

# Математический анализ, Экзамен 1

Балюк Игорь

@lodthe, GitHub

Дата изменения: 2019.12.24 в 19:54

## Содержание

<b>1</b>	<b>Вопросы</b>	<b>3</b>
1.1	Числовые последовательности. Примеры.	3
1.2	Понятие предела последовательности.	3
1.3	Ограниченные и неограниченные последовательности.	3
1.4	Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.	3
1.5	Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.	4
1.6	Теорема о переходе к пределу в неравенствах.	4
1.7	Теорема о вынужденном пределе.	4
1.8	Теорема о сходимости монотонных ограниченных последовательностей.	4
1.9	Определение числа $e$ .	5
1.10	Бесконечно малые последовательности.	5
1.11	Связь со сходящимися последовательностями.	6
1.12	Арифметические свойства бесконечно малых и сходящихся последовательностей.	6
1.13	Арифметические свойства для последовательностей, имеющих конечные и бесконечные пределы.	6
1.14	Неопределенности.	7
1.15	Определение подпоследовательности.	7
1.16	Теорема Больцано-Вейерштрасса.	7
1.17	Критерий Коши сходимости последовательности.	7
1.18	Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне.	8
1.19	Теорема об эквивалентности этих определений.	8
1.20	Односторонние пределы, их связь с двусторонними. Пределы функции в бесконечности.	9
1.22	[TODO(): ] Неопределенности. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах, о вынужденном пределе.	9
1.23	[TODO(): ] Первый и второй замечательные пределы.	9
1.24	[TODO(): ] Критерий Коши существования конечного предела функции.	9
1.25	Определение непрерывности функции в точке.	9
1.26	Точки разрыва, их классификация.	10
1.27	Непрерывность элементарных функций.	10
1.28	Арифметические свойства непрерывных функций.	10
1.29	Теорема о непрерывности сложной функции.	10
1.30	Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).	11
1.31	Критерий существования и непрерывности обратной функции на промежутке	12
1.32	Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.	12
1.33	Понятие производной функции в точке.	12
1.34	Геометрический и физический смысл производной.	13
1.35	Уравнение касательной к графику функции в точке.	13
1.36	Понятие дифференцируемости функции в точке.	13
1.37	Необходимое условие дифференцируемости.	13
1.38	Правила дифференцирования.	13
1.39	Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.	15
1.40	Теорема о дифференцируемости обратной функции	15
1.41	Таблица производных основных элементарных функций.	16

1.42	Понятие дифференциала (первого) функции в точке. . . . .	16
1.43	Инвариативность формы первого дифференциала . . . . .	16
1.44	Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке. . . . .	16
1.45	Понятие об экстремумах функции одной переменной. . . . .	18
1.46	Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма). . . . .	18
1.47	Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши. . . . .	18
1.48	Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. . . . .	20
1.49	Формулы Маклорена для основных элементарных функций (без доказательства). . . . .	21
1.50	Правило Лопиталья. . . . .	21
1.51	Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке. . . . .	23
1.52	Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной. . . . .	23
<b>2</b>	<b>Вопросы, которые были убраны из программы экзамена</b>	<b>23</b>
2.1	Эквивалентность определений предела функции по Коши и Гейне . . . . .	23
2.2	Производные функций, графики которых заданы параметрически. . . . .	24
2.3	Геометрический смысл дифференциала. . . . .	24

# 1 Вопросы

## 1. Числовые последовательности. Примеры.

Определение из википедии: Пусть  $X$  — это либо множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$ , либо множество комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Тогда последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  элементов множества  $X$  называется **числовой последовательностью**.

Определение из Ёжика: Отображение  $\mathbb{N} \mapsto X$  будем называть последовательностью и записывать как  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Отображение  $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$  будем называть **числовой последовательностью**.

Примеры:

- $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$  является бесконечной последовательностью рациональных чисел. Элементы этой последовательности начиная с первого имеют вид  $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$
- $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$  является бесконечной последовательностью целых чисел. Элементы этой последовательности начиная с первого имеют вид  $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$

## 2. Понятие предела последовательности.

Число  $a$  называется пределом числовой последовательности  $\{x_n\}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

## 3. Ограниченные и неограниченные последовательности.

- Ограниченная сверху последовательность — это последовательность элементов множества  $\mathbb{R}$ , все члены которой не превышают некоторого элемента из этого множества. Этот элемент называется верхней гранью данной последовательности (говоря в общем, это верно и не только для  $\mathbb{R}$ ).

$$\{x_n\} \text{ ограниченная сверху} \iff \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \implies x_n \leq M$$

- Ограниченная снизу последовательность — это последовательность элементов множества  $\mathbb{R}$ , для которой в этом множестве найдётся элемент, не превышающий всех её членов. Этот элемент называется нижней гранью данной последовательности.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная снизу} \iff \exists m \in \mathbb{R} : \forall n \implies x_n \geq m$$

- Ограниченная последовательность (ограниченная с обеих сторон последовательность) — это последовательность, ограниченная и сверху, и снизу.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная} \iff \exists M, m \in \mathbb{R} : \forall n \implies m \leq x_n \leq M$$

- Неограниченная последовательность — это последовательность, которая не является ограниченной.

$$\{x_n\} \text{ неограниченная} \iff \forall M, m \in \mathbb{R} : \exists N \implies (x_N < m) \vee (x_N > M)$$

Критерий ограниченности: Числовая последовательность является ограниченной тогда и только тогда, когда существует такое число, что модули всех членов последовательности не превышают его.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная} \iff \exists A \in \mathbb{R} : \forall n \implies |x_n| \leq A$$

## 4. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.

**Теорема.** Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

*Доказательство.* Все члены последовательности, кроме конечного их числа, принадлежат окрестности предела — ограниченному множеству.

Пусть последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Пусть  $\varepsilon = 1$ , тогда  $A = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$ . Тогда,  $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq A$ . ■

## 5. Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.

**Теорема.** Если предел числовой последовательности существует, то он единственный.

*Доказательство.* Доказательство теоремы проведем «методом от противного». Предположим, что теорема неверна. Тогда, пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = b$  и выполняется следующее:

$$\begin{cases} a < b, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \implies |x_n - b| < \varepsilon, \end{cases}$$

Положим  $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$  и  $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ . Тогда,  $\forall n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon \wedge |x_n - b| < \varepsilon$ . Возьмём  $n \geq N$ , тогда,

$$b - a = |b - a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} = b - a$$

Пришли к противоречию ( $b - a < b - a$ ). ■

## 6. Теорема о переходе к пределу в неравенствах.

**Теорема.** Если элементы сходящейся последовательности  $\{x_n\}$ , начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству  $x_n \geq b$  ( $x_n \leq b$ ), то и предел  $a$  этой последовательности удовлетворяет неравенству  $a \geq b$  ( $a \leq b$ ).

*Доказательство.* Пусть все элементы  $x_n$ , по крайней мере начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству  $x_n \geq b$ . Требуется доказать неравенство  $a \geq b$ .

