

# Математический анализ, Коллоквиум 2

Балюк Игорь

@lodthe, [GitHub](#)

2019 — 2020

## Содержание

<b>1</b>	<b>Вопросы предварительной части коллоквиума</b>	<b>3</b>
1.1	Определение непрерывности функции в точке.	3
1.2	Точки разрыва, их классификация.	3
1.3	Теорема о непрерывности сложной функции.	3
1.4	Формулировки первой и второй теорем Вейерштрасса.	3
1.5	Понятие производной функции в точке.	3
1.6	Геометрический и физический смысл производной.	4
1.7	Уравнение касательной к графику функции в точке.	4
1.8	Понятие дифференцируемости функции в точке.	4
1.9	Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного).	4
1.10	Формула вычисления производной сложной функции.	4
1.11	Таблица производных основных элементарных функций.	4
1.12	Понятие дифференциала (первого) функции в точке.	5
1.13	Геометрический смысл дифференциала.	5
1.14	Определение локального экстремума. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).	5
1.15	Формулы Лагранжа и Коши.	5
1.16	Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной.	5
1.17	Формулы Маклорена для основных элементарных функций.	5
1.18	Правило Лопиталя.	6
<b>2</b>	<b>Вопросы на знание доказательств</b>	<b>6</b>
2.1	Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. Точки разрыва, их классификация.	6
2.2	Непрерывность основных элементарных функций.	6
2.3	Арифметические свойства непрерывных функций.	6
2.4	Теорема о непрерывности сложной функции.	6
2.5	Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).	6
2.6	Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.	6
2.7	Понятие производной функции в точке.	6
2.8	Геометрический и физический смысл производной.	6
2.9	Уравнение касательной к графику функции в точке.	6
2.10	Понятие дифференцируемости функции в точке.	6
2.11	Необходимое условие дифференцируемости.	6
2.12	Правила дифференцирования.	6
2.13	Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.	6
2.14	Теорема о дифференцируемости обратной функции.	6
2.15	Таблица производных основных элементарных функций.	6
2.16	Производные функций, графики которых заданы параметрически.	6
2.17	Понятие дифференциала (первого) функции в точке.	6
2.18	Геометрический смысл дифференциала.	6
2.19	Инвариантность формы первого дифференциала.	6
2.20	Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке.	6

2.21	Понятие об экстремумах функции одной переменной. . . . .	6
2.22	Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма). . . . .	6
2.23	Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши). . . . .	6
2.24	Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. . . . .	6
2.25	Формулы Маклорена для основных элементарных функций. . . . .	6
2.26	Правило Лопиталю. . . . .	6
2.27	Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке. . . . .	6
2.28	Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной. . . . .	6
2.29	Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной. . . . .	6
2.30	Достаточные условия выпуклости (вогнутости). . . . .	7
2.31	Точки перегиба. . . . .	7
2.32	Необходимые и достаточные условия для точки перегиба. . . . .	7
2.33	Асимптоты графика функции одной переменной. . . . .	7

# 1 Вопросы предварительной части коллоквиума

Список вопросов предварительной части коллоквиума, ответ на которые необходим для подготовки к основной части.

## 1. Определение непрерывности функции в точке.

Пусть  $f(x)$  — функция, определенная на промежутке  $I$  ( $I$  — это её область определения) и пусть  $c$  — произвольная точка из  $I$ . Предположим, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ :

$$\forall x \in I: |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Тогда функция  $f(x)$  **непрерывна** в точке  $c$ .

Заметьте, если  $c$  — это левая граница  $I$ , то условие имеет вид (функция непрерывна в точке  $c$  справа, аналогично для непрерывности слева).

$$\forall x \in I: c < x < c + \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

**Теорема.** Также, функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ . Тогда найдётся такое  $\delta > 0$ , что функция  $f(x)$  ограничена окрестностью  $U_\delta(a)$  точки  $a$ .

## 2. Точки разрыва, их классификация.

Пусть  $f(x)$  определена в некоторой окрестности  $U_\delta(a)$ .

- **Устранимый разрыв:** пределы справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$$

- **Неустраняемый разрыв первого рода:** пределы справа и слева существуют, но не равны друг другу
- **Неустраняемый разрыв второго рода:** хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

## 3. Теорема о непрерывности сложной функции.

**Теорема.** Пусть функция  $g(x)$  непрерывна в точке  $a_0$  и функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $b_0 = g(a_0)$ . Тогда функция  $f(g(x))$  непрерывна в точке  $a_0$ .

## 4. Формулировки первой и второй теорем Вейерштрасса.

**Теорема** (Первая теорема Вейерштрасса). Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена на этом отрезке.

**Теорема** (Вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  достигает на нем своих нижней и верхней граней. Или, что тоже самое, достигает на отрезке своего минимума и максимума. То есть существуют такие точки  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , так что для любого  $x \in [a, b]$ , выполняются неравенства:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

## 5. Понятие производной функции в точке.

Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку  $x_0$ . Тогда функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$ , и ее производная определяется формулой

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

если предел существует.

