

Линейная алгебра

Бобень Вячеслав

@darkkeks, [GitHub](#)

Большую часть исходного кода предоставила Левина Александра.
Благодарность выражается Левиному Александру за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

“К коллоку можете даже не готовиться”.

— Роман Сергеевич Авдеев

Содержание

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Лекция 9.09.2019 | 5 |
| 1.1 | Матрицы | 5 |
| 1.2 | Операции над матрицами | 5 |
| 1.3 | Пространство \mathbb{R}^n , его отождествление с матрицами-столбцами высоты n | 5 |
| 1.4 | Транспонирование матриц, его простейшие свойства | 6 |
| 1.5 | Умножение матриц | 6 |
| 2 | Лекция 12.09.2019 | 8 |
| 2.1 | Отступление о суммах | 8 |
| 2.2 | Основные свойства умножения матриц | 8 |
| 2.3 | Диагональные матрицы | 9 |
| 2.4 | Единичная матрица и её свойства | 9 |
| 2.5 | След квадратной матрицы и его свойства | 10 |
| 2.6 | Системы линейных уравнений | 10 |
| 2.6.1 | Совместные и несовместные системы | 11 |
| 2.6.2 | Матричная форма записи СЛУ | 11 |
| 3 | Лекция 14.09.2019 | 12 |
| 3.1 | Расширенная матрицы системы линейных уравнений | 12 |
| 3.2 | Эквивалентные системы | 12 |
| 3.3 | Как решить СЛУ? | 12 |
| 3.3.1 | Элементарные преобразования СЛУ и соответствующие преобразования строк её расширенной матрицы | 12 |
| 3.3.2 | Сохранение множества решений системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях | 13 |
| 3.4 | Ступенчатые матрицы | 13 |
| 3.4.1 | Улучшенный ступенчатый вид матрицы | 13 |
| 3.5 | Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения слева на подходящую матрицу | 14 |
| 4 | Лекция 19.09.2019 | 15 |
| 4.1 | Метод Гаусса решения систем линейных уравнений | 15 |
| 4.2 | Однородные системы линейных уравнений | 16 |
| 4.3 | Связь между множеством решений системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей однородной системы | 16 |
| 4.4 | Матричные уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$, общий метод их решения | 16 |
| 4.5 | Обратные матрицы | 17 |
| 4.6 | Перестановки на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ | 17 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 5 | Лекция 23.09.2019 | 18 |
| 5.1 | Инверсии в перестановке | 18 |
| 5.2 | Знак и чётность перестановки | 18 |
| 5.3 | Произведение перестановок | 18 |
| 5.4 | Ассоциативность произведения перестановок | 18 |
| 5.5 | Тождественная перестановка | 18 |
| 5.6 | Обратная перестановка и её знак | 19 |
| 5.7 | Теорема о знаке произведения перестановок | 19 |
| 5.8 | Транспозиции, знак транспозиции | 19 |
| 5.9 | Определитель квадратной матрицы | 20 |
| 5.10 | Определители порядков 2 и 3 | 20 |
| 6 | Лекция 26.09.2019 | 21 |
| 6.1 | Свойства определителей | 21 |
| 6.2 | Поведение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов) | 23 |
| 7 | Лекция 30.09.2019 | 24 |
| 7.1 | Определитель с углом нулей | 24 |
| 7.2 | Определитель произведения матриц | 24 |
| 7.3 | Дополнительные миноры и алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы | 25 |
| 7.4 | Лемма об определителе матрицы, содержащей ровно один ненулевой элемент в некоторой строке | 25 |
| 7.5 | Разложение определителя по строке (столбцу) | 25 |
| 7.6 | Лемма о фальшивом разложении определителя | 26 |
| 7.7 | Обратная матрица, её единственность | 26 |
| 7.8 | Невырожденные матрицы | 26 |
| 7.9 | Определитель обратной матрицы | 26 |
| 7.10 | Присоединённая матрица | 26 |
| 7.11 | Критерий обратимости квадратной матрицы, явная формула для обратной матрицы | 26 |
| 8 | Лекция 2.11.2019 | 28 |
| 8.1 | Следствия из критерия обратимости квадратной матрицы | 28 |
| 8.2 | Формулы Крамера | 28 |
| 8.3 | Понятие поля | 28 |
| 8.4 | Простейшие примеры | 28 |
| 8.5 | Построение поля комплексных чисел | 29 |
| 8.5.1 | Формальная конструкция поля \mathbb{C} | 29 |
| 8.5.2 | Проверка аксиом | 29 |
| 8.6 | Алгебраическая форма комплексного числа, его действительная и мнимая части | 30 |
| 8.7 | Комплексное сопряжение | 30 |
| 8.7.1 | Свойства комплексного сопряжения | 30 |
| 8.8 | Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация сложения и сопряжения в этой модели | 30 |
| 9 | Лекция 7.11.2019 | 31 |
| 9.1 | Модуль комплексного числа, его свойства | 31 |
| 9.2 | Аргумент комплексного числа | 31 |
| 9.3 | Тригонометрическая форма комплексного числа | 31 |
| 9.4 | Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме | 32 |
| 9.5 | Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра | 32 |
| 9.6 | Извлечение корней из комплексных чисел | 32 |
| 9.7 | Основная теорема алгебры комплексных чисел (без доказательства) | 32 |
| 9.8 | Деление многочленов с остатком | 33 |
| 9.9 | Теорема Безу | 33 |
| 9.10 | Кратность корня многочлена | 33 |
| 9.11 | Утверждение о том, что всякий многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней с учётом кратностей | 33 |
| 10 | Лекция 14.11.2019 | 34 |
| 10.1 | Векторные пространства, простейшие следствия из аксиом | 34 |
| 10.1.1 | Определение векторного пространства | 34 |
| 10.1.2 | Простейшие следствия из аксиом | 34 |
| 10.2 | Подпространства векторных пространств | 35 |
| 10.3 | Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными является подпространством в F^n | 35 |
| 10.4 | Линейная комбинация конечного набора векторов | 35 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 10.5 | Линейная оболочка подмножества векторного пространства, примеры | 35 |
| 11 | Лекция 21.11.2019 | 36 |
| 11.1 | Утверждение о том, что линейная оболочка системы векторов является подпространством объемлющего векторного пространства | 36 |
| 11.2 | Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов | 36 |
| 11.3 | Критерий линейной зависимости конечного набора векторов | 37 |
| 11.4 | Основная лемма о линейной зависимости | 37 |
| 11.5 | Базис векторного пространства | 38 |
| 11.6 | Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства | 38 |
| 11.7 | Независимость числа элементов в базисе векторного пространства от выбора базиса | 38 |
| 11.8 | Размерность конечномерного векторного пространства | 38 |
| 12 | Лекция 28.11.2019 | 39 |
| 12.1 | Характеризация базисов в терминах единственности линейного выражения векторов | 39 |
| 12.2 | Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений | 39 |
| 12.3 | Метод построения фундаментальной системы решений | 39 |
| 12.4 | Утверждение о возможности выбора из конечной системы векторов базиса её линейной оболочки | 41 |
| 12.5 | Дополнение конечной линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства | 41 |
| 12.6 | Лемма о добавлении вектора к конечной линейной независимой системе | 41 |
| 13 | Лекция 5.12.2019 | 42 |
| 13.1 | Размерность подпространства конечномерного векторного пространства | 42 |
| 13.2 | Ранг системы векторов | 42 |
| 13.3 | Связь ранга системы векторов с размерностью её линейной оболочки | 42 |
| 13.4 | Ранг матрицы: столбцовый и строковый | 42 |
| 13.5 | Сохранение линейных зависимостей между столбцами матрицы при элементарных преобразованиях строк | 43 |
| 13.6 | Инвариантность столбцового и строкового рангов матрицы при элементарных преобразованиях строк и столбцов | 43 |
| 13.7 | Столбцовый и строковый ранги матрицы, имеющей улучшенный ступенчатый вид | 43 |
| 13.8 | Равенство столбцового и строкового рангов матрицы | 44 |
| 13.9 | Связь ранга квадратной матрицы с её определителем | 44 |
| 13.10 | Подматрицы | 44 |
| 13.11 | Связь рангов матрицы и её подматрицы | 44 |
| 14 | Лекция 12.12.2019 | 45 |
| 14.1 | Миноры | 45 |
| 14.2 | Теорема о ранге матрицы | 45 |
| 14.3 | Приложения ранга матрицы к исследованию СЛУ | 45 |
| 14.3.1 | Теорема Кронекера-Капелли | 45 |
| 14.3.2 | Критерий существования единственного решения у совместной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов | 45 |
| 14.3.3 | Критерий существования единственного решения у системы линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов в терминах её определителя | 46 |
| 14.3.4 | Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов | 46 |
| 14.3.5 | Реализация подпространства в F^n в качестве множества решений однородной системы линейных уравнений | 46 |
| 14.4 | Координаты вектора по отношению к фиксированному базису векторного пространства | 46 |
| 14.5 | Описание всех базисов конечномерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат | 47 |
| 14.6 | Матрица перехода от одного базиса конечномерного векторного пространства к другому | 47 |
| 14.7 | Формула преобразования координат вектора при замене базиса | 47 |
| 15 | Лекция 9.01.2020 | 49 |
| 15.1 | Сумма двух подпространств векторного пространства | 49 |
| 15.2 | Связь размерностей двух подпространств с размерностями их суммы и пересечения | 49 |
| 15.3 | Сумма нескольких подпространств векторного пространства | 50 |
| 15.4 | Линейно независимые подпространства, пять эквивалентных условий | 50 |
| 15.5 | Разложение векторного пространства в прямую сумму нескольких подпространств | 51 |
| 15.6 | Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства | 51 |

| | |
|--|-----------|
| 16 Лекция 16.01.2020 | 52 |
| 16.1 Линейные отображения векторных пространств | 52 |
| 16.2 Примеры линейных отображений | 52 |
| 16.2.1 Пример 0 | 52 |
| 16.2.2 Пример 1 | 52 |
| 16.2.3 Пример 2 | 52 |
| 16.2.4 Пример 3 | 53 |
| 16.2.5 Пример 4 | 53 |
| 16.2.6 Пример 5 | 53 |
| 16.3 Простейшие свойства линейных отображений | 53 |
| 16.4 Изоморфизм векторных пространств | 53 |
| 16.5 Отображение, обратное к изоморфизму | 54 |
| 16.6 Композиция двух линейных отображений, композиция двух изоморфизмов | 54 |
| 16.7 Изоморфные векторные пространства | 54 |
| 16.8 Отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств | 54 |
| 16.9 Классы изоморфизма векторных пространств | 54 |
| 16.10 Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств | 55 |
| 16.11 Задание линейного отображения путём задания образов векторов фиксированного базиса | 55 |
| 17 Лекция 23.01.2020 | 56 |
| 17.1 Матрица линейного отображения | 56 |
| 17.2 Примеры | 56 |
| 17.3 Связь координат вектора и его образа при линейном отображении | 57 |
| 17.4 Формула изменения матрицы линейного отображения между векторными пространствами V и W при замене их базисов | 57 |
| 17.5 Операции сложения и умножения на скаляр на множестве всех линейных отображений между двумя векторными пространствами | 58 |
| 17.6 Матрица суммы двух линейных отображений и произведения линейного отображения на скаляр | 58 |
| 17.7 Изоморфизм между пространством $\text{Hom}(V, W)$ и пространством $(m \times n)$ -матриц, где $n = \dim V$, $m = \dim W$ | 58 |
| 17.8 Матрица композиции двух линейных отображений | 58 |
| 17.9 Ядро и образ линейного отображения; утверждение о том, что они являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах | 59 |

1 Лекция 9.09.2019

1.1 Матрицы

Определение 1. Матрица размера $n \times m$ — это прямоугольная таблица высоты m и ширины n .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} — элемент на пересечении i -й строки и j -го столбца

Краткая запись — $A = (a_{ij})$

Множество всех матриц размера $m \times n$ с коэффициентами из \mathbb{R} (множество всех действительных чисел) — $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$ или $\text{Mat}_{n \times m}$

Определение 2. Две матрицы $A \in \text{Mat}_{n \times m}$ и $B \in \text{Mat}_{p \times q}$ называются *равными*, если $m = p$, $n = q$, и соответствующие элементы равны

Пример. $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$

1.2 Операции над матрицами

Для любых $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}$

• Сложение $A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$

• Умножение на скаляр $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Свойства суммы и произведения на скаляр

$\forall A, B, C \in \text{Mat}_{m \times n} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- 1) $A + B = B + A$ (коммутативность)
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность)
- 3) $A + 0 = 0 + A = A$, где

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ — нулевая матрица.}$$

- 4) $A + (-A) = 0$
 $-A = (-a_{ij})$ — противоположная матрица
- 5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- 6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- 7) $\lambda(\mu A) = \lambda(\mu A)$
- 8) $1A = A$

Упражнение на дом. Доказать эти свойства.

Замечание. Из свойств 1) – 8) следует, что $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$ является векторным пространством над \mathbb{R}

1.3 Пространство \mathbb{R}^n , его отождествление с матрицами-столбцами высоты n

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n\}$$

\mathbb{R} — числовая прямая

\mathbb{R}^2 — плоскость

\mathbb{R}^3 — трехмерное пространство

Договоримся отождествлять \mathbb{R}^n со столбцами высоты n

$$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{вектор столбец}$$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n \right\} = \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{R})$$

$$\left[x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right] \implies [x = y \iff x_i = y_i \forall i]$$

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_i := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

1.4 Транспонирование матриц, его простейшие свойства

$$A \in \text{Mat}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T \in \text{Mat}_{n \times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{транспонированная матрица.}$$

Свойства:

- 1) $(A^T)^T = A$
- 2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- 3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Пример. $(x_1 \quad \dots \quad x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = (x_1 \quad \dots \quad x_n)$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

1.5 Умножение матриц

Пусть $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}$

$A_{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ — i -я строка матрицы A

$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ — j -й столбец матрицы A

- 1) Частный случай: умножение строки на столбец той же длины

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1 \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

2) Общий случай:

A – матрица размера $m \times \underline{n}$

B – матрица размера $\underline{n} \times p$

$AB := C \in \text{Mat}_{m \times p}$, где

$$C_{ij} = A_{(i)} B^{(j)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B — условие согласованности матриц.

$$\text{Пример.} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} (x_1 \quad \dots \quad x_n) := \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_1 & \dots & x_n y_1 \\ x_1 y_2 & x_2 y_2 & \dots & x_n y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 y_n & x_2 y_n & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Пример.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2 Лекция 12.09.2019

2.1 Отступление о суммах

Пусть S_p, S_{p+1}, \dots, S_q – набор чисел.

Тогда, $\sum_{i=p}^q S_i := S_p + S_{p+1} + \dots + S_q$ – сумма по i от p до q

Например, $\sum_{i=1}^{100} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$

Свойства сумм:

1. $\lambda \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \lambda S_i$
2. $\sum_{i=1}^n (S_i + T_i) = \sum_{i=1}^n S_i + \sum_{i=1}^n T_i$
3. $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m S_{ij}$ – сумма всех элементов матрицы $S = (S_{ij})$

2.2 Основные свойства умножения матриц

Пусть $A \in \text{Mat}_{m \times n}$, $B \in \text{Mat}_{n \times p}$

1. $\underbrace{A(B+C)}_x = \underbrace{AB+AC}_y$ – левая дистрибутивность.