Предположим, что  $a < b$ . Поскольку  $a$  - предел последовательности  $\{x_n\}$ , то для положительного  $\varepsilon = b - a$  можно указать номер  $N$  такой, что при  $n \geq N$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < b - a$ . Это неравенство эквивалентно следующим двум неравенствам:  $-(b-a) < x_n - a < b - a$ . Используя правое из этих неравенств, получим  $x_n < b$ , а это противоречит условию теоремы. Случай  $x_n \leq b$  рассматривается аналогично. ■

*Примечание.* Элементы сходящейся последовательности  $\{x_n\}$  могут удовлетворять строгому неравенству  $x_n > b$ , однако при этом предел  $a$  может оказаться равным  $b$ . Например, если  $x_n = \frac{1}{n}$ , то  $x_n > 0$ , однако  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

## 7. Теорема о вынужденном пределе.

**Теорема.** Если  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \leq z_n$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ .

*Доказательство.* Из определения предела  $\{x_n\}$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ . Аналогично для предела  $\{z_n\}$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies |z_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ .

Тогда,  $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \implies a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ . ■

## 8. Теорема о сходимости монотонных ограниченных последовательностей.

**Теорема.** Неубывающая числовая последовательность имеет предел, причём он в точности равен точной верхней границе (нижней границе, для ограниченной невозрастающей ч.п.).

*Доказательство.* Пусть  $\{x_n\}$  — ограниченная неубывающая числовая последовательность. Тогда множество  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ограничено, следовательно, из определения супремума, имеет супремум. Обозначим его через  $S$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$ . Действительно, так как  $S = \sup\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies S - \varepsilon < x_n \leq x_n \leq S \implies |x_n - S| < \varepsilon$$

Аналогичное доказательство для ограниченной невозрастающей ч.п. ■

## 9. Определение числа $e$ .

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

**Теорема.** Последовательность с общим членом  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  имеет конечный предел при  $n \rightarrow \infty$ . Для обозначения этого предела используется символ  $e$ .

*Доказательство.* Докажем сначала, что  $\{e_n\}$  представляет собой монотонно возрастающую последовательность. Согласно биному Ньютона,

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \\ e_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \end{aligned}$$

Сравним  $e_n$  и  $e_{n+1}$ :

- Оба выражения содержат только положительные слагаемые
- Начиная со второго слагаемого, каждый член в выражении  $e_{n+1}$  превышает соответствующий член в  $e_n$ , так как

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right) < \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots$$

- Выражение  $e_{n+1}$  состоит из большего числа слагаемых. Следовательно,  $e_{n+1} > e_n$ .

Далее докажем, что последовательность  $\{e_n\}$  является ограниченной. Действительно, первый член любой монотонно возрастающей последовательности является ее наибольшей нижней границей и, таким образом,  $e_n \geq 2 \forall n \in \mathbb{N}$ .

Перейдем к доказательству существования верхней границы. Очевидно, что

$$\begin{aligned} e_n &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) < \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Кроме того,  $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^k} \forall k > 3$ . Тогда,

$$\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Правая часть этого неравенства представляет собой сумму убывающей геометрической прогрессии, которая равна  $\frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$ . Таким образом, последовательность

$$e_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} < 3$$

представляет собой ограниченную монотонно возрастающую последовательность и, следовательно, имеет конечный предел. ■

## 10. Бесконечно малые последовательности.

Последовательность  $\{a_n\}$  называется бесконечно малой, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |a_n| < \varepsilon$$

т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

### 11. Связь со сходящимися последовательностями.

Если предел последовательности равен 0, то это бесконечно малая последовательность. Бесконечно малые последовательности являются сходящимися последовательностями.

Для того чтобы последовательность  $\{x_n\}$  имела предел  $b$ , необходимо и достаточно, чтобы  $x_n = b + \alpha_n$ , где  $\alpha_n$  — бесконечно малая последовательность.

### 12. Арифметические свойства бесконечно малых и сходящихся последовательностей.

Пусть  $\{\alpha_n\}$  — бесконечно малая числовая последовательность.

**Теорема.**  $\{\alpha_n\}$  ограничена

*Доказательство.* Как известно,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \implies |\alpha_n| < \varepsilon$ . Значит, для всех  $n > N$  доказано. Но  $\forall n < N \implies \alpha_n \leq \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N-1}|\}$ . Тогда выберем  $\varepsilon = 1, A = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N-1}|, 1\} \implies \forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n| \leq A$ . ■

**Теорема.** Если  $\{y_n\}$  ограничена, то  $\{y_n \cdot \alpha_n\}$  — бесконечно малая.

*Доказательство.*  $\{\alpha_n\}$  — бесконечно малая, поэтому  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$ . Ввиду ограниченности  $\{y_n\}$ ,  $\exists A : \forall n \in \mathbb{N} \implies |y_n| \leq A$ . Но тогда  $\{y_n \cdot \alpha_n\} : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |y_n \cdot \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon$ . ■

**Теорема.** Если  $\{\beta_n\}$  — бесконечно малая, то  $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$  и  $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$  — бесконечно малые.

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда при } N = \max\{N_1, N_2\} \implies \forall n \geq N \implies |\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Аналогично для произведения:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies |\alpha_n| < \frac{1}{\varepsilon} \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies |\beta_n| < \varepsilon^2$$

$$\text{Тогда при } N = \max\{N_1, N_2\} \implies \forall n \geq N \implies |\alpha_n \cdot \beta_n| \leq |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon$$

■

### 13. Арифметические свойства для последовательностей, имеющих конечные и бесконечные пределы.

**Теорема.** Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$ , а также  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ , если  $b \neq 0$ .

*Доказательство.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \iff x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n, \text{ где } \{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \text{ — бесконечно малые.}$$

$$x_n \pm y_n = (a + \alpha_n) \pm (b + \beta_n) = (a \pm b) + \underbrace{(\alpha_n \pm \beta_n)}_{\text{б. м.}}$$

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = a \cdot b + \underbrace{(\alpha_n \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a)}_{\text{б. м.}}$$

**Лемма.** Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$ . Тогда  $\exists r > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies |y_n| > r > 0$ .

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |y_n - b| < \varepsilon \implies b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$ . Пусть  $\varepsilon = \left| \frac{b}{2} \right|$ , тогда

$$r < \left| \frac{b}{2} \right| < |y_n| < \left| \frac{3b}{2} \right|.$$

■

Рассмотрим последовательность  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right\}$  — бесконечно малая.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b \cdot a + b \cdot \alpha_n - b \cdot a - \beta_n \cdot a}{y_n \cdot b} = (\alpha_n \cdot b - \beta_n \cdot a) \cdot \frac{1}{y_n \cdot b}$$

По лемме  $\left| \frac{1}{y_n \cdot b} \right| \leq \max \left\{ \left| \frac{1}{y_1 \cdot b} \right|, \dots, \left| \frac{1}{y_N \cdot b} \right|, \frac{1}{rb} \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{y_n \cdot b} \right\}$  ограничена. Но тогда имеем произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей, значит,  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right\}$  — бесконечно малая. ■

#### 14. Неопределенности.

*Не очень понятно, что именно требуется в этом пункте*

Основные виды неопределенностей:  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

Раскрывать неопределенность помогает:

- упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения,
- тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.); использование замечательных пределов;

#### 15. Определение подпоследовательности.

Подпоследовательность последовательности  $\{x_n\}$  — это последовательность  $\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}\}$ , полученная из  $\{x_n\}$ , удалением ряда её членов без изменения порядка следования членов.

