# Математический анализ, Коллоквиум 2

Балюк Игорь

@lodthe, GitHub

2019 — 2020

## Содержание

# 1 Вопросы предварительной части коллоквиума

Список вопросов предварительной части коллоквиума, ответ на которые необходим для подготовки к основной части.

1. **Определение непрерывности функции в точке.**

   Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, если она определена на некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Другими словами, $A = f(x_0)$ и справедливы следующие определения предела функции в точке $x_0$:

   - ***По Коши***:

   $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

   - ***По Гейне***:

   $$\forall \{x_n\} : \; x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

   **Другое определение:**

   Пусть $f(x)$ — функция, определенная на промежутке $I$ ($I$ — это её область определения) и пусть $c$ — произвольная точка из $I$. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$:

   $$\forall x \in I : \; |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

   Тогда функция $f(x)$ ***непрерывна*** в точке $c$.

   Заметьте, если $c$ — это левая граница $I$, то условие имеет вид (функция непрерывна в точке $c$ справа, аналогично для непрерывности слева).

   $$\forall x \in I : \; c < x < c + \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

   **Теорема.** Также, функция $f(x)$ непрерывна в точке $a$. Тогда найдётся такое $\delta > 0$, что функция $f(x)$ ограничена окрестностью $U_\delta(a)$ точки $a$.

2. **Точки разрыва, их классификация.**

   Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U_\delta(a)$ и функция разрывна в $a$. Тогда этот разрыв является одним из следующих:

   - ***Устранимый разрыв***: пределы $f(x)$ справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:

   $$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) \neq f(a)$$

   - ***Неустранимый разрыв первого рода***: пределы $f(x)$ справа и слева существуют, но не равны друг другу
   - ***Неустранимый разрыв второго рода***: хотя бы один из односторонних пределов $f(x)$ не существует или равен бесконечности.

3. **Теорема о непрерывности сложной функции.**

   **Теорема.** Пусть функция $g(x)$ непрерывна в точке $a_0$ и функция $f(x)$ непрерывна в точке $b_0 = g(a_0)$. Тогда функция $f(g(x))$ непрерывна в точке $a_0$.

4. **Формулировки первой и второй теорем Вейерштрасса.**

   **Теорема Вейерштрасса (первая)** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

   **Теорема Вейерштрасса (вторая)** Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f$ достигает на нем своих нижней и верхней граней. То есть существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, так что для любого $x \in [a, b]$, выполняются неравенства:

   $$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$$

5. **Понятие производной функции в точке.**

   Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку $x_0$. Тогда функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке $x_0$, и ее производная определяется формулой

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

   если предел существует.

6. **Геометрический и физический смысл производной.**

   **Геометрический смысл производной**. Производная в точке $x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

   **Физический смысл производной**. Если точка движется вдоль оси $OX$ и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то мгновенная скорость точки: $v(t) = x'(t)$.

7. **Уравнение касательной к графику функции в точке.**

   Пусть дана функция $f$, которая в некоторой точке $x_0$ имеет конечную производную $f(x0)$. Тогда прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$, имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$, называется касательной.

   Итак, пусть дана функция $y = f(x)$, которая имеет производную $y = f'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда в любой точке $x_0 \in (a; b)$ к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

8. **Понятие дифференцируемости функции в точке.**

   Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке $x_0$ своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A, что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{\bar{o}}(x - x_0)$$

   и

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

9. **Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного).**

   Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в точке $x_0$. Тогда,

$$(g + f)'(x_0) = g'(x_0) + f'(x_0)$$
$$(g \cdot f)'(x_0) = g'(x_0) \cdot f(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)$$

   Если $g(x_0) \neq 0$, то

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

10. **Формула вычисления производной сложной функции.**

    Если $g(x)$ дифференцируема в точке $x_0$ и $f(x)$ дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0)$, тогда,

$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

11. **Таблица производных основных элементарных функций.**

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $const$ | $0$ |
| $x^a$ | $a \cdot x^{a-1}$ |
| $a^x$ | $a^x \cdot \ln a$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{\ln a \cdot x}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\operatorname{arcctg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |

**12. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.**

Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке $x_0$ своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A, что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{\bar{o}}(x - x_0)$$
$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

Тогда выражение $f'(x_0)dx$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке $x_0$. Обозначение: $df = df(x_0, dx)$. Обратите внимание, что $df$ зависит и от точки, и от $dx$.

