# Математический анализ, Коллоквиум 3

Балюк Игорь

@lodthe, GitHub

Дата изменения: 2020.02.18 в 17:08

## Содержание

Предварительная дата проведения коллоквиума — 29 февраля.
Оригинальный список вопросов
Огромное спасибо Егору Косову: большая часть документа состоит из его материалов.

# 1 Выпуклые и вогнутые функции. Выпуклость в терминах производной. Неравенство Йенсена. Примеры.

## 1.1 Выпуклые и вогнутые функции и их связь с производной

**Определение.** Функция $f$ на интервале $I$ называется **выпуклой**, если $\forall x, y \in I$ и для каждого $t \in [0;1]$ выполнено $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$.

Функция $f$ на интервале $I$ называется **вогнутой**, если функция $-f$ — выпуклая.

**Лемма.** Функция $f$ на интервале $I$ выпукла тогда и только тогда, когда для всех точек $x<z<y$ из этого интервала выполенно

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

*Доказательство.* Зафиксируем $t \in [0;1]$. Пусть $z = tx+(1-t)y$. Тогда $t = \dfrac{y-z}{y-x}$ и выпуклость $f$ равносильна выполнению неравенства:

$$f(z) = f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y) = \frac{y-z}{y-x}f(x)+\frac{z-x}{y-x}f(y)$$

Так как $y-x = y-z+z-x$, полученное неравенство равносильно неравенству из формулировки леммы:

$$\begin{gathered}
f(z) \leqslant \frac{y-z}{y-x}f(x)+\frac{z-x}{y-x}f(y)\\
f(z)\cdot(y-z+z-x) \leqslant (y-z)f(x)+(z-x)f(y)\\
yf(z)-zf(z)+zf(z)-xf(z) \leqslant yf(x)-zf(x)+zf(y)-xf(y)\\
yf(z)-zf(z)-yf(x)+zf(x) \leqslant zf(y)-xf(y)-zf(z)+xf(z)\\
(f(z)-f(x))\cdot(y-z) \leqslant (f(y)-f(z))\cdot(z-x)\\
\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}
\end{gathered}$$

■

**Теорема.** Дифференцируемая функция $f$ на интервале $I$ выпукла тогда и только тогда, когда $f'$ — неубывает.

*Доказательство.* Если $f$ выпукла, то по предыдущей лемме для $x<y$ выполнено

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y).$$

Первая часть неравенства выполняется, если в лемме приближать $z$ к $x$ справа. Вторая часть неравенства выполняется, если значение $z$ из леммы приближать к $y$ слева. Полученное неравенство означает неубывание $f'$.

Наоборот, пусть теперь $f'$ неубывает. По теореме Лагранжа для всех точек $x<z<y$ найдутся точки $\xi_1 \in (x;z)$ и $\xi_2 \in (z;y)$ для которых

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(\xi_2)$$

.

Так как $f'(\xi) \leqslant f'(\xi_2)$, то по предыдущей лемме получаем выпуклость $f$. ■

Заметим, что дважды дифференцируемая функция $f$ на интервале $I$ выпукла тогда и только тогда, когда $f''(x) \geqslant 0 \forall x \in I$.

## 1.2 Неравенство Йенсена

**Теорема (Неравенство Йенсена)** Пусть функция $f$ выпукла на интервале $I$. Тогда для всех точек $x_1, \dots, x_n \in I$ и для всех чисел $t_1 \geqslant 0, \dots, t_n \geqslant 0$, для которых $t_1 + \dots + t_n = 1$, выполнено $f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n)$.

*Доказательство.* Докажем утверждение индукцией по $n$.

База: $n = 2$, по определению выпуклости.