Доказательство.

$$\begin{aligned} x_{ij} &= A_{(i)}(B+C)^{(j)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} \\ &= A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

2. $(A+B)C = AC + BC$ – правая дистрибутивность, доказывается аналогично.
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
4. $(AB)C = A(BC)$ – ассоциативность.

Доказательство. $\underbrace{(AB)C}_u = x$, $A \underbrace{(BC)}_v = y$.

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^p a_{il}b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p (a_{il}b_{lk}c_{kj}) \\ &= \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n (a_{il}b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^p a_{il} \sum_{k=1}^n (b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^p a_{il}v_{lj} = y_{ij}. \end{aligned}$$

5. $\underbrace{(AB)^T}_x = \underbrace{B^T A^T}_y$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} x_{ij} &= [AB]_{ji} = A_{(j)}B^{(i)} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{ki} \cdot a_{jk} = B_{(i)}^T (A^T)^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

Умножение матриц не коммутативно.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 3. $A \in \text{Mat}_{n \times n}$ называется *квадратной матрицей* порядка n

Обозначение $M_n := \text{Mat}_{n \times n}$
 $A \in M_n$

2.3 Диагональные матрицы

Определение 4. Матрица $A \in M_n$ называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \implies A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Лемма 2.1. $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

1. $\forall B \in \text{Mat}_{n \times p} \implies AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$
2. $\forall B \in \text{Mat}_{m \times n} \implies BA = \begin{pmatrix} a_1 B^{(1)} & a_2 B^{(2)} & \dots & a_n B^{(n)} \end{pmatrix}$

Доказательство.

1. $[AB]_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i b_{ij}$
2. $[BA]_{ij} = \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ a_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = b_{ij} a_j$

■

2.4 Единичная матрица и её свойства

Определение 5. Матрица $E = E_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ называется *единичной матрицей* порядка n .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства:

1. $EA = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{n \times p}.$
2. $AE = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{p \times n}.$
3. $AE = EA = A \quad \forall A \in M_n.$

2.5 След квадратной матрицы и его свойства

Определение 6. Следом матрицы $A \in M_n$ называется число $tr A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Свойства:

1. $\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B.$
2. $\text{tr } \lambda A = \lambda \text{tr } A.$
3. $\text{tr } A^T = \text{tr } A.$
4. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$

$$\forall A \in \text{Mat}_{m \times n}, B \in \text{Mat}_{n \times m}.$$

Доказательство. $AB = x \in M_m$, $BA = y \in M_n$.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr} \, x &= \sum_{i=1}^m x_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} b_{ji}) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (b_{ji} a_{ij}) = \sum_{j=1}^n y_{jj} = \mathrm{tr} \, y.\end{aligned}$$

Пример. $A = (1, 2, 3), B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$tr(AB) = tr(1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6) = 32$$

$$\text{tr}(BA) = \text{tr} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$$

2.6 Системы линейных уравнений.

Линейное уравнение: $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$.

$a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ – коэффициенты.

x_1, x_2, \dots, x_n — НЕИЗВЕСТНЫЕ.

Система линейных уравнений (СЛУ):

[illegible]

т уравнений, n неизвестных

Определение 7.

1. *Решение одного уравнения* – это такой набор значений неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n , при подстановке которого в уравнение получаем тождество.
2. *Решение СЛУ* – такой набор значений неизвестных, который является решением каждого уравнения СЛУ.

Основная задача: решить СЛУ, т.е. найти все решения.

Пример. $n = m = 1$

$$ax = b, a, b \in \mathbb{R}, x - \text{неизвестная}$$

1. $a \neq 0 \implies x = \frac{b}{a}$ – единственное

- $$2. \ a = 0 \implies 0x = b$$

$$b \neq 0 \implies \text{решений нет.}$$
$$b = 0 \implies x - \text{любое} \implies \text{бесконечно много решений.}$$

2.6.1 Совместные и несовместные системы

Определение 8. СЛУ называется

- *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение,
- *несовместной*, если решений нет.

2.6.2 Матричная форма записи СЛУ

$$AX = B.$$

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}(R) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{— матрица коэффициентов}$$

$$B \in \text{Mat}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{— столбец правых частей}$$

$$X \in \text{Mat}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{— столбец неизвестных}$$

3 Лекция 14.09.2019

3.1 Расширенная матрицы системы линейных уравнений

$$Ax = b, A \in \text{Mat}_{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Полная информация о СЛУ содержится в её *расширенной матрице*.

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

3.2 Эквивалентные системы

Определение 9. Две системы уравнений от одних и тех же неизвестных называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

Пример. Рассмотрим несколько СЛУ

$$\text{А) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{В) } \begin{cases} 2x_1 = 1 \\ 2x_2 = 1 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{С) } x_1 + x_2 = 1 \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

А и В эквивалентны, так как обе имеют единственное решение $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

А и С не эквивалентны, так как С имеет бесконечно много решений.

3.3 Как решить СЛУ?

Идея: выполнить преобразование СЛУ, сохраняющее множество её решений, и привести её к такому виду, в котором СЛУ легко решается.

$$\text{Пример. } \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

3.3.1 Элементарные преобразования СЛУ и соответствующие преобразования строк её расширенной матрицы

| тип | СЛУ | расширенная матрица |
|-----|--|---------------------------------|
| 1. | К i -му уравнению прибавить j -ое, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ ($i \neq j$) | $\mathfrak{A}_1(i, j, \lambda)$ |
| 2. | Переставить i -е и j -е уравнения ($i \neq j$) | $\mathfrak{A}_2(i, j)$ |
| 3. | Умножить i -ое уравнение на $\lambda \neq 0$ | $\mathfrak{A}_3(i, \lambda)$ |

1. $\mathfrak{A}_1(i, j, \lambda)$: к i -ой строке прибавить j -ую, умноженную на λ (покомпонентно),

$$a_{ik} \mapsto a_{ik} + \lambda a_{jk} \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

$$b_i \mapsto b_i + \lambda b_j.$$

2. $\mathfrak{A}_2(i, j)$: переставить i -ую и j -ую строки.

3. $\mathfrak{A}_3(i, \lambda)$: умножить i -ю строку на λ (покомпонентно).

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ называются *элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы*.

3.3.2 Сохранение множества решений системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях

Лемма 3.1. Элементарные преобразования СЛУ не меняют множество решений

Доказательство. Пусть мы получили СЛУ(★★) из СЛУ(★) путем применения элементарных преобразований.

1. Всякое решение системы (★) является решением (★★).
2. (★) получается из (★★) путем элементарных преобразований.

$$\begin{array}{c|c} (\star) \rightarrow (\star\star) & (\star\star) \rightarrow (\star) \\ \hline \mathfrak{A}_1(i, j, \lambda) & \mathfrak{A}_1(i, j, -\lambda) \\ \mathfrak{A}_2(i, j) & \mathfrak{A}_2(i, j) \\ \mathfrak{A}_3(i, \lambda) & \mathfrak{A}_3(i, \frac{1}{\lambda}) \end{array}$$

Следовательно, всякое решение (★★) является решением (★) \implies множества решений совпадают. ■

3.4 Ступенчатые матрицы

Определение 10. Строка (a_1, a_2, \dots, a_n) называется *нулевой*, если $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ и *ненулевой* иначе ($\exists i : a_i \neq 0$).

Определение 11. *Ведущим элементом* ненулевой строки называется первый её ненулевой элемент.

Определение 12. Матрица $M \in \text{Mat}_{m \times n}$ называется *ступенчатой*, или имеет ступенчатый вид, если:

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк строго возрастают.
2. Все нулевые строки стоят в конце.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \diamond & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \diamond & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \diamond & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\diamond \neq 0$, $*$ — что угодно.

3.4.1 Улучшенный ступенчатый вид матрицы

Определение 13. М имеет *улучшенный ступенчатый вид*, если:

1. М имеет обычный ступенчатый вид.
2. Все ведущие элементы равны 1.
3. В одном столбце с любым ведущим элементом стоят только нули.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.2. 1) *Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду.*
2) *Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.*

Следствие. Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к **улучшенному** ступенчатому виду.

Доказательство.

1. Алгоритм. Если М - нулевая, то конец. Иначе:

Шаг 1: Ищем первый ненулевой столбец, пусть j — его номер.

Шаг 2: Переставляем строки, если нужно, добиваемся того, что $a_{1j} \neq 0$

Шаг 3: Зануляем элементы в этом столбце используя первую строку — $\mathfrak{A}_1(2, 1, -\frac{a_{2j}}{a_{1j}}), \dots, \mathfrak{A}_1(m, 1, -\frac{a_{mj}}{a_{1j}})$.

В результате $a_{ij} = 0$ при $i = 2, 3, \dots, m$.

Дальше повторяем все шаги для подматрицы M' (без первой строки и столбцов $1, \dots, j$).

2. Алгоритм. Пусть $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ — ведущие элементы ступенчатой матрицы.

Шаг 1: Выполняем $\Theta_3(1, \frac{1}{a_{1j_1}}), \dots, \Theta_3(r, \frac{1}{a_{rj_r}})$, в результате все ведущие элементы равны 1.

Шаг 2: Выполняем $\Theta_1(r-1, r, -a_{r-1, j_r}), \Theta_1(r-2, r, -a_{r-2, j_r}), \dots, \Theta_1(1, r, -a_{1, j_r})$. В результате все элементы над a_{rj_r} равны 0.

Аналогично обнуляем элементы над всеми остальными ведущими.

Итог: матрица имеет улучшенный ступенчатый вид. ■

3.5 Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения слева на подходящую матрицу

Всякое элементарное преобразование строк матрицы реализуется умножением как умножение слева на подходящую “элементарную матрицу”.

- $\Theta_1(i, j, \lambda)$: $A \mapsto U_1(i, j, \lambda)A$, где

$$U_1(i, j, \lambda) = \begin{matrix} & & & & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, на i -м j -м месте стоит λ , остальные элементы нули)

- $\Theta_2(i, j)$: $A \mapsto U_2(i, j)A$, где

$$U_2(i, j) = \begin{matrix} & i & & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ j & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i -го и j -го столбца (на i -м j -м и j -м i -м местах стоит 1, остальные нули)

- $\Theta_3(i, \lambda)$: $A \mapsto U_3(i, \lambda)A$, где

$$U_3(i, \lambda) = \begin{matrix} & i \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i -го столбца, там λ , остальные элементы нули)

Элементарные преобразования столбцов — умножение на соответствующую матрицу справа.

Упражнение на дом. Доказательство.

4 Лекция 19.09.2019

Дана СЛУ с расширенной матрицей $(A | b)$.

Было: элементарные преобразования строк в $(A | b)$ сохраняют множество решений.

4.1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Прямой ход метода Гаусса.

Выполняя элементарные преобразования строк в $(A|b)$, приведем A к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_{ij_1} & * & \dots & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2j_2} & * & \dots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{rj_r} & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Случай 1 $\exists i \geq r+1 : b_i \neq 0$ (в A есть нулевая строка с $b_i \neq 0$)

Тогда в новой СЛУ i -е уравнение $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i$, т.е. $0 = b_i \implies$ СЛУ несовместна.

Случай 2 либо $r = m$, либо $b_i = 0 \quad \forall i \geq r+1$

Выполняя элементарные преобразования строк приводим матрицу к улучшенному ступенчатому виду – обратный ход метода Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ называются *главными*, а остальные *свободными*, где j_i – индексы столбцов с ведущими элементами.

Подслучай 2.1 $r = n$, т.е. все неизвестные – главные

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_r = b_r \end{cases} \quad \text{— единственное решение.}$$

Подслучай 2.2 $r < n$, т.е. есть хотя бы одна свободная неизвестная.

Перенесем в каждом уравнении все члены со свободными неизвестными в правую часть, получаем выражения всех главных неизвестных через свободные, эти выражения называется *общим решением исходной СЛУ*.

Пример. Улучшенный ступенчатый вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Главные неизвестные: x_1, x_3 .

Свободные неизвестные: x_2, x_4 .

$x_2 = t_1, x_4 = t_2$ – параметры.

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = 4 + 2t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3t_1 - t_2 \\ t_1 \\ 4 + 2t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 4 + 2x_4 \end{cases}$$

Следствие. Всякая СЛУ с коэффициентами из \mathbb{R} имеет либо 0 решений, либо одно решение, либо бесконечно много решений.

4.2 Однородные системы линейных уравнений

Определение 14. СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если все её правые части равны 0. Расширенная матрица: $(A \mid 0)$.

Очевидный факт. Всякая ОСЛУ имеет нулевое решение ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$).

Следствие. Всякая ОСЛУ либо имеет ровно 1 решение (нулевое), либо бесконечно много решений.

Следствие. Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение (бесконечно много ненулевых решений).

Доказательство. В ступенчатом виде будет хотя бы одна свободная неизвестная. Придавая ей ненулевое значение, получим ненулевое решение. ■

4.3 Связь между множеством решений системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей однородной системы.

Частное решение СЛУ — это какое-то одно её решение.

Утверждение 4.1. Пусть $Ax = b$ — совместная СЛУ,
 x_0 — частное решение $Ax = b$,
 $S \subset \mathbb{R}^n$ — множество решений ОСЛУ $Ax = 0$,
 $L \subset \mathbb{R}^n$ — множество решений $Ax = b$.
Тогда, $L = x_0 + S$, где $x_0 + S = \{x_0 + v \mid v \in S\}$.

Доказательство.

1. Пусть $u \in L$ (u — решение $Ax = b$), положим $v = u - x_0$.
Тогда, $Av = A(u - x_0) = Au - Ax_0 = b - b = 0 \implies v \in S \implies L \subseteq x_0 + S$.
 2. Пусть $v \in S$ (v — решение $Ax = 0$), положим $u = x_0 + v$.
Тогда, $Au = A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b \implies u \in L \implies x_0 + S \subseteq L$.
- Значит, $x_0 + S = L$. ■

4.4 Матричные уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$, общий метод их решения

Два типа матричных уравнений:

1. $AX = B$
 A и B известны, X — неизвестная матрица.
2. $XA = C$
 A и C известны, X — неизвестная матрица.

Из второго типа получается первый транспонированием матриц: $XA = C \iff A^T X^T = B^T$, то есть достаточно уметь решать только уравнения первого типа.

$A \quad X = B$ — это уравнение равносильно системе

$n \times m \quad m \times p \quad n \times p$

$$\begin{cases} AX^{(1)} = B^{(1)} \\ AX^{(2)} = B^{(2)} \\ \vdots \\ AX^{(p)} = B^{(p)} \end{cases}$$

Этот набор СЛУ надо решать одновременно методом Гаусса.

Записываем матрицу $(A \mid B)$ и элементарными преобразованиями строк с ней приводим A к улучшенному ступенчатому виду.

Получаем $(A' \mid B')$, где A' имеет улучшенный ступенчатый вид.

Остается выписать общее решение для каждой СЛУ

$$\begin{cases} A'x^{(1)} = B'^{(1)} \\ A'x^{(2)} = B'^{(2)} \\ \vdots \\ A'x^{(p)} = B'^{(p)} \end{cases}$$

4.5 Обратные матрицы

Определение 15. Матрица $B \in M_n$ называется *обратной*, к A , если $AB = BA = E$.

Обозначение: $B = A^{-1}$.

Факты:

1. Если $\exists A^{-1}$, то она определена однозначно

Доказательство. Пусть B, B' – две матрицы, обратные к A . Тогда $B = B(AB') = (BA)B' = B'$. ■

2. Если $AB = E$ для некоторой $B \in M_n$, то $BA = E$ автоматически и тогда $B = A^{-1}$

Замечание. Доказывается на [Лекции 8](#).

