

# Математический анализ

Игорь Балюк, БПМИ193

@lodthe, github

2019 — 2020

## Содержание

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Пределы</b>  | <b>3</b> |
| 1.1      | Следствия первого замечательного предела . . . . .  | 3        |
| 1.2      | Следствия второго замечательного предела . . . . .  | 3        |
| 1.3      | Тригонометрические формулы . . . . .  | 4        |
| <b>2</b> | <b>Коллоквиум 1</b>   | <b>4</b> |
| 2.1      | В обязательный минимум входят . . . . .   | 4        |
| 2.1.1    | Определение предела числовой последовательности . . . . .   | 4        |
| 2.1.2    | Определение точной верхней и нижней грани . . . . .   | 4        |
| 2.1.3    | Определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности . . . . .                        | 5        |
| 2.1.4    | Определение предела функции в точке и на бесконечности по Коши и по Гейне . . . . .                   | 5        |
| 2.1.5    | Определение фундаментальной последовательности, критерий Коши сходимости последовательности . . . . . | 5        |
| 2.1.6    | Первый и второй замечательный пределы . . . . .   | 5        |
| 2.1.7    | Таблица производных элементарных функций . . . . .  | 6        |
| 2.2      | Основные понятие и теоремы (с доказательствами) . . . . .   | 6        |
| 2.2.1    | Числовые последовательности. Примеры. . . . .   | 6        |
| 2.2.2    | Понятие предела последовательности. . . . .   | 6        |
| 2.2.3    | Ограниченные и неограниченные последовательности. . . . .   | 6        |
| 2.2.4    | Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. . . . .                                      | 7        |
| 2.2.5    | Теорема о единственности предела сходящейся последовательности. . . . .                               | 7        |
| 2.2.6    | Теорема о переходе к пределу в неравенствах. . . . .  | 8        |
| 2.2.7    | Теорема о вынужденном пределе (Теорема о двух милиционерах). . . . .                                  | 8        |
| 2.2.8    | Теорема о сходимости монотонных ограниченных последовательностей. . . . .                             | 8        |
| 2.2.9    | Определение числа $\epsilon$ . . . . .  | 8        |
| 2.2.10   | Бесконечно малые последовательности. . . . .  | 9        |
| 2.2.11   | Связь со сходящимися последовательностями. . . . .  | 9        |
| 2.2.12   | Арифметические свойства бесконечно малых и сходящихся последовательностей. . . . .                    | 10       |
| 2.2.13   | Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми. . . . .                          | 10       |
| 2.2.14   | Арифметические свойства для последовательностей, имеющих конечные и бесконечные пределы. . . . .      | 11       |

|        |   |    |
|--------|---|----|
| 2.2.15 | Неопределенности. . . . .   | 11 |
| 2.2.16 | Определение подпоследовательности. . . . .  | 11 |
| 2.2.17 | Теорема Больцано-Вейерштрасса. . . . .  | 12 |
| 2.2.18 | Критерий Коши сходимости последовательности. . . . .  | 12 |
| 2.2.19 | Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне. . . . .   | 13 |
| 2.2.20 | Теорема об эквивалентности этих определений. . . . .  | 13 |
| 2.2.21 | Односторонние пределы, их связь с двусторонними. Пределы функции в бесконечности. . . . .   | 14 |
| 2.2.22 | Неопределенности. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах, о вынужденном пределе. [Не пройдено] . . . . .   | 15 |
| 2.2.23 | Теорема о пределе сложной функции. [Не пройдено] . . . . .  | 15 |
| 2.2.24 | Первый и второй замечательные пределы. [Не пройдено] . . . . .  | 15 |
| 2.2.25 | Сравнение функций, о-символика, главная часть функции, порядок малости и порядок роста функции. [Не пройдено] . . . . .   | 15 |
| 2.2.26 | Критерий Коши существования конечного предела функции. [Не пройдено] . . . . .  | 15 |
| 2.2.27 | Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. [Не пройдено] . . . . .  | 15 |
| 2.2.28 | Точки разрыва, их классификация. Непрерывность основных элементарных функций. [Не пройдено] . . . . .   | 15 |
| 2.2.29 | Арифметические свойства непрерывных функций. [Не пройдено] . . . . .  | 15 |
| 2.2.30 | Теорема о непрерывности сложной функции. [Не пройдено] . . . . .  | 15 |
| 2.2.31 | Теоремы о локальной ограниченности и локальном сохранении знака для функций, непрерывных в точке. [Не пройдено] . . . . .   | 15 |
| 2.2.32 | Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса, теорема Коши). Критерий существования и непрерывности обратной функции на промежутке. [Не пройдено] . . . . . | 15 |
| 2.2.33 | Понятие равномерной непрерывности функции на множестве. [Не пройдено] . . . . .   | 15 |
| 2.2.34 | Теорема Кантора [Не пройдено] . . . . .   | 15 |
| 2.2.35 | Система стягивающихся отрезков [В списке вопросов к коллоквиуму отсутствует] . . . . .  | 15 |