Пусть утверждение выполнено для $n$ точек. Проверим, что оно выполнено для $n+1$ точки. Пусть $t := t_1+\dots+t_n$. Так как $\frac{t_1}{t}x_1+\dots+\frac{t_n}{t}x_n \in I$ (проверяется подстановкой во все $t_i$ минимального/максимального из $t$), то

$$f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1}) \leqslant tf\left(\frac{t_1}{t}x_1 + \dots + \frac{t_n}{t}x_n\right) + f_{n+1}f(x_{n+1})$$

$$\leqslant t\left(\frac{t_1}{t}f(x_1) + \dots + \frac{t_n}{t}f(x_n)\right) + t_{n+1}f(x_{n+1}) = t_1f(x_1) + \dots + t_{n+1}f(x_{n+1})$$

Первое неравенство верно из определения выпуклости, второе — воспользовались предположением индукции для $n$. ■

## 1.3 Пример

С помощью неравенства Йенсена докажем неравенство о средних. Пусть $x_1, \dots, x_n > 0$. Тогда $\sqrt[n]{x_1 \times \dots \times x_n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

*Доказательство.* Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Так как $f''(x) = e^x \geqslant 0$, то $f$ — выпуклая функция. Теперь заметим, что

$$\sqrt[n]{x_1 \times \dots \times x_n} = f\left(\frac{1}{n}\ln x_1 + \dots + \frac{1}{n}\ln x_n\right) \leqslant \frac{1}{n}f(\ln x_1) + \dots + \frac{1}{n}f(\ln x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

■

# 2 Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность интеграла, формула интегрирования по частям и замены переменной.

## 2.1 Первообразная и неопределенный интеграл

**Определение.** Функция $F$ называется **первообразной** функции $f$ на некотором интервале $I$, если $F$ дифференцируема на $I$ и $F'(x) = f(x) \forall x \in I$.

**Лемма.** Любые две первообразные $F_1$ и $F_2$ функции $f$ на интервале $I$ отличаются на константу.

*Доказательство.* По теореме Лагранжа, применимой к функции $F := F_1 - F_2$, для произвольных точек $x, y \in I$ выполнено $F(x)-F(y) = F'(\xi)(x-y) = 0$. Что означает, что для двух первообразных, для каждой пары точек из интервала, их разность равна.

$F'(\xi)(x - y) = 0$, так как $F'(\xi) = F_1'(\xi) - F_2'(\xi) = f(\xi) - f(\xi) = 0$. ■

**Определение.** Множество всех первообразных функции $f$ на некотором заданном интервале $I$ называется **неопределенным интегралом** от $f$ и обозначается $\int f(x)\,dx$.

Если $F$ — некоторая первообразная функции $f$ на некотором интервале $I$, то $\int f(x)\,dx = F + C$, где $C$ — константа.

### 2.2 Линейность интеграла, формула интегрирования по частям и замены переменной

**Теорема (Свойства неопределенного интеграла)**

1. (**Линейность**) $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx + C$

2. (**Формула интегрирования по частям**) $\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$

3. (**Формула замены переменной**) $\int f(x)\, dx = [x = \phi(t)] = \int f(\phi(t))\phi'(t)\, dt$

*Доказательство.*

1. Пусть $F$ и $G$ — первообразные $f$ и $g$ соответственно. Тогда $\alpha F + \beta G$ — первообразная функции $\alpha f + \beta g$, то есть $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha F + \beta G + C$.

   В то же время
   $$\int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx = \alpha F + \alpha C_1 + \beta G + \beta C_2 = \alpha F + \beta G + C$$

2. Так как $(fg)' = f'g + fg'$, то по линейности интеграла
   $$\int f'(x)g(x)\, dx + \int f(x)g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) + C.$$

3. Если $F$ — первообразная для $f$, то $(F(\phi(t))') = F'(\phi(t))\phi'(t)$.

■

# 3 Вычисление интеграла от рациональной функции. Примеры сведения интеграла к интегралу от рациональной функции.

### 3.1 Представление интеграла от рациональной функции

**Теорема.** Пусть $P$ и $Q$ два многочлена. Тогда первообразная функции $\frac{P}{Q}$ выражается в элементарных функциях.

