

# Математический анализ, Коллоквиум 2

Балюк Игорь

@lodthe, [GitHub](#)

2019 — 2020

## Содержание

<b>1</b>	<b>Вопросы предварительной части коллоквиума</b>	<b>3</b>
1.1	Определение непрерывности функции в точке.	3
1.2	Точки разрыва, их классификация.	3
1.3	Теорема о непрерывности сложной функции.	3
1.4	Формулировки первой и второй теорем Вейерштрасса.	3
1.5	Понятие производной функции в точке.	4
1.6	Геометрический и физический смысл производной.	4
1.7	Уравнение касательной к графику функции в точке.	4
1.8	Понятие дифференцируемости функции в точке.	4
1.9	Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного).	4
1.10	Формула вычисления производной сложной функции.	4
1.11	Таблица производных основных элементарных функций.	4
1.12	Понятие дифференциала (первого) функции в точке.	5
1.13	Геометрический смысл дифференциала.	5
1.14	Определение локального экстремума. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).	5
1.15	Формулы Лагранжа и Коши.	5
1.16	Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной.	5
1.17	Формулы Маклорена для основных элементарных функций.	5
1.18	Правило Лопиталя.	6
<b>2</b>	<b>Вопросы на знание доказательств</b>	<b>6</b>
2.1	Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. Точки разрыва, их классификация.	6
2.2	Непрерывность основных элементарных функций.	7
2.3	Арифметические свойства непрерывных функций.	7
2.4	Теорема о непрерывности сложной функции.	7
2.5	Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).	7
2.6	Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.	7
2.7	Понятие производной функции в точке.	7
2.8	Геометрический и физический смысл производной.	7
2.9	Уравнение касательной к графику функции в точке.	7
2.10	Понятие дифференцируемости функции в точке.	7
2.11	Необходимое условие дифференцируемости.	7
2.12	Правила дифференцирования.	7
2.13	Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.	7
2.14	Теорема о дифференцируемости обратной функции.	7
2.15	Таблица производных основных элементарных функций.	7
2.16	Производные функций, графики которых заданы параметрически.	7
2.17	Понятие дифференциала (первого) функции в точке.	7
2.18	Геометрический смысл дифференциала.	7
2.19	Инвариантность формы первого дифференциала.	7
2.20	Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке.	7

2.21	Понятие об экстремумах функции одной переменной. . . . .	7
2.22	Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма). . . . .	7
2.23	Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши). . . . .	7
2.24	Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. . . . .	7
2.25	Формулы Маклорена для основных элементарных функций. . . . .	8
2.26	Правило Лопиталю. . . . .	8
2.27	Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке. . . . .	8
2.28	Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной. . . . .	8
2.29	Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной. . . . .	8
2.30	Достаточные условия выпуклости (вогнутости). . . . .	8
2.31	Точки перегиба. . . . .	8
2.32	Необходимые и достаточные условия для точки перегиба. . . . .	8
2.33	Асимптоты графика функции одной переменной. . . . .	8

# 1 Вопросы предварительной части коллоквиума

Список вопросов предварительной части коллоквиума, ответ на которые необходим для подготовки к основной части.

## 1. Определение непрерывности функции в точке.

Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Другими словами,  $A = f(x_0)$  и справедливы следующие определения предела функции в точке  $x_0$ :

- **По Коши:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- **По Гейне:**

$$\forall \{x_n\} : x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

**Другое определение:**

Пусть  $f(x)$  — функция, определенная на промежутке  $I$  ( $I$  — это её область определения) и пусть  $c$  — произвольная точка из  $I$ . Предположим, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ :

$$\forall x \in I : |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Тогда функция  $f(x)$  **непрерывна** в точке  $c$ .

Заметьте, если  $c$  — это левая граница  $I$ , то условие имеет вид (функция непрерывна в точке  $c$  справа, аналогично для непрерывности слева).

$$\forall x \in I : c < x < c + \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

**Теорема.** Также, функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ . Тогда найдётся такое  $\delta > 0$ , что функция  $f(x)$  ограничена окрестностью  $U_\delta(a)$  точки  $a$ .