## 6. Геометрический и физический смысл производной.

**Геометрический смысл производной.** Производная в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке.

**Физический смысл производной.** Если точка движется вдоль оси  $OX$  и ее координата изменяется по закону  $x(t)$ , то мгновенная скорость точки:  $v(t) = x'(t)$ .

## 7. Уравнение касательной к графику функции в точке.

Пусть дана функция  $f$ , которая в некоторой точке  $x_0$  имеет конечную производную  $f'(x_0)$ . Тогда прямая, проходящая через точку  $(x_0; f(x_0))$ , имеющая угловой коэффициент  $f'(x_0)$ , называется касательной.

Итак, пусть дана функция  $y = f(x)$ , которая имеет производную  $y = f'(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Тогда в любой точке  $x_0 \in (a; b)$  к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

## 8. Понятие дифференцируемости функции в точке.

Функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$  своей области определения  $D[f]$ , если существует такая константа  $A$ , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

и

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

## 9. Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют производные в точке  $x_0$ . Тогда,

$$\begin{aligned}(g + f)'(x_0) &= g'(x_0) + f'(x_0) \\ (g \cdot f)'(x_0) &= g'(x_0) \cdot f(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)\end{aligned}$$

Если  $g(x_0) \neq 0$ , то

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g'(x_0) \cdot f(x_0) - g(x_0) \cdot f'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

## 10. Формула вычисления производной сложной функции.

Если  $g(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f(x)$  дифференцируема в точке  $y_0 = g(x_0)$ , тогда,

$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

## 11. Таблица производных основных элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	0
$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$
$e^x$	$e^x$
$\ln_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

## 12. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.

Функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$  своей области определения  $D[f]$ , если существует такая константа  $A$ , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) \\ A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

Тогда выражение  $f'(x_0)dx$  называют дифференциалом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ . Обозначение:  $df = df(x_0, dx)$ . Обратите внимание, что  $df$  зависит и от точки, и от  $dx$ .

## 13. Геометрический смысл дифференциала.

Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции  $y = f(x)$  в данной точке, когда аргумент  $x$  получает приращение  $\Delta x$ .

[Подробнее тут](#)

## 14. Определение локального экстремума. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

Точка  $x_0$  называется точкой локального максимума (минимума) функции  $f$ , если существует такая окрестность  $U_\delta(x_0)$  точки  $x_0$ , что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leq f(x_0) \text{ (для минимума соответственно } f(x) \geq f(x_0))$$

$x_0$  называется точкой строгого локального максимума (минимума), если

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \implies f(x) < f(x_0) \text{ (для минимума соответственно } f(x) > f(x_0))$$

**Теорема (Ферма).** Если функция имеет в точке локального экстремума производную, то эта производная равна нулю.

## 15. Формулы Лагранжа и Коши.

**Теорема** (Лагранж: о конечных приращениях).

## 16. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной.

## 17. Формулы Маклорена для основных элементарных функций.

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \bar{o}(x^n)$

$$\text{Например } (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \binom{\frac{1}{3}}{1}x + \binom{\frac{1}{3}}{2}x^2 + \bar{o}(x^2) = \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + \bar{o}(x^2)$$

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{2n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n-1})$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{2n-2} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \bar{o}(x^{2n-2})$
- $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} \cdot x^{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1})$ , где  $B_{2n}$  — числа Бернулли

Но достаточно помнить, что  $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \bar{o}(x^5)$ , т.е. общая формула для семинаров не нужна

- $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \cdot x^{2n+1} + \bar{o}(x^{2n+1})$

$$\text{Достаточно знать } \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \bar{o}(x^5)$$

$$8. \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$9. \operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1})$$

18. Правило Лопиталя.

## 2 Вопросы на знание доказательств

1. Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. Точки разрыва, их классификация.
2. Непрерывность основных элементарных функций.
3. Арифметические свойства непрерывных функций.
4. Теорема о непрерывности сложной функции.
5. Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).
6. Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.
7. Понятие производной функции в точке.
8. Геометрический и физический смысл производной.
9. Уравнение касательной к графику функции в точке.
10. Понятие дифференцируемости функции в точке.
11. Необходимое условие дифференцируемости.
12. Правила дифференцирования.
13. Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.
14. Теорема о дифференцируемости обратной функции.
15. Таблица производных основных элементарных функций.
16. Производные функций, графики которых заданы параметрически.
17. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.
18. Геометрический смысл дифференциала.
19. Инвариантность формы первого дифференциала.
20. Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке.
21. Понятие об экстремумах функции одной переменной.
22. Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).
23. Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши).
24. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.
25. Формулы Маклорена для основных элементарных функций.
26. Правило Лопиталя.
27. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке.
28. Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной.
29. Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной.

- 30. Достаточные условия выпуклости (вогнутости).
- 31. Точки перегиба.
- 32. Необходимые и достаточные условия для точки перегиба.
- 33. Асимптоты графика функции одной переменной.