*Доказательство.* Пусть $Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_n x + q_n)^{m_n}$. Из курса алгебры известно (доказывать не требуется), что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{j,k}}{(x - x_j)^k} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{j,k}x + c_{j,k}}{(x^2 + p_j x + q_j)^k},$$

где $p$ — многочлен, а коэффициенты $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ — рациональные числа. То есть частное от деления рациональных многочлен представляется суммой неприводимых дробей (знаменатель имеет степень 1 или 2, числитель имеет степень на единицу меньше) и многочлена.

По линейности нам надо научиться интегрировать каждое слагаемое отдельно. Выделяя у интеграла $\int \frac{bx + c}{(x^2 + px + q)^k}\, dx$ в знаменателе целую часть (выделяем полный квадрат) и делая линейную замену приводим его к виду $\int \frac{b'u + c'}{(u^2 + a^2)^k}\, du$.

### 3.2 Вычисление интеграла каждого типа

Перейдем к вычислению интеграла каждого типа.

1.
$$\int \frac{dx}{(x - a)^k} = \begin{cases} \frac{1}{1 - k}(x - a)^{1-k} + C, & k \neq 1, \\ \ln|x - a| + C, & k = 1. \end{cases}$$

2.

$$\int \frac{u}{(u^2+a^2)^k}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{d(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^k} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-k)}(u^2+a^2)^{1-k}+C, & k\neq 1,\\ \dfrac{1}{2}\ln(u^2+a^2)+C, & k=1. \end{cases}$$

3.

$$\begin{aligned} I_k = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} &= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{u^2\,du}{(u^2+a^2)^{k+1}} \\ &= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} - 2ka^2\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{k+1}} \\ &= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1} \end{aligned}$$

Решая рекуррентное уравнение, находим

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\cdot\frac{u}{(u^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2}I_k, \quad I_1 = \int \frac{du}{u^2+a^2} = a^{-1}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$$

■

### 3.3 Пример

**Пример.** Пусть $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$. Заметим, что

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Тем самым, интегралы от функций $R(\cos x, \sin x)$, где $R$ — рациональная функция, сводятся заменой к интегралам от рациональных функций.

## 4 Интегралы Римана: определение, примеры интегрируемых и неинтегрируемых функций, линейность и монотонность интеграла, ограниченность интегрируемой функции.

### 4.1 Определение интеграла по Риману

**Определение.**

**Разбиением** $\mathbb{T}$ отрезка $[a;b]$ называется набор точке $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Отрезки $\Delta_k := [x_{k-1}; x_k]$ называются **отрезками разбиения**.

Число $\lambda(\mathbb{T}) := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |\Delta_k| := x_k - x_{k-1}$, называется **масштабом** разбиения.

**Отмеченным разбиением** $(\mathbb{T}, \xi)$ отрезка $[a;b]$ называется пара, состоящая из разбиения $\mathbb{T}$ отрезка $[a;b]$ и набора точек $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_k \in \Delta_k$.

**Интегральной суммой** функции $f$, соответствующей отмеченному разбиению $(\mathbb{T}, \xi)$, называется выражение $\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot|\Delta_k|$.

**Определение.** Функция $f$ называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a;b]$ и число $I$ называется её интегралом, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall$ отмеченного разбиения $(\mathbb{T}, \xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ выполнено $|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - I| < \varepsilon$.

Число $I$ обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

## 4.2 Примеры

**Пример.**

1. $\int\limits_a^b 1\,dx = b-a$

2. Функция $I_{\mathbb{Q}}$ не интегрируема ни на каком отрезке..