Следствие. A^{-1} является решение матричного уравнения $AX = E$ (если решение существует).

4.6 Перестановки на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$

Определение 16. *Перестановкой (подстановкой)* на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ называется всякое биективное (взаимно однозначное) отображение множества $\{1, 2, \dots, n\}$ в себя.

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

S_n – множество всех перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$.

Запись:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ либо } \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \sigma(i_3) & \dots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь, $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$.

Замечание. Количество всех перестановок длины n : $|S_n| = n!$

5 Лекция 23.09.2019

5.1 Инверсии в перестановке

Обозначение: S_n – множество всех перестановок из n элементов.

Пусть $\sigma \in S_n$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$

Определение 17. Пара $\{i, j\}$ (неупорядоченная) образует *инверсию* в σ , если числа $i - j$ и $\sigma(i) - \sigma(j)$ имеют разный знак (то есть либо $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$, либо $i > j$ и $\sigma(i) < \sigma(j)$).

5.2 Знак и чётность перестановки

Определение 18. *Знак* перестановки σ – это число $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\langle \text{число инверсий в } \sigma \rangle}$.

Определение 19. Перестановка σ называется *чётной*, если $\text{sgn}(\sigma) = 1$ (чётное количество инверсий), и *нечётной* если $\text{sgn}(\sigma) = -1$ (нечётное количество инверсий).

Примеры.

| σ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ |
|----------------------|--|--|
| число инверсий | 0 | 1 |
| $\text{sgn}(\sigma)$ | 1 | -1 |
| чётность | чётная | нечётная |

| σ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ |
|----------------------|--|--|--|--|--|--|
| число инверсий | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| $\text{sgn}(\sigma)$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| чётность | чётная | нечётная | чётная | нечётная | чётная | нечётная |

Замечание. число инверсий в $\sigma \in S_n \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, равенство достигается при $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

5.3 Произведение перестановок

Определение 20. *Произведением* (или *композицией*) двух перестановок $\sigma, \rho \in S_n$ называется такая перестановка $\sigma\rho \in S_n$, что $(\sigma\rho)(x) := \sigma(\rho(x)) \quad \forall x \in \{1, \dots, n\}$.

Пример.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Видно, что $\sigma\rho \neq \rho\sigma \implies$ произведение перестановок не обладает свойством коммутативности.

5.4 Ассоциативность произведения перестановок

Утверждение 5.1. Умножение перестановок ассоциативно, то есть $\sigma(\tau\pi) = (\sigma\tau)\pi \quad \forall \sigma, \tau, \pi \in S_n$.

Доказательство. $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ имеем:

$$[\sigma(\tau\pi)](i) = \sigma((\tau\pi)(i)) = \sigma(\tau(\pi(i))).$$

$$[(\sigma\tau)\pi](i) = (\sigma\tau)(\pi(i)) = \sigma(\tau(\pi(i))).$$

■

5.5 Тожественная перестановка

Определение 21. Перестановка $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n$ называется *тождественной* перестановкой.

Свойства:

$$\forall \sigma \in S_n \quad id \cdot \sigma = \sigma \cdot id = \sigma.$$

$$\text{sgn}(id) = 1.$$

5.6 Обратная перестановка и её знак

Определение 22. $\sigma \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \implies$ подстановка $\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ называется *обратной* к σ перестановкой.

Свойства: $\sigma \cdot \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \cdot \sigma$

5.7 Теорема о знаке произведения перестановок

Теорема 5.2. $\sigma, \rho \in S_n \implies \text{sgn}(\sigma\rho) = \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \rho$.

Доказательство. Для каждой пары $i < j$ введем следующие числа:

$$\alpha(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \text{ образует инверсию в } \rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\beta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\rho(i), \rho(j)\} \text{ образует инверсию в } \sigma \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\gamma(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \text{ образует инверсию в } \sigma\rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\text{“число инверсий в } \rho\text{”} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha(i, j)$$

$$\text{“число инверсий в } \sigma\rho\text{”} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \gamma(i, j)$$

$$\text{“число инверсий в } \sigma\text{”} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta(i, j) - \text{Почему?}$$

Когда $\{i, j\}$ пробегает все неупорядоченные пары в $\{1, 2, \dots, n\}$, пара $\{\rho(i), \rho(j)\}$ тоже пробегает все неупорядоченные пары в $\{1, 2, \dots, n\}$.

Зависимость $\gamma(i, j)$ от $\alpha(i, j)$ и $\beta(i, j)$:

| | | | | |
|----------------|---|---|---|---|
| $\alpha(i, j)$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\beta(i, j)$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\gamma(i, j)$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

Вывод: $\alpha(i, j) + \beta(i, j) \equiv \gamma(i, j) \pmod{2}$.

Тогда $\text{sgn}(\sigma\rho) = (-1)^{\sum \gamma(i, j)} = (-1)^{\sum \beta(i, j) + \sum \alpha(i, j)} = (-1)^{\sum \alpha(i, j)} \cdot (-1)^{\sum \beta(i, j)} = \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \rho$. ■

Следствие. $\sigma \in S_n \implies \text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$.

Доказательство. $\sigma\sigma^{-1} = id \implies \text{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \text{sgn}(id) \implies \text{sgn} \sigma \text{sgn} \sigma^{-1} = 1 \implies \text{sgn} \sigma = \text{sgn} \sigma^{-1}$. ■

Упражнение на дом: Показать, что число инверсий в σ^{-1} такое же, как в σ .

5.8 Транспозиции, знак транспозиции

Пусть $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Рассмотрим перестановку $\tau_{ij} \in S_n$, такую что

$$\tau_{ij}(i) = j.$$

$$\tau_{ij}(j) = i.$$

$$\tau_{ij}(k) = k \quad \forall k \neq i, j.$$

Определение 23. Перестановки вида τ_{ij} называются *транспозициями*.

Замечание. τ – траспозиция $\implies \tau^2 = id, \tau^{-1} = \tau$.

Определение 24. Перестановки вида $\tau_{i, i+1}$ называются *элементарными траспозициями*.

Лемма 5.3. $\tau \in S_n$ – транспозиция $\implies \text{sgn}(\tau) = -1$.

Доказательство. Пусть $\tau = \tau_{ij}$, можем считать, что $i < j$.

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Посчитаем инверсии:

$\{i, j\}$

$\{i, k\}$ при $i+1 \leq k \leq j-1$, всего $= j-i-1$

$\{k, j\}$ при $i+1 \leq k \leq j-1$, всего $= j-i-1$

Значит, всего инверсий $2(j-i-1) + 1 \equiv 1 \pmod{2} \implies \text{sgn}(\tau) = -1$. ■

Следствие. При $n \geq 2$ отображение $\sigma \rightarrow \sigma\tau_{12}$ является биекцией между множеством четных перестановок в S_n и множеством нечетных перестановок в S_n .

Следствие. При $n \geq 2$ количество нечетных перестановок в S_n равно количеству четных перестановок в S_n и равно $\frac{n!}{2}$.

Теорема 5.4. Всякая перестановка $\sigma \in S_n$ может быть разложена в произведение конечного числа элементарных транспозиций.

Доказательство.

$$\sigma \in S_n := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\sigma\tau_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

При умножении справа на $\tau_{i,i+1}$ в нижней строке меняются местами i -ый и $(i+1)$ -ый элементы.

Тогда, домножив σ на подходящее произведение $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k$ элементарных транспозиций, можем добиться, что нижняя строка есть $(1, 2, \dots, n) \implies \sigma\tau_1\tau_2 \dots \tau_k = id$.

Теперь, домножая справа на $\tau_k\tau_{k-1} \dots \tau_1$, получим $\sigma = \tau_k\tau_{k-1} \dots \tau_1$. ■

5.9 Определитель квадратной матрицы

Определение 25. Определителем матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

($\sum_{\sigma \in S_n}$ – сумма по всем перестановкам)

Другие обозначения: $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

5.10 Определители порядков 2 и 3

• $n = 2$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

• $n = 3$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

6 Лекция 26.09.2019

Напомним что такое определитель:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \quad (\star)$$

Замечание. Каждое слагаемое содержит ровно 1 элемент из каждой строки и ровно 1 элемент из каждого столбца.

6.1 Свойства определителей

Свойство T $\det A = \det A^T$.

Доказательство. Пусть $B = A^T$, тогда $b_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{aligned} \det A^T = \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)^{-1}} a_{2\sigma(2)^{-1}} \dots a_{n\sigma(n)^{-1}} \quad // \text{ замена } \sigma^{-1} = \rho // \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \text{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} = \det A. \end{aligned}$$

Свойство 0 Если в A есть нулевая строка или нулевой столбец, то $\det A = 0$.

Доказательство. В связи со **свойством T** можно доказать только для строк.

Так как в каждом слагаемом (\star) присутствует элемент из каждой строки, то все слагаемые в (\star) равны 0 $\implies \det A = 0$. ■

Свойство 1 Если в A все элементы одной строки или одного столбца домножить на одно и то же число λ , то $\det A$ тоже умножается на λ .

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda * & \lambda * & \lambda * & \lambda * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

Доказательство. В связи со **свойством T** можно доказать только для строк.

$A_{(i)} \rightarrow \lambda A_{(i)} \implies a_{ij} \rightarrow \lambda a_{ij} \forall j \implies$ в (\star) каждое слагаемое умножается на $\lambda \implies \det A$ умножается на λ . ■

Свойство 2 Если $A_{(i)} = A_{(i)}^1 + A_{(i)}^2$, то $\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)}^1 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)}^2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Аналогично, если $A^{(j)} = A_1^{(j)} + A_2^{(j)}$, то $\det A = \det(A^{(1)} \dots A_1^{(j)} \dots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \dots A_2^{(j)} \dots A^{(n)})$.

Доказательство. В связи со **свойством T** можно доказать только для строк.

Пусть $A_{(i)}^1 = (a'_{i1} a'_{i2} \dots a'_{in})$, $A_{(i)}^2 = (a''_{i1} a''_{i2} \dots a''_{in}) \implies a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$.

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \det A_1 + \det A_2. \end{aligned}$$

Свойство 3 Если в A поменять местами две строки или два столбца, то $\det A$ меняет знак.

Доказательство. В связи со **свойством Т** можно доказать только для строк.

Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n$, $B = (b_{ij}) \in M_n$ – матрица, полученная из A перестановкой p -ой и q -ой строк.

Так же, $\tau = \tau_{pq}$.

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \neq p, q \\ a_{qj}, & \text{если } i = p \\ a_{pj}, & \text{если } i = q \end{cases}$$

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} \implies b_{i\sigma(i)} = a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(i),(\sigma\tau\tau)(i)}$$

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\tau(1),\sigma(1)} \cdot a_{\tau(2),\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n),\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\tau(1),(\sigma\tau\tau)(1)} \cdot a_{\tau(2),(\sigma\tau\tau)(2)} \cdots a_{\tau(n),(\sigma\tau\tau)(n)} \\ &\quad // \text{ уберем } \tau(i), \text{ переупорядочив элементы в произведении } // \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)} \cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)} \cdots a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\ &= - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)} \cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)} \cdots a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\ &\quad // \text{ замена } \rho = \sigma\tau // \\ &= - \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) \cdot a_{1,\rho(1)} \cdot a_{2,\rho(2)} \cdots a_{n,\rho(n)} \\ &= - \det A. \end{aligned}$$

Свойство 4 Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженный на скаляр, то $\det A$ не изменится.

Доказательство. В связи со **свойством Т** можно доказать только для строк.

$$A \rightarrow A' = \begin{pmatrix} \dots \\ A_{(i)} + \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda 0 = |A|.$$

Свойство 5 Если в A есть две одинаковые строки (столбца), то $\det A = 0$.

Доказательство. В связи со **свойством Т** можно доказать только для строк.

При перестановке двух одинаковых строк (столбцов):

– A не изменится $\implies \det A$ не изменится

– по **свойству 3**: $\det A$ меняет знак

Значит, $\det A = -\det A \implies \det A = 0$.

Определение 26. Матрица называется *верхнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, *нижнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{верхнетреугольная}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{нижнетреугольная}$$

Замечание. Всякая ступенчатая квадратная матрица верхнетреугольна.

Свойство 6 Если A верхнетреугольная или нижнетреугольная, то $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

Доказательство. В связи со [свойством Т](#) можно доказать только для строк.

Выделим в [\(★\)](#) слагаемые, которые могут быть отличны от нуля.

$$\begin{aligned} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n,\sigma(n)} &\neq 0 \\ \implies a_{n,\sigma(n)} &\neq 0 \implies \sigma(n) = n. \\ \implies a_{n-1,\sigma(n-1)} &\neq 0 \implies \sigma(n-1) \in \{n-1, n\}, \end{aligned}$$

но n уже занято, значит $\sigma(n-1) = n-1$, и так далее.

Рассуждая аналогично, получаем $\sigma(k) = k \ \forall k \implies \sigma = id$ – это единственное слагаемое в [\(★\)](#), которое может быть не равно 0.

$$\operatorname{sgn}(id) = +1 \implies \det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

■

Следствие. $\det \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 a_2 \dots a_n$.

Следствие. $\det E = 1$.

6.2 Поведение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов)

$\Theta_1(i, j, \lambda)$: $\det A$ не меняется.

$\Theta_2(i, j)$: $\det A$ меняет знак.

$\Theta_3(i, \lambda)$: $\det A$ умножается на λ .

Алгоритм. Элементарными преобразованиями строк A приводится к ступенчатому (\rightarrow верхнетреугольному) виду, в котором $\det A$ легко считается.

7 Лекция 30.09.2019

7.1 Определитель с углом нулей

Предложение.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array} \right) \text{ или } A = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array} \right), \quad P \in M_k, \quad R \in M_{n-k} \implies \det A = \det P \det R.$$

Матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array} \right)$$

НЕ матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array} \right)$$

Доказательство. В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

1. Элементарными преобразованиями строк в A , приведем $(P \mid Q)$ к виду $(P' \mid Q')$, в котором P' имеет ступенчатый вид. При этом $\det A$ и $\det P$ умножаются на один и тот же скаляр $\alpha \neq 0$.
2. Элементарными преобразованиями строк в A , приведем $(0 \mid R)$ к виду $(0 \mid R')$, в котором R' имеет ступенчатый вид. При этом $\det A$ и $\det R$ умножаются на один и тот же скаляр $\beta \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} - \text{верхнетреугольная} \implies \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R'.$$

$$\alpha\beta \det A = \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R' = (\alpha \det P)(\beta \det R) = \alpha\beta \det P \det R. \quad \blacksquare$$

7.2 Определитель произведения матриц

Теорема 7.1. $A, B \in M_n \implies \det(AB) = \det A \det B$.

Доказательство. Выполним с матрицей A одно элементарное преобразование строк, получим матрицу A' .

$$A \rightsquigarrow A' = UA.$$

Такое же преобразование строк с AB .

$$AB \rightsquigarrow U(AB) = (UA)B = A'B.$$

Таким образом, сначала выполнив элементарное преобразование и домножив на матрицу B , либо домножив на B и затем применив элементарное преобразование, получим тот же результат.

