Линейная алгебра, Коллоквиум

Бобень Вячеслав
@darkkeks, GitHub
Большую часть исходного кода предоставила Левина Александра.
Благодарность выражается Левину Александру за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

"К коллоку можете даже не готовиться".

— Роман Сергеевич Авдеев

Содержание

1 Определения и формулировки

1. **Сумма двух матриц, произведение матрицы на скаляр**

   Для любых $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$

   - *Сложение* $A+B := (a_{ij}+b_{ij})$
   - *Умножение на скаляр* $\alpha \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij})$

2. **Транспонированная матрица**

   $$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T \in \mathrm{Mat}_{n\times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

   A^T — *транспонированная матрица*

3. **Произведение двух матриц**

   Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$

   $A_{(i)} = \big(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\big)$ — i-я строка матрицы A

   $A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ — j-й столбец матрицы A

   1) Частный случай: умножение строки на столбец той же длинны

   $$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1\times n}\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

   2) Общий случай:

      A - матрица размера $m \times \underline{n}$

      B - матрица размера $\underline{n} \times p$

      Количество строк матрицы A равно количеству столбцов матрицы B — условие согласованности матриц

      $AB := C \in \mathrm{Mat}_{m\times p}$, где $C_{ij} = A_{(i)}B^{(j)}$

4. **Диагональная матрица, умножение на диагональную матрицу слева и справа**

   Определение 1. Матрица $A \in M_n$ называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$)

   Лемма 1.1. $A = diag(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

   1. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{n\times p} \implies AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$
   2. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \implies BA = \begin{pmatrix} a_1 B^{(1)} & a_2 B^{(2)} & \dots & a_n B^{(n)} \end{pmatrix}$

5. **Единичная матрица, её свойства**

   Определение 2. Матрица $E = E_n = diag(1, 1, \dots, 1)$ называется *единичной матрицей* порядка n.

   $$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

   Свойства:

   1. $EA = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$

2. $AE = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{p\times n}$
3. $AE = EA = A \quad \forall A \in M_n$

6. След квадратной матрицы и его поведение при сложении матриц, умножении матрицы на скаляр и транспонировании

Определение 3. *Следом* матрицы $A \in M_n$ называется число $trA = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Свойства:

1. $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,B$
2. $\mathrm{tr}\,\lambda A = \lambda\,\mathrm{tr}\,A$
3. $\mathrm{tr}\,A^T = \mathrm{tr}\,A$

7. След произведения двух матриц

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

$\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}, B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$

8. Совместные и несовместные системы линейных уравнений

Определение 4. СЛУ называется

– *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение

– *несовместной*, если решений нет

9. Эквивалентные системы линейных уравнений

Определение 5. Две системы уравнений от одних и тех же неизвестных называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

10. Расширенная матрица системы линейных уравнений

$Ax = b,\ A \in \mathrm{Mat}_{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m$

Полная информация о СЛУ содержится в её *расширенной матрице*.

$$\big(A \mid b\big) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

11. Элементарные преобразования строк матрицы

тип	СЛУ	расширенная матрица
1.	К i-му уравнению прибавить j-ое, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ $(i \neq j)$	$Э_1(i,j,\lambda)$
2.	Переставить i-е и j-е уравнения $(i \neq j)$	$Э_2(i,j)$
3.	Умножить i-ое уравнение на $\lambda \neq 0$	$Э_3(i,\lambda)$

1. $Э_1(i,j,\lambda)$: к i-ой строке прибавить j-ую, умноженную на λ (покомпонентно),
   $a_{ik} \mapsto a_{ik} + \lambda a_{jk}\ \forall k = 1, \dots, n$,
   $b_i \mapsto b_i + \lambda b_j$.
2. $Э_2(i,j)$: переставить i-ую и j-ую строки.
3. $Э_3(i,\lambda)$: умножить i-ю строку на λ (покомпонентно).

$Э_1, Э_2, Э_3$ называются *элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы.*

12. Ступенчатый вид матрицы

Определение 6. Матрица $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ называется *ступенчатой*, или имеет ступенчатый вид, если:

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк строго возрастают.
2. Все нулевые строки стоят в конце.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \diamond & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \diamond & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \diamond & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\diamond \neq 0$, $*$ – что угодно.

13. Улучшенный ступенчатый вид матрицы

Определение 7. М имеет *улучшенный ступенчатый вид*, если:

1. М имеет обычный ступенчатый вид.
2. Все ведущие элементы равны 1.
3. В одном столбце с любым ведущим элементом стоят только нули.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Теорема о виде, к которому можно привести матрицу при помощи элементарных преобразований строк

Теорема 1.2.

1) Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду.
2) Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

Следствие. Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к **улучшенному** ступенчатому виду.