**13. Геометрический смысл дифференциала.**

Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, когда аргумент $x$ получает приращение $\Delta x$.

Подробнее тут

**14. Определение локального экстремума. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).**

Точка $x_0$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $f$, если существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$ точки $x_0$, что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leqslant f(x_0) \text{ (для минимума соответственно } f(x) \geqslant f(x_0))$$

$x_0$ называется точкой строгого локального максимума (минимума), если

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \implies f(x) < f(x_0) \text{ (для минимума соответственно } f(x) > f(x_0))$$

**Теорема Ферма** Если функция имеет в точке локального экстремума производную, то эта производная равна нулю.

**15. Формулы Лагранжа и Коши.**

**Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале $(a, b)$, то в этом интервале существует хотя бы одна точка $x_0$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

**Теорема Коши. Обобщает формулу конечных приращений Лагранжа.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале $(a, b)$, причем $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$. Тогда в этом интервале существует точка $x = \xi$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

## 16. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной.

Предположим, что имеется некоторая функция $f(x)$ и надо исследовать ее поведение в некоторой точке $x_0$ или ее окрестности. Сама функция может быть при этом достаточно сложной, и поэтому непосредственное вычисление $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (как пример того, что мы хотим узнать о функции в $x_0$) окажется крайне трудоемким. Идея в том, чтобы найти такой многочлен $P_n(x)$, что $f(x) \sim P_n(x - x_0)$ при $x \to x_0$, а затем исследовать его. Работать с многочленами практически всегда намного проще.

Предположим пока, что $x_0 = 0$. Тогда $P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$. $P_n(0) = c_0$, а $P_n'(x) = c_1 + 2c_2 x + \dots + nc_n x^{n-1}$, из чего следует, что $c_1 = P_n'(0)$. По аналогии можно получить, что $c_2 = \dfrac{P_n''(0)}{2!}, \dots, c_n = \dfrac{P_n^{(n)}}{n!}$. Т.е. получаем, что $P_n(x) = P_n(0) + \dfrac{P_n'(0)}{1!}x + \dots + \dfrac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$, тогда справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(f, x)$$

Эта формула называется **формулой Тейлора** и обычно записывается в виде:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_n(f, x)}_{\text{остаточный член}}$$

## 17. Формулы Маклорена для основных элементарных функций.

1. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + \bar{\bar{o}}(x^n), x \to 0$
2. $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{x^n}{n} + \bar{\bar{o}}(x^n), x \to 0$
3. $\underset{\alpha \in \mathbb{R}}{(1 + x)^\alpha} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dbinom{\alpha}{k} x^k + \bar{\bar{o}}(x^n)$

   Например $(1 + x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \dbinom{\frac{1}{3}}{1} x + \dbinom{\frac{1}{3}}{2} x^2 + \bar{\bar{o}}(x^2) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{2} x^2 + \bar{\bar{o}}(x^2)$
4. $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{x^{2n-1}}{(2n - 1)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n-1})$
5. $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n-2}}{(2n - 2)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n-2})$
6. $\mathrm{tg}(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \dots + \dfrac{B_{2n}(-4)^n(1 - 4^n)}{(2n)!} \cdot x^{2n-1} + \bar{\bar{o}}(x^{2n-1})$, где $B_{2n}$ — числа Бернулли

   Но достаточно помнить, что $\mathrm{tg}(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \bar{\bar{o}}(x^5)$, т.е. общая формула для семинаров <u>не</u> нужна
7. $\arcsin(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3}{40}x^5 + \dots + \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n + 1)} \cdot x^{2n+1} + \bar{\bar{o}}(x^{2n+1})$

   Достаточно знать $\arcsin(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3}{40}x^5 + \bar{\bar{o}}(x^5)$
8. $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x)$
9. $\mathrm{arctg}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n-1}}{2n - 1} + \bar{\bar{o}}(x^{2n-1})$