# 1 Пределы

## 1.1 Следствия первого замечательного предела

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} &= 1\end{aligned}$$

## 1.2 Следствия второго замечательного предела

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} &= e \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} &= e^{ab} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} &= 1, a > 0, a \neq 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^a - 1}{x} &= a\end{aligned}$$

## 1.3 Тригонометрические формулы

Сайт с многими остальными формулами

$$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \quad (\sin(-a) = -\sin(a))$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} \cdot (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot (\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot (\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\cos a = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{a}{2} \right)$$

## 2 Коллоквиум 1

Информация о коллоквиуме

Ориентировочная дата проведения: 09.11.2019

### 2.1 В обязательный минимум входят

#### 2.1.1 Определение предела числовой последовательности

Число  $a$  называется пределом числовой последовательности  $\{x_n\}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

#### 2.1.2 Определение точной верхней и нижней грани

Верхняя (нижняя) грань числового множества  $X$  — число  $a$  такое, что  $\forall x \in X \implies x \leq (\geq) a$

Точная верхняя грань (или супремум) — это наименьшая из всех верхних граней. Обозначается  $\sup X$ .

Точная нижняя грань (или инфимум) — это наибольшая из всех нижних граней. Обозначается  $\inf X$ .

$$a = \sup X \iff (\forall x \in X \implies x \leq a) \wedge (\nexists b : b < a, \forall x \in X \implies x \leq b)$$

$$a = \inf X \iff (\forall x \in X \implies x \geq a) \wedge (\nexists b : b > a, \forall x \in X \implies x \geq b)$$

### 2.1.3 Определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности

Последовательность  $\{x_n\}$  называется

- бесконечно малой последовательностью, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \implies |x_n| < \varepsilon$$

- бесконечно большой последовательностью, если

$$\forall A > 0 \exists N(A) : \forall n \geq N(A) \implies |x_n| > A$$

### 2.1.4 Определение предела функции в точке и на бесконечности по Коши и по Гейне

- По Коши:  $A$  — предел функции  $f(x)$  в точке  $a$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- По Гейне:  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$ , если  $\forall \{x_n\} \rightarrow a, x_n \neq a$  (т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ), соответствующая последовательность значений  $f(x_n) \rightarrow A$  (т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ )

### 2.1.5 Определение фундаментальной последовательности, критерий Коши сходимости последовательности

Критерий Коши: Для того, чтобы последовательность  $\{x_n\}$  сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n, m > N(\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

### 2.1.6 Первый и второй замечательный пределы

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

## 2.1.7 Таблица производных элементарных функций

$$\begin{aligned}(C)' &= 0 \\(x^a)' &= a \cdot x^{a-1} \\(a^x)' &= a^x \ln a \\(e^x)' &= e^x \\(\ln x)' &= \frac{1}{x} \\(\sin x)' &= \cos x \\(\cos x)' &= -\sin x \\(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\(\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

## 2.2 Основные понятие и теоремы (с доказательствами)

### 2.2.1 Числовые последовательности. Примеры.

Определение из википедии: Пусть  $X$  — это либо множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$ , либо множество комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Тогда последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  элементов множества  $X$  называется **числовой последовательностью**.

