические свойства непрерывных функций.

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ .

Тогда функции  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ .

Если функция  $g(x_0) \neq 0$ , то и  $\frac{f(x)}{g(x)}$  непрерывна в точке  $x_0$ .

Доказать можно расписав пределы.

## 4. Теорема о непрерывности сложной функции.

**Теорема.** Если функция  $g(t)$  непрерывна в точке  $t_0$  и функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0 = g(t_0)$ , то  $f(g(t))$  непрерывна в  $t_0$ .

*Доказательство.* Для доказательства этой теоремы воспользуемся формальным преобразованием двух выражений с кванторами кванторов.

$f(x)$  непрерывна в  $x_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$g(t)$  непрерывна в  $t_0$ :

$$\forall \delta > 0 \exists \mu > 0 : \forall t : 0 < |t - t_0| < \mu \implies |g(t) - g(t_0)| < \delta$$

Получается,  $f(g(t))$  непрерывна в  $t_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mu > 0 : \forall t : 0 < |t - t_0| < \mu \implies |f(g(t)) - f(g(t_0))| < \varepsilon$$

■

## 5. Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).

**Теорема Вейерштрасса (первая)** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то есть  $\exists A : \forall x \in [a, b] \implies |f(x)| \leq A$

*Доказательство.* Докажем от противного.

Пусть  $f$  не ограничена на отрезке  $[a, b]$ , тогда:

$$\begin{aligned} \forall A > 0 \exists x_A \in [a, b] : |f(x_A)| > A \\ A = 1 &\implies \exists x_1 \in [a, b] : |f(x_1)| > 1 \\ A = 2 &\implies \exists x_2 \in [a, b] : |f(x_2)| > 2 \\ &\vdots \\ A = n &\implies \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n \end{aligned}$$

Получим последовательность  $\{x_n\} \subset [a, b]$ , то есть последовательность  $\{x_n\}$  ограничена.

По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить подпоследовательность, которая сходится к точке  $c$ , то есть



$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$$

Тогда  $c \in [a, b]$ . Но по условию функция непрерывна в точке  $c$  и тогда по определению непрерывности в точке по Гейне  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$ .

С другой стороны

$$|f(x_{n_k})| > n_k, n_k \geq k \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$$

А это противоречит единственности предела. ■

**Теорема Вейерштрасса (вторая)** Непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  достигает на нем своих нижней и верхней граней. То есть существуют такие точки  $c_1, c_2 \in [a, b]$ , так что для любого  $x \in [a, b]$ , выполняются неравенства:

$$f(2) \leq f(x) \leq f(1)$$

*Доказательство.* Докажем  $\exists c_1 \in [a, b] : f(c_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ .

Пусть  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  (существование следует из первой теоремы Вейерштрасса). В силу определения точной верхней грани выполняется условие:

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b] \implies f(x) \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in [a, b] : M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \end{cases}$$

Полагая  $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$  получим последовательность  $\{x_n\}$  такую, что для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняются условия  $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$ , откуда  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ . Существует подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  последовательности  $\{x_n\}$  и точка  $c$  (по теореме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке  $c$ ), такие что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$ , где  $c \in [a, b]$ .

В силу непрерывности функции  $f$  в точке  $c$ , получаем  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$ .

С другой стороны,  $\{f(x_{n_k})\}$  — подпоследовательность последовательности  $\{f(x_n)\}$ , сходящейся к числу  $M$ . Поэтому  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$ .

В силу единственности предела последовательности заключаем, что  $f(c) = M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ .

Утверждение  $\exists c_1 \in [a, b] : f(c_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  доказано.

Аналогично доказывается  $\exists c_2 \in [a, b] : f(c_2) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$

Функция непрерывна на интервале может не достигать своих точных граней (требовать непрерывности на сегменте существенно). ■

## 6. Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.

**Теорема Больцано-Коши (первая), о нулях непрерывной функции** Если функция  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$  и на своих концах принимает значение разных знаков, то существует такая точка, принадлежащая этому отрезку, в которой функция обращается в нуль.

*Доказательство.* Геометрически очень легко: функция пересечет ось  $OX$ .

Алгебраически: разделим отрезок  $[a, b]$  точкой  $x_0$  на два равных по длине отрезка, тогда либо  $f(x_0) = 0$  и, значит, искомая точка  $x_0$  найдена, либо  $f(x_0) \neq 0$  и тогда на концах одного из полученных промежутков функция  $f$  принимает значения разных знаков, точнее, на левом конце значение меньше нуля, на правом — больше.