Тогда, цепочка элементарных преобразований строк:

$$A \rightsquigarrow C - \text{улучшенный ступенчатый вид.}$$

Так же цепочка для AB :

$$AB \rightsquigarrow CB.$$

При этом, $\det A$ и $\det AB$ умножились на один и тот же скаляр $\alpha \neq 0$

$$\det C = \alpha \det A.$$

$$\det CB = \alpha \det AB.$$

Случай 1 Последняя строка состоит из нулей:

$$\begin{aligned} C_{(n)} &= (0 \dots 0) \\ \implies [CB]_{(n)} &= C_{(n)}B = (0 \dots 0) \\ \implies \det CB &= 0 = 0 \cdot \det B = \det C \det B. \end{aligned}$$

Случай 2 Последняя строка ненулевая:

$$C_{(n)} \implies C = E,$$

так как матрица C имеет улучшенный ступенчатый вид.

Значит,

$$\det CB = \det B = 1 \cdot \det B = \det C \cdot \det B.$$

Из этих двух случаев следует, что $\det CB = \det C \det B$.

Сокращая α получаем,

$$\det CB = \det C \det B \implies \det AB = \det A \det B. \quad \blacksquare$$

Замечание. Пусть $A \in M_n$, $A_{\text{ул}}$ – её улучшенный ступенчатый вид.

$$\det A \neq 0 \iff A_{\text{ул}} = E.$$

7.3 Дополнительные миноры и алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы

Определение 27. *Дополнительным минором* к элементу a_{ij} называется определитель $(n-1) \times (n-1)$ матрицы, получающейся из A вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Обозначение: \overline{M}_{ij} .

Определение 28. *Алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_{ij}$.

7.4 Лемма об определителе матрицы, содержащей ровно один ненулевой элемент в некоторой строке

Лемма 7.2. Пусть $a_{ik} = 0$ при всех $k \neq j$. Тогда $\det A = a_{ij} \cdot A_{ij}$.

Доказательство.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} P & U & Q \\ \hline 0 \dots 0 & a_{ij} & 0 \dots 0 \\ \hline R & V & S \end{array} \right).$$

Переставляя соседние строки $i-1$ раз, вытолкнем i -ю строку вверх.

$$A' = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 \dots 0 & a_{ij} & 0 \dots 0 \\ \hline P & U & Q \\ \hline R & V & S \end{array} \right)$$

Переставляя соседние столбцы $j-1$ раз, переместим j -й столбец на первое место.

$$A'' = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{ij} & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \hline U & P & Q \\ \hline V & R & S \end{array} \right)$$

$$\det A'' = a_{ij} \det \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array} \right) = a_{ij} \overline{M}_{ij}.$$

$$\implies \det A = (-1)^{i-1+j-1} \det A'' = (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}_{ij} = a_{ij} A_{ij}. \quad \blacksquare$$

7.5 Разложение определителя по строке (столбцу)

Теорема 7.3. При любом фиксированном $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \text{ — разложение по } i\text{-й строке.}$$

Аналогично, для любого фиксированного $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \text{ — разложение по } j\text{-у столбцу.}$$

Доказательство. В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

$$A_{(i)} = (a_{i1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_{in}).$$

Требуемое следует из [свойства 2](#) определителей и леммы. \blacksquare

7.6 Лемма о фальшивом разложении определителя

Лемма 7.4.

1. При любых $i, k \in \{1, 2, \dots, n\} : i \neq k \implies \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0$,
2. При любых $j, k \in \{1, 2, \dots, n\} : j \neq k \implies \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0$.

Доказательство. В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

Пусть $B \in M_n$ – матрица, полученная из A заменой k -й строки на i -ю.

$$B = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

В B есть две одинаковые строки $\implies \det B = 0$.

Разлагая $\det B$ по k -й строке, получаем

$$\det B = \sum_{j=1}^n b_{kj} B_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}.$$

■

7.7 Обратная матрица, её единственность

Пусть дана $A \in M_n$.

Определение 29. Матрица $B \in M_n$ называется *обратной* к A , если $AB = BA = E$.

Обозначение: A^{-1} .

Лемма 7.5. Если $\exists A^{-1}$, то она единственна.

Доказательство. Пусть $B, C \in M_n$ такие, что $AB = BA = E$ и $AC = CA = E$. Тогда,

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C \implies B = C.$$

■

7.8 Невырожденные матрицы

Определение 30. Матрица $A \in M_n$ называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, и *вырожденной* иначе (то есть $\det A = 0$).

7.9 Определитель обратной матрицы

Лемма 7.6. Если $\exists A^{-1}$, то $\det A \neq 0$.

Доказательство. $AA^{-1} = E \implies \det(AA^{-1}) = \det E \implies \det A \det(A^{-1}) = 1$.

■

7.10 Присоединённая матрица

Определение 31. Присоединённой к A матрицей называется матрица $\hat{A} = (A_{ij})^T$.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

7.11 Критерий обратимости квадратной матрицы, явная формула для обратной матрицы

Теорема 7.7. A обратима (то есть $\exists A^{-1}$) $\iff A$ невырождена ($\det A \neq 0$), при этом $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}$.

Доказательство. Утверждение в одну сторону следует из леммы 2.

Пусть $\det A \neq 0$. Покажем, что $\frac{1}{\det A} \widehat{A} = A^{-1}$. Для этого достаточно доказать, что $A\widehat{A} = \widehat{A}A = \det A \cdot E$.

Для $X = A\widehat{A}$ имеем

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} [\widehat{A}]_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \det A, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

Для $Y = \widehat{A}A$ имеем

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^n [\widehat{A}]_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ki} a_{kj} = \begin{cases} \det A, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

■

8 Лекция 2.11.2019

8.1 Следствия из критерия обратимости квадратной матрицы

Следствие. Если $AB = E$, то $BA = E$ (и тогда $A = B^{-1}$, $B = A^{-1}$).

Доказательство.

$$\begin{aligned} AB = E &\implies \det A \det B = 1 \implies \det A \neq 0 \implies \exists A^{-1}. \\ BA = EBA &= (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}A = E. \end{aligned}$$

Следствие. $A, B \in M_n \implies AB$ обратима \iff обе A, B обратимы. При этом $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказательство. Эквивалентность (\iff) следует из условия $\det AB = \det A \det B$.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E.$$

8.2 Формулы Крамера

Пусть есть СЛУ $Ax = b(\star)$, $A \in M_n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Также, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i = (A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$.

Теорема 8.1. Если $\det A \neq 0$, то СЛУ (\star) имеет единственное решение и его можно найти по формулам:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Доказательство. $\det A \neq 0 \implies \exists A^{-1} \implies (\star) \iff x = A^{-1}b$ – единственное решение.

$$b = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_n A^{(n)}.$$

$$\begin{aligned} \det A_i &= \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &= x_1 \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(1)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &\quad + x_2 \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(2)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + x_n \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &= x_i \det A \quad // \text{ Все слагаемые кроме } i\text{-го равны } 0. \end{aligned}$$

8.3 Понятие поля.

Определение 32. *Поле* называется множество F , на котором заданы две операции “сложение” $((a, b) \rightarrow a + b)$ и “умножение” $((a, b) \rightarrow a \cdot b)$, причем $\forall a, b, c \in F$ выполнены следующие условия:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$ (нулевой элемент)
4. $\exists (-a) \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$ (противоположный элемент)
↑ абелева группа ↑
5. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность)
6. $ab = ba$ (коммутативность умножения)
7. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
8. $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1a = a1 = a$ (единица)
9. Если $a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in F : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (обратный элемент)

8.4 Простейшие примеры.

\mathbb{Q} – Рациональные числа.

\mathbb{R} – Действительные числа.

$F_2 = \{0, 1\}$, сложение и умножение по модулю 2.

8.5 Построение поля комплексных чисел.

Ближайшая цель — построить поле \mathbb{C} комплексных чисел.

Неформально, \mathbb{C} — это наименьшее поле со следующими свойствами:

1. $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.
2. Многочлен $x^2 + 1$ имеет корень, то есть $\exists i : i^2 = -1$.

8.5.1 Формальная конструкция поля \mathbb{C}

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

Неформально, каждой такой паре (a, b) соответствует комплексное число $a + bi$:

- $(a, b) \iff a + bi$
- $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2 \underbrace{i^2}_{=-1} = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

8.5.2 Проверка аксиом

1, 2. Очевидны.

3. $0 = (0, 0)$.

4. $-(a, b) = (-a, -b)$.

5. Дистрибутивность

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1i)((a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)) &= (a_1 + b_1i)((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i) \\&= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3)) + (a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3))i \\&= a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 + (a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3)i \\&= ((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i) + ((a_1a_3 + b_1b_3) + (b_1a_3 + a_1b_3)i) \\&= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(a_3 + b_3i)\end{aligned}$$

6. Коммутативность умножения — из явного вида формулы.

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

7. Ассоциативность умножения

$$\begin{aligned}(a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3) &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)(a_3, b_3) \\&= (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) \\&= (a_1, b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) \\&= (a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3).\end{aligned}$$

8. $1 = (1, 0)$.

9. $(a, b) \neq 0 \implies a^2 + b^2 \neq 0$. Тогда, $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.

$$(a, b) \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) = (1, 0).$$

Итак, \mathbb{C} — поле.

Проверка свойств

1. $a \in \mathbb{R} \iff (a, 0) \in \mathbb{C}$.

$$a + b \iff (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0).$$

$$ab \iff (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

Значит, \mathbb{R} отождествляется в \mathbb{C} .

2. $i = (0, 1) \implies i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

8.6 Алгебраическая форма комплексного числа, его действительная и мнимая части.

Определение 33. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$ называется его *алгебраической формой*. Число i называется *мнимой единицей*.

$a =: \operatorname{Re}(z)$ – действительная часть числа z .

$b =: \operatorname{Im}(z)$ – мнимая часть числа z .

Числа вида bi , где $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, называются *чисто мнимыми*.

8.7 Комплексное сопряжение.

Определение 34. Число $\bar{z} := a - bi$ называется *комплексно сопряженным* к числу $z = a + bi$.

Операция $z \rightarrow \bar{z}$ называется *комплексным сопряжением*.

8.7.1 Свойства комплексного сопряжения

- $\overline{\bar{z}} = z$.
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.
- $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

Доказательство.

- $\bar{\bar{z}} = \overline{a + bi} = \overline{a - bi} = a + bi = z$.
- $\overline{z + w} = \overline{(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = (a_1 - b_1i) + (a_2 - b_2i) = \bar{z} + \bar{w}$.
- $\overline{z \cdot w} = \overline{(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i)} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i} = (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i = \bar{z}\bar{w}$. ■

8.8 Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация сложения и сопряжения в этой модели.

Числу $z = a + bi$ соответствует точка (или вектор) на плоскости \mathbb{R}^2 с координатами (a, b) . Сумме $z + w$ соответствует сумма соответствующих векторов. Сопряжению $z \rightarrow \bar{z}$ – это отражение z относительно действительной оси.

9 Лекция 7.11.2019

9.1 Модуль комплексного числа, его свойства

Определение 35. Число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем числа* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (то есть длина соответствующего вектора).

Свойства

1. $|z| \geq 0$, причем $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (неравенство треугольника).

Пусть $z = a + bi$, $w = c + di$.

$$\begin{aligned}|z + w| &\leq |z| + |w| \\ \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} &\leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \\ (a+c)^2 + (b+d)^2 &\leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ ac + bd &\leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ ac + bd &\leq \sqrt{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2} \\ (ac)^2 + (bd)^2 + 2acbd &\leq (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 \\ 2acbd &\leq (ad)^2 + (bc)^2 \\ 0 &\leq (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd \\ 0 &\leq (ad - bc)^2\end{aligned}$$

3. $z\bar{z} = |z|^2$.
 $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$
4. $|zw| = |z||w|$.
 $|zw|^2 = (zw) \cdot (\overline{zw}) = z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} = |z|^2 |w|^2$.

Замечание. Из 3) следует, что для $\forall z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, то есть $(a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$

9.2 Аргумент комплексного числа

Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

Тогда, $z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i \right)$, при этом $\left(\frac{a}{|z|} \right)^2 + \left(\frac{b}{|z|} \right)^2 = 1$

Значит, $\frac{a}{|z|}$ и $\frac{b}{|z|}$ являются синусом и косинусом некоторого угла.

Определение 36. Аргументом числа $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ называется число $\varphi \in \mathbb{R}$, такое что

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

В геометрических терминах, φ есть угол между осью Ox и соответствующим вектором.

Замечание. При $z \neq 0$, аргумент определен с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание. При $z = 0$, удобно считать что любое φ является аргументом.

9.3 Тригонометрическая форма комплексного числа

$Arg(z) :=$ множество всех аргументов числа z .

$arg(z) :=$ единственное значение из $Arg(z)$, лежащее в $[0; 2\pi)$.

$Arg(z) = arg(z) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$Arg(z) = \{ \varphi \in \mathbb{R} \mid \cos \varphi = \frac{a}{|z|}, \sin \varphi = \frac{b}{|z|} \}$

Тогда, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i \right) = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $\varphi \in Arg(z)$.

Определение 37. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называется его *тригонометрической формой*.

9.4 Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Предложение. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, тогда

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= |z_1| |z_2| ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

■

Следствие. В условиях предложения, предположим, что $z_2 \neq 0$.

$$\text{Тогда } \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

$$\text{В частности, } \frac{1}{|z_2|} (\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2)) = \frac{1}{|z_2|} (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

9.5 Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра

Следствие. Пусть $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) - \text{формула Муавра.}$$

Замечание. В комплексном анализе функция $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow e^x$, доопределяется до функции $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \rightarrow e^z$ с сохранением всех привычных свойств.

Доказывается $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $\forall \varphi \in \mathbb{C}$ — формула Эйлера.

Тогда $\forall z \in \mathbb{C}$ представляется в виде $z = |z|e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \text{Arg}(z)$ — *показательная форма*.

9.6 Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Определение 38. Корнем степени n (или корнем n -й степени) из числа z называется всякое число $w \in \mathbb{C}$, что $w^n = z$.

Положим $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$.

Опишем множество $\sqrt[n]{z}$.

$$w = \sqrt[n]{z} \implies w^n = z \implies |w|^n = |z|.$$

$$\text{Если } z = 0, \text{ то } |z| = 0 \implies |w| = 0 \implies w = 0 \implies \sqrt[n]{0} = \{0\}.$$

Далее считаем, что $z \neq 0$.

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$z = w^n = |w|^n (\cos(n\psi) + i \sin(n\psi))$$

Отсюда,

$$z = w^n \iff \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

С точностью до $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, получается ровно n различных значений для ψ , при $k = 0, 1, \dots, n-1$.

В результате $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$, где $w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$

Замечание. Числа w_0, w_1, \dots, w_{n-1} лежат в вершинах правильного n -угольника с центром в начале координат.

Примеры.

$$\sqrt{1} = \{\pm 1\}$$

$$\sqrt{-1} = \{\pm i\}$$

$$\sqrt[3]{1} = \{1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

$$\sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\}$$

9.7 Основная теорема алгебры комплексных чисел (без доказательства)

$$\sqrt[n]{z} = \{ \text{корни многочлена } x^n - z \}.$$

Теорема 9.1. Всякий многочлен степени ≥ 1 с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Пусть $f = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, тогда $\exists c \in \mathbb{C} : f(c) = 0$.

Замечание. Свойство поля \mathbb{C} , сформулированное в теореме, называется *алгебраической замкнутостью*.

9.8 Деление многочленов с остатком

Пусть \mathbb{F} – поле.

$\mathbb{F}[x] :=$ все многочлены от переменной x с коэффициентами из \mathbb{F} .

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0 \implies \deg f = n$.

$\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.