**18. Правило Лопиталя.**

Если функции $f(x)$ и $g(x)$, дифференцируемые в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки $a$ обладают следующими свойствами

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или $\infty$
2. $g'(x) \neq 0$ в окрестности $U$
3. Существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

# 2 Вопросы на знание доказательств

**1. Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. Точки разрыва, их классификация.**

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, если она определена на некоторой окрестности этой точки $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Другими словами, $A = f(x_0)$ и справедливы следующие определения предела функции в точке $x_0$:

- ***По Коши***:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- ***По Гейне***:

$$\forall\{x_n\} :\ x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

**Теорема.** Определения предела функции в точке по Коши и Гейне эквивалентны

*Доказательство.* Пусть $f$ определена на множестве $X$ и число $A$ является пределом функции $f$ в точке $x_0$ в смысле Коши. Выберем произвольную подходящую последовательность $x_n, n \in \mathbb{N}$, т.е. такую, для которой $\forall n \in \mathbb{N} :\ x_n \in X$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Покажем, что $A$ является пределом в смысле Гейне.

Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и укажем для него такое $\delta > 0$, что $\forall x \in X$ из условия $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, для $\delta > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N$ будет выполняться неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Докажем теперь обратное утверждение: предположим, что $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в смысле Гейне, и покажем, что число $A$ является пределом функции $f$ в точке $x_0$ в смысле Коши. Предположим, что это неверно, т.е.

$$\exists\varepsilon_0 > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x_\delta \in X :\ 0 < |x_\delta - x_0| < \delta :\ |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon$$

В качестве $\delta$ рассмотрим $\delta = \dfrac{1}{n}$, а соответствующие значения $x_\delta$ будем обозначать $x_n$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняются условия $x_n \neq x_0, |x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ и $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ является подходящей, но число $A$ не является пределом функции $f$ в точке $x_0$. Получили противоречие. ∎

**Классицифкация разрывов:**

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U_\delta(a)$ и функция разрывна в $a$. Тогда говорят, что функция имеет

- ***Устранимый разрыв***: пределы $f(x)$ справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) \neq f(a)$$

- ***Неустранимый разрыв первого рода***: пределы $f(x)$ справа и слева существуют, но не равны друг другу
- ***Неустранимый разрыв второго рода***: хотя бы один из односторонних пределов $f(x)$ не существует или равен бесконечности.

**2. Непрерывность основных элементарных функций.**

TODO(): Спросить, что тут требуется.

**3. Арифметические свойства непрерывных функций.**

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0$.

Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ непрерывны в точке $x_0$.

Если функция $g(x_0) \neq 0$, то и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке $x_0$.

Доказать можно расписав пределы.

**4. Теорема о непрерывности сложной функции.**

**Теорема.** Если функция $g(t)$ непрерывна в точке $t_0$ и функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = g(t_0)$, то $f(g(t))$ непрерывна в $t_0$.

*Доказательство.* Для доказательства этой теоремы воспользуемся формальным преобразованием двух выражений с кванторами кванторов.

$f(x)$ непрерывна в $x_0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x : \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$g(t)$ непрерывна в $t_0$:

$$\forall \delta > 0 \ \exists \mu > 0 : \ \forall t : \ 0 < |t - t_0| < \mu \implies |g(t) - g(t_0)| < \delta$$

Получается, $f(g(t))$ непрерывна в $t_0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mu > 0 : \ \forall t : \ 0 < |t - t_0| < \mu \implies |f(g(t)) - f(g(t_0))| < \varepsilon$$

■

**5. Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).**

**Теорема Вейерштрасса (первая)** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то есть $\exists A :$ $\forall x \in [a, b] \implies |f(x)| \leqslant A$

*Доказательство.* Докажем от противного.