То есть подпоследовательность состоит из членов исходной последовательности  $\{x_n\}$  с номерами  $n_k$ , где  $\{n_k\}$  — строго монотонная последовательность натуральных чисел.

*Примечание.* Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , тогда  $\forall \{a_{n_k}\} : \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

#### 16. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

**Теорема.** Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

*Доказательство.* Для понимания происходящего следует ознакомиться с ?? Системой стягивающихся отрезков (ССО)

$\{x_n\}$  ограничена  $\Rightarrow \exists [a, b] : \forall n \in N \Rightarrow a \leq x_n \leq b$ . Поделим  $[a, b]$  на две равные части. Хотя бы одна из частей (пусть это  $[a_1; b_1]$ ) содержит бесконечно много элементов  $\{x_n\}$ .

Выберем на  $[a_1; b_1]$  произвольный элемент  $\{x_n\}$ . Назовем его  $x_{n_1}$ . Далее делим  $[a_1; b_1]$  на две равные части. Хотя бы одна из этих частей содержит бесконечно много элементов  $\{x_n\}$ . Обозначим ее  $[a_2; b_2]$ . Выберем  $x_{n_2} \in [a_2; b_2]$ . Будем продолжать выполнять указанные действия. Обозначим за  $x_{n_k}$  число, полученное на  $k$ -ом шаге, т.е.  $x_{n_k} \in [a_k; b_k]$ .

$\{[a_k; b_k]\}$  — система стягивающихся отрезков. Тогда, существует единственное  $c : \forall k \Rightarrow c \in [a_k; b_k]$ .

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = c \Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$  (по теореме о двух милиционерах) ■

#### 17. Критерий Коши сходимости последовательности.

**Теорема.** Для того, чтобы последовательность  $\{x_n\}$  сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Докажем необходимость и достаточность.

- Необходимость:

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall p \geq N \implies |x_p - a| < \varepsilon$$

Поскольку  $\varepsilon$  произвольное, можно взять вместо него  $\frac{\varepsilon}{2}$

$$p = m \geq N \implies |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$p = n \geq N \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

То есть  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ , а значит  $\{x_n\}$  фундаментальная по определению. Необходимость доказана

- Достаточность:

Пусть  $\{x_n\}$  — фундаментальная последовательность, докажем, что она имеет предел. Сначала покажем, что  $\{x_n\}$  — ограничена. По определению фундаментальной последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Так как  $\varepsilon$  произвольное, возьмём  $\varepsilon = 1$ .

$$|x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leq \underbrace{|x_n - x_N|}_{\leq \varepsilon} + |x_N| \leq 1 + |x_N|$$

$$\forall n \geq N \implies |x_n| \leq (1 + |x_N|) = \text{const} \leq A \implies |x_n| \leq A$$

$$A = \max\{1 + |x_N|; |x_1|; |x_2|; \dots; |x_N|\}$$

$$\forall n \geq N \implies |x_n| \leq A$$

По теореме ?? Больцано-Вейерштрасса, так как  $\{x_n\}$  — ограниченная,  $\{x_n\}$  имеет сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ .

Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ , покажем, что число  $a$  и будет пределом всей последовательности  $\{x_n\}$ .

Так как  $\{x_n\}$  фундаментальная:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall m, n \geq N_1 \implies |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как  $\{x_{n_k}\}$  сходящаяся:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a : \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n_k \geq n_{N_2} \implies |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : |x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\text{Возьмём } N = \max\{N_1, N_2\} : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Достаточность доказана. ■

## 18. Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне.

- По Коши (или на языке  $\varepsilon - \delta$ ):

$A$  — предел функции  $f(x)$  в точке  $a$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- По Гейне:

$A$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$ , если  $\forall \{x_n\} \rightarrow a, x_n \neq a$  (т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ), соответствующая последовательность значений  $f(x_n) \rightarrow A$  (т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ )

## 19. Теорема об эквивалентности этих определений.



- Из определения по Коши следует определение по Гейне:

Выберем произвольную  $\{x_n\} \rightarrow a, x_n \neq a$ . По определению предела последовательности

$$\forall \delta > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n - a| < \delta$$

Указанное неравенство выполняется для любого  $\delta > 0$ . Тогда какое бы  $\varepsilon > 0$  мы бы ни выбрали, можно найти  $\delta > 0$ , такое, что по определению по Коши будет выполняться

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

т.е.  $\{f(x_n)\} \rightarrow A$ , а значит из сходимости по Коши следует сходимость по Гейне.

- Из определения по Гейне следует определение по Коши:

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$  По Гейне. От противного: если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  по Гейне, то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$  по Коши. Напишем отрицание определения по Коши:

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \delta > 0 : \exists x : 0 < |x - a| < \delta : |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$$

Так как  $\delta$  может быть любым, можно выбрать последовательность  $\{\delta_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ , а соответствующие значения  $x$  будем обозначать как  $x_n$ . Тогда  $0 < |x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}$ , и  $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$ . Отсюда следует, что последовательность  $\{x_n\}$  является подходящей, но при этом число  $A$  не является пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$  (по Гейне). Пришли к противоречию.

## 20. Односторонние пределы, их связь с двусторонними. Пределы функции в бесконечности.

Назовём число  $A$  левым (правым) пределом  $f$  по Коши, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta; a)(x \in (a; a + \delta)) \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Назовём число  $A$  левым (правым) пределом  $f$  по Гейне, если:

$$\forall \{x_n\} : \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq a, x_n < a (x_n > a) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

Обозначим односторонние пределы так:  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A = f(a-0)$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A = f(a+0)$ . Таким образом, когда мы можем «подойти» к предельному значению функции, двигаясь по  $x$  к точке  $a$  слева, говорят, что существует левый предел. Аналогично следует понимать и определение правого предела. Поэтому если мы можем подойти к  $a$  и слева, и справа, то существует предел в точке  $a$ . В кванторах это значит следующее:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \exists f(a-0) = f(a+0) = A$$

$$(\text{т. к. } \forall x : a - \delta < x < a \text{ и } \forall x : a < x < a + \delta \iff \forall x : 0 < |x - a| < \delta)$$

Предел функции на бесконечности:

- По Коши:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D(f) : |x| > \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- По Гейне:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \forall \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

## 22. [TODO():] Неопределенности. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах, о вынужденном пределе.

## 23. [TODO():] Первый и второй замечательные пределы.

## 24. [TODO():] Критерий Коши существования конечного предела функции.

## 25. Определение непрерывности функции в точке.

Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , если она определена на некоторой окрестности этой точки  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Другими словами,  $A = f(x_0)$  и справедливы следующие определения предела функции в точке  $x_0$ :

- **По Коши:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- **По Гейне:**

$$\forall \{x_n\} : x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

## 26. Точки разрыва, их классификация.

Пусть  $f(x)$  определена в некоторой окрестности  $U_\delta(a)$  и функция разрывна в  $a$ . Тогда говорят, что функция имеет

- **Устранимый разрыв:** пределы  $f(x)$  справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$$

- **Неустранимый разрыв первого рода:** пределы  $f(x)$  справа и слева существуют, но не равны друг другу
- **Неустранимый разрыв второго рода:** хотя бы один из односторонних пределов  $f(x)$  не существует или равен бесконечности.