Определение 39. Многочлен $f(x) \in F[x]$ *делится* на $g(x) \in F[x]$, если $\exists h(x) \in F[x]$, такой что $f(x) = g(x)h(x)$.

Если $f(x)$ не делится на $g(x)$, то можно поделить с остатком.

Предложение (деление с остатком). Если $f(x), g(x) \in F[x], g(x) \neq 0$, то $\exists! q(x), r(x) \in F[x]$, такие что

$$\begin{cases} f(x) = q(x)g(x) + r(x) \\ \text{либо } r(x) = 0, \text{ либо } \deg r(x) < \deg g(x) \end{cases}$$

Пример. $f(x) = x^3 - 2x, g(x) = x + 1$.

$$f(x) = (x^2 - x - 1)(x + 1) + 1, q(x) = (x^2 - x - 1), r(x) = 1.$$

9.9 Теорема Безу

Частный случай деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ с остатком: $g(x) = x - c, \deg g(x) = 1$:

$f(x) = q(x)(x - c) + r(x)$, где либо $r(x) = 0$, либо $\deg r(x) < \deg g(x) = 1$

Значит, $r(x) \equiv r = \text{const} \in F$.

Теорема 9.2. $r = f(c)$.

Доказательство. Подставить $x = c$ в $f(x) = (x - c)g(x) + r(x)$. ■

Следствие. Элемент $c \in F$ является корнем многочлена $f(x) \in F[x]$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $(x - c)$.

9.10 Кратность корня многочлена

Определение 40. *Кратностью* корня $c \in F$ многочлена $f(x)$ называется наибольшее целое k такое что, $f(x)$ делится на $(x - c)^k$.

9.11 Утверждение о том, что всякий многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней с учётом кратностей

Следствие. Пусть $f(z) \in F[z], \deg f = n \geq 1$.

$$f(x) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0.$$

c_1, \dots, c_s – корни f, k_1, \dots, k_s – их кратности.

Любой многочлен с комплексными коэффициентами разлагается в произведение линейных множителей:

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_s)^{k_s}.$$

Иными словами, $f(z)$ имеет ровно n корней с учетом кратностей.

10 Лекция 14.11.2019

10.1 Векторные пространства, простейшие следствия из аксиом

10.1.1 Определение векторного пространства

Фиксируем поле F (можно считать, что $F = \mathbb{R}$ или \mathbb{C})

Определение 41. Множество V называется *векторным (линейным) пространством* над полем F , если на V заданы две операции

- “сложение”: $V \times V \rightarrow V, (x, y) \mapsto x + y$.
- “умножение на скаляр”: $F \times V \rightarrow V, (\alpha \in F, x \in V) \mapsto \alpha x$.

а также, $\forall x, y, z \in V$ и $\alpha, \beta \in F$ выполнены следующие условия (называются *аксиомами векторного пространства*):

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. $\exists \vec{0} \in V : x + \vec{0} = \vec{0} + x = x$ (нулевой элемент).
4. $\exists -x : -x + x = x + (-x) = \vec{0}$ (противоположный элемент).
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
8. $1 \cdot x = x$.

Определение 42. Элементы векторного пространства называются (абстрактными) *векторами*.

Пример.

1. \mathbb{R} над \mathbb{R} (или F над F).
2. Пространство \mathbb{R}^n над \mathbb{R} (или F^n над F) реализованное как пространство столбцов или строк длины n .
3. $\text{Mat}_{m \times n}(F)$.
4. $F[x]$ – многочлены то переменной x с коэффициентами в \mathbb{R} .
5. Пространство функций на множестве M с значениями в F :
 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$
 - сложение $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$.
 - умножение на скаляр $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$.

– это векторное пространство над F .

Например, множество всех функций $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

10.1.2 Простейшие следствия из аксиом

$\forall \alpha \in F, x \in V$.

1. Элемент $\vec{0}$ единственный.

Если $\vec{0}'$ – другой такой ноль, то $\vec{0}' = \vec{0}' + \vec{0} = \vec{0}$.

2. Элемент $-x$ единственный.

Если $(-x)'$ – другой такой противоположный элемент, то

$$(-x)' = (-x)' + \vec{0} = (-x)' + (x + (-x)) = ((-x)' + x) + (-x) = \vec{0} + (-x) = -x.$$

3. $\alpha \vec{0} = \vec{0}$.

Рассмотрим равенство $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$. Домножив на α получаем $\alpha(\vec{0} + \vec{0}) = \alpha \vec{0}$.

Раскроем скобки, $\alpha \vec{0} + \alpha \vec{0} = \alpha \vec{0}$.

Прибавим к обоим частям обратный элемент к $\alpha \vec{0}$, получим $\alpha \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \implies \alpha \vec{0} = \vec{0}$.

4. $\alpha(-x) = -(\alpha x)$.

Рассмотрим равенство $x + (-x) = \vec{0}$.

$$x + (-x) = \vec{0} \implies ax + a(-x) = 0 \implies a(-x) = -(\alpha x).$$

5. $0 \cdot x = \vec{0}$.

Доказывается так же, как пункт 3, но с 0 вместо $\vec{0}$.

6. $(-1) \cdot x = -x$.

Рассмотрим равенство $1 + (-1) = 0$. Домножив на x получаем $(1 + (-1))x = 0x$.

Раскроем скобки и воспользуемся пунктом 5 — $1x + (-1)x = 0$ или $x + (-1)x = 0$.

Прибавим к обоим частям $-x$, получим $0 + (-1)x = -x$ или $(-1)x = -x$.

10.2 Подпространства векторных пространств

Пусть V — векторное пространство над F .

Определение 43. Подмножество $U \subseteq V$ называется *подпространством* (в V), если

1. $\vec{0} \in U$.
2. $x, y \in U \implies x + y \in U$.
3. $x \in U, \alpha \in F \implies \alpha x \in U$.

Замечание. Всякое подпространство само является векторным пространством относительно тех же операций.

Пример.

1. $\{\vec{0}\}$ и V — всегда подпространства в V .
они называются *несобственными* подпространствами, остальные называются *собственными*.
2. Множество всех верхнетреугольных, нижнетреугольных, диагональных матриц в $M_n(F)$.
3. $F[x]_{\leq n}$ все многочлены в $F[x]$ степени $\leq n$ — подпространство в $F[x]$.

10.3 Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными является подпространством в F^n

Предложение. Множество решений любой ОСЛУ $Ax = 0$ ($A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$, $x \in F^n$) является подпространством в F^n .

Доказательство. Пусть S — множество решений ОСЛУ $Ax = 0$.

1. $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S$.
2. $x, y \in S \implies Ax = \vec{0}$ и $Ay = \vec{0} \implies A(x + y) = Ax + Ay = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \implies x + y \in S$.
3. $x \in S, \alpha \in F \implies Ax = \vec{0} \implies A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha \vec{0} = \vec{0} \implies \alpha x \in S$. ■

10.4 Линейная комбинация конечного набора векторов

Пусть V — векторное пространство над F и $v_1, \dots, v_k \in V$ — набор векторов.

Определение 44. *Линейной комбинацией* векторов v_1, \dots, v_k называется всякое выражение вида $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$, где $\alpha_i \in F$.

10.5 Линейная оболочка подмножества векторного пространства, примеры

Пусть $S \subseteq V$ — подмножество векторного пространства.

Определение 45. *Линейной оболочкой* множества S называются множество всех векторов из V , представимых в виде линейной комбинации какого-то конечного набора векторов из S .

Обозначение: $\langle S \rangle$.

Если $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ конечно и состоит из векторов v_1, \dots, v_k , то еще пишут $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ и говорят “линейная оболочка векторов v_1, \dots, v_k ”.

Соглашение: $\langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}\}$.

Пример.

1. $\langle \vec{0} \rangle = \{\vec{0}\}$.
2. $V = \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, $\langle v \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ — прямая.
3. $V = \mathbb{R}^3$, v_1, v_2 — пара неколлинеарных векторов.
Тогда, $\langle v_1, v_2 \rangle = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ — плоскость натянутая на v_1, v_2 .

11 Лекция 21.11.2019

Напомним, если V – векторное пространство над полем F , то при $S \subseteq V$, линейная оболочка $\langle S \rangle = \{ \text{все линейные комбинации конечных наборов векторов из } S \}$

Пример.

4. $V = F^n$, $S = \{e_1, \dots, e_n\}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\langle S \rangle = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = F^n$.

$$\text{Так как для любого } x \in F^n \implies x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

11.1 Утверждение о том, что линейная оболочка системы векторов является подпространством объемлющего векторного пространства

Пусть V – векторное пространство, $S \subseteq V$.

Предложение. $\langle S \rangle$ является подпространством в V .

Доказательство.

1. Два случая:

$$S = \emptyset \implies \langle \emptyset \rangle = \{ \vec{0} \} \implies \vec{0} \in \langle S \rangle.$$

$$S \neq \emptyset \implies \exists V \in S \implies \underbrace{0V}_{\in \langle S \rangle} = \vec{0} \implies \vec{0} \in \langle S \rangle.$$

2. Пусть $v, w \in \langle S \rangle$:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m,$$

$$w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n, \text{ где } v_i, w_i \in S, \alpha_i, \beta_i \in F.$$

$$\text{Тогда, } v + w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n \in \langle S \rangle.$$

$$(\text{если } v_i = w_j, \text{ то } \alpha_i v_i + \beta_j w_j = (\alpha_i + \beta_j) w_j)$$

3. $v \in \langle S \rangle, \alpha \in F \implies v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$

$$\implies \alpha v = (\alpha \alpha_1) v_1 + \dots + (\alpha \alpha_m) v_m \in \langle S \rangle. \quad \blacksquare$$

11.2 Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Определение 46. Линейная комбинация $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ называется *тривиальной*, если $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ и *нетривиальной* иначе (то есть $\exists i : \alpha_i \neq 0$ или $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$).

Пример. $v + (-v)$ – нетривиальная линейная комбинация векторов v и $-v$.

Определение 47.

1. Векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ называются *линейно зависимыми* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная $\vec{0}$ (то есть $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, такие что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$) и *линейно независимыми* иначе (то есть из условия $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$ следует $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$).

2. Множество $S \subseteq V$ (возможно бесконечное, возможно с повторяющимися элементами) называется *линейно зависимым* если существует конечное линейно зависимое подмножество, и *линейно независимым* если любое конечное подмножество линейно независимо.

Соглашение. Система векторов – множество векторов, в котором возможны повторения.

Пример.

1. $S = \{ \vec{0} \}$ $1 \cdot \vec{0}$ – нетривиальная линейная комбинация $\implies \vec{0}$ линейно зависимо.

2. $S = \{v\}$, $v \neq \vec{0}$ – линейно независимо.

Пусть $\lambda v = \vec{0} \implies \vec{0} = \lambda^{-1} \vec{0} = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$ – противоречие.

3. $S = \{v_1, v_2\} \implies S$ линейно зависимо тогда и только тогда, когда v_1 и v_2 пропорциональны (то есть либо $v_2 = \lambda_1 v_1$, $\lambda_1 \in F$, либо $v_1 = \lambda_2 v_2$, $\lambda_2 \in F$).

Доказательство.

(\implies) $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = \vec{0}$, $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$.

Если $\mu_1 \neq 0$, то $v_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1} v_2$.

Аналогично для $\mu_2 \neq 0$.

(\impliedby) $v_2 = \lambda_1 v_1 \implies \lambda_1 v_1 + (-1)v_2 = \vec{0} \implies v_1, v_2$ линейно зависимы.

Аналогично для $v_1 = \lambda_2 v_2$. ■

4. $V = F^n$, $S = \{e_1, \dots, e_n\} \implies S$ линейно независимо.

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

11.3 Критерий линейной зависимости конечного набора векторов

Предложение. Пусть $v_1, \dots, v_n \in V$, $i \in \{1, \dots, n\}$, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$, такой что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}(\star)$ и $\alpha_i \neq 0$.

2. $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$.

Доказательство.

$$(1) \implies (2) \quad \alpha_i \neq 0 \text{ в } (\star) \implies v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle.$$

$$(2) \implies (1) \quad v_i = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n \implies$$

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n = \vec{0}.$$

(нетривиальная линейная комбинация с i -м скаляром $\neq 0$). ■

Следствие. Векторы v_1, \dots, v_n линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\exists i \in \{1, \dots, n\}$, такое что $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$.

11.4 Основная лемма о линейной зависимости

Лемма 11.1. Пусть есть две системы векторов v_1, \dots, v_m и w_1, \dots, w_n , причем $m < n$ и $w_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Тогда векторы w_1, \dots, w_n линейно зависимы.

Доказательство.

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{m1}v_m = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \\ &\dots \\ w_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{mn}v_m = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\implies (w_1, \dots, w_n) = (v_1, \dots, v_m)A, \quad (\star)$$

где $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$.

Так как $m < n$, то ОСЛУ $Ax = \vec{0}$ имеет ненулевое решение $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \in F^n$.

Тогда умножим (\star) справа на z :

$$(w_1, \dots, w_n) \cdot z = (v_1, \dots, v_m) \cdot \underbrace{A \cdot z}_{=\vec{0}} = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

$$\implies (w_1, \dots, w_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \vec{0} \implies z_1 w_1 + \dots + z_n w_n = \vec{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация, так как $z \neq 0$.

Следовательно, w_1, \dots, w_n линейно зависимы. ■

Пример. Любые $n + 1$ векторов в F^n линейно зависимы, так как $F^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

11.5 Базис векторного пространства

Определение 48. Подмножество $S \subseteq V$ называется *базисом* пространства V , если

1. S линейно независимо,
2. $\langle S \rangle = V$.

Пример. e_1, \dots, e_n — это базис в F^n . Он называется *стандартным базисом* в F^n .

Замечание. Всякая линейно независимая система векторов является базисом своей линейной оболочки.

11.6 Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства

Определение 49. Векторное пространство V называется *конечномерным*, если в нем есть конечный базис, и *бесконечномерным* иначе.

11.7 Независимость числа элементов в базисе векторного пространства от выбора базиса

Предложение. V — конечномерное векторное пространство. Тогда, все базисы в V содержат одно и то же количество элементов.

Доказательство. V конечномерно, тогда существует конечный базис e_1, \dots, e_n .

Пусть $S \subseteq V$ — другой базис. Так как $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$, то $\forall v \in S \implies v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Тогда любые $n + 1$ векторов в S линейно зависимы по основной лемме о линейной зависимости. Но S линейно независимо, значит $|S| \leq n$.

Пусть $S = \{e'_1, \dots, e'_m\}$, где $m \leq n$. Тогда $\forall i = 1, \dots, n \quad e_i \in \langle e'_1, \dots, e'_m \rangle$, по основной лемме о линейной зависимости получаем $n \leq m$.

То есть $m = n$. ■

11.8 Размерность конечномерного векторного пространства

Определение 50. *Размерностью* конечномерного векторного пространства называется число элементов в (любом) его базисе.

Обозначение: $\dim V$.

Пример.

1. $\dim F^n = n$,
2. $V = \{\vec{0}\} \implies \dim V = 0$ так как базисом V будет \emptyset .

12 Лекция 28.11.2019

Пусть V – векторное пространство над полем F .

Обозначение $\dim V < \infty$ – V конечномерно.

12.1 Характеризация базисов в терминах единственности линейного выражения векторов

Утверждение 12.1. Пусть $\dim V < \infty$, $e_1, \dots, e_n \in \langle V \rangle$.

e_1, \dots, e_n – базис V тогда и только тогда, когда, $\forall v \in V$ единственным образом представим в виде

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad x_i \in F.$$

Доказательство.