Пусть $f$ не ограничена на отрезке $[a, b]$, тогда:

$$\begin{gathered} \forall A > 0 \ \exists x_A \in [a, b] : \ |f(x_A)| > A \\ A = 1 \implies \exists x_1 \in [a, b] : \ |f(x_1)| > 1 \\ A = 2 \implies \exists x_2 \in [a, b] : \ |f(x_2)| > 2 \\ \vdots \\ A = n \implies \exists x_n \in [a, b] : \ |f(x_n)| > n \end{gathered}$$

Получим последовательность $\{x_n\} \subset [a, b]$, то есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить подпоследовательность, которая сходится к точке $c$, то есть

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$$

Тогда $c \in [a,b]$. Но по условию функция непрерывна в точке $c$ и тогда по определению непрерывности в точке по Гейне $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$.

С другой стороны

$$|f(x_{n_k})| > n_k, n_k \geqslant k \implies \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$$

А это противоречит единственности предела. ■

**Теорема Вейерштрасса (вторая)** Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f$ достигает на нем своих нижней и верхней граней. То есть существуют такие точки $c_1, c_2 \in [a,b]$, так что для любого $x \in [a,b]$, выполняются неравенства:

$$f(_2) \leqslant f(x) \leqslant f(_1)$$

*Доказательство.* Докажем $\exists c_1 \in [a,b] : \ f(c_1) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Пусть $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (существование следует из первой теоремы Вейерштрасса). В силу определения точной верхней грани выполняется условие:

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b] \implies f(x) \leqslant M \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in [a,b] : \ M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \end{cases}$$

Полагая $\varepsilon = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}$ получим последовательность $\{x_n\}$ такую, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются условия $M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M$, откуда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ и точка $c$ (по теореме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке $c$), такие что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$, где $c \in [a,b]$.

В силу непрерывности функции $f$ в точке $c$, получаем $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$.

С другой стороны, $\{f(x_{n_k})\}$ — подпоследовательность последовательности $\{f(x_n)\}$, сходящейся к числу $M$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$.

В силу единственности предела последовательности заключаем, что $f(c) = M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Утверждение $\exists c_1 \in [a,b] : \ f(c_1) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ доказано.

Аналогично доказывается $\exists c_2 \in [a,b] : \ f(c_2) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

Функция непрерывна на интервале может не достигать своих точных граней (требовать непрерывности на сегменте существенно). ■

## 6. Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.

**Теорема Больцано-Коши (первая), о нулях непрерывной функции** Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ и на своих концах принимает значение разных знаков, то существует такая точка, принадлежащая этому отрезку, в которой функция обращается в нуль.

*Доказательство.* Геометрически очень легко: функция пересечет ось $OX$.

Алгебраически: разделим отрезок $[a,b]$ точкой $x_0$ на два равных по длине отрезка, тогда либо $f(x_0) = 0$ и, значит, искомая точка $x_0$ найдена, либо $f(x_0) \neq 0$ и тогда на концах одного из полученных промежутков функция $f$ принимает значения разных знаков, точнее, на левом конце значение меньше нуля, на правом — больше.

Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$ и разделим его снова на два равных подлине отрезка и т.д. В результате, либо через конечное число шагов придем к искомой точке $x$, в которой $f(x) = 0$, либо получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ по длине стремящихся к нулю и таких, что

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

Пусть $\gamma$ — общая точка всех отрезков $[a_n, b_n]$. Тогда $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Поэтому, в силу непрерывности функции $f$

$$f(\gamma) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Откуда следует, что $f(\gamma) = 0$. ■

**Теорема Больцано-Коши (вторая), о промежуточном значении непрерывных функций** Если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $A = f(a) \neq f(b) = B$, число $C \in (A, B)$, тогда существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.

Другими словами, утверждается, что если непрерывная функция, принимает два значения, то она принимает и любое значение между ними.

*Доказательство.* Не нарушая общности будем считать, что $A = f(a) < f(b) = B$. Рассмотри функцию $h(x) = f(x) - C$, непрерывность на отрезке $[a, b]$ которой следует из непрерывности функции $f$. Очевидно что $h(a) = A - C < 0$ и $h(b) = B - C > 0$. Применяем к $h$ первую теорему Больцано-Коши и находим точку $c$, в которой $h(c) = f(c) - C = 0$, то-есть $f(c) = C$. Теорема доказана. ■

7. **Понятие производной функции в точке.**

   Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку $x_0$. Тогда функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке $x_0$, и ее производная определяется формулой

   $$f'(x_0) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

   если предел существует.