15. Общее решение совместной системы линейных уравнений

16. Сколько может быть решений у системы линейных уравнений с действительными коэффициентами?

17. Однородная система линейных уравнений. Что можно сказать про её множество решений?

Очевидный факт. Всякая ОСЛУ имеет нулевое решение ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$).

Следствие. Всякая ОСЛУ либо имеет ровно 1 решение (нулевое), либо бесконечно много решений.

18. Свойство однородной системы линейных уравнений, у которой число неизвестных больше числа уравнений

Следствие. Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение

19. Связь между множеством решений совместной системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей ей однородной системы

Пусть дана совместная СЛУ $Ax = b$

Частное решение СЛУ — это какое-то одно её решение.

Утверждение 1.3. *Пусть $Ax = b$ – совместная СЛУ.*

x_0 – частное решение $Ax + b$

$S \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений ОСЛУ $Ax = 0$

$L \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений $Ax = b$.

Тогда, $L = x_0 + S$, где $x_0 + S = \{x_0 + v \mid v \in S\}$

20. Обратная матрица

Определение 8. Матрица $B \in M_n$ называется *обратной*, к A, если $AB = BA = E$.

Обозначение: $B = A^{-1}$

21. Перестановки множества $\{1, 2, ..., n\}$

Определение 9. *Перестановкой множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется упорядоченный набор $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, в котором каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Обозначение: P_n – множество всех перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Например, $(4, 2, 1, 3) \in P_4$.

Определение 10. *Подстановкой* на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется всякое биективное (взаимно однозначное) отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя.

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots i_n & \end{pmatrix}$$

22. Инверсия в перестановке. Знак перестановки. Чётные и нечётные перестановки

Пусть $\sigma \in S_n$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$

Определение 11. Пара $\{i, j\}$ (неупорядоченная) образует *инверсию* в σ, если числа $i - j$ и $\sigma(i) - \sigma(j)$ имеют разный знак (то есть либо $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$, либо $i > j$ и $\sigma(i) < \sigma(j)$).

Определение 12. *Знак* подстановки σ – это число $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{<\text{число инверсий в } \sigma>}$.

Определение 13. σ называется *четной*, если $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ (четное количество инверсий), и *нечетной* если $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ (нечетное количество инверсий).

23. Произведение двух перестановок

Определение 14. *Произведением* (или *композицией*) двух подстановок $\sigma, \rho \in S_n$ называется такая постановка $\sigma\rho \in S_n$, что $(\sigma\rho)(x) := \sigma(\rho(x))\ \forall x \in \{1, \ldots, n\}$.

24. Тождественная перестановка и её свойства. Обратная перестановка и её свойства

Определение 15. Подстановка $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$ называется *тождественной* перестановкой.

Свойства:

$\forall \sigma \in S_n \quad id \cdot \sigma = \sigma \cdot id = \sigma$.

$\operatorname{sgn}(id) = 1$.

Определение 16. $\sigma \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \implies$ подстановка $\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ называется *обратной* к σ перестановкой.

Свойства: $\sigma \cdot \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \cdot \sigma$

25. Теорема о знаке произведения двух перестановок

Теорема 1.4. $\sigma, \rho \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho$.

26. Транспозиция. Знак транспозиции

Пусть $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Рассмотрим перестановку $\tau_{ij} \in S_n$, такую что

$\tau_{ij}(i) = j$.

$\tau_{ij}(j) = i$.

$\tau_{ij}(k) = k\ \forall k \neq i, j$.

Определение 17. Подстановки вида τ_{ij} называются *транспозициями*.

Замечание. τ – траспозиция $\implies \tau^2 = id, \tau^{-1} = \tau$.

Лемма 1.5. $\tau \in S_n$ – транспозиция $\implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$.

27. Общая формула для определителя квадратной матрицы произвольного порядка

Определение 18. Определителем матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

($\sum_{\sigma \in S_n}$ – сумма по всем перестановкам)

28. Определители 2-го и 3-го порядка

- $n = 2$
  $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \implies \det A = (+1)a_{11}a_{22} + (-1)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $n = 3$
  $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$
  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$

29. Поведение определителя при разложении строки (столбца) в сумму двух

Если $A_{(i)} = A^1_{(i)} + A^2_{(i)}$, то $\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^1_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^2_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Аналогично, если $A^{(j)} = A^{(j)}_1 + A^{(j)}_2$, то $\det A = \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_1 \cdots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_2 \cdots A^{(n)})$.

30. Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов)

Если в A поменять местами две строки или два столбца, то $\det A$ поменяет знак.

31. Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на скаляр

Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженный на скаляр, то $\det A$ не изменится.