Обозначим этот отрезок  $[a_1, b_1]$  и разделим его снова на два равных подлине отрезка и т.д. В результате, либо через конечное число шагов придем к искомой точке  $x$ , в которой  $f(x) = 0$ , либо получим последовательность вложенных отрезков  $[a_n, b_n]$  по длине стремящихся к нулю и таких, что

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

Пусть  $\gamma$  — общая точка всех отрезков  $[a_n, b_n]$ . Тогда  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Поэтому, в силу непрерывности функции  $f$

$$f(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Откуда следует, что  $f(\gamma) = 0$ . ■

**Теорема Больцано-Коши (вторая), о промежуточном значении непрерывных функций**  
Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и  $A = f(a) \neq f(b) = B$ , число  $C \in (A, B)$ , тогда существует такая точка  $c \in [a, b]$ , что  $f(c) = C$ .

Другими словами, утверждается, что если непрерывная функция, принимает два значения, то она принимает и любое значение между ними.

*Доказательство.* Не нарушая общности будем считать, что  $A = f(a) < f(b) = B$ . Рассмотрим функцию  $h(x) = f(x) - C$ , непрерывность на отрезке  $[a, b]$  которой следует из непрерывности функции  $f$ . Очевидно что  $h(a) = A - C < 0$  и  $h(b) = B - C > 0$ . Применяем к  $h$  первую теорему Больцано-Коши и находим точку  $c$ , в которой  $h(c) = f(c) - C = 0$ , то-есть  $f(c) = C$ . Теорема доказана. ■

## 7. Понятие производной функции в точке.

Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку  $x_0$ . Тогда функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$ , и ее производная определяется формулой

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

если предел существует.

## 8. Геометрический и физический смысл производной.

**Геометрический смысл производной.** Производная в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке.

**Физический смысл производной.** Если точка движется вдоль оси  $OX$  и ее координата изменяется по закону  $x(t)$ , то мгновенная скорость точки:  $v(t) = x'(t)$ .

## 9. Уравнение касательной к графику функции в точке.

Пусть дана функция  $f$ , которая в некоторой точке  $x_0$  имеет конечную производную  $f'(x_0)$ . Тогда прямая, проходящая через точку  $(x_0; f(x_0))$ , имеющая угловой коэффициент  $f'(x_0)$ , называется касательной.

Итак, пусть дана функция  $y = f(x)$ , которая имеет производную  $y = f'(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Тогда в любой точке  $x_0 \in (a; b)$  к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

## 10. Понятие дифференцируемости функции в точке.

Функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$  своей области определения  $D[f]$ , если существует такая константа  $A$ , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

и

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

## 11. Необходимое условие дифференцируемости.

**Теорема.** Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то она непрерывна в этой точке.

*Доказательство.* Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда её приращение представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$$

Но тогда при  $\Delta x \rightarrow 0$  будет  $\Delta y \rightarrow 0$ , а это означает непрерывность функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ . ■

Обратите внимание, что из непрерывности не следует дифференцируемости (например,  $f(x) = |x|$ ).

## 12. Правила дифференцирования.

TODO(): Спросить, что тут имеется в виду. Производная суммы/произведения функций?

## 13. Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.

**Теорема.** Пусть функцию  $y = y(x)$  от переменной  $x$  можно представить как сложную функцию в следующем виде:

$$y(x) = f(u(x))$$

где  $f(u)$  и  $u(x)$  есть некоторые функции. Функция  $u = u(x)$  дифференцируема при некотором значении переменной  $x$ . Функция  $f(u)$  дифференцируема при значении переменной  $u = u(x)$ . Тогда сложная (составная) функция  $y = f(u(x))$  дифференцируема в точке  $x$  и ее производная определяется по формуле:

$$y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

*Доказательство.* Введем следующие обозначения.

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x + \Delta x) - u(x) \\ \Delta f &= f(u + \Delta u) - f(u) = f(u(x + \Delta x)) - f(u(x))\end{aligned}$$

Здесь  $\Delta u$  есть функция от переменных  $x$  и  $\Delta x$ ,  $\Delta f$  есть функция от переменных  $u$  и  $\Delta u$ . Но мы будем опускать аргументы этих функций, чтобы не загромождать выкладки.