8. **Геометрический и физический смысл производной.**

   **Геометрический смысл производной**. Производная в точке $x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

   **Физический смысл производной**. Если точка движется вдоль оси $OX$ и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то мгновенная скорость точки: $v(t) = x'(t)$.

9. **Уравнение касательной к графику функции в точке.**

   Пусть дана функция $f$, которая в некоторой точке $x_0$ имеет конечную производную $f(x0)$. Тогда прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$, имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$, называется касательной.

   Итак, пусть дана функция $y = f(x)$, которая имеет производную $y = f'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда в любой точке $x_0 \in (a; b)$ к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:

   $$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

10. **Понятие дифференцируемости функции в точке.**

    Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке $x_0$ своей области определения $D[f]$, если существует такая константа А, что:

    $$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{\bar{o}}(x - x_0)$$

    и

    $$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

**11. Необходимое условие дифференцируемости.**

**Теорема.** Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, то она непрерывна в этой точке.

*Доказательство.* Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$. Тогда её приращение представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$$

Но тогда при $\Delta x \to 0$ будет $\Delta y \to 0$, а это означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке $x_0$. ■

Обратите внимание, что из непрерывности не следует дифференцируемости (например, $f(x) = |x|$).

**12. Правила дифференцирования.**

TODO(): Спросить, что тут имеется ввиду. Производная суммы/произведения функций?

**13. Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.**

**Теорема.** Пусть функцию $y = y(x)$ от переменной $x$ можно представить как сложную функцию в следующем виде:

$$y(x) = f(u(x))$$

где $f(u)$ и $u(x)$ есть некоторые функции. Функция $u = u(x)$ дифференцируема при некотором значении переменной $x$. Функция $f(u)$ дифференцируема при значении переменной $u = u(x)$. Тогда сложная (составная) функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке $x$ и ее производная определяется по формуле:

$$y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

*Доказательство.* Введем следующие обозначения.

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$$
$$\Delta f = f(u + \Delta x) - f(u) = f(u(x + \Delta x)) - f(u(x))$$

Здесь $\Delta u$ есть функция от переменных $x$ и $\Delta x$, $\Delta f$ есть функция от переменных $u$ и $\Delta u$. Но мы будем опускать аргументы этих функций, чтобы не загромождать выкладки.

Поскольку функции $u$ и $f$ дифференцируемы в точках $x$ и $u = u(x)$, соответственно, то в этих точках существуют производные этих функций, которые являются следующими пределами:

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$f'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\varepsilon(\Delta u) = \frac{\Delta f}{\Delta u} - f'(u)$$

При фиксированном значении переменной $u$, $\varepsilon$ является функцией от $\Delta u$. Очевидно, что

$$\lim_{\Delta u \to 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Тогда

$$\Delta f = (f'(u) + \varepsilon(\Delta u)) \cdot \Delta u$$

Поскольку функция $u(x)$ является дифференцируемой функцией в точке $x$, то она непрерывна в этой точке. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta u) = \lim_{\Delta u \to 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Теперь находим производную.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left( f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\
&= f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= f'(u) \cdot u'(x) + 0 \cdot u'(x) \\
&= f'(u) \cdot u'(x)
\end{aligned}$$

Формула доказана. ■

**14. Теорема о дифференцируемости обратной функции.**

**Теорема.** Рассмотрим функцию $f(x)$, которая является строго монотонной на некотором интервале $(a, b)$. Если в этом интервале существует такая точка $x_0$, что $f'(x_0) \neq 0$, то функция $x = \phi(y)$, обратная к функции $y = f(x)$, также дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и её производная равна

$$\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

*Доказательство.* Пусть переменная $y$ в точке $y_0$ получает приращение $\Delta y \neq 0$. Соответствующее ему приращение переменной $x$ в точке $x_0$ обозначим как $\Delta x$, причем $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y = f(x)$. Запишем отношение приращений в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Допустим, что $\Delta y \to 0$, тогда $\Delta x \to 0$, поскольку обратная функция $x = \phi(y)$ является непрерывной в точке $y_0$. В пределе, при $\Delta x \to 0$, правая часть записанного соотношения становится равной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