32. Верхнетреугольные и нижнетреугольные матрицы

Определение 19. Матрица называется *верхнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, *нижнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ $i < j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – верхнетреугольная}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – нижнетреугольная}$$

33. Определитель верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы

Если A верхнетреугольная или нижнетреугольная, то $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

34. Определитель диагональной матрицы. Определитель единичной матрицы

Так как матрица диагональна, она верхнетреугольна. Тогда, её определитель равен произведению элементов на диагонали:

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

Значит, определитель единичной матрицы – 1.

$\det E = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$.

35. Матрица с углом нулей и её определитель

Предложение.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right) \text{ или } A = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array}\right),\ P \in M_k,\ R \in M_{n-k} \implies \det A = \det P \det R.$$

Матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

НЕ матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

36. Определитель произведения двух матриц

Теорема 1.6. $A, B \in M_n \implies \det(AB) = \det A \det B$.

37. Дополнительный минор к элементу квадратной матрицы

Определение 20. *Дополнительным минором* к элементу a_{ij} называется определитель $(n-1)\times(n-1)$ матрицы, получающейся из вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Обозначение: $\overline{M}_{ij}$.

38. Алгебраическое дополнение к элементу квадратной матрицы

Определение 21. *Алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_{ij}$.

39. Формула разложения определителя по строке (столбцу)

Теорема 1.7. *При любом фиксированном $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – \textit{разложение по i-й строке.}}$$

Аналогично, для любого фиксированного $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – \textit{разложение по j-у столбцу.}}$$

40. Лемма о фальшивом разложении определителя

Лемма 1.8.

1. При любых $i, k \in \{1, 2, \dots, n\} : i \neq k \implies \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$.
2. При любых $j, k \in \{1, 2, \dots, n\} : j \neq k \implies \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$

41. Невырожденная матрица

Определение 22. Матрица $A \in M_n$ называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, и *вырожденной* иначе (то есть $\det A = 0$).

42. Присоединённая матрица

Определение 23. *Присоединенной* к А матрицей называется матрица $\widehat{A} = (A_{ij})^T$.

43. Критерий обратимости квадратной матрицы

Теорема 1.9. *A обратима (то есть $\exists A^{-1}$) $\iff$ A невырождена ($\det A \neq 0$).*

44. Явная формула для обратной матрицы

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A}$

45. Критерий обратимости произведения двух матриц. Матрица, обратная к произведению двух матриц

46. Формулы Крамера

Пусть есть СЛУ $Ax = b(\star)$, $A \in M_n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Также, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i = (A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$.

Теорема 1.10. *Если $\det A \neq 0$, то СЛУ ($\star$) имеет единственное решение и его можно найти по формулам:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

47. Что такое поле?

Определение 24. *Полем* называется множество F, на котором заданы две операции “сложение” ($(a, b) \to a + b$) и “умножение” ($(a, b) \to a \cdot b$), причем $\forall a, b, c \in F$ выполнены следующие условия:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$ (нулевой элемент)
4. $\exists (-a) \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$ (противоположный элемент)
   $\uparrow$ абелева группа $\uparrow$
5. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность)
6. $ab = ba$ (коммутативность умножения)
7. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
8. $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1a = a1 = a$ (единица)
9. Если $a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in F : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (обратный элемент)

48. Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме

Определение 25. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$ называется его *алгебраической формой.* Число i называется *мнимой единицей.*

$a =: Re(z)$ – *действительная* часть числа z. $b =: Im(z)$ – *мнимая* часть числа z.

49. Комплексное сопряжение и его свойства: сопряжение суммы и произведения двух комплексных чисел

Определение 26. Число $\overline{z} := a - bi$ называется *комплексно сопряженным* к числу $z = a + bi$.

Операция $z \to \overline{z}$ называется *комплексным сопряжением.*

1.49.1 Свойства комплексного сопряжения

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

50. Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация в ней сложения и сопряжения

Числу $z = a + bi$ соответствует точка (или вектор) на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (a, b). Сумме $z + w$ соответствует сумма соответствующих векторов. Сопряжение $z \to \overline{z}$ – это отражение z относительно действительной оси.

51. Модуль комплексного числа и его свойства: неотрицательность, неравенство треугольника, модуль произведения двух комплексных чисел

Определение 27. Число $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ называется *модулем числа* $z = a+bi \in \mathbb{C}$ (то есть длина соответствующего вектора).