## 27. Непрерывность элементарных функций.

Многие элементарные функции непрерывны на своей области определения (например,  $\sin x, \cos x$ ). Докажем для некоторых из них

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sin(x_0 + \Delta) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (\sin x_0 \cos \Delta + \cos x_0 \sin \Delta) = \sin x_0 \cdot 1 + \cos x_0 \cdot 0 = \sin x_0$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \cos(x_0 + \Delta) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (\cos x_0 \cos \Delta - \sin x_0 \sin \Delta) = \cos x_0 \cdot 1 - \sin x_0 \cdot 0 = \cos x_0$$

Тангенс и котангенс выражаются через синус и косинус. Воспользуемся арифметическими свойствами непрерывных функций. Поскольку синус и косинус определены и непрерывны для всех  $x$ , то тангенс и котангенс определены и непрерывны для всех  $x$ , кроме точек, в которых знаменатель обращается в нуль:

$$y = \operatorname{tg} x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} a^{x_0 + \Delta} = a^{x_0} \cdot a^0 = a^{x_0} \cdot 1 = a^{x_0}$$

## 28. Арифметические свойства непрерывных функций.

**Теорема.** Пусть  $g(x)$  и  $f(x)$  непрерывны в  $a$ , тогда функции  $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g} (g \neq 0)$  также непрерывны в точке  $a$ .

*Доказательство.* Рассмотрим сумму  $(f(x) + g(x))$ . Для остальных операций доказательство практически аналогично. По определению  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ . Но тогда, используя свойство суммы для пределов, получаем, что  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f(a) + g(a)$ , что означает, что  $(f(x) + g(x))$  непрерывна в точке  $a$ . ■

## 29. Теорема о непрерывности сложной функции.

**Теорема.** Если функция  $g(t)$  непрерывна в точке  $t_0$  и функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0 = g(t_0)$ , то  $f(g(t))$  непрерывна в  $t_0$ .

*Доказательство.* Для доказательства этой теоремы воспользуемся формальным преобразованием двух выражений с кванторами.

$f(x)$  непрерывна в  $x_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$g(t)$  непрерывна в  $t_0$ :

$$\forall \delta > 0 \exists \mu > 0 : \forall t : 0 < |t - t_0| < \mu \implies |g(t) - g(t_0)| < \delta$$

Получается,  $f(g(t))$  непрерывна в  $t_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mu > 0 : \forall t : 0 < |t - t_0| < \mu \implies |f(g(t)) - f(g(t_0))| < \varepsilon$$

■

### 30. Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).

**Теорема Вейерштрасса (первая)** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она на нём ограничена, то есть  $\exists A : \forall x \in [a, b] \implies |f(x)| \leq A$

*Доказательство.* Докажем от противного.

Пусть  $f$  не ограничена на отрезке  $[a, b]$ , тогда:

$$\begin{aligned} \forall A > 0 \exists x_A \in [a, b] : |f(x_A)| > A \\ A = 1 &\implies \exists x_1 \in [a, b] : |f(x_1)| > 1 \\ A = 2 &\implies \exists x_2 \in [a, b] : |f(x_2)| > 2 \\ &\vdots \\ A = n &\implies \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n \end{aligned}$$

Получим последовательность  $\{x_n\} \subset [a, b]$ , то есть последовательность  $\{x_n\}$  ограничена.

По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить подпоследовательность, которая сходится к точке  $c$ , то есть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$$

Тогда  $c \in [a, b]$ . Но по условию функция непрерывна в точке  $c$  и тогда по определению непрерывности в точке по Гейне  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$ .

С другой стороны

$$|f(x_{n_k})| > n_k, n_k \geq k \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$$

А это противоречит единственности предела.

■

**Теорема Вейерштрасса (вторая)** Непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  достигает на нём своих точных нижней и верхней граней. То есть существуют такие точки  $c_1, c_2 \in [a, b]$ , так что для любого  $x \in [a, b]$ , выполняются неравенства:

$$f(c_2) \leq f(x) \leq f(c_1)$$

*Доказательство.* Докажем  $\exists c_1 \in [a, b] : f(c_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ .

Пусть  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  (существование следует из первой теоремы Вейерштрасса). В силу определения точной верхней грани выполняется условие:

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b] \implies f(x) \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in [a, b] : M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \end{cases}$$

Полагая  $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$  получим последовательность  $\{x_n\}$  такую, что для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняются условия  $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$ , откуда  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ . Существует подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$

последовательности  $\{x_n\}$  (она ограничена отрезком  $[a, b]$ , а значит является ограниченной) и точка  $c$  (по теореме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке  $c$ ), такие что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$ , где  $c \in [a, b]$ .

В силу непрерывности функции  $f$  в точке  $c$ , получаем  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$ .

С другой стороны,  $\{f(x_{n_k})\}$  — подпоследовательность последовательности  $\{f(x_n)\}$ , сходящейся к числу  $M$ . Поэтому  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$ .

В силу единственности предела последовательности заключаем, что  $f(c) = M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ .

Утверждение  $\exists c_1 \in [a, b] : f(c_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  доказано.

Аналогично доказывается  $\exists c_2 \in [a, b] : f(c_2) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$

Функция непрерывна на интервале может не достигать своих точных граней (требовать непрерывности на сегменте существенно). ■

### 31. Критерий существования и непрерывности обратной функции на промежутке

### 32. Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.

**Теорема Больцано-Коши (первая), о нулях непрерывной функции** Если функция  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$  и на своих концах принимает значение разных знаков, то существует такая точка, принадлежащая этому отрезку, в которой функция обращается в нуль.

*Доказательство.* Геометрически очень легко: функция пересечет ось  $OX$ .

Алгебраически: разделим отрезок  $[a, b]$  точкой  $x_0$  на два равных по длине отрезка, тогда либо  $f(x_0) = 0$  и, значит, искомая точка  $x_0$  найдена, либо  $f(x_0) \neq 0$  и тогда на концах одного из полученных промежутков функция  $f$  принимает значения разных знаков, точнее, на левом конце значение меньше нуля, на правом — больше.

Обозначим этот отрезок  $[a_1, b_1]$  и разделим его снова на два равных по длине отрезка и т.д. В результате, либо через конечное число шагов придем к искомой точке  $x$ , в которой  $f(x) = 0$ , либо получим последовательность вложенных отрезков  $[a_n, b_n]$  по длине стремящихся к нулю и таких, что

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

Пусть  $\gamma$  — общая точка всех отрезков  $[a_n, b_n]$ . Тогда  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Поэтому, в силу непрерывности функции  $f$

$$f(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Откуда следует, что  $f(\gamma) = 0$ . ■

**Теорема Больцано-Коши (вторая), о промежуточном значении непрерывных функций** Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и  $A = f(a) \neq f(b) = B$ , число  $C \in (A, B)$ , тогда существует такая точка  $c \in [a, b]$ , что  $f(c) = C$ .

Другими словами, утверждается, что если непрерывная функция, принимает два значения, то она принимает и любое значение между ними.