Поскольку функции  $u$  и  $f$  дифференцируемы в точках  $x$  и  $u = u(x)$ , соответственно, то в этих точках существуют производные этих функций, которые являются следующими пределами:

$$\begin{aligned}u'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ f'(u) &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}\end{aligned}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\varepsilon(\Delta u) = \frac{\Delta f}{\Delta u} - f'(u)$$

При фиксированном значении переменной  $u$ ,  $\varepsilon$  является функцией от  $\Delta u$ . Очевидно, что

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Тогда

$$\Delta f = (f'(u) + \varepsilon(\Delta u)) \cdot \Delta u$$

Поскольку функция  $u(x)$  является дифференцируемой функцией в точке  $x$ , то она непрерывна в этой точке. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Теперь находим производную.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= f'(u) \cdot u'(x) + 0 \cdot u'(x) \\ &= f'(u) \cdot u'(x) \end{aligned}$$

Формула доказана. ■

#### 14. Теорема о дифференцируемости обратной функции.

**Теорема.** Рассмотрим функцию  $f(x)$ , которая является строго монотонной на некотором интервале  $(a, b)$ . Если в этом интервале существует такая точка  $x_0$ , что  $f'(x_0) \neq 0$ , то функция  $x = \phi(y)$ , обратная к функции  $y = f(x)$ , также дифференцируема в точке  $y_0 = f(x_0)$  и её производная равна

$$\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

*Доказательство.* Пусть переменная  $y$  в точке  $y_0$  получает приращение  $\Delta y \neq 0$ . Соответствующее ему приращение переменной  $x$  в точке  $x_0$  обозначим как  $\Delta x$ , причем  $\Delta x \neq 0$  в силу строгой монотонности функции  $y = f(x)$ . Запишем отношение приращений в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Допустим, что  $\Delta y \rightarrow 0$ , тогда  $\Delta x \rightarrow 0$ , поскольку обратная функция  $x = \phi(y)$  является непрерывной в точке  $y_0$ . В пределе, при  $\Delta x \rightarrow 0$ , правая часть записанного соотношения становится равной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

В таком случае левая часть тоже стремится к пределу, который по определению равен производной обратной функции:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \phi'(y_0)$$

Таким образом,

$$\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$
■

**15. Таблица производных основных элементарных функций.**

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	$0$
$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$
$e^x$	$e^x$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

**16. Производные функций, графики которых заданы параметрически.**

**Теорема.** Зависимость между аргументом  $x$  и функцией  $y$  может быть задана в параметрическом виде с помощью двух уравнений:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

Пусть  $x = \phi(t)$  и  $y = \psi(t)$  определены и дифференцируемы при  $t \in (a, b)$ , причем  $x'_t = \phi'(t) \neq 0$  и  $x = \phi(t)$  имеет обратную функцию  $t = \theta(x)$ , то

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

*Доказательство.* Перейдем от параметрического задания к явному. При этом получаем сложную функцию  $y = \psi(t) = \psi(\theta(x))$ , аргументов которой является  $x$ .

По правилу нахождения производной сложной функции имеем

$$y'_x = (\psi(\theta(x)))' = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x)$$

По теореме об обратной функции  $\theta'(x) = \frac{1}{\phi'(t)}$ . А значит

$$y'_x = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x) = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

■

**17. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.**

Функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$  своей области определения  $D[f]$ , если существует такая константа  $A$ , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

Тогда выражение  $f'(x_0)dx$  называют дифференциалом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ . Обозначение:  $df = df(x_0, dx)$ . Обратите внимание, что  $df$  зависит и от точки, и от  $dx$ .

**18. Геометрический смысл дифференциала. [На коллоквиуме будет отсутствовать]**

Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции  $y = f(x)$  в данной точке, когда аргумент  $x$  получает приращение  $\Delta x$ .

[Подробнее тут](#)

**19. Инвариантность формы первого дифференциала. [На коллоквиуме будет отсутствовать]**

**20. Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке. [На коллоквиуме будет только производная высших порядков]**

Рассмотрим функцию, дифференцируемую на множестве  $E$ . Т.е.  $\exists f'(x)$ , Если  $f'(x)$  тоже дифференцируема на  $E$ , то  $\exists (f'(x))' = f''(x)$ .

Производной  $n$ -ого порядка будем считать  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ , причем  $f^{(0)}(x) = f(x)$ . Разумеется, для существования производной  $n$ -ого порядка должны существовать производные всех меньших порядков.

Множество функция, имеющих все производные до порядка  $n$  включительно на множестве  $E$ , обозначается  $C^{(n)}(E)$ . Рассмотрим несколько примеров

- $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\f''(x) &= -\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right) \\f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \\f^{(4)}(x) &= \sin x = \sin x\end{aligned}$$

Докажем по индукции, что  $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)$ . При  $n = 1$  уже было показано ранее. Пусть это верно при некотором  $n$ , покажем для  $n = n + 1$ .