## 2. Точки разрыва, их классификация.

Пусть  $f(x)$  определена в некоторой окрестности  $U_\delta(a)$  и функция разрывна в  $a$ . Тогда этот разрыв является одним из следующих:

- **Устранимый разрыв:** пределы  $f(x)$  справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$$

- **Неустраняемый разрыв первого рода:** пределы  $f(x)$  справа и слева существуют, но не равны друг другу
- **Неустраняемый разрыв второго рода:** хотя бы один из односторонних пределов  $f(x)$  не существует или равен бесконечности.

## 3. Теорема о непрерывности сложной функции.

**Теорема.** Пусть функция  $g(x)$  непрерывна в точке  $a_0$  и функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $b_0 = g(a_0)$ . Тогда функция  $f(g(x))$  непрерывна в точке  $a_0$ .

## 4. Формулировки первой и второй теорем Вейерштрасса.

**Теорема** (Первая теорема Вейерштрасса). Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена на этом отрезке.

**Теорема** (Вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  достигает на нем своих нижней и верхней граней. Или, что тоже самое, достигает на отрезке своего минимума и максимума. То есть существуют такие точки  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , так что для любого  $x \in [a, b]$ , выполняются неравенства:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

## 5. Понятие производной функции в точке.

Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку  $x_0$ . Тогда функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$ , и ее производная определяется формулой

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

если предел существует.

## 6. Геометрический и физический смысл производной.

**Геометрический смысл производной.** Производная в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке.

**Физический смысл производной.** Если точка движется вдоль оси  $OX$  и ее координата изменяется по закону  $x(t)$ , то мгновенная скорость точки:  $v(t) = x'(t)$ .

## 7. Уравнение касательной к графику функции в точке.

Пусть дана функция  $f$ , которая в некоторой точке  $x_0$  имеет конечную производную  $f'(x_0)$ . Тогда прямая, проходящая через точку  $(x_0; f(x_0))$ , имеющая угловой коэффициент  $f'(x_0)$ , называется касательной.

Итак, пусть дана функция  $y = f(x)$ , которая имеет производную  $y = f'(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Тогда в любой точке  $x_0 \in (a; b)$  к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

## 8. Понятие дифференцируемости функции в точке.

Функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$  своей области определения  $D[f]$ , если существует такая константа  $A$ , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

и

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

## 9. Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют производные в точке  $x_0$ . Тогда,

$$\begin{aligned}(g + f)'(x_0) &= g'(x_0) + f'(x_0) \\ (g \cdot f)'(x_0) &= g'(x_0) \cdot f(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)\end{aligned}$$

Если  $g(x_0) \neq 0$ , то

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g'(x_0) \cdot f(x_0) - g(x_0) \cdot f'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

## 10. Формула вычисления производной сложной функции.

Если  $g(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f(x)$  дифференцируема в точке  $y_0 = g(x_0)$ , тогда,

$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

## 11. Таблица производных основных элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	$0$
$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$
$e^x$	$e^x$
$\ln_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

## 12. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.

Функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$  своей области определения  $D[f]$ , если существует такая константа  $A$ , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

Тогда выражение  $f'(x_0)dx$  называют дифференциалом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ . Обозначение:  $df = df(x_0, dx)$ . Обратите внимание, что  $df$  зависит и от точки, и от  $dx$ .

## 13. Геометрический смысл дифференциала.

Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции  $y = f(x)$  в данной точке, когда аргумент  $x$  получает приращение  $\Delta x$ .

[Подробнее тут](#)

## 14. Определение локального экстремума. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

Точка  $x_0$  называется точкой локального максимума (минимума) функции  $f$ , если существует такая окрестность  $U_\delta(x_0)$  точки  $x_0$ , что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leq f(x_0) \text{ (для минимума соответственно } f(x) \geq f(x_0))$$

$x_0$  называется точкой строгого локального максимума (минимума), если

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \implies f(x) < f(x_0) \text{ (для минимума соответственно } f(x) > f(x_0))$$