*Доказательство.* Не нарушая общности будем считать, что  $A = f(a) < f(b) = B$ . Рассмотрим функцию  $h(x) = f(x) - C$ , непрерывность на отрезке  $[a, b]$  которой следует из непрерывности функции  $f$ . Очевидно что  $h(a) = A - C < 0$  и  $h(b) = B - C > 0$ . Применяем к  $h$  первую теорему Больцано-Коши и находим точку  $c$ , в которой  $h(c) = f(c) - C = 0$ , то есть  $f(c) = C$ . Теорема доказана. ■

### 33. Понятие производной функции в точке.

Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку  $x_0$ . Тогда функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$ , и ее производная  $f'(x_0)$  определяется следующей формулой, если существует предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

### 34. Геометрический и физический смысл производной.

**Геометрический смысл производной.** Производная в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке.

**Физический смысл производной.** Если точка движется вдоль оси  $OX$  и ее координата изменяется по закону  $x(t)$ , то мгновенная скорость точки:  $v(t) = x'(t)$ .

### 35. Уравнение касательной к графику функции в точке.

Пусть дана функция  $f$ , которая в некоторой точке  $x_0$  имеет конечную производную  $f'(x_0)$ . Тогда прямая, проходящая через точку  $(x_0; f(x_0))$ , имеющая угловой коэффициент  $f'(x_0)$ , называется касательной.

Итак, пусть дана функция  $y = f(x)$ , которая имеет производную  $y = f'(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Тогда в любой точке  $x_0 \in (a; b)$  к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

### 36. Понятие дифференцируемости функции в точке.

Функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$  своей области определения  $D[f]$ , если существует такая константа  $A$ , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

и

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Теорема**  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x$  только и только тогда, когда  $\exists f'(x)$ , причем  $A = f'(x)$

*Доказательство.* Докажем необходимость и достаточность

- **Необходимость.** Пусть  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x \implies \Delta y = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x) \implies \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{\bar{o}(\Delta x)}{\Delta x} = A + \bar{o}(1)$   
Тогда  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \implies A = f'(x)$
- **Достаточность.** Пусть  $\exists f'(x) \implies \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ . Рассмотрим  $\beta(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$ .  
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta(\Delta x) = 0$ , т.е.  $\beta(\Delta x) = \bar{o}(1) \implies \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \bar{o}(1) \implies \Delta y = f'(x)\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$

■

### 37. Необходимое условие дифференцируемости.

**Теорема.** Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то она непрерывна в этой точке.

*Доказательство.* Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда её приращение представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$$

Но тогда при  $\Delta x \rightarrow 0$  будет  $\Delta y \rightarrow 0$ , а это означает непрерывность функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ . ■

Обратите внимание, что из непрерывности не следует дифференцируемости (например,  $f(x) = |x|$ ).

### 38. Правила дифференцирования.

**Теорема.** Если  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в точке  $x$ , то  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  ( $g \neq 0$ ) также дифференцируемы в точке  $x$ , причем  $(f \pm g)' = f' \pm g'$ ,  $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ ,  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

*Доказательство.* Будем считать, что  $\Delta f$  отвечает приращению  $f(x)$ ,  $\Delta g$  отвечает приращению  $g(x)$ , а  $\Delta h$  отвечает приращению  $h(x)$ .

$$1. h(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$\begin{aligned}\Delta h &= h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)) - (f(x) \pm g(x)) \\ &= (f(x + \Delta x) - f(x)) \pm (g(x + \Delta x) - g(x)) \\ &= \Delta f \pm \Delta g\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$  существует предел правой части, равный  $f'(x) \pm g'(x)$ , а значит, существует и предел левой части

$$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$2. h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\begin{aligned}\Delta h &= h(x + \Delta x) - h(x) = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= (f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x)) + (f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x))\end{aligned}$$

Далее можно записать

$$\Delta h = f(x + \Delta x) \cdot (g(x + \Delta x) - g(x)) + g(x) \cdot (f(x + \Delta x) - f(x)) = f(x + \Delta x) \cdot \Delta g + g(x) \Delta f$$

Таким образом

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = f(x + \Delta x) \frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Возьмем теперь предел правой части при  $\Delta x \rightarrow 0$ . В силу непрерывности  $f(x)$  в  $x$  (т.к. она дифференцируема в этой точке)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$ . Тогда получаем, что

$$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

**Лемма.** Если  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  и  $f(a) > 0$  ( $f(a) < 0$ ), то  $\exists \delta > 0 : f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ )  $\forall x \in U_\delta(a)$

*Доказательство.* Так как  $f(x) \in C(a)$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(a) \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \iff f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ . Положим  $\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}$ , тогда  $f(a) - \varepsilon > 0$  при  $f(a) > 0$  и  $f(a) + \varepsilon < 0$  при  $f(a) < 0$ . Т.е. левая и правая части неравенства всегда одного знака, значит  $\forall x \in U_\delta(a)$  выполнено требуемое. ■

$$3. h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}. \text{ По лемме, } g(x) \neq 0, \text{ то } g(x + \Delta x) \neq 0 \text{ для малых } \Delta x. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned}\Delta h &= h(x + \Delta x) - h(x) = \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f(x + \Delta x)g(x) - g(x + \Delta x)f(x)}{g(x)g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{(f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)) - (g(x + \Delta x)f(x) - f(x)g(x))}{g(x)g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{g(x)(f(x + \Delta x) - f(x)) - f(x)(g(x + \Delta x) - g(x))}{g(x)g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{g(x)\Delta f - f(x)\Delta g}{g(x)g(x + \Delta x)}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} - f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x)g(x + \Delta x)}$$

Снова используя непрерывность и беря предел правой и левой частей, получаем, что

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

### 39. Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.

**Теорема.** Пусть функцию  $y = y(x)$  от переменной  $x$  можно представить как сложную функцию в следующем виде:

$$y(x) = f(u(x))$$

где  $f(u)$  и  $u(x)$  есть некоторые функции. Функция  $u = u(x)$  дифференцируема при некотором значении переменной  $x$ . Функция  $f(u)$  дифференцируема при значении переменной  $u = u(x)$ . Тогда сложная (составная) функция  $y = f(u(x))$  дифференцируема в точке  $x$  и ее производная определяется по формуле:

$$y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

*Доказательство.* Введем следующие обозначения.

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x + \Delta x) - u(x) \\ \Delta f &= f(u + \Delta u) - f(u) = f(u(x + \Delta x)) - f(u(x))\end{aligned}$$

Здесь  $\Delta u$  есть функция от переменных  $x$  и  $\Delta x$ ,  $\Delta f$  есть функция от переменных  $u$  и  $\Delta u$ . Но мы будем опускать аргументы этих функций, чтобы не загромождать выкладки.

Поскольку функции  $u$  и  $f$  дифференцируемы в точках  $x$  и  $u = u(x)$ , соответственно, то в этих точках существуют производные этих функций, которые являются следующими пределами:

$$\begin{aligned}u'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ f'(u) &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}\end{aligned}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\varepsilon(\Delta u) = \frac{\Delta f}{\Delta u} - f'(u)$$

При фиксированном значении переменной  $u$ ,  $\varepsilon$  является функцией от  $\Delta u$ . Очевидно, что

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Тогда

$$\Delta f = (f'(u) + \varepsilon(\Delta u)) \cdot \Delta u$$

Поскольку функция  $u(x)$  является дифференцируемой функцией в точке  $x$ , то она непрерывна в этой точке. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Теперь находим производную.

$$\begin{aligned}y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= f'(u) \cdot u'(x) + 0 \cdot u'(x) \\ &= f'(u) \cdot u'(x)\end{aligned}$$

Формула доказана.