Свойства

1. $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $|z+w| \leqslant |z| + |w|$ (неравенство треугольника).
3. $z\overline{z} = |z|^2$.
   $z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i = a^2 + b^2 = |z|^2$
4. $|zw| = |z||w|$
   $|zw|^2 = (zw)\cdot(\overline{zw}) = z\cdot w\cdot\overline{z}\cdot\overline{w} = |z|^2|w|^2$

52. Аргумент комплексного числа

Определение 28. *Аргументом числа* $z = a+bi \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ называется число $\varphi \in \mathbb{R}$, такое что

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

В геометрических терминах, φ есть угол между осью Ox и соответствующим вектором.

53. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Определение 29. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется его *тригонометрической формой.*

Предложение. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Следствие. В условиях предложения, предположим, что $z_2 \neq 0$.

Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

В частности, $\frac{1}{|z_2|}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)) = \frac{1}{|z_2|}(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) = \frac{\overline{z}_2}{|z_2|^2}$.

54. Формула Муавра

Следствие. Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \text{ – формула Муавра.}$$

55. Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Определение 30. *Корнем степени* n (или *корнем* n*-й степени)* из числа z называется всякое число $w \in \mathbb{C}$, что $w^n = z$.

Положим $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$.

Опишем множество $\sqrt[n]{z}$.

$w = \sqrt[n]{z} \implies w^n = z \implies |w|^n = |z|$.

Если $z = 0$, то $|z| = 0 \implies |w| = 0 \implies w = 0 \implies \sqrt[n]{0} = \{0\}$.

Далее считаем, что $z \neq 0$.

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$

$z = w^n = |w|^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi))$

Отсюда,

$$z = w^n \iff \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n}, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

С точностью до $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, получается ровно n различных значений для ψ, при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

В результате $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, где $w_m = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$

Замечание. Числа $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ лежат в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат.

56. Основная теорема алгебры комплексных чисел

Теорема 1.11. *Всякий многочлен степени $\geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

57. Теорема Безу и её следствие

Частный случай деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ с остатком: $g(x) = x - c$, $\deg g(x) = 1$:

$f(x) = q(x)(x - c) + r(x)$, где либо $r(x) = 0$, либо $\deg r(x) < g(x) = 1$

Значит, $r(x) \equiv r = const \in F$.

Теорема 1.12. $r = f(c)$.

Следствие. Элемент $c \in F$ является корнем многочлена $f(x) \in F[x]$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $(x - c)$.

58. Кратность корня многочлена

Определение 31. *Кратностью* корня $c \in F$ многочлена $f(x)$ называется наибольшее целое k такое что, $f(x)$ делится на $(x - c)^k$.

2 Вопросы на доказательство

2.1 Операции над матрицами

1. **Дистрибутивность произведения матриц по отношению к сложению**
2. **Ассоциативность произведения матриц**
3. **Некоммутативность произведения матриц**
4. **Транспонирование произведения двух матриц**
5. **Умножение на диагональную матрицу слева и справа**
6. **След произведения двух матриц**

2.2 Системы линейных уравнений

1. **Эквивалентность систем линейных уравнений, получаемых друг из друга пут м элементарных преобразований строк расширенной матрицы**
2. **Теорема о приведении матрицы к ступенчатому и улучшенному ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк**
3. **Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения на подходящую матрицу**
4. **Метод Гаусса решения систем линейных уравнений**
5. **Связь между множеством решений совместной системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей ей однородной системы**
6. **Общий метод решения матричных уравнений вида $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ и $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$**
7. **Вычисление обратной матрицы при помощи элементарных преобразований**

2.3 Перестановки

1. **Ассоциативность произведения перестановок**
2. **Некоммутативность произведения перестановок**
3. **Теорема о знаке произведения двух перестановок**
4. **Знак обратной перестановки**
5. **Знак транспозиции**

2.4 Определители

1. **Определитель транспонированной матрицы**
2. **Поведение определителя при умножении строки (столбца) на скаляр**
3. **Поведение определителя при разложении строки (столбца) в сумму двух**
4. **Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами)**
5. **Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на скаляр**
6. **Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов)**
7. **Определитель верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы**
8. **Определитель с углом нулей**
9. **Определитель произведения двух матриц**
10. **Разложение определителя по строке (столбцу)**
11. **Лемма о фальшивом разложении определителя**
12. **Единственность обратной матрицы**
13. **Определитель обратной матрицы**
14. **Критерий обратимости квадратной матрицы и явная формула для обратной матрицы**
15. **Матрица, обратная к произведению двух матриц**
16. **Формулы Крамера**

2.5 Комплексные числа

1. **Построение поля комплексных чисел**
2. **Свойства комплексного сопряжения (для суммы и произведения)**
3. **Свойства модуля комплексного числа: неотрицательность, неравенство треугольника (алгебраическое доказательство), модуль произведения двух комплексных чисел**
4. **Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра**
5. **Извлечение корней из комплексных чисел**