\Rightarrow Пусть есть два представления $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e_1 + \dots + x'_n e_n$.

Тогда, $(x_1 - x'_1)e_1 + \dots + (x_n - x'_n)e_n = \vec{0}$.

Так как e_1, \dots, e_n линейно независимы, то $(x_1 - x'_1) = \dots = (x_n - x'_n) = 0$.

Значит, $x_i = x'_i \quad \forall i$.

$\Leftarrow \forall v \in V$ имеем $v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

Значит, $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$.

Для $v = \vec{0}$ существует единственное представление $\vec{0} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.

Но мы знаем, что $\vec{0} = 0e_1 + \dots + 0e_n$.

Следовательно $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, то есть e_1, \dots, e_n линейно независимы.

Итог: e_1, \dots, e_n – базис V . ■

12.2 Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$$Ax = 0 \text{ – ОСЛУ.} \quad (\star)$$

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}(F), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n.$$

$S \subseteq F^n$ – множество решений.

Знаем, что S – подпространство в F^n .

Определение 51. Фундаментальной системой решений (ФСР) для ОСЛУ (\star) называется всякий базис пространства её решений.

Замечание. У одной ОСЛУ может быть много разных ФСР.

12.3 Метод построения фундаментальной системы решений

Приведем матрицу к улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк.

$$(A | \vec{0}) \rightsquigarrow (B | \vec{0}) \leftarrow \text{улучшенный ступенчатый вид.}$$

Пусть r – число ненулевых строк в B .

Тогда будет r главных неизвестных и $n - r$ свободных.

Выполнив перенумерацию будем считать что,

x_1, \dots, x_r – главные неизвестные,

x_{r+1}, \dots, x_n – свободные.

Тогда, общее решение для (\star) имеет вид

$$x_1 = c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \dots + c_{1,n-r}x_n$$

$$x_2 = c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \dots + c_{2,n-r}x_n$$

...

$$x_r = c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \dots + c_{r,n-r}x_n.$$

Предъявим некоторую систему решений

$$u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{r1} \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{r2} \\ 0 \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, u_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \dots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \underline{1} \end{pmatrix}.$$

$$u_1, \dots, u_{n-r} \in S$$

Предложение. u_1, \dots, u_{n-r} — это ФСР для ОСЛУ (\star) .

Доказательство.

1. Линейная независимость.

$$\text{Пусть } \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r} = \vec{0}.$$

При любом $k \in \{1, \dots, n-r\}$, $(r+k)$ -я координата левой части равна α_k , значит $\alpha_k = 0$.

Следовательно $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-r} = 0$.

2. $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$.

“ \subseteq ” Верно, так как $u_1, \dots, u_{n-r} \in S$.

“ \supseteq ” Пусть $u \in S$, тогда

$$u = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} \text{ для некоторых } \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in F.$$

Положим $v := u - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{n-r} u_{n-r}$.

Тогда, $v \in S$, но

$$v = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы для общего решения дают $v = \vec{0}$.

Поэтому $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r}$.

Значит $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$. ■

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

Тогда ФСР:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12.4 Утверждение о возможности выбора из конечной системы векторов базиса её линейной оболочки

Пусть V – векторное пространство над F .

Наблюдение: если $v, v_1, \dots, v_m \in V$ и $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, тогда $\langle v, v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

Предложение. Из всякой конечной системы векторов $S \subseteq V$ можно выбрать подсистему, которая является базисом в линейной оболочке $\langle S \rangle$.

Доказательство. Пусть $S = \{v_1, \dots, v_m\}$.

Индукция по m .

База $m = 1$: $S = \{v_1\}$.

Если $v_1 = \vec{0}$, то $\langle S \rangle = \{\vec{0}\}$, значит в качестве базиса берем \emptyset .

Если $v_1 \neq 0$, то S линейно независимо.

Следовательно S – базис в $\langle S \rangle$.

Шаг Пусть доказано для $< m$, докажем для m .

Если v_1, \dots, v_m линейно независимо, то v_1, \dots, v_m – это уже базис в $\langle S \rangle$.

Иначе, $\exists i : v_i \in \langle S \setminus \{v_i\} \rangle$.

Положим $S' := S \setminus \{v_i\}$.

Тогда, $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$.

Так как $|S'| = m - 1 < m$, то по предположению индукции в S' можно выбрать базис для $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$. ■

12.5 Дополнение конечной линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства

Предложение. Пусть $\dim V < \infty$, тогда всякую линейно независимую систему векторов в V можно дополнить до базиса всего пространства V .

Доказательство. Пусть v_1, \dots, v_m – данная линейно независимая система.

Так как $\dim V < \infty$, в V есть конечный базис e_1, \dots, e_n .

Рассмотрим систему векторов $v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n$.

Пройдемся по этим векторам слева направо и выбросим те, которые линейно выражаются через предыдущие (не выброшенные).

При этом:

- 1) линейная оболочка системы сохраняется и равна $\langle v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n \rangle = V$;
- 2) v_1, \dots, v_m останутся в системе, так как они линейно независимы;
- 3) в новой системе никакой вектор линейно не выражается через предыдущие.

Пусть новая система – это $S' = \{v_1, \dots, v_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_t}\}$.

Докажем, что S' – базис в V .

По свойству 1) имеем, что $\langle S' \rangle = V$.

Осталось доказать, что S' линейно независимо.

Пусть $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 e_{i_1} + \dots + \beta_t e_{i_t} = \vec{0}$.

Предположим, что эта линейная комбинация нетривиальна.

Так как v_1, \dots, v_m линейно независимы, то $\exists k : \beta_{i_k} \neq 0$.

Выберем k максимальным с этим свойством.

Тогда, e_{i_k} линейно выражается через предыдущие – противоречие. ■

Следствие. Если $\dim V = n$ и v_1, \dots, v_n – линейно независимая система, тогда v_1, \dots, v_n – базис V .

12.6 Лемма о добавлении вектора к конечной линейной независимой системе

Лемма 12.2. Пусть $v, v_1, \dots, v_m \in V$ и v_1, \dots, v_m линейно независимы, тогда либо v, v_1, \dots, v_m линейно независимы, либо $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

Доказательство. Пусть v, v_1, \dots, v_m линейно зависимы, тогда $\exists (\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq (0, \dots, 0)$, такой что

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0}.$$

Но, так как v_1, \dots, v_m линейно независимы, то $\alpha \neq 0$. Значит, $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ по предложению. ■

13 Лекция 5.12.2019

13.1 Размерность подпространства конечномерного векторного пространства

Пусть V – конечномерное векторное пространство.

Предложение. Если $U \subseteq V$ – подпространство V , тогда U тоже конечномерно, причем $\dim U \leq \dim V$.

Кроме того, $\dim U = \dim V \iff U = V$.

Доказательство. Пусть $n = \dim V$.

Построим в U конечный базис.

Если $U = \{\vec{0}\}$, то в качестве базиса берем \emptyset .

Далее считаем, что $U \neq \{\vec{0}\}$.

Выберем $v_1 \in U \setminus \{\vec{0}\}$. Если $\langle v_1 \rangle = U$, то конец. Иначе, выберем $v_2 \in U \setminus \langle v_1 \rangle$.

Если $\langle v_1, v_2 \rangle = U$, то конец.

Иначе, выберем $v_3 \in U \setminus \langle v_1, v_2 \rangle$, и так далее.

Получаем систему векторов v_1, v_2, \dots . Она линейно независима по [лемме](#).

По [основной лемме о линейной зависимости](#) процесс закончится не позднее шага n , значит U конечномерно и $\dim U \leq \dim V$.

Если $\dim U = n$, то v_1, \dots, v_n – базис U . По следствию, если v_1, \dots, v_n – базис U , то $U = V$. ■

13.2 Ранг системы векторов

Пусть $\dim V < \infty$ и $S \subseteq V$ – система векторов.

Определение 52. Рангом системы векторов S называется число $\text{rk } S$, равное наибольшему числу векторов в линейно независимой подсистеме из S .

$$\text{rk } S = \max\{|S'| \mid S' \subseteq S - \text{линейно независимая подсистема}\}.$$

13.3 Связь ранга системы векторов с размерностью её линейной оболочки

Предложение. $\text{rk } S = \dim \langle S \rangle$.

Доказательство. Пусть $\text{rk } S = r$.

Тогда существует линейно независимая подсистема $S' = \{v_1, \dots, v_r\}$.

По определению ранга и лемме получаем $S \subseteq \langle v_1, \dots, v_r \rangle$.

Значит, $\langle S \rangle = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ (так как $v_1, \dots, v_r \in S$).

Следовательно $\dim S = r$. ■

13.4 Ранг матрицы: столбцовый и строковый

Пусть $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$.

Определение 53. Столбцовым рангом (или просто рангом) матрицы A называется ранг системы её столбцов

$$A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \subseteq F^n.$$

Обозначение: $\text{rk } A = \text{rk}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}$.

Определение 54. Строковым рангом матрицы A называется число $\text{rk } A^T$, то есть ранг системы строк

$$A_{(1)}, \dots, A_{(n)} \in F^n.$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Любые два столбца линейно независимы (не пропорциональны), то есть $\text{rk } A \geq 2$.

Но, $A^{(2)} = \frac{1}{2}(A^{(1)} + A^{(3)})$, значит $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ линейно зависимы $\implies \text{rk } A = 2$.

13.5 Сохранение линейных зависимостей между столбцами матрицы при элементарных преобразованиях строк

Предложение. Элементарные преобразования строк сохраняют линейные зависимости между столбцами матрицы.

Если $A \rightsquigarrow B$ элементарным преобразованиями строк, то

$$\alpha_1 A^{(1)} + \cdots + \alpha_n A^{(n)} = \vec{0} \iff \alpha_1 B^{(1)} + \cdots + \alpha_n B^{(n)} = \vec{0}.$$

В частности, при $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

$$A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_k)} \text{ линейно независимы} \iff B^{(i_1)}, \dots, B^{(i_k)} \text{ линейно независимы.}$$

Доказателство.

$$\begin{aligned} \alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = \vec{0} &\iff A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - \text{решение ОСЛУ } Ax = \vec{0} \\ &\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - \text{решение ОСЛУ } Bx = \vec{0} \\ &\iff B \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \alpha_1 B^{(1)} + \dots + \alpha_n B^{(n)} = \vec{0}. \end{aligned}$$

13.6 Инвариантность столбцового и строкового рангов матрицы при элементарных преобразованиях строк и столбцов

Следствие. При элементарных преобразованиях строк (столбцовый) ранг матрицы сохраняется.

Предложение. При элементарных преобразованиях строк линейная оболочка $\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle$ сохраняется.

Доказательство. Пусть $A \rightsquigarrow B$ элементарными преобразованиями строк.

Тогда,

$$B^{(1)}, \dots, B^{(n)} \in \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle.$$

Значит,

$$\langle B^{(1)}, \dots, B^{(n)} \rangle \subseteq \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle.$$

Так как элементарные преобразования обратимы, то включение верно и в другую сторону.

Следствие. Ранг матрицы (столбцовый) сохраняется при элементарных преобразованиях строк.

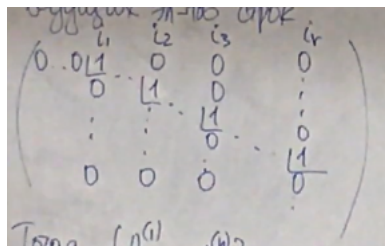
Следствие. Строковый ранг матрицы сохраняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов.

13.7 Столбцовый и строковый ранги матрицы, имеющей улучшенный ступенчатый вид

Предложение. Если A имеет улучшенный ступенчатый вид, то оба числа $\text{rk } A$ и $\text{rk } A^T$ равны числу ненулевых строк в A .

Доказательство. Пусть r — число ненулевых строк в A и пусть $i_1 < \dots < i_r$ — номера ведущих элементов строк.

$$\begin{pmatrix} & i_1 & i_2 & i_3 & i_r \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \dots & 1 & 0 & & \vdots \\ & \vdots & & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & 0 & \dots & 1 \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$



жалкая попытка повторить шедевр

Тогда, $\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} \ni e_1, \dots, e_r$, где

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i.$$

Значит, $\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle \supseteq \langle e_1, \dots, e_r \rangle$.

Заметим, что $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in \langle e_1, \dots, e_r \rangle$, то есть $\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle \subseteq \langle e_1, \dots, e_r \rangle$.

Теперь покажем, что строки $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$ линейно независимы.

Пусть $\alpha_1 A_{(1)} + \dots + \alpha_r A_{(r)} = \vec{0}(\star)$.

$\forall k = 1, \dots, r$ на месте i_k в левой части (\star) стоит α_k , значит $\alpha_k = 0$.

То есть $\alpha_i = 0 \forall i$, следовательно $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$ линейно независимы.

$\implies \text{rk } A^T = r$. ■

13.8 Равенство столбцового и строкового рангов матрицы

Теорема 13.1. Пусть $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$, тогда $\text{rk } A = \text{rk } A^T$, причем оба числа равны количеству строк в ступенчатом виде матрицы A .

Доказательство. $\text{rk } A = \text{rk } A^T$ следует из следствий, предыдущего предложения и теоремы о приведении матрицы к улучшенному ступенчатому виду.

Остальное вытекает из предложения и того, что при переходе от ступенчатого вида к улучшенному ступенчатому виду число ненулевых строк сохраняется. ■

13.9 Связь ранга квадратной матрицы с её определителем

Следствие. Пусть $A \in M_n(F)$ – квадратная матрица. Тогда,

$$\text{rk } A = n \iff \det A \neq 0,$$

$$\text{rk } A < n \iff \det A = 0.$$

Доказательство. При элементарных преобразованиях строк $\text{rk } A$ сохраняется, условия $\det A \neq 0$ и $\det A = 0$ тоже.

Следовательно, достаточно доказать для ступенчатых матриц. В этом случае

$$\text{rk } A = n \implies n \text{ ненулевых строк} \implies \det A \neq 0,$$

$$\text{rk } A < n \implies \text{есть нулевые строки} \implies \det A = 0. \quad \blacksquare$$

13.10 Подматрицы

Определение 55. Подматрицей матрицы A называется всякая матрица, получающаяся из A вычёркиванием каких-то строк и каких-то столбцов.

13.11 Связь рангов матрицы и её подматрицы

Предложение. S подматрица $\implies \text{rk } S \leq \text{rk } A$.

Доказательство. Пусть $\text{rk } S = r$, значит в S есть линейно независимая система из r столбцов. Но тогда соответствующие r столбцов в матрице A будут и подавно линейно независимы. ■

14 Лекция 12.12.2019

14.1 Миноры

Пусть $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$.

Определение 56. Минором матрицы A называется определитель всякой квадратной подматрицы в A .

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

- 6 миноров порядка 1,
- 3 минора порядка 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

14.2 Теорема о ранге матрицы

Теорема 14.1. Для любой $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ следующие 3 числа равны:

- (1) $\text{rk } A$ (столбцовый ранг),
- (2) $\text{rk } A$ (строковый ранг),
- (3) наибольший порядок ненулевого минора в A .

Доказательство. (1) = (2) – уже знаем.

Пусть S – квадратная подматрица в A порядка r и $\det S \neq 0$. Тогда $r = \text{rk } S \leq \text{rk } A$. Отсюда, (3) \leq (1).

Пусть теперь $\text{rk } A = r$. Найдем в A ненулевой минор порядка r .

Так как $\text{rk } A = r$, в A есть r линейно независимых столбцов $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)}$.