### 40. Теорема о дифференцируемости обратной функции

**Теорема.** Рассмотрим функцию  $f(x)$ , которая является строго монотонной на некотором интервале  $(a, b)$ . Если в этом интервале существует такая точка  $x_0$ , что  $f'(x_0) \neq 0$ , то функция  $x = \phi(y)$ , обратная к функции  $y = f(x)$ , также дифференцируема в точке  $y_0 = f(x_0)$  и её производная равна

$$\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

#### 41. Таблица производных основных элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	$0$
$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$
$e^x$	$e^x$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

#### 42. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.

Функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$  своей области определения  $D[f]$ , если существует такая константа  $A$ , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

Тогда выражение  $f'(x_0)dx$  называют дифференциалом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ . Обозначение:  $df = df(x_0, dx)$ . Обратите внимание, что  $df$  зависит и от точки, и от  $dx$ .

#### 43. Инвариативность формы первого дифференциала

Найдем выражение для дифференциала сложной функции. Пусть  $y = f(u(x))$ . Тогда

$$dy = y'(x) \cdot dx = f'(u(x)) \cdot u'(x) \cdot dx = f' \cdot du$$

Таким образом, форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Это свойство называется свойством неизменности, или инвариантности, дифференциала.

#### 44. Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке.

Рассмотрим функцию, дифференцируемую на множестве  $E$ . Т.е.  $\exists f'(x)$ , Если  $f'(x)$  тоже дифференцируема на  $E$ , то  $\exists (f'(x))' = f''(x)$ .

Производной  $n$ -ого порядка будем считать  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ , причем  $f^{(0)}(x) = f(x)$ . Разумеется, для существования производной  $n$ -ого порядка должны существовать производные всех меньших порядков.

Множество функций, имеющих все производные до порядка  $n$  включительно на множестве  $E$ , обозначается  $C^{(n)}(E)$ . Рассмотрим несколько примеров

- $f(x) = \sin x$



$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\
f''(x) &= -\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right) \\
f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \\
f^{(4)}(x) &= \sin x = \sin x
\end{aligned}$$

Докажем по индукции, что  $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)$ . При  $n = 1$  уже было показано ранее. Пусть это верно при некотором  $n$ , покажем для  $n = n + 1$ .

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right) \\
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi n}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right)
\end{aligned}$$

- $f(x) = e^x$ .  $f^{(n)}(x) = e^x$
- $f(x) = x^m$ . Беря  $n$  раз производную, получаем, что  $f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$
- $f(x) = \ln x$ .  $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ .  $f^{(n)}(x^{-1}) = (-1)(-2)\dots(-n)x^{-1-n} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-1-n}$ , Тогда получаем, что

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x-1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

Дифференциал порядка  $n$ , где  $n > 1$ , от функции  $f$  в некоторой точке называется дифференциал в этой точке от дифференциала порядка  $(n-1)$ , то есть

$$d^n f = d(d^{n-1} f) = f^{(n)} \cdot dx^n$$

**Теорема (Формула Лейбница)** Пусть  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют не менее  $n$  производных на множестве  $E$ . Тогда

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$$

*Доказательство.* Докажем по индукции. При  $n = 1$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \cdot u^{(1-k)} \cdot v^{(k)}$$

Пусть равенство верно при некотором  $n$ , докажем его справедливость при  $n = n + 1$ . Беря по определению производную  $(u \cdot v)^{(n+1)}$

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)^{(n+1)} &= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} \right)' \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} \\
&= \binom{n}{0} \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \binom{n}{n} \cdot u \cdot v^{(n+1)} \\
&= \binom{n}{0} \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \binom{n}{n} \cdot u \cdot v^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)}
\end{aligned}$$

Последний переход сделан при помощи следующего рассуждения:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

■

#### 45. Понятие об экстремумах функции одной переменной.

Точка  $x_0$  называется точкой локального максимума (минимума) функции  $f$ , если существует такая окрестность  $U_\delta(x_0)$  точки  $x_0$ , что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leq f(x_0)$$

и точкой локального минимума, если

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \geq f(x_0)$$

Точка  $x_0$  будет называться точкой строгого локального экстремума, если заменить окрестность на проколотую окрестность и нестрогий знак заменить на строгий.

**Теорема Ферма** Если функция  $y = f(x)$  имеет экстремум в точке  $x_0$ , то ее производная  $f'(x_0)$  либо равна нулю, либо не существует.

#### 46. Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

**Теорема Ферма** Пусть функция  $f$  определена на интервале  $(a, b)$  и в некоторой точке  $x_0 \in (a, b)$  принимает наибольшее (наименьшее) значение на этом интервале. Если существует  $f'(x_0)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $x_0$  — точка максимума функции  $f$ . Рассмотрим разностное отношение  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Так как  $f(x) \leq f(x_0)$ , то при  $x > x_0$  имеем  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ , и, следовательно,  $f'_+(x_0) \leq 0$ . Если же  $x < x_0$ , то  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ , и поэтому  $f'_-(x_0) \geq 0$ . Но из дифференцируемости функции  $f$  в точке  $x_0$  следует, что  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$  (следует из равенности предела справа и слева). ■

С геометрической точки зрения теорема Ферма означает, что если в точке экстремума у графика функции существует касательная, то она параллельна оси  $OX$ .

#### 47. Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши).

**Теорема Ролля.** О нуле производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения Пусть функция  $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ;
2. дифференцируема на интервале  $(a, b)$ ;
3.  $f(a) = f(b)$

Тогда на интервале  $(a, b)$  найдется, по крайней мере, одна точка  $x_0$ , в которой  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Если функция  $f(x)$  постоянна на отрезке  $[a, b]$  (а значит, её минимальное и максимальное значение совпадают), то производная равна нулю в любой точке интервала  $(a, b)$ , в этом случае утверждение справедливо.

Иначе, минимальное и максимальное значение функции не совпадают. По второй теореме Вейерштрасса (о достижении функции значения точной верхней/нижней грани на отрезке), функция достигает своего наибольшего или наименьшего значения в точке  $\xi$  интервала  $(a, b)$ , т.е. в точке  $\xi$  существует локальный экстремум. Тогда по теореме Ферма производная в этой точке равна нулю

$$f'(\xi) = 0$$

■

**Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , то в этом интервале существует хотя бы одна точка  $x_0$ , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную функцию  $F(x) = f(x) + \lambda x$ .

Выберем число  $\lambda$  таким, чтобы выполнялось условие  $F(a) = F(b)$ , тогда

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b \implies f(b) - f(a) = \lambda(a - b) \implies \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

В результате получаем

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$$

Функция  $F(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале  $(a, b)$  существует такая точка  $\xi$ , что  $F'(\xi) = 0$ .

Отсюда следует, что  $0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  или

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Хорда, проходящая через точки графика, соответствующие концам отрезка  $a$  и  $b$  имеет угловой коэффициент, равный

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Тогда внутри отрезка существует точка  $x = \xi$ , в которой касательная к графику параллельна хорде.