В таком случае левая часть тоже стремится к пределу, который по определению равен производной обратной функции:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \phi'(y_0)$$

Таким образом,

$$\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

■

### 15. Таблица производных основных элементарных функций.

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $const$ | $0$ |
| $x^a$ | $a \cdot x^{a-1}$ |
| $a^x$ | $a^x \cdot \ln a$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{\ln a \cdot x}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\operatorname{arcctg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |

### 16. Производные функций, графики которых заданы параметрически.

**Теорема.** Зависимость между аргументом $x$ и функцией $y$ может быть задана в параметрическом виде с помощью двух уравнений:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

Пусть $x = \phi(t)$ и $y = \psi(t)$ определены и дифференцируемы при $t \in (a, b)$, причем $x'_t = \phi'(t) \neq 0$ и $x = \phi(t)$ имеет обратную функцию $t = \theta(x)$, то

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

*Доказательство.* Перейдем от параметрического задания к явному. При этом получаем сложную функцию $y = \psi(t) = \psi(\theta(x))$, аргументов которой является $x$.

По правилу нахождения производной сложной функции имеем

$$y'_x = (\psi(\theta(x)))' = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x)$$

По теореме об обратной функции $\theta'(x) = \dfrac{1}{\phi'(t)}$. А значит

$$y'_x = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x) = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

■

### 17. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.

Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке $x_0$ своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A, что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{\bar{o}}(x - x_0)$$
$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

Тогда выражение $f'(x_0)dx$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке $x_0$. Обозначение: $df = df(x_0, dx)$. Обратите внимание, что $df$ зависит и от точки, и от $dx$.

**18. Геометрический смысл дифференциала. [На коллоквиуме будет отсутствовать]**

Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, когда аргумент $x$ получает приращение $\Delta x$.

Подробнее тут

**19. Инвариантность формы первого дифференциала. [На коллоквиуме будет отсутствовать]**

**20. Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке. [На коллоквиуме будет только производная высших порядков]**

Рассмотрим функцию, дифференцируемую на множестве $E$. Т.е. $\exists f'(x)$, Если $f'(x)$ тоже дифференцируема на $E$, то $\exists (f'(x))' = f''(x)$.

Производной $n$-ого порядка будем считать $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, причем $f^{(0)}(x) = f(x)$. Разумеется, для существования производной $n$-ого порядка должны существовать производные всех меньших порядков.

Множество функция, имеющих все производные до порядка $n$ включительно на множестве $E$, обозначается $C^{(n)}(E)$. Рассмотрми несколько примеров

- $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$
$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right)$$
$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin x$$

  Докажем по индукции, что $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)$. При $n = 1$ уже было показано ранее. Пусть это верно при некотором $n$, покажем для $n = n + 1$.

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right)$$
$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi n}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right)$$

- $f(x) = e^x$. $f^{(n)}(x) = e^x$
- $f(x) = x^m$. Беря $n$ раз производную, получаем, что $f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$
- $f(x) = \ln x$. $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. $f^{(n)}(x^{-1}) = (-1)(-2)\dots(-n)x^{-1-n} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-1-n}$, Тогда получаем, что

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x-1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

**Теорема (Формула Лейбница)** Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют не менее $n$ производных на множестве $E$. Тогда

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$$

*Доказательство.* Докажем по индукции. При $n = 1$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \cdot u^{(1-k)} \cdot v^{(k)}$$

Пусть равенство верно при некотором $n$, докажем его справедливость при $n = n + 1$. Беря по определению производную $(u \cdot v)^{(n+1)}$

$$
\begin{aligned}
(u\cdot v)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot u^{(n-k+1)}\cdot v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot u^{(n-k)}\cdot v^{(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot u^{(n-k+1)}\cdot v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\cdot u^{(n-k+1)}\cdot v^{(k)} \\
&= \binom{n}{0}\cdot u^{(n+1)}\cdot v + \sum_{k=1}^{n}(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1})\cdot u^{(n-k+1)}\cdot v^{(k)} + \binom{n}{n}\cdot u\cdot v^{(n+1)} \\
&= \binom{n}{0}\cdot u^{(n+1)}\cdot v + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\cdot u^{(n-k+1)}\cdot v^{(k)} + \binom{n}{n}\cdot u\cdot v^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot u^{(n-k+1)}\cdot v^{(k)}
\end{aligned}
$$