Составим из них матрицу B . Тогда $\text{rk } B = r$.

Так как (1) = (2) для B , то в B можно найти r линейно независимых строк.

Пусть S – подматрица в B , составленная из этих строк.

S – квадратная подматрица порядка r и $\text{rk } S = r \implies \det S \neq 0 \implies$ нашли. Значит, (3) \geq (1).

Итог: (3) = (1). ■

14.3 Приложения ранга матрицы к исследованию СЛУ

Пусть $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$, $b \in F^n$, $x \in F^n$ – столбец неизвестных.

$$Ax = b. \tag{*}$$

$(A \mid b)$ – расширенная матрица.

14.3.1 Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 14.2 (Кронекера-Капелли). СЛУ (*) совместна $\iff \text{rk}(A \mid b) = \text{rk } A$.

Доказательство. При элементарных преобразованиях строк

- сохраняется множество решений,
- сохраняются числа $\text{rk}(A \mid b)$ и $\text{rk } A$.

Следовательно, вопрос сводится к ситуации когда A имеет ступенчатый вид.

В ступенчатом виде СЛУ совместна тогда и только тогда, когда нет строк вида $(0, \dots, 0 \mid \underbrace{\star}_{\neq 0})$.

То есть матрицы $(A \mid b)$ и A имеют одно и то же число ненулевых строк.

Значит, $\text{rk}(A \mid b) = \text{rk } A$. ■

14.3.2 Критерий существования единственного решения у совместной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов

Теорема 14.3. Пусть СЛУ (*) совместна. Тогда, она имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\text{rk } A = n$, где n – число неизвестных.

Доказательство. Снова все сводится к ситуации, когда $(A \mid b)$ имеет ступенчатый вид.

Тогда, единственное решение \iff нет свободных неизвестных \iff ступенек ровно $n \iff \text{rk } A = n$. ■

14.3.3 Критерий существования единственного решения у системы линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов в терминах её определителя

Следствие. Пусть A квадратна (то есть $m = n$). Тогда СЛУ (\star) имеет единственное решение $\iff \det A \neq 0$.

Доказательство. Единственное решение $\iff \operatorname{rk} A = n \iff \det A \neq 0$. ■

Замечание. Это единственное решение равно $x = A^{-1}b$.

14.3.4 Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов

Пусть теперь СЛУ однородна, то есть $b = 0$.

$$Ax = 0. \quad (\star)$$

Пусть $S \subseteq F^n$ – множество её решений. Знаем, что S – подпространство в F^n .

Предложение. $\dim S = n - \operatorname{rk} A$.

Доказательство. Пусть r – число ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы A . Тогда $r = \operatorname{rk} A$.

Мы уже строили ФСР для (\star) из $n - r$ векторов.

Значит, $\dim S = n - r = n - \operatorname{rk} A$. ■

14.3.5 Реализация подпространства в F^n в качестве множества решений однородной системы линейных уравнений

Пусть $b_1, \dots, b_p \in F^n$,

$$B := (b_1, \dots, b_p) \in \operatorname{Mat}_{n \times p}(F).$$

Пусть $a_1, \dots, a_q \in F^n$ – ФСР для ОСЛУ $B^T x = 0$.

$$A := (a_1, \dots, a_q) \in \operatorname{Mat}_{n \times q}(F).$$

Предложение. $\langle b_1, \dots, b_p \rangle$ есть множество решений ОСЛУ $A^T x = 0$.

Доказательство. Пусть $S = \{x \in F^n \mid A^T x = 0\}$.

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, q \quad B^T a_i = 0 &\implies B^T A = 0 \\ &\implies A^T B = 0 \implies A^T b_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Значит, $b_j \in S \quad \forall j = 1, \dots, p$.

Но тогда, $\langle b_1, \dots, b_p \rangle \subseteq S$.

Пусть $r = \operatorname{rk}\{b_1, \dots, b_p\} = \dim\langle b_1, \dots, b_p \rangle = \operatorname{rk} B$.

При этом, $\operatorname{rk} A = q = n - r$.

Тогда, $\dim S = n - \operatorname{rk} A = n - (n - r) = r$.

Следовательно, $\langle b_1, \dots, b_p \rangle = S$. ■

Следствие. Всякое подпространство в F^n является решением некоторой ОСЛУ.

14.4 Координаты вектора по отношению к фиксированному базису векторного пространства

Пусть V – векторное пространство, $\dim V = n$, e_1, \dots, e_n – базис.

Знаем, что $\forall v \in V \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, такие что, $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Определение 57. Скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называются координатами вектора v в базисе e_1, \dots, e_n .

Пример. $V = F^n$.

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда, x_1, \dots, x_n – координаты вектора v в стандартном базисе пространства F^n .

14.5 Описание всех базисов конечномерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат

Пусть теперь e'_1, \dots, e'_n – какой то другой набор векторов в V . Тогда,

$$e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n$$

$$e'_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n$$

...

$$e'_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \dots + c_{nn}e_n.$$

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \text{ где } C = (c_{ij}).$$

в j -м столбце матрицы C стоят координаты вектора e'_j в базисе e_1, \dots, e_n .

Предложение. (e'_1, \dots, e'_n) – базис в $V \iff \det C \neq 0$.

Доказательство.

$$\implies e'_1, \dots, e'_n \text{ – базис, значит } (e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C' = (e_1, \dots, e_n) \cdot C \cdot C'.$$

Так как e_1, \dots, e_n линейно независимы, то $C \cdot C' = E \implies \det C \neq 0$.

$$\Leftarrow \det C \neq 0 \implies \exists C^{-1}.$$

Достаточно доказать, что e'_1, \dots, e'_n линейно независимы.

Пусть

$$\alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_n e'_n = 0.$$

Тогда,

$$(e'_1, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \implies (e_1, \dots, e_n) \cdot C \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

Так как e_1, \dots, e_n линейно независимы, то

$$C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

Домножаем слева на C^{-1} , получаем

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

14.6 Матрица перехода от одного базиса конечномерного векторного пространства к другому

Пусть (e_1, \dots, e_n) и (e'_1, \dots, e'_n) — два базиса в V ,

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C,$$

при этом $\det C \neq 0$.

Определение 58. Матрица C называется *матрицей перехода* от базиса (e_1, \dots, e_n) к базису (e'_1, \dots, e'_n) .

Замечание. Матрица перехода от (e'_1, \dots, e'_n) к (e_1, \dots, e_n) — это C^{-1} .

14.7 Формула преобразования координат вектора при замене базиса

Пусть $v \in V$, тогда

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$v = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n.$$

Предложение.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Имеем

$$v = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

С другой стороны,

$$v = (e'_1, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = (e_1, \dots, e_n) \cdot C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Так как e_1, \dots, e_n линейно независимы, то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

■

15 Лекция 9.01.2020

15.1 Сумма двух подпространств векторного пространства

Пусть V – векторное пространство над F .

$U, W \subseteq V$ – подпространства.

Тогда, $U \cap W$ – тоже подпространство. (можно проверить по определению)

Определение 59. Суммой подпространств U, W называется множество

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Упражнение. $U + W$ – подпространство.

Замечание. Имеем $U \cap W \subseteq U = U + 0 \subseteq U + W$.

Значит, $\dim(U \cap W) \leq \dim U \leq \dim(U + W)$.

15.2 Связь размерностей двух подпространств с размерностями их суммы и пересечения

Теорема 15.1. $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

Пример. Всякие две плоскости в \mathbb{R}^3 (содержащие 0) имеют общую прямую.

Здесь $V = \mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 2$.

При этом $\dim(U + W) \leq 3$.

Тогда, $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq 2 + 2 - 3 = 1$.

Доказательство. Пусть $\dim(U \cap W) = p$, $\dim U = q$, $\dim W = r$.

Пусть $a = \{a_1, \dots, a_p\}$ – базис в $U \cap W$.

Тогда, a можно дополнить до базиса в U и в W :

$b = \{b_1, \dots, b_{q-p}\}$ – такая система, что $a \cup b$ – базис в U .

$c = \{c_1, \dots, c_{r-p}\}$ – такая система, что $a \cup c$ – базис в W .

Докажем, что $a \cup b \cup c$ – базис в $U + W$.

1. $\langle a \cup b \cup c \rangle = U + W$:

$v \in U + W \implies \exists u \in U, w \in W$, такие что $v = u + w$.

$u \in U = \langle a \cup b \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$.

$w \in W = \langle a \cup c \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$.

Значит, $v \in \langle a \cup b \cup c \rangle$.

2. $a \cup b \cup c$ линейно независимо.

Пусть $\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_x + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p}}_y + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{r-p} c_{r-p}}_z = 0$, где $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in F$.

Тогда, $z = -\underbrace{x}_{\in U} - \underbrace{y}_{\in U} \in U$.

Но, $z \in W$, значит $z \in U \cap W$.

То есть $z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$, $\lambda_i \in F$.

Тогда, $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{r-p} c_{r-p} = 0$

Так как $a \cup c$ линейно независимо, то $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{r-p} = 0$ и $z = 0$.

Следовательно, $x + y = 0$, то есть $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p} = 0$.

Так как $a \cup b$ линейно независимо, то $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{q-p} = 0$.

Получаем, что $a \cup b \cup c$ линейно независимо.

Итог: $a \cup b \cup c$ – базис в $U + W$.

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= |a| + |b| + |c| \\ &= p + q - p + r - p \\ &= q + r - p \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \end{aligned}$$

■

15.3 Сумма нескольких подпространств векторного пространства

Пусть $U_1, \dots, U_k \subseteq V$ – подпространства.

Определение 60. Суммой подпространств U_1, \dots, U_k называется множество

$$U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}.$$

Упражнение. Доказать, что $U_1 + \dots + U_k$ – подпространство.

Замечание. $\dim(U_1 + \dots + U_k) \leq \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

15.4 Линейно независимые подпространства, пять эквивалентных условий

Определение 61. Подпространства U_1, \dots, U_k называются *линейно независимыми*, если $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$ из условия $u_1 + \dots + u_k = 0$ следует $u_1 = \dots = u_k = 0$.

Пример. Если $\dim U_i = 1$ и $U_i = \langle u_i \rangle \forall i$, то U_1, \dots, U_k линейно независимы $\iff u_1, \dots, u_k$ линейно независимы.

Теорема 15.2. Следующие условия эквивалентны:

- (1) U_1, \dots, U_k линейно независимы.
- (2) всякий $u \in U_1 + \dots + U_k$ единственным образом представим в виде $u = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$.
- (3) Если e_i – базис в $U_i \forall i$, то $\underbrace{e_1 \sqcup e_2 \sqcup \dots \sqcup e_k}_{\text{объединение мультимножеств}} – \text{базис в } U_1 + \dots + U_k$.
- (4) $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.
- (5) $\forall i = 1, \dots, k \quad U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = 0$.

Пример. Если $\mathfrak{e}_1 = \{e_1, e_2\}, \mathfrak{e}_2 = \{e_2, e_3\}$, то

- $\mathfrak{e}_1 \cup \mathfrak{e}_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$ – 2 элемента,
- $\mathfrak{e}_1 \sqcup \mathfrak{e}_2 = \{e_1, e_2, e_2, e_3\}$ – 4 элемента.

Доказательство. Пусть $\widehat{U}_i = U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$.

(1) \implies (2) Пусть $u_1 + \dots + u_k = u'_1 + \dots + u'_k$, где $u_i, u'_i \in U_i$.

$$\text{Тогда, } \underbrace{(u_1 - u'_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 - u'_2)}_{\in U_2} + \dots + \underbrace{(u_k - u'_k)}_{\in U_k} = 0 \implies u_i - u'_i = \dots = u_k - u'_k = 0.$$

То есть, $u_1 = u'_1, \dots, u_k = u'_k$.

(2) \implies (3) Пусть $u \in U_1 + \dots + U_k$ – произвольный.

u единственным образом представим в виде $u = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$,

u_i единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из \mathfrak{e}_i .

Следовательно, u единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $\mathfrak{e}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{e}_k$.

То есть, $\mathfrak{e}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{e}_k$ – базис в $U_1 + \dots + U_k$.

(3) \implies (4) Очевидно.

(4) \implies (5)

$$\begin{aligned} \dim(U_i \cap \widehat{U}_i) &= \dim U_i + \dim \widehat{U}_i - \dim(U_i + \dots + U_k) \\ &\leq \dim U_i + (\dim U_1 + \dots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \dots + \dim U_k) - (\dim U_1 + \dots + \dim U_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(5) \implies (1) $u_1 + \dots + u_k = 0$, где $u_i \in U_i$.

$$\text{Тогда, } \underbrace{u_i}_{\in U_i} = \underbrace{-u_1 - \dots - u_{i-1} - u_{i+1} - \dots - u_k}_{\in \widehat{U}_i}$$

Следовательно, $u_i \in U_i \cap \widehat{U}_i = 0 \implies u_i = 0$. ■

Следствие. Пусть $k = 2$, тогда

$$U_1, U_2 \text{ линейно независимы } \iff U_1 \cap U_2 = 0.$$

15.5 Разложение векторного пространства в прямую сумму нескольких подпространств

Определение 62. Говорят, что векторное пространство V разлагается в *прямую сумму* U_1, \dots, U_k , если

1. $V = U_1 + \dots + U_k$,
2. U_1, \dots, U_k линейно независимы.

Обозначение: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$.

Пример. Если e_1, \dots, e_n – базис V , то $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$

15.6 Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства

Замечание. При $k = 2$:

1. $V = U_1 \oplus U_2 \iff \begin{cases} V = U_1 + U_2, \\ U_1 \cap U_2 = 0, \end{cases}$
2. $V = U_1 \oplus U_2 \implies \forall v \in V \exists! u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, такие что $v = u_1 + u_2$.

Тогда, u_1 называется проекцией вектора v на U_1 вдоль U_2 .

Так же, u_2 называется проекцией вектора v на U_2 вдоль U_1 .

16 Лекция 16.01.2020

16.1 Линейные отображения векторных пространств

Пусть V, W — векторные пространства над F .

Определение 63. Отображение $\varphi : V \rightarrow W$ называется *линейным*, если

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,

2. $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$.

$$\forall v_1, v_2, v \in V, \forall \lambda \in F.$$

Упражнение. 1 и 2 эквивалентны тому, что

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2).$$

$$\forall v_1, v_2 \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in F.$$

16.2 Примеры линейных отображений

[Презентация](#) (продублирована ниже)

16.2.1 Пример 0

$\varphi : V \rightarrow W$ — нулевое отображение,

$$\varphi(v) := \vec{0} \quad \forall v \in V$$

1) $\varphi(v_1 + v_2) = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,

2) $\varphi(\lambda \cdot v) = \vec{0} = \lambda \vec{0} = \lambda \cdot \varphi(v)$.

16.2.2 Пример 1

$\varphi : V \rightarrow W$ — тождественное отображение,

$$\varphi(v) := v \quad \forall v \in V.$$

Обозначение: $\varphi =: \text{Id}$.