## 4.3 Ограниченность интегрируемых функций

**Предложение.** Если функция $f$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

*Доказательство.* Так как $f$ интегрируема, то для некоторого разбиения $\mathbb{T}$ для произвольного выбора отмеченных точек $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ выполнено

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx - 1 < \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\cdot|\Delta_k| < \int\limits_a^b f(x)\,dx + 1.$$

Если бы $f$ оказалась неограниченной на отрезке $[a;b]$, она была бы неограниченной на каком-то из отрезков разбиения $\Delta_{k_0}$, что в силу произвольности выбора $\xi_{k_0}\in\Delta_{k_0}$ и противоречит неравенству выше («зажали» бесконечность с двух сторон) ■

## 4.4 Линейность интеграла

**Предложение. (Линейность интеграла)**. Пусть $f$ и $g$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a;b]$. Тогда для произвольных чисел $\alpha, \beta$ функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$ и $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

*Доказательство.* Заметим, что $\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) = \alpha\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) + \beta\sigma(g, \mathbb{T}, \xi)$. Кроме того, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ для которого

$$\left|\sigma(f, |T, \xi) - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon; \quad \left|\sigma(g, \mathbb{T}, \xi) - \int\limits_a^b g(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

для каждого отмеченного разбиения $(\mathbb{T}, \xi)$ с масштабом $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$. Тем самым, для таких разбиений

$$\left|\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) - \alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta\int\limits_a^b g(x)\,dx\right| < (|\alpha| + |\beta|)\cdot\varepsilon$$

■

## 4.5 Монотонность интеграла

**Предложение. (Монотонность интеграла)**. Пусть $f$ и $g$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a;b]$. Если $f(x) \leqslant g(x) \forall x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

*Доказательство.* В силу линейности достаточно доказать данное утверждение только для $f \equiv 0$ (иначе прибавим к обеим частям одинаковую функцию, знак неравенства не изменится). В этом случае $\sigma(g, \mathbb{T}, \xi) \geqslant 0$ для произвольного отмеченного разбиения $(\mathbb{T}, \xi)$. Так как интеграл приближается интегральными суммами с любой точностью, то и сам интеграл неотрицателен. ■

# 5 Нижние и верхние суммы Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости ограниченной функции.

## 5.1 Нижние и верхние суммы Дарбу

**Определение.** Для ограниченной на отрезке $[a; b]$ функции $f$ и разбиения $\mathbb{T}$ определим **нижнюю**

$$s(f, \mathbb{T}) := \sum_{k=1}^{n} \inf_{x \in \Delta_k} f(x) \cdot |\Delta_k|$$

и **верхнюю**

$$S(f, \mathbb{T}) := \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in \Delta_k} f(x) \cdot |\Delta_k|$$

суммы Дарбу.

**Нижним интегралом Дарбу** называется число $\underline{I} = \sup_{\mathbb{T}} s(f, \mathbb{T})$ (обратите внимание, что черта снизу), а **верхним интегралом Дарбу** называется число $\overline{I} = \int_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}} S(f, \mathbb{T})$.

**Лемма.**

1. $s(f, \mathbb{T}) \leqslant \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leqslant \sigma(f, \mathbb{T}, \sigma) \leqslant \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leqslant S(f, \mathbb{T})$
2. Если $\mathbb{T} \in \mathbb{T}'$, то $s(f, \mathbb{T}) \leqslant s(f, \mathbb{T}')$ и $S(f, T') \leqslant S(f, \mathbb{T})$
3. $s(f, \mathbb{T}_1) \leqslant s(f, \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2) \leqslant S(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) \leqslant S(f, \mathbb{T}_2)$

*Доказательство.*

1. Рассмотрим первое неравенство, так как последнее аналогично ему, а те, что между ними, следуют из определения. Логика здесь такая: пусть мы нашли инфинум справа и соответствующий ему $\xi$. Но тогда при подсчете слева мы могли брать те же $\xi$, поэтому получим сумму не больше правой.
2. Рассмотрим на примере первого неравенства. Пусть между какими-то двумя точками из $\mathbb{T}$ появилось несколько точек из $\mathbb{T}'$. Значение, равное инфинуму функции на этом отрезке умноженному на длину отрезка, будет не больше сумме инфинумов на каждом из подотрезков умноженных на их длины.
3. Рассмотрим первое неравенство. На самом деле, это верно из предыдущего пункта: пускай $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1$, а $\mathbb{T}' = \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2$.