**Теорема (Ферма).** Если функция имеет в точке локального экстремума производную, то эта производная равна нулю.

## 15. Формулы Лагранжа и Коши.

**Теорема** (Лагранж: о конечных приращениях).

## 16. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной.

## 17. Формулы Маклорена для основных элементарных функций.

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$

$$3. (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \bar{o}(x^n)$$

$$\text{Например } (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \binom{\frac{1}{3}}{1} x + \binom{\frac{1}{3}}{2} x^2 + \bar{o}(x^2) = \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2} x^2 + \bar{o}(x^2)$$

$$4. \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{2n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n-1})$$

$$5. \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{2n-2} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \bar{o}(x^{2n-2})$$

$$6. \operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} \cdot x^{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1}), \text{ где } B_{2n} - \text{ числа Бернулли}$$

Но достаточно помнить, что  $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \bar{o}(x^5)$ , т.е. общая формула для семинаров не нужна

$$7. \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \cdot x^{2n+1} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

$$\text{Достаточно знать } \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \bar{o}(x^5)$$

$$8. \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$9. \operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1})$$

## 18. Правило Лопиталя.

## 2 Вопросы на знание доказательств

### 1. Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. Точки разрыва, их классификация.

Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Другими словами,  $A = f(x_0)$  и справедливы следующие определения предела функции в точке  $x_0$ :

• **По Коши:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

• **По Гейне:**

$$\forall \{x_n\} : x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

**Теорема.** Определения предела функции в точке по Коши и Гейне эквивалентны

*Доказательство.* Пусть  $f$  определена на множестве  $X$  и число  $A$  является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  в смысле Коши. Выберем произвольную подходящую последовательность  $x_n, n \in \mathbb{N}$ , т.е. такую, для которой  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Покажем, что  $A$  является пределом в смысле Гейне.

Зададим произвольное число  $\varepsilon > 0$  и укажем для него такое  $\delta > 0$ , что  $\forall x \in X$  из условия  $|x - x_0| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . В силу того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , для  $\delta > 0$  найдется такой номер  $N \in \mathbb{N}$ , что для всех  $n \geq N$  будет выполняться неравенство  $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

Докажем теперь обратное утверждение: предположим, что  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  в смысле Гейне, и покажем, что число  $A$  является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  в смысле Коши. Предположим, что это неверно, т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in X : 0 < |x_\delta - x_0| < \delta : |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon$$

В качестве  $\delta$  рассмотрим  $\delta = \frac{1}{n}$ , а соответствующие значения  $x_\delta$  будем обозначать  $x_n$ . Тогда при любом  $n \in \mathbb{N}$  выполняются условия  $x_n \neq x_0$ ,  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$  и  $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$ . Отсюда следует, что последовательность  $\{x_n\}$  является подходящей, но число  $A$  не является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$ . Получили противоречие. ■

### Классификация разрывов:

Пусть  $f(x)$  определена в некоторой окрестности  $U_\delta(a)$  и функция разрывна в  $a$ . Тогда говорят, что функция имеет

- **Устранимый разрыв:** пределы  $f(x)$  справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$$

- **Неустраняемый разрыв первого рода:** пределы  $f(x)$  справа и слева существуют, но не равны друг другу
- **Неустраняемый разрыв второго рода:** хотя бы один из односторонних пределов  $f(x)$  не существует или равен бесконечности.

2. Непрерывность основных элементарных функций.
3. Арифметические свойства непрерывных функций.
4. Теорема о непрерывности сложной функции.
5. Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).
6. Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.
7. Понятие производной функции в точке.
8. Геометрический и физический смысл производной.
9. Уравнение касательной к графику функции в точке.
10. Понятие дифференцируемости функции в точке.
11. Необходимое условие дифференцируемости.
12. Правила дифференцирования.
13. Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.
14. Теорема о дифференцируемости обратной функции.
15. Таблица производных основных элементарных функций.
16. Производные функций, графики которых заданы параметрически.
17. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.
18. Геометрический смысл дифференциала.
19. Инвариантность формы первого дифференциала.
20. Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке.
21. Понятие об экстремумах функции одной переменной.
22. Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).
23. Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши).
24. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.

- 25. Формулы Маклорена для основных элементарных функций.
- 26. Правило Лопиталя.
- 27. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке.
- 28. Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной.
- 29. Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной.
- 30. Достаточные условия выпуклости (вогнутости).
- 31. Точки перегиба.
- 32. Необходимые и достаточные условия для точки перегиба.
- 33. Асимптоты графика функции одной переменной.