1) $\varphi(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,

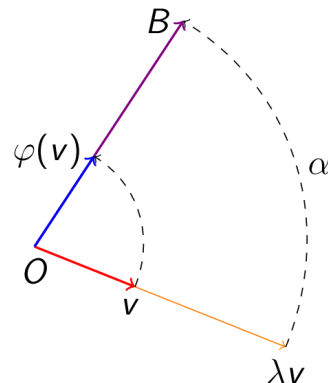
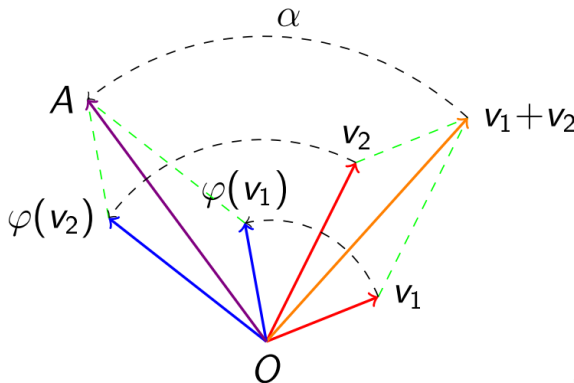
2) $\varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot v = \lambda \cdot \varphi(v)$.

16.2.3 Пример 2

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — поворот на угол α вокруг начала координат.

Два красных вектора v_1, v_2 и их сумму $v_1 + v_2$ повернули на угол α , получив $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$ а так же точку A . Свойство 1 говорит нам, что точка A это не просто сумма образов, она так же является образом суммы $v_1 + v_2$. То есть точку A можно получить двумя разными способами: сложить $\varphi(v_1)$ и $\varphi(v_2)$ или повернуть $v_1 + v_2$.

Вторая картинка показывает свойство 2: точка B это с одной стороны $\varphi(v) \cdot \lambda$, а с другой — образ $\lambda \cdot v$.



1) $\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = A = \varphi(v_1 + v_2)$,

2) $\varphi(\lambda \cdot v) = B = \lambda \cdot \varphi(v)$.

16.2.4 Пример 3

$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — ортогональная проекция на плоскость Oxy .

⟨ Конкурс на лучшую картинку ⟩

16.2.5 Пример 4

$\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ — пространство многочленов от x степени $\leq n$ с коэффициентами из \mathbb{R} .

$\Delta: f(x) \mapsto f'(x)$ — отображение дифференцирования.

- 1) $(f + g)' = f' + g'$,
- 2) $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

1) и 2) $\implies \Delta$ — линейное отображение $\mathbb{R}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$.

16.2.6 Пример 5

V — векторное пространство над F , $\dim V = n$.

(e_1, \dots, e_n) — базис V .

$\varphi: V \rightarrow F^n$

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Покажем, что оно линейно:

Пусть

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$w = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \implies \varphi(w) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$1) \quad v + w = (x_1 + y_1)e_1 + \dots + (x_n + y_n)e_n \implies \varphi(v + w) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \varphi(v) + \varphi(w),$$

$$2) \quad \lambda \cdot v = (\lambda x_1)e_1 + \dots + (\lambda x_n)e_n \implies \varphi(\lambda \cdot v) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \varphi(v).$$

16.3 Простейшие свойства линейных отображений

Здесь $\vec{0}_V$ — нулевой вектор в векторном пространстве V .

$$1. \quad \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W.$$

Доказательство: $\varphi(\vec{0}_V) = \varphi(0 \cdot \vec{0}_V) = 0 \cdot \varphi(\vec{0}_V) = \varphi(\vec{0}_W)$.

$$2. \quad \varphi(-v) = -\varphi(v).$$

Доказательство: $\varphi(-v) + \varphi(v) = \varphi(-v + v) = \varphi(0) = \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

16.4 Изоморфизм векторных пространств

Определение 64. Отображение $\varphi: V \rightarrow W$ называется *изоморфизмом* если оно линейно и биективно.

Обозначение: $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$.

В примерах выше:

$$0. \quad \varphi \text{ — изоморфизм} \iff \begin{cases} V = \{\vec{0}\}, \\ W = \{\vec{0}\} \end{cases}$$

1. да
2. да
3. нет
4. φ — изоморфизм $\iff n = 0$
5. да!

16.5 Отображение, обратное к изоморфизму

Предложение. Если $\varphi : V \rightarrow W$ — изоморфизм, то φ^{-1} — тоже изоморфизм.

Доказательство. Биактивность есть, так как φ^{-1} — обратное отображение.

Проверим линейность

$$1) \quad w_1, w_2 \in W \implies w_1 = \varphi(\varphi^{-1}(w_1)), w_2 = \varphi(\varphi^{-1}(w_2))$$

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(w_1 + w_2) &= \varphi^{-1}\left(\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(w_1))}_{w_1} + \underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(w_2))}_{w_2}\right) \\ &= \underbrace{\varphi^{-1}}_{Id}(\varphi(\varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2))) \\ &= \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2). \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\lambda \cdot w_1) &= \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(\varphi^{-1}(w_1))) \\ &= \underbrace{\varphi^{-1}}_{Id}(\varphi(\lambda \cdot \varphi^{-1}(w_1))) \\ &= \lambda \varphi^{-1}(w_1). \end{aligned}$$

■

16.6 Композиция двух линейных отображений, композиция двух изоморфизмов

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$, тогда $\varphi \circ \psi : U \rightarrow W$ — композиция.

Предложение.

1. Если φ, ψ линейны, то $\varphi \circ \psi$ тоже линейна.
2. Если φ, ψ — изоморфизмы, то $\varphi \circ \psi$ — тоже изоморфизм.

Доказательство.

1. (1) $(\varphi \circ \psi)(u_1 + u_2) = \varphi(\psi(u_1 + u_2)) = \varphi(\psi(u_1) + \psi(u_2)) = \varphi(\psi(u_1)) + \varphi(\psi(u_2)) = (\varphi \circ \psi)(u_1) + (\varphi \circ \psi)(u_2).$
 (2) $(\varphi \circ \psi)(\lambda u) = \varphi(\psi(\lambda u)) = \varphi(\lambda \psi(u)) = \lambda \varphi(\psi(u)) = \lambda(\varphi \circ \psi)(u).$
2. из 1 следует, что $(\varphi \circ \psi)$ линейно, но при этом биективно как композиция двух биекций.

■

16.7 Изоморфные векторные пространства

Определение 65. Два векторных пространства V, W называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$.

Обозначается: $V \simeq W$ (либо $V \cong W$).

16.8 Отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств

Теорема 16.1. Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F .

Доказательство.

1. Рефлексивность: $Id : V \xrightarrow{\sim} V$.
2. Симметричность: $V \simeq W \implies W \simeq V$ следует из [Предложения 1](#).
3. Транзитивность: $U \simeq V, V \simeq W \implies U \simeq W$ следует из [Предложения 2](#).

■

16.9 Классы изоморфизма векторных пространств

Определение 66. Классы эквивалентности называются *классами изоморфизма*.

Пример. $F[x]_{\leq n} \simeq F^{n+1}$:

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

16.10 Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема 16.2. Пусть V, W — два конечномерных векторных пространства над F .

Тогда, $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$.

Лемма 16.3. $\dim V = n \implies V \simeq F^n$.

Доказательство. Фиксируем базис (e_1, \dots, e_n) в V .

Тогда, отображение $\varphi : V \rightarrow F^n$ из [Примера 5](#) — изоморфизм. ■

Лемма 16.4. Пусть $V \xrightarrow{\sim} W$ и e_1, \dots, e_n — базис V , тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W .

Доказательство. Пусть $w \in W$. Тогда $\exists x_1, \dots, x_n \in F$, такие что $\varphi^{-1}(w) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Тогда, $w = \varphi(\varphi^{-1}(w)) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \implies W = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$.

Теперь докажем линейную независимость:

Пусть $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = \vec{0}$.

Тогда, $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \vec{0}$.

Применяя φ^{-1} получаем, $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(\vec{0}) = \vec{0}$. Значит, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Итог: $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис в W . ■

Доказательство теоремы.

\Leftarrow Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда по [лемме 1](#) $V \simeq F^n, W \simeq F^n$, значит $V \simeq W$.

\Rightarrow Пусть $V \simeq W$. Фиксируем изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$.

Тогда по [лемме 2](#) получаем, что $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W , а значит $\dim V = n = \dim W$. ■

Упражнение. Если $\dim V = n$, то все изоморфизмы $V \xrightarrow{\sim} F^n$ находятся в биекции с базисами пространства V .

16.11 Задание линейного отображения путём задания образов векторов фиксированного базиса

Пусть V, W — векторные пространства над F и (e_1, \dots, e_n) — фиксированный базис в V .

Предложение.

1. Если $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение, то φ однозначно определяется векторами $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$,
2. $\forall w_1, \dots, w_n \in W \exists!$ линейное отображение φ , такое что, $\varphi(e_1) = w_1, \dots, \varphi(e_n) = w_n$.

Доказательство.

1. $v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$.

2. Зададим $\varphi : V \rightarrow W$ формулой $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$.

Тогда φ — линейное отображение из V в W (упражнение).

Единственность следует из [1](#) ■

17 Лекция 23.01.2020

17.1 Матрица линейного отображения

Пусть V, W — векторные пространства над F .

$\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W .

Пусть $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение.

$\forall j = 1, \dots, n$

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{mj}f_m = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Тогда, $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m) \cdot A$, где $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$.

Определение 67. A называется матрицей линейного отображения φ в базисах \mathfrak{e} и \mathfrak{f} .

Обозначение: $A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$.

В j -м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе \mathfrak{f} .

Обозначение 1. $\text{Hom}(V, W) :=$ множество всех линейных отображений из V в W .

Следствие (из предложения). При фиксированных базисах \mathfrak{e} и \mathfrak{f} отображение $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ является биекцией между $\text{Hom}(V, W)$ и $\text{Mat}_{m \times n}(F)$.

17.2 Примеры

$$0. \varphi(v) = 0 \ \forall v \implies \forall \mathfrak{e}, \mathfrak{f} \ A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — проекция на Oxy .

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{e} \text{ — стандартный базис в } \mathbb{R}^3 \\ \mathfrak{f} \text{ — стандартный базис в } \mathbb{R}^2 \end{array} \right\} \implies A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. $\Delta : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}, f \rightarrow f'$.

$\mathfrak{e} = (1, x, \dots, x^n), \mathfrak{f} = (1, x, \dots, x^{n-1})$.

$$A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$5. x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n) \\ \mathfrak{f} \text{ — стандартный базис} \end{array} \right\} \implies A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = E.$$

6. $\varphi : F^n \rightarrow F^m$.

$\varphi(x) = A \cdot x, A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$.

\mathfrak{e} — стандартный базис,

\mathfrak{f} — стандартный базис.

$A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = A$.

17.3 Связь координат вектора и его образа при линейном отображении

Предложение. Пусть $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение,

$\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W ,

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$.

$v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,

$\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$.

Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. $v = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Значит,

$$\varphi(v) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При этом,

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Так как f_1, \dots, f_m линейно независимы, то

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

■

17.4 Формула изменения матрицы линейного отображения между векторными пространствами V и W при замене их базисов

Пусть теперь \mathfrak{e}' — другой базис в V , \mathfrak{f}' — другой базис в W .

$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e} \cdot C_{\in M_n}$,

$\mathfrak{f}' = \mathfrak{f} \cdot D_{\in M_m}$.

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$,

$A' = A(\varphi, \mathfrak{e}', \mathfrak{f}')$.

Предложение. $A' = D^{-1} A C$.

Доказательство.

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C.$$

Применим φ ,

$$(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \cdot C = (f_1, \dots, f_m) \cdot A \cdot C$$

При этом,

$$(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) = (f'_1, \dots, f'_m) \cdot A' = (f_1, \dots, f_m) \cdot D \cdot A'.$$

Отсюда,

$$A \cdot C = D \cdot A' \implies A' = D^{-1} \cdot A \cdot C.$$

■

17.5 Операции сложения и умножения на скаляр на множестве всех линейных отображений между двумя векторными пространствами

Пусть $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$, $\lambda \in F$.

Определение 68.

1. Суммой линейных отображений φ и ψ называется линейное отображение $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$, такое что $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.
2. Произведение φ на λ — это линейное отображение $\lambda\varphi \in \text{Hom}(V, W)$, такое что $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$.

Упражнение. $\varphi + \psi$ и $\lambda\varphi$ — действительно линейные отображения.

Упражнение. $\text{Hom}(V, W)$ с этими операциями является векторным пространством над F .

17.6 Матрица суммы двух линейных отображений и произведения линейного отображения на скаляр

Зафиксируем базисы $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V и $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ в W .

Предложение.

1. $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$
 $A_\psi = A(\psi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$
 $A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$
2. $\lambda \in F, \varphi \in \text{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$
 $A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

Доказательство.

1.

$$\begin{aligned} (f_1, \dots, f_m) \cdot A_{\varphi+\psi} &= ((\varphi + \psi)(e_1), \dots, (\varphi + \psi)(e_n)) \\ &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) \\ &= (f_1, \dots, f_m)A_\varphi + (f_1, \dots, f_m)A_\psi \\ &= (f_1, \dots, f_m)(A_\varphi + A_\psi). \end{aligned}$$

Следовательно, $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$.

2. Аналогично. ■

17.7 Изоморфизм между пространством $\text{Hom}(V, W)$ и пространством $(m \times n)$ -матриц, где $n = \dim V$, $m = \dim W$

Следствие. При фиксированном \mathbf{e} и \mathbf{f} отображение $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ является изоморфизмом между $\text{Hom}(V, W)$ и $\text{Mat}_{m \times n}(F)$.

Доказательство. Биективность была выше. Линейность — из предыдущего предложения. ■

Следствие. $\dim \text{Hom}(V, W) = m \cdot n$.

17.8 Матрица композиции двух линейных отображений

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ — цепочка линейных отображений, а $\varphi \circ \psi : U \rightarrow W$ — их композиция,

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W ,

$\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k)$ — базис U .

$A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$,

$A_\psi = A(\psi, \mathbf{g}, \mathbf{e})$,

$A_{\varphi \circ \psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbf{g}, \mathbf{f})$.

Тогда, $A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$.

Доказательство. $(\psi(g_1), \dots, \psi(g_k)) = (e_1, \dots, e_n)A_\psi$. Тогда применяя φ ,

$$(\varphi(\psi(g_1)), \dots, \varphi(\psi(g_k))) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))A_\psi = (f_1, \dots, f_m)A_\varphi A_\psi.$$

С другой стороны,

$$(\varphi(\psi(g_1)), \dots, \varphi(\psi(g_k))) = (f_1, \dots, f_m)A_{\varphi \circ \psi}.$$

Значит, $A_\varphi \cdot A_\psi = A_{\varphi \circ \psi}$. ■

17.9 Ядро и образ линейного отображения; утверждение о том, что они являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах

Пусть $\varphi : V \rightarrow W$.

Определение 69. Ядро линейной оболочки φ — это $\ker \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.

Образ линейного отображения φ — это $\operatorname{Im} \varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

Пример. $\Delta : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n}, f \mapsto f'$,

$$\ker \Delta = \{f \mid f = \text{const}\},$$

$$\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}.$$

Предложение.

1. Ядро — подпространство в V .
2. Образ — подпространство в W .

Доказательство.

1. (a) $\varphi(0_V) = 0_W$,
 (b) $v_1, v_2 \in \ker \varphi \implies \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0 + 0 = 0 \implies v_1 + v_2 \in \ker \varphi$,
 (c) $\lambda \in F, v \in V \implies \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \ker \varphi$.
2. (a) $0_W = \varphi(0_V) \in \operatorname{Im} \varphi$,
 (b) $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} \varphi \implies \exists v_1, v_2 : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \implies w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im} \varphi$,
 (c) $\varphi \in F, w \in \operatorname{Im} \varphi \implies \exists v \in V : w = \varphi(v) \implies \varphi(w) = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \operatorname{Im} \varphi$. ■