Определение из Ёжика: Отображение  $\mathbb{N} \mapsto X$  будем называть последовательностью и записывать как  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Отображение  $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$  будем называть **числовой последовательностью**.

Примеры:

- Функция, сопоставляющая каждому натуральному числу  $n \leq 12$  одно из слов «январь», «февраль», «март», «апрель», «май», «июнь», «июль», «август», «сентябрь», «октябрь», «ноябрь», «декабрь» (в порядке их следования здесь) представляет собой последовательность вида  $\{x_n\}_{n=1}^{12}$ . Например, пятым элементом  $x_5$  этой последовательности является слово «май».
- $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$  является бесконечной последовательностью рациональных чисел. Элементы этой последовательности начиная с первого имеют вид  $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$
- $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$  является бесконечной последовательностью целых чисел. Элементы этой последовательности начиная с первого имеют вид  $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$

### 2.2.2 Понятие предела последовательности.

Число  $a$  называется пределом числовой последовательности  $\{x_n\}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

### 2.2.3 Ограниченные и неограниченные последовательности.

- Ограниченная сверху последовательность — это последовательность элементов множества  $\mathbb{R}$ , все члены которой не превышают некоторого элемента из этого множества. Этот элемент называется верхней гранью данной последовательности (говоря

в общем, это верно и не только для  $\mathbb{R}$ ).

$$\{x_n\} \text{ ограниченная сверху} \iff \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \implies x_n \leq M$$

- Ограниченная снизу последовательность — это последовательность элементов множества  $\mathbb{R}$ , для которой в этом множестве найдётся элемент, не превышающий всех её членов. Этот элемент называется нижней гранью данной последовательности.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная снизу} \iff \exists m \in \mathbb{R} : \forall n \implies x_n \geq m$$

- Ограниченная последовательность (ограниченная с обеих сторон последовательность) — это последовательность, ограниченная и сверху, и снизу.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная} \iff \exists M, m \in \mathbb{R} : \forall n \implies m \leq x_n \leq M$$

- Неограниченная последовательность — это последовательность, которая не является ограниченной.

$$\{x_n\} \text{ неограниченная} \iff \forall M, m \in \mathbb{R} : \exists N \implies (x_N < m) \vee (x_N > M)$$

- Критерий ограниченности: Числовая последовательность является ограниченной тогда и только тогда, когда существует такое число, что модули всех членов последовательности не превышают его.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная} \iff \exists A \in \mathbb{R} : \forall n \implies |x_n| \leq A$$

#### 2.2.4 Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.

Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

*Доказательство.* Все члены последовательности, кроме конечного их числа, принадлежат окрестности предела — ограниченному множеству.

Пусть последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Пусть  $\varepsilon = 1$ , тогда  $A = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$ . Тогда,  $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq A$ . ■

#### 2.2.5 Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.

**Теорема.** Если предел числовой последовательности существует, то он единственный.

*Доказательство.* Доказательство теоремы проведем «методом от противного». Предположим, что теорема неверна. Тогда, пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = b$  и выполняется следующее:

$$\begin{cases} a < b, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \implies |x_n - b| < \varepsilon, \end{cases}$$

Положим  $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$  и  $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ . Тогда,  $\forall n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon \wedge |x_n - b| < \varepsilon$ . Возьмём  $n \geq N$ , тогда,

$$b - a = |b - a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} = b - a$$

Пришли к противоречию ( $b - a < b - a$ ). ■

### 2.2.6 Теорема о переходе к пределу в неравенствах.

**Теорема.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . Если  $a < b$ , то  $\exists N : \forall n \geq N \implies x_n < y_n$ .

*Доказательство.* Из аксиомы полноты  $\exists c : a < c < b$ .

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies |y_n - b| < \varepsilon_2$$

Тогда,  $\forall n \geq N_1 \implies |x_n - a| < c - a$  и  $\forall n \geq N_2 \implies |y_n - b| < b - c$ . Отсюда  $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \implies x_n < c - a + a = c = c - b + b < y_n$ . ■

### 2.2.7 Теорема о вынужденном пределе (Теорема о двух милиционерах).

**Теорема.** Если  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \leq z_n$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ .

*Доказательство.* Из определения предела  $\{x_n\}$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ . Аналогично для предела  $\{z_n\}$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies |z_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ .

Тогда,  $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \implies a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ . ■

### 2.2.8 Теорема о сходимости монотонных ограниченных последовательностей.

**Теорема.** Неубывающая числовая последовательность имеет предел, причём он в точности равен точной верхней границе (нижней границе, для ограниченной невозрастающей ч.п.).

*Доказательство.* Пусть  $\{x_n\}$  — ограниченная неубывающая числовая последовательность. Тогда множество  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ограничено, следовательно, из определения супремума, имеет супремум. Обозначим его через  $S$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$ . Действительно, так как  $S = \sup\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies S - \varepsilon < x_n \leq S \implies |x_n - S| < \varepsilon$$

Аналогичное доказательство для ограниченной невозрастающей ч.п.

### 2.2.9 Определение числа $e$ .

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

**Теорема.** Последовательность с общим членом  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  имеет конечный предел при  $n \rightarrow \infty$ . Для обозначения этого предела используется символ  $e$ .

*Доказательство.* Докажем сначала, что  $\{e_n\}$  представляет собой монотонно возрастающую последовательность. Согласно биному Ньютона,

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots
\end{aligned}$$

Сравним  $e_n$  и  $e_{n+1}$ :

- Оба выражения содержат только положительные слагаемые
- Начиная со второго слагаемого, каждый член в выражении  $e_{n+1}$  превышает соответствующий член в  $e_n$ , так как

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right) < \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots$$

- Выражение  $e_{n+1}$  состоит из большего числа слагаемых. Следовательно,  $e_{n+1} > e_n$ .

Далее докажем, что последовательность  $\{e_n\}$  является ограниченной. Действительно, первый член любой монотонно возрастающей последовательности является ее наибольшей нижней границей и, таким образом,  $e_n \geq 2 \forall n \in \mathbb{N}$ .

Перейдем к доказательству существования верхней границы. Очевидно, что

$$\begin{aligned}
e_n &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) < \\
&< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

Кроме того,  $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^k} \forall k > 3$ . Тогда,

$$\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Правая часть этого неравенства представляет собой сумму убывающей геометрической прогрессии, которая равна  $\frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$ . Таким образом, последовательность

$$e_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} < 3$$

представляет собой ограниченную монотонно возрастающую последовательность и, следовательно, имеет конечный предел. ■

### 2.2.10 Бесконечно малые последовательности.

Последовательность  $a_n$  называется бесконечно малой, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

### 2.2.11 Связь со сходящимися последовательностями.

Если предел последовательности равен 0, то это бесконечно малая последовательность. Бесконечно малые последовательности являются сходящимися последовательностями.

Для того чтобы последовательность  $\{x_n\}$  имела предел  $b$ , необходимо и достаточно, чтобы  $x_n = b + \alpha_n$ , где  $\alpha_n$  — бесконечно малая последовательность.

### 2.2.12 Арифметические свойства бесконечно малых и сходящихся последовательностей.

Пусть  $\{\alpha_n\}$  — бесконечно малая числовая последовательность.

- $\{\alpha_n\}$  ограничена

*Доказательство.* Как известно,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \implies |\alpha_n| < \varepsilon$ . Значит, для всех  $n > N$  доказано. Но  $\forall n < N \implies \alpha_n \leq \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N-1}|\}$ . Тогда выберем  $\varepsilon = 1, A = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N-1}|, 1\} \implies \forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n| \leq A$ . ■

- Если  $\{y_n\}$  ограничена, то  $\{y_n \cdot \alpha_n\}$  — бесконечно малая.