**Теорема Коши. Обобщает формулу конечных приращений Лагранжа.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ , причем  $g'(x) \neq 0$  при всех  $x \in (a, b)$ . Тогда в этом интервале существует точка  $x = \xi$  такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

*Доказательство.* Доказательство совпадает с доказательством теоремы Лагранжа.

Прежде всего заметим, что знаменатель в левой части формулы Коши не равен нулю:  $g(b) - g(a) \neq 0$ . Действительно, если  $g(a) = g(b)$ , то по теореме Ролля найдется точка  $\mu \in (a, b)$ , в которой  $g'(\mu) = 0$ . Это, однако, противоречит условию, где указано, что  $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$ .

Введем вспомогательную функцию  $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$ .

Выберем число  $\lambda$  таким, чтобы выполнялось условие  $F(a) = F(b)$ , тогда

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \implies f(b) - f(a) = \lambda(g(b) - g(a)) \implies \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

В результате получаем

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$$

Функция  $F(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и при найденном значении  $\lambda$  принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале  $(a, b)$  существует такая точка  $\xi$ , что  $F'(\xi) = 0$ .

Отсюда следует, что

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi)$$

или

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

■

**48. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.**

Предположим, что имеется некоторая функция  $f(x)$  и надо исследовать ее поведение в некоторой точке  $x_0$  или ее окрестности. Сама функция может быть при этом достаточно сложной, и поэтому непосредственное вычисление  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (как пример того, что мы хотим узнать о функции в  $x_0$ ) окажется крайне трудоемким. Идея в том, чтобы найти такой многочлен  $P_n(x)$ , что  $f(x) \sim P_n(x - x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$ , а затем исследовать его. Работать с многочленами практически всегда намного проще.

Предположим пока, что  $x_0 = 0$ . Тогда  $P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ .  $P_n(0) = c_0$ , а  $P'_n(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$ , из чего следует, что  $c_1 = P'_n(0)$ . По аналогии можно получить, что  $c_2 = \frac{P''_n(0)}{2!}, \dots, c_n = \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}$ . Т.е. получаем, что  $P_n(x) = P_n(0) + \frac{P'_n(0)}{1!}x + \dots + \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}x^n$ .

Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0)$ , тогда справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(f, x)$$

Эта формула называется **формулой Тейлора** и обычно записывается в виде:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_n(f, x)}_{\text{остаточный член}}$$

**Лемма.** Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0)$  и  $\exists f'(x)$  на некоторой  $U(x_0)$ . Тогда  $(r_n(f, x))' = r_{n-1}(f', x)$ .

*Доказательство.*

$$r_n(f, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$(r_n(f, x))' = f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = r_{n-1}(f', x)$$

так как  $f^{(k+1)}(x_0) = (f')^{(k)}(x_0)$ . Следует также обратить внимание на то, что дифференцирование  $r_n(f, x)$  происходит по  $x$ , поэтому все члены суммы, кроме  $(x - x_0)^k$ , — константы. ■

**Теорема о локальной форме остаточного члена (Форма Пеано)** Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0)$  и  $\exists f^{(n-1)}(x)$  на некоторой  $U(x_0)$ . Тогда справедлива формула Тейлора, причем  $r_n(f, x) = \bar{o}((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$ .

*Доказательство.* Докажем с помощью метода математической индукции. При  $n = 1$ ,  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$ , что верно, т.к.  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Предположим теперь, что теорема верна для произвольной функции  $f$  при  $n = n - 1$ , и докажем её при  $n = n$ .

Заметим сначала, что  $r_n(f, x_0) = 0$  (следует из обычной формулы Тейлора). Тогда  $r_n(f, x) = r_n(f, x) - r_n(f, x_0) = (r_n(f, \xi))'(x - x_0)$ , где  $\xi$  принадлежит интервалу  $(\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$  по теореме Лагранжа.

По лемме получаем, что  $(r_n(f, \xi))'(x - x_0) = r_{n-1}(f', \xi)(x - x_0)$ . По предположению для произвольной функции  $f$ , у которой есть  $n$ -ая производная в  $x_0$  и  $(n - 1)$ -ая в окрестности  $x_0$ , можно выполнить индукционный переход для  $f'$ , т.к. для  $r_{n-1}$  у  $f'(x)$  существуют  $(n - 1)$ -ая производная в  $x_0$  и  $(n - 2)$ -ая в окрестности  $x_0$ . Тогда  $r_{n-1}(f', \xi)(x - x_0) = \bar{o}((\xi - x_0)^{n-1})(x - x_0) = [|\xi - x_0| < |x - x_0| \implies \bar{o}((\xi - x_0)^{n-1}) = \bar{o}((x - x_0)^{n-1})] = \bar{o}((x - x_0)^{n-1})(x - x_0) = \bar{o}((x - x_0)^n)$  ■

**Теорема о форме Лагранжа** Пусть  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  и  $\exists f^{(n)}(x)$ , причем  $f^{(n)}(x)$  непрерывна на отрезке  $[x_0, x]$ . Кроме того,  $\exists f^{(n+1)}(x)$  на  $(x_0, x)$ . Тогда справедлива формула Тейлора, причем  $r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ , где  $\xi \in (x_0, x)$ .

*Доказательство.* Снова воспользуемся методом математической индукции. При  $n = 0$ ,  $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$  — формула Лагранжа. Предположим теперь, что для произвольной функции  $f$  справедливо, что  $r_{n-1}(f, x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$ , где  $\xi \in (x_0, x)$ . При  $n = n$  имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{r_n(f, x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{r_n(f, x) - r_n(f, x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} \quad [\text{по формуле Коши}] = \\
&= \frac{(r_n(f, \mu))'}{(n+1)(\mu - x_0)^n} \quad [\text{по лемме, доказанной выше}] = \\
&= \frac{r_{n-1}(f', \mu)}{(n+1)(\mu - x_0)^n} = \frac{(f'(\xi))^{(n)}}{(n+1)n!} \implies r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}
\end{aligned}$$

■

#### 49. Формулы Маклорена для основных элементарных функций (без доказательства).

При  $x_0 = 0$  формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано называется формулой Маклорена

Приведем пример:  $f(x) = \sin x$ . Вспомним, что

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \implies f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Тогда получаем следующее разложение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n})$$

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$$

$$2. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$$

$$3. (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \bar{o}(x^n)$$

$$\text{Например } (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)x^2 + \bar{o}(x^2) = \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + \bar{o}(x^2)$$

$$4. \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n})$$

$$5. \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

$$6. \operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} \cdot x^{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1}), \text{ где } B_{2n} \text{ — числа Бернулли}$$

Но достаточно помнить, что  $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \bar{o}(x^5)$ , т.е. общая формула для семинаров не нужна

$$7. \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \cdot x^{2n+1} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

$$\text{Достаточно знать } \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \bar{o}(x^5)$$

$$8. \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$9. \operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1})$$

#### 50. Правило Лопиталья.

**Теорема Лопиталья (первое правило)** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  таковы, что

1.  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в проколотой окрестности точки  $a$

2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

3.  $g'(x) \neq 0$  в окрестности  $U(a)$

4. Существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

*Доказательство.* Доопределим функции в точке  $a$  нулём (непрерывности не нарушится, так как предел этих функций при  $x \rightarrow a$  равен 0). Из первого условия следует, что  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, x]$ , где  $x$  принадлежит рассматриваемой окрестности точки  $a$ .