Последний переход сделан при помощи следующего рассуждения:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

■

## 21. Понятие об экстремумах функции одной переменной.

Точка $x_0$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $f$, если существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$ точки $x_0$, что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leqslant f(x_0)$$

и точкой локального минимума, если

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \geqslant f(x_0)$$

**Теорема Ферма** Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x_0$, то ее производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

## 22. Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

**Теорема Ферма** Пусть функция $f$ определена на интервале $(a, b)$ и в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение на этом интервале. Если существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

*Доказательство.* Пусть $x_0$ — точка максимума функции $f$. Рассмотрим разностное отношение $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Так как $f(x) \leqslant f(x_0)$, то при $x > x_0$ имеем $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$, и, следовательно, $f'_+(x_0) \leqslant 0$. Если же $x < x_0$, то $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, и поэтому $f'_-(x_0) \geqslant 0$. Но из дифференцируемости функции $f$ в точке $x_0$ следует, что $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$ (следует из равности предела справа и слева). ■

С геометрической точки зрения теорема Ферма означает, что если в точке экстремума у графика функции существует касательная, то она параллельна оси $OX$.

## 23. Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши.

**Теорема Ролля. О нуле производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения** Пусть функция $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2. дифференцируема на интервале $(a, b)$;
3. $f(a) = f(b)$

Тогда на интервале $(a, b)$ найдется, по крайней мере, одна точка $x_0$, в которой $f'(x_0) = 0$.

*Доказательство.* Если функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$ (а значит, её минимальное и максимальное значение совпадают), то производная равна нулю в любой точке интервала $(a, b)$, в этом случае утверждение справедливо.

Иначе, минимальное и максимальное значение функции не совпадают. По второй теореме Вейерштрасса (о достижении функции значения точной верхней/нижней грани на отрезке), функция достигает своего наибольшего или наименьшего значения в точке $\xi$ интервала $(a, b)$, т.е. в точке $\xi$ существует локальный экстремум. Тогда по теореме Ферма производная в этой точке равна нулю

$$f'(\xi) = 0$$

■

**Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале $(a, b)$, то в этом интервале существует хотя бы одна точка $x_0$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) + \lambda x$.

Выберем число $\lambda$ таким, чтобы выполнялось условие $F(a) = F(b)$, тогда

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b \implies f(b) - f(a) = \lambda(a - b) \implies \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

В результате получаем

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале $(a, b)$ и принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале $(a, b)$ существует такая точка $\xi$, что $F'(\xi) = 0$.

Отсюда следует, что $0 = f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ или

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Хорда, проходящая через точки графика, соответствующие концам отрезка $a$ и $b$ имеет угловой коэффициент, равный

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Тогда внутри отрезка существует точка $x = \xi$, в которой касательная к графику параллельна хорде.

**Теорема Коши. Обобщает формулу конечных приращений Лагранжа.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интвервале $(a, b)$, причем $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$. Тогда в этом интервале существует точка $x = \xi$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

*Доказательство.* **Доказательство совпадает с доказательством теормы Лагранжа**.

Прежде всего заметим, что знаменатель в левой части формулы Коши не равен нулю: $g(b)-g(a)\neq 0$. Действительно, если $g(a)=g(b)$, то по теореме Ролля найдется точка $\mu\in(a,b)$, в которой $g'(\mu)=0$. Это, однако, противоречит условию, где указано, что $\forall x\in(a,b):\ g'(x)\neq 0$.

Введем вспомогательную функцию $F(x)=f(x)+\lambda g(x)$.