*Доказательство.*  $\{\alpha_n\}$  — бесконечно малая, поэтому  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$ . Ввиду ограниченности  $\{y_n\}, \exists A : \forall n \in \mathbb{N} \implies |y_n| \leq A$ . Но тогда  $\{y_n \cdot \alpha_n\} : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |y_n \cdot \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon$ . ■

- Если  $\{\beta_n\}$  — бесконечно малая, то  $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$  и  $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$  — бесконечно малые.

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда при } N = \max\{N_1, N_2\} \implies \forall n \geq N \implies |\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Аналогично для произведения:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies |\alpha_n| < \frac{1}{\varepsilon} \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies |\beta_n| < \varepsilon^2$$

$$\text{Тогда при } N = \max\{N_1, N_2\} \implies \forall n \geq N \implies |\alpha_n \cdot \beta_n| \leq |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon$$

### 2.2.13 Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми.

- Если  $\{x_n\}$  — бесконечно малая и  $\forall n \in \mathbb{N} \implies x_n \neq 0$ , то  $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$  — бесконечно большая.

$$\text{Доказательство. } \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n| < \varepsilon \iff \frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = A \quad \blacksquare$$

- Если  $\{x_n\}$  — бесконечно большая и  $\forall n \in \mathbb{N} \implies x_n \neq 0$ , то  $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$  — бесконечно малая.

$$\text{Доказательство. } \forall A > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n| > A \iff \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{A} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

### 2.2.14 Арифметические свойства для последовательностей, имеющих конечные и бесконечные пределы.

Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$ , а также  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ , если  $b \neq 0$ .

*Доказательство.*

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \iff x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n$ , где  $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$  — бесконечно малые.

$$\begin{aligned} x_n \pm y_n &= (a + \alpha_n) \pm (b + \beta_n) = (a \pm b) + \underbrace{(\alpha_n \pm \beta_n)}_{\text{б. м.}} \\ x_n \cdot y_n &= (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = a \cdot b + \underbrace{(\alpha_n \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a)}_{\text{б.м.}} \end{aligned}$$

**Лемма.** Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ . Тогда  $\exists r > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies |y_n| > r > 0$ .

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |y_n - b| < \varepsilon \iff b - \varepsilon < |y_n| < b + \varepsilon$ . Пусть  $\varepsilon = \frac{b}{2}$ , тогда  $r < \frac{b}{2} < y_n < \frac{3b}{2}$ . ■

Рассмотрим последовательность  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right\}$  — бесконечно малая.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b \cdot a + b \cdot \alpha_n - b \cdot a - \beta_n \cdot a}{y_n \cdot b} = (\alpha_n \cdot b - \beta_n \cdot a) \cdot \frac{1}{y_n \cdot b}$$

По лемме  $\left| \frac{1}{y_n \cdot b} \right| \leq \max \left\{ \left| \frac{1}{y_1 \cdot b} \right|, \dots, \left| \frac{1}{y_N \cdot b} \right|, \frac{1}{rb} \right\} \implies \left\{ \frac{1}{y_n \cdot b} \right\}$  ограничена. Но тогда имеем произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей, значит,  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right\}$  — бесконечно малая. ■

### 2.2.15 Неопределенности.

Не очень понятно, что именно требуется в этом пункте

Основные виды неопределенностей:  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

Раскрывать неопределенность помогает:

- упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения,
- тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.); использование замечательных пределов;

### 2.2.16 Определение подпоследовательности.

Подпоследовательность последовательности  $\{x_n\}$  — это последовательность  $\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}\}$ , полученная из  $\{x_n\}$ , удалением ряда её членов без изменения порядка следования членов.

То есть подпоследовательность состоит из членов исходной последовательности  $\{x_n\}$  с номерами  $n_k$ , где  $\{n_k\}$  — строго монотонная последовательность натуральных чисел.

*Примечание.* Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , тогда  $\forall \{a_{n_k}\} : \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

### 2.2.17 Теорема Больцано-Вейерштрасса.

**Теорема.** Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

*Доказательство.* Для понимания происходящего следует ознакомиться с 2.2.35 Системой стягивающихся отрезков (ССО)

$\{x_n\}$  ограничена  $\implies \exists [a, b] : \forall n \in N \implies a \leq x_n \leq b$ . Поделим  $[a; b]$  на две равные части. Хотя бы одна из частей (пусть это  $[a_1; b_1]$ ) содержит бесконечно много элементов  $\{x_n\}$ .