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x) &= \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right) \\f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi n}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right)\end{aligned}$$

- $f(x) = e^x$ .  $f^{(n)}(x) = e^x$
- $f(x) = x^m$ . Беря  $n$  раз производную, получаем, что  $f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$
- $f(x) = \ln x$ .  $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ .  $f^{(n)}(x^{-1}) = (-1)(-2)\dots(-n)x^{-1-n} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-1-n}$ , Тогда получаем, что

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x-1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

**Теорема (Формула Лейбница)** Пусть  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют не менее  $n$  производных на множестве  $E$ . Тогда

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$$

*Доказательство.* Докажем по индукции. При  $n = 1$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \cdot u^{(1-k)} \cdot v^{(k)}$$

Пусть равенство верно при некотором  $n$ , докажем его справедливость при  $n = n + 1$ . Беря по определению производную  $(u \cdot v)^{(n+1)}$

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)^{(n+1)} &= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} \right)' \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} \\
&= \binom{n}{0} \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \binom{n}{n} \cdot u \cdot v^{(n+1)} \\
&= \binom{n}{0} \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \binom{n}{n} \cdot u \cdot v^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)}
\end{aligned}$$

Последний переход сделан при помощи следующего рассуждения:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

■

## 21. Понятие об экстремумах функции одной переменной.

Точка  $x_0$  называется точкой локального максимума (минимума) функции  $f$ , если существует такая окрестность  $U_\delta(x_0)$  точки  $x_0$ , что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leq f(x_0)$$

и точкой локального минимума, если

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \geq f(x_0)$$

**Теорема Ферма** Если функция  $y = f(x)$  имеет экстремум в точке  $x_0$ , то ее производная  $f'(x_0)$  либо равна нулю, либо не существует.

## 22. Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

**Теорема Ферма** Пусть функция  $f$  определена на интервале  $(a, b)$  и в некоторой точке  $x_0 \in (a, b)$  принимает наибольшее (наименьшее) значение на этом интервале. Если существует  $f'(x_0)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $x_0$  — точка максимума функции  $f$ . Рассмотрим разностное отношение  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Так как  $f(x) \leq f(x_0)$ , то при  $x > x_0$  имеем  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ , и, следовательно,  $f'_+(x_0) \leq 0$ . Если же  $x < x_0$ , то  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ , и поэтому  $f'_-(x_0) \geq 0$ . Но из дифференцируемости функции  $f$  в точке  $x_0$  следует, что  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$  (следует из равенности предела справа и слева). ■

С геометрической точки зрения теорема Ферма означает, что если в точке экстремума у графика функции существует касательная, то она параллельна оси  $OX$ .

## 23. Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши).

**Теорема Ролля.** О нуле производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения Пусть функция  $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ;
2. дифференцируема на интервале  $(a, b)$ ;
3.  $f(a) = f(b)$

Тогда на интервале  $(a, b)$  найдется, по крайней мере, одна точка  $x_0$ , в которой  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Если функция  $f(x)$  постоянна на отрезке  $[a, b]$  (а значит, её минимальное и максимальное значение совпадают), то производная равна нулю в любой точке интервала  $(a, b)$ , в этом случае утверждение справедливо.

Иначе, минимальное и максимальное значение функции не совпадают. По второй теореме Вейерштрасса (о достижении функции значения точной верхней/нижней грани на отрезке), функция достигает своего наибольшего или наименьшего значения в точке  $\xi$  интервала  $(a, b)$ , т.е. в точке  $\xi$  существует локальный экстремум. Тогда по теореме Ферма производная в этой точке равна нулю

$$f'(\xi) = 0$$

■

**Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , то в этом интервале существует хотя бы одна точка  $x_0$ , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную функцию  $F(x) = f(x) + \lambda x$ .

Выберем число  $\lambda$  таким, чтобы выполнялось условие  $F(a) = F(b)$ , тогда

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b \implies f(b) - f(a) = \lambda(a - b) \implies \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

В результате получаем

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$$

Функция  $F(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале  $(a, b)$  существует такая точка  $\xi$ , что  $F'(\xi) = 0$ .

Отсюда следует, что  $0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  или

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Хорда, проходящая через точки графика, соответствующие концам отрезка  $a$  и  $b$  имеет угловой коэффициент, равный

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Тогда внутри отрезка существует точка  $x = \xi$ , в которой касательная к графику параллельна хорде.