Выберем число $\lambda$ таким, чтобы выполнялось условие $F(a)=F(b)$, тогда

$$f(a)+\lambda g(a)=f(b)+\lambda g(b) \implies f(b)-f(a)=\lambda(g(a)-g(b)) \implies \lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

В результате получаем

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot x$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале $(a,b)$ и при найденном значении $\lambda$ принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале $(a,b)$ существует такая точка $\xi$, что $F'(\xi)=0$.

Отсюда следует, что

$$0=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(\xi)$$

или

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

■

**24. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.**

**25. Формулы Маклорена для основных элементарных функций.**

1. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\bar{\bar{o}}(x^n), x\to 0$
2. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}+\bar{\bar{o}}(x^n), x\to 0$
3. $\underset{\alpha\in\mathbb{R}}{(1+x)^\alpha}=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k+\bar{\bar{o}}(x^n)$

   Например $(1+x)^{\frac{1}{3}}-1=\binom{\frac{1}{3}}{1}x+\binom{\frac{1}{3}}{2}x^2+\bar{\bar{o}}(x^2)=\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2+\bar{\bar{o}}(x^2)$
4. $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\bar{\bar{o}}(x^{2n-1})$
5. $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\bar{\bar{o}}(x^{2n-2})$
6. $\mathrm{tg}(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\dots+\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}\cdot x^{2n-1}+\bar{\bar{o}}(x^{2n-1})$, где $B_{2n}$ — числа Бернулли

   Но достаточно помнить, что $\mathrm{tg}(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\bar{\bar{o}}(x^5)$, т.е. общая формула для семинаров не нужна
7. $\arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+\dots+\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}\cdot x^{2n+1}+\bar{\bar{o}}(x^{2n+1})$

   Достаточно знать $\arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+\bar{\bar{o}}(x^5)$
8. $\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$

9. $\operatorname{arctg}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \bar{\bar{o}}(x^{2n-1})$

**26. Правило Лопиталя.**

1.

**Теорема Лопиталя (первое правило)** Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

(a) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки $a$

(b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

(c) $g'(x) \neq 0$ в окрестности $U$

(d) Существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Докажем теорему для случая, когда пределы равны 0

*Доказательство.* Доопределим функции в точке $a$ нулём. Из первого условия следует, что $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, x]$, где $x$ принадлежит рассматриваемой окрестности точки $a$. Применим обобщённую формулу конечных приращений (Коши) к $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a, x]$.

$$\exists \xi \in [a, x] : \ \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Так как $g(a) = f(a) = 0$ получим, что $\forall x \ \exists \xi \in [a, x] : \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Пусть предел отношения производных равен $A$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim\limits_{y\to a} \dfrac{f'(y)}{g'(y)} = A$, так как $\lim\limits_{x\to a} \xi(x) = a$. ■

2. Докажем теорему для случая, когда пределы равны $\infty$. Условия:

**Теорема Лопиталя (второе правило)** Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо следующее:

(a) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы при $x > a$

(b) $\lim\limits_{x\to a+0}$ представляет собой неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

(c) $g'(x) \neq 0$ при $x > a$

(d) Существует конечный $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

то $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

*Доказательство.* TODO(): почемутакмного, точно ли это было на лекции? Пруф ■

**27. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке.**

**Теорема.** Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале $(a, b)$ строго возрастала, достаточно, чтобы $\forall x \in (a, b) : \ f'(x) > 0$

Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале $(a, b)$ строго убывала, достаточно, чтобы $\forall x \in (a, b) : \ f'(x) < 0$

*Доказательство.* Докажем для строгого возрастания. Пусть $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a, b)$. Выберем произвольные точки $x_1, x_2 \in (a, b)$, и, не ограничивая общности, скажем, что $x_1 < x_2$.

Применим формулу конечных приращений Лагранжа. Так как $f'(\xi) > 0$ и $x_2 > x_1$, имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$$

■

**28. Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]**

29. **Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]**

30. **Достаточные условия выпуклости (вогнутости). [На коллоквиуме будет отсутствовать]**

31. **Точки перегиба.**

32. **Необходимые и достаточные условия для точки перегиба. [На коллоквиуме будет отсутствовать]**

33. **Асимптоты графика функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]**