Выберем на  $[a_1; b_1]$  произвольный элемент  $\{x_n\}$ . Назовем его  $x_{n_1}$ . Далее делим  $[a_1; b_1]$  на две равные части. Хотя бы одна из этих частей содержит бесконечно много элементов  $\{x_n\}$ . Обозначим ее  $[a_2; b_2]$ . Выберем  $x_{n_2} \in [a_2; b_2]$ . Будем продолжать выполнять указанные действия. Обозначим за  $x_{n_k}$  число, полученное на  $k$ -ом шаге, т.е.  $x_{n_k} \in [a_k; b_k]$ .

$\{[a_k; b_k]\}$  — система стягивающихся отрезков. Тогда, существует единственное  $c : \forall k \implies c \in [a_k; b_k]$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = c \implies \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \text{ (по теореме о двух милиционерах)} \quad \blacksquare$$

### 2.2.18 Критерий Коши сходимости последовательности.

Критерий Коши: Для того, чтобы последовательность  $\{x_n\}$  сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Докажем необходимость и достаточность.

- Необходимость:

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall p \geq N \implies |x_p - a| < \varepsilon$$

Поскольку  $\varepsilon$  произвольное, можно взять вместо него  $\frac{\varepsilon}{2}$

$$p = m \geq N \implies |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$p = n \geq N \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

То есть  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ , а значит  $\{x_n\}$  фундаментальная по определению. Необходимость доказана

- Достаточность:

Пусть  $\{x_n\}$  — фундаментальная последовательность, докажем, что она имеет предел. Сначала покажем, что  $\{x_n\}$  — ограничена. По определению фундаментальной последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Так как  $\varepsilon$  произвольное, возьмём  $\varepsilon = 1$ .

$$|x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leq \underbrace{|x_n - x_N|}_{\leq \varepsilon} + |x_N| \leq 1 + |x_N|$$

$$\forall n \geq N \implies |x_n| \leq (1 + |x_N|) = \text{const} = A \implies |x_n| \leq A$$

$$A = \max\{1 + |x_N|; |x_1|; |x_2|; \dots; |x_N|\}$$

$$\forall n \geq N \implies |x_n| \leq A$$

По теореме 2.2.17 Больцано-Вейерштрасса, так как  $\{x_n\}$  — ограниченная,  $\{x_n\}$  имеет сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ .

Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ , покажем, что число  $a$  и будет пределом всей последовательности  $\{x_n\}$ .

Так как  $\{x_n\}$  фундаментальная:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall p \geq N_1 \implies |x_p - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как  $\{x_{n_k}\}$  сходящаяся:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a : \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n_k \geq n_{N_2} \implies |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : |x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\text{Возьмём } N = \max\{N_1, N_2\} : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Достаточность доказана. ■

## 2.2.19 Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне.

- По Коши (или на языке  $\varepsilon - \delta$ ):

$A$  — предел функции  $f(x)$  в точке  $a$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- По Гейне:

$A$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$ , если  $\forall \{x_n\} \rightarrow a, x_n \neq a$  (т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ), соответствующая последовательность значений  $f(x_n) \rightarrow A$  (т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ )

## 2.2.20 Теорема об эквивалентности этих определений.

- Из определения по Коши следует определение по Гейне:

Выберем произвольную  $\{x_n\} \rightarrow a, x_n \neq a$ . По определению предела последовательности

$$\forall \delta > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n - a| < \delta$$

Указанное неравенство выполняется для любого  $\delta > 0$ . Тогда какое бы  $\varepsilon > 0$  мы бы ни выбрали, можно найти  $\delta > 0$ , такое, что по определению по Коши будет выполняться

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

т.е.  $\{f(x_n)\} \rightarrow A$ , а значит из сходимости по Коши следует сходимость по Гейне.