Применим обобщённую формулу конечных приращений (Коши) к  $f(x)$  и  $g(x)$  на отрезке  $[a, x]$ .

$$\exists \xi \in [a, x] : \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Так как  $g(a) = f(a) = 0$  получим, что  $\forall x \exists \xi \in [a, x] : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ .

По определению предела,  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : a < x < a + \delta \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon$ . Но для каждого  $x$  из указанного интервала найдётся своё  $\xi_x$ , такое что  $\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ . Но раз  $\xi_x \in (a, x)$ , то выполняется  $\left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A \right| < \varepsilon \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon$ , что и требовалось доказать. ■

**Теорема Лопиталья (второе правило)** Если для функций  $f(x)$  и  $g(x)$  справедливо следующее:

1.  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы на интервале  $(a, b)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$
3.  $g'(x) \neq 0$  при  $x \in (a, b)$
4. Существует  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

то  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

*Доказательство.* Для начала положим, что  $A \leq 0$  (при  $A > 0$  доказательство практически аналогично приведенному). Пусть  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ . Тогда по определению предела

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \iff \exists x_\varepsilon \in (a, b) : \forall x \in (a, x_\varepsilon) \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon$$

Здесь мы просто приняли, что  $x_\varepsilon = a + \delta$ , в остальном же интерпретация определения предела не изменилась.

Выберем произвольное  $x$  из данного интервала  $(a, x_\varepsilon)$ . Заметим, что выполняется теорема Коши (доопределим функции  $f$  и  $g$  в точке  $a$ , а в точке  $x_\varepsilon$  они уже определены):

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ где } a < x < \xi < x_\varepsilon < b$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}$$

Заметим теперь, что  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)} = 0$ , т.к.  $f(x_\varepsilon)$  и  $g(x_\varepsilon)$  — константы (а знаменатели по условию стремятся к  $\infty$ ). Тогда выберем для текущего закреплённого  $\varepsilon$  такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ :

$$\forall x \in (a, a + \delta), \delta + a < b \implies \left| \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)} \right| < \varepsilon, \left| \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)} \right| < \varepsilon$$

Тогда получаем следующую оценку:

$$\frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \in \left( \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}, \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)$$

Поскольку  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ , то  $\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = 1 - \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - 2\varepsilon$  и  $\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = 1 + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} < 1 + \frac{8}{3}\varepsilon$ . Учитывая, что  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(A)$ :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \in \left( (A - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon), (A + \varepsilon) \left(1 + \frac{8}{3}\varepsilon\right) \right) = \\ &= \left( A - (\varepsilon + 2A\varepsilon - 2\varepsilon^2), A + \left(\varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon A + \frac{8}{3}\varepsilon^2\right) \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \in U_\mu(A), \text{ где } \mu = \max \left\{ \varepsilon + 2A\varepsilon - 2\varepsilon^2, \varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon A + \frac{8}{3}\varepsilon^2 \right\} \end{aligned}$$

Как видно,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu = 0$ , а для любого сколько угодно малого  $\mu$  всегда можно найти соответствующее  $\varepsilon$ , такое, что все значения отношения функций попадут в заданную  $\mu$ -трубку. Это и означает, что предел отношения функции равен  $A$ . ■

## 51. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке.

**Теорема.** Для того чтобы дифференцируемая функция  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$  строго возрастала, достаточно, чтобы  $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0$

Для того чтобы дифференцируемая функция  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$  строго убывала, достаточно, чтобы  $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0$

*Доказательство.* Докажем для строгого возрастания. Пусть  $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$ . Выберем произвольные точки  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , и, не ограничивая общности, скажем, что  $x_1 < x_2$ .

Применим формулу конечных приращений Лагранжа. Так как  $f'(\xi) > 0$  и  $x_2 > x_1$ , имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

■

## 52. Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной.

# 2 Вопросы, которые были убраны из программы экзамена

## 1. Эквивалентность определений предела функции по Коши и Гейне

**Теорема.** Определения предела функции в точке по Коши и Гейне эквивалентны

*Доказательство.* Пусть  $f$  определена на множестве  $X$  и число  $A$  является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  в смысле Коши. Выберем произвольную подходящую последовательность  $x_n, n \in \mathbb{N}$ , т.е. такую, для которой  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Покажем, что  $A$  является пределом в смысле Гейне.

Зададим произвольное число  $\varepsilon > 0$  и укажем для него такое  $\delta > 0$ , что  $\forall x \in X$  из условия  $0 < |x - x_0| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . В силу того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , для  $\delta > 0$  найдется такой номер  $N \in \mathbb{N}$ , что для всех  $n \geq N$  будет выполняться неравенство  $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

Докажем теперь обратное утверждение: предположим, что  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  в смысле Гейне, и покажем, что число  $A$  является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  в смысле Коши. Предположим, что это неверно, т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in X : 0 < |x_\delta - x_0| < \delta : |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon$$

В качестве  $\delta$  рассмотрим  $\delta = \frac{1}{n}$ , а соответствующие значения  $x_\delta$  будем обозначать  $x_n$ . Тогда при любом  $n \in \mathbb{N}$  выполняются условия  $x_n \neq x_0, |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$  и  $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$ . Отсюда следует, что последовательность  $\{x_n\}$  является подходящей, но число  $A$  не является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$ . Получили противоречие. ■

*Доказательство.* Пусть переменная  $y$  в точке  $y_0$  получает приращение  $\Delta y \neq 0$ . Соответствующее ему приращение переменной  $x$  в точке  $x_0$  обозначим как  $\Delta x$ , причем  $\Delta x \neq 0$  в силу строгой монотонности функции  $y = f(x)$ . Запишем отношение приращений в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Допустим, что  $\Delta y \rightarrow 0$ , тогда  $\Delta x \rightarrow 0$ , поскольку обратная функция  $x = \phi(y)$  является непрерывной в точке  $y_0$ . В пределе, при  $\Delta x \rightarrow 0$ , правая часть записанного соотношения становится равной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

В таком случае левая часть тоже стремится к пределу, который по определению равен производной обратной функции:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \phi'(y_0)$$

Таким образом,

$$\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

■

## 2. Производные функций, графики которых заданы параметрически.

**Теорема.** Зависимость между аргументом  $x$  и функцией  $y$  может быть задана в параметрическом виде с помощью двух уравнений:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

Пусть  $x = \phi(t)$  и  $y = \psi(t)$  определены и дифференцируемы при  $t \in (a, b)$ , причем  $x'_t = \phi'(t) \neq 0$  и  $x = \phi(t)$  имеет обратную функцию  $t = \theta(x)$ , то

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

*Доказательство.* Перейдем от параметрического задания к явному. При этом получаем сложную функцию  $y = \psi(t) = \psi(\theta(x))$ , аргументов которой является  $x$ .

По правилу нахождения производной сложной функции имеем

$$y'_x = (\psi(\theta(x)))' = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x)$$

По теореме об обратной функции  $\theta'(x) = \frac{1}{\phi'(t)}$ . А значит

$$y'_x = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x) = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

■

## 3. Геометрический смысл дифференциала.

Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции  $y = f(x)$  в данной точке, когда аргумент  $x$  получает приращение  $\Delta x$ .

[Подробнее тут](#)