**Теорема Коши. Обобщает формулу конечных приращений Лагранжа.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ , причем  $g'(x) \neq 0$  при всех  $x \in (a, b)$ . Тогда в этом интервале существует точка  $x = \xi$  такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$



*Доказательство.* Доказательство совпадает с доказательством теоремы Лагранжа.

Прежде всего заметим, что знаменатель в левой части формулы Коши не равен нулю:  $g(b) - g(a) \neq 0$ . Действительно, если  $g(a) = g(b)$ , то по теореме Ролля найдется точка  $\mu \in (a, b)$ , в которой  $g'(\mu) = 0$ . Это, однако, противоречит условию, где указано, что  $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$ .

Введем вспомогательную функцию  $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$ .

Выберем число  $\lambda$  таким, чтобы выполнялось условие  $F(a) = F(b)$ , тогда

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \implies f(b) - f(a) = \lambda(g(b) - g(a)) \implies \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

В результате получаем

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot x$$

Функция  $F(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и при найденном значении  $\lambda$  принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале  $(a, b)$  существует такая точка  $\xi$ , что  $F'(\xi) = 0$ .

Отсюда следует, что

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi)$$

или

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

■

**24. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.**

**25. Формулы Маклорена для основных элементарных функций.**

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$$

$$2. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$$

$$3. (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \bar{o}(x^n)$$

$$\text{Например } (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right)x^2 + \bar{o}(x^2) = \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + \bar{o}(x^2)$$

$$4. \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n-1})$$

$$5. \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \bar{o}(x^{2n-2})$$

$$6. \operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} \cdot x^{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1}), \text{ где } B_{2n} - \text{числа Бернулли}$$

Но достаточно помнить, что  $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \bar{o}(x^5)$ , т.е. общая формула для семинаров не нужна

$$7. \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \cdot x^{2n+1} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

$$\text{Достаточно знать } \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \bar{o}(x^5)$$

$$8. \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$9. \operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1})$$

## 26. Правило Лопиталья.

1.

**Теорема Лопиталья (первое правило)** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  таковы, что

- (a)  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в проколотой окрестности точки  $a$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
- (c)  $g'(x) \neq 0$  в окрестности  $U$
- (d) Существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\text{Тогда существует } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Докажем теорему для случая, когда пределы равны 0

*Доказательство.* Доопределим функции в точке  $a$  нулём. Из первого условия следует, что  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, x]$ , где  $x$  принадлежит рассматриваемой окрестности точки  $a$ . Применим обобщённую формулу конечных приращений (Коши) к  $f(x)$  и  $g(x)$  на отрезке  $[a, x]$ .

$$\exists \xi \in [a, x] : \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\text{Так как } g(a) = f(a) = 0 \text{ получим, что } \forall x \exists \xi \in [a, x] : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Пусть предел отношения производных равен  $A$ . Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = A$ , так как  $\lim_{x \rightarrow a} \xi(x) = a$ . ■

2. Докажем теорему для случая, когда пределы равны  $\infty$ . Условия:

**Теорема Лопиталья (второе правило)** Если для функций  $f(x)$  и  $g(x)$  справедливо следующее:

- (a)  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы при  $x > a$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow a+0}$  представляет собой неопределённость вида  $\frac{\infty}{\infty}$
- (c)  $g'(x) \neq 0$  при  $x > a$
- (d) Существует конечный  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

$$\text{то } \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

*Доказательство.* TODO(): почему так много, точно ли это было на лекции? Пруф ■

## 27. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке.

**Теорема.** Для того чтобы дифференцируемая функция  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$  строго возрастала, достаточно, чтобы  $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0$

Для того чтобы дифференцируемая функция  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$  строго убывала, достаточно, чтобы  $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0$

*Доказательство.* Докажем для строгого возрастания. Пусть  $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$ . Выберем произвольные точки  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , и, не ограничивая общности, скажем, что  $x_1 < x_2$ .

Применим формулу конечных приращений Лагранжа. Так как  $f'(\xi) > 0$  и  $x_2 > x_1$ , имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$$

■

## 28. Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]

- 29. Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]
- 30. Достаточные условия выпуклости (вогнутости). [На коллоквиуме будет отсутствовать]
- 31. Точки перегиба.
- 32. Необходимые и достаточные условия для точки перегиба. [На коллоквиуме будет отсутствовать]
- 33. Асимптоты графика функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]