- Из определения по Гейне следует определение по Коши:

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$  По Гейне. От противного: если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  по Гейне, то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$  по Коши. Напишем отрицание определения по Коши:

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \delta > 0 : \exists x : 0 < |x - a| < \delta : |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$$

Так как  $\delta$  может быть любым, можно выбрать последовательность  $\{\delta_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ , а соответствующие значения  $x$  будем обозначать как  $x_n$ . Тогда  $0 < |x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}$ , и  $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$ . Отсюда следует, что последовательность  $\{x_n\}$  является подходящей, но при этом число  $A$  не является пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$  (по Гейне). Пришли к противоречию.

### 2.2.21 Односторонние пределы, их связь с двусторонними. Пределы функции в бесконечности.

Назовём число  $A$  левым (правым) пределом  $f$  по Коши, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta; a)(x \in (a; a + \delta)) \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Назовём число  $A$  левым (правым) пределом  $f$  по Гейне, если:

$$\forall \{x_n\} : \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq a, x_n < a (x_n > a) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

Обозначим односторонние пределы так:  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A = f(a-0)$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A = f(a+0)$ . Таким образом, когда мы можем «подойти» к предельному значению функции, двигаясь по  $x$  к точке  $a$  слева, говорят, что существует левый предел. Аналогично следует понимать и определение правого предела. Поэтому если мы можем подойти к  $a$  и слева, и справа, то существует предел в точке  $a$ . В кванторах это значит следующее:

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A &\iff \exists f(a-0) = f(a+0) = A \\ (\{.. \} \forall x : a - \delta < x < a \text{ и } \forall x : a < x < a + \delta &\iff \forall x : 0 < |x - a| < \delta) \end{aligned}$$

Предел функции на бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D(f) : |x| > \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- 2.2.22 Неопределенности. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах, о вынужденном пределе. [Не пройдено]
- 2.2.23 Теорема о пределе сложной функции. [Не пройдено]
- 2.2.24 Первый и второй замечательные пределы. [Не пройдено]
- 2.2.25 Сравнение функций, о-символика, главная часть функции, порядок малости и порядок роста функции. [Не пройдено]
- 2.2.26 Критерий Коши существования конечного предела функции. [Не пройдено]
- 2.2.27 Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. [Не пройдено]
- 2.2.28 Точки разрыва, их классификация. Непрерывность основных элементарных функций. [Не пройдено]
- 2.2.29 Арифметические свойства непрерывных функций. [Не пройдено]
- 2.2.30 Теорема о непрерывности сложной функции. [Не пройдено]
- 2.2.31 Теоремы о локальной ограниченности и локальном сохранении знака для функций, непрерывных в точке. [Не пройдено]
- 2.2.32 Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса, теорема Коши). Критерий существования и непрерывности обратной функции на промежутке. [Не пройдено]
- 2.2.33 Понятие равномерной непрерывности функции на множестве. [Не пройдено]
- 2.2.34 Теорема Кантора [Не пройдено]
- 2.2.35 Система стягивающихся отрезков [В списке вопросов к коллоквиуму отсутствует]

Множество отрезков  $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  называется системой стягивающихся отрезков, если выполнено:

1. Каждый последовательный отрезок вложен в предыдущий, т.е.  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

**Лемма. (Коши-Кантора)** Для любой ССО существует, причем единственная, точка  $c$ , принадлежащая всем отрезками данной системы, т. е.  $\exists! c : \forall n \in \mathbb{N} \implies c \in [a_n, b_n]$

*Доказательство. Существование.* Используем аксиому полноты: если  $a \leq b$ , то  $\exists c : a \leq c \leq b$ .

$$\exists c : \forall n \in \mathbb{N} \implies c \in [a_n, b_n]$$

*Единственность.* Предположим противное, пусть существуют две различные точки  $c, c'$ , принадлежащие всем отрезкам последовательности  $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ . Не теряя общности, предположим, что  $c > c'$ .

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} \implies a_n \leq c' < c \leq b_n \implies 0 \leq c - c' \leq b_n - a_n$ . Т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \implies 0 \leq c - c' \leq 0 \implies c - c' = 0 \implies c = c'$

Пришли к противоречию. ■