■

**Лемма.** $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \mathbb{T} : \lambda(\mathbb{T}) < \delta \implies \underline{I} \leqslant s(f, \mathbb{T}) + \varepsilon$ и $\overline{I} \geqslant S(f, \mathbb{T}) - \varepsilon$.

*Доказательство.* Докажем только первую часть.

Для каждого $\varepsilon$ найдется такое разбиение $\mathbb{T}_\varepsilon$, для которого $\underline{I} \leqslant s(f, \mathbb{T}_\varepsilon) + \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant s(f, \mathbb{T}_\varepsilon \cup \mathbb{T})$ для произвольного разбиения $\mathbb{T}$. Первое неравенство выполняется, так как можно в $\mathbb{T}_\varepsilon$ подставить разбиение $\mathbb{T}$, которое было выбрано для супремума в $\underline{I}$. Второе неравенство выполняется по третьему пункту из предыдущей леммы.

Заметим, что среди отрезков, порожденных разбиением $\mathbb{T}_\varepsilon \cup \mathbb{T}$ не более чем $2|\mathbb{T}_\varepsilon$ отрезков не порожденных разбиением $\mathbb{T}$ (худший случай, когда в каждый отрезок, порожденный $\mathbb{T}$, попадает одна точка из $\mathbb{T}_\varepsilon$, тем самым порождая 2 новых отрезка). Поэтому $s(f, \mathbb{T}_\varepsilon \cup \mathbb{T}) \leqslant qs(f, \mathbb{T}) + 2|\mathbb{T}_\varepsilon| \cdot 2 \sup_{x \in [a;b]} |f(x)| \cdot \lambda(\mathbb{T})$.

Взяв теперь $\delta > 0$ так, чтобы $4|\mathbb{T}_\varepsilon| \sup_{x \in [a;b]} |f(x)| \cdot \delta < \dfrac{\varepsilon}{2}$, получаем требуемую оценку. ■

## 5.2 Критерий Дарбу

**Теорема.** Ограниченная функция $f$ интегрируема по Риману на отрезке $[a; b]$ тогда и только тогда, когда $\underline{I} = \overline{I}$.

*Доказательство.* Если функция $f$ интегрируема, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ : для любого отмеченного разбиения $(\mathbb{T}, \xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ выполнено $I - \varepsilon \leqslant \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leqslant I + \varepsilon$, где $I := \int\limits_a^b f(x)\, dx$.

Тем самым, $I - \varepsilon \leqslant s(f, \mathbb{T}) \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S(f, \mathbb{T}) \leqslant I + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon$ выполнено равенство

$$\underline{I} = \overline{I} = I = \int\limits_a^b f(x)\, dx$$

Обратно: пусть $I = \underline{I} = \overline{I}$. По предыдущей лемме, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ : для любого отмеченного разбиения $(\mathbb{T}, \xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ выполнено

$$I - \varepsilon \leqslant s(f, \mathbb{T}) \leqslant \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leqslant S(f, \mathbb{T}) \leqslant I + \varepsilon$$

Это и означает, что $f$ интегрируема по Риману на $[a; b]$ и $I$ её интеграл. ∎

# 6 Переформулировка критерия Дарбу в терминах колебаний. Интегрируемость модуля и произведения интегрируемых функций. Интегрируемость на подотрезке, аддитивность интеграла.

## 6.1 Переформулировка критерия Дарбу в терминах колебаний

**Определение.** Назовём **колебанием** функции $f$ на отрезке $[a; b]$ число

$$\omega(f, [a; b]) = \sup_{\xi', \xi'' \in [a;b]} |f(\xi') - f(\xi'')| = \sup_{[a;b]} f(x) - \inf_{[a;b]} f(x)$$

**Следствие.** Ограниченная функция $f$ интегрируема по Риману на отрезке $[a; b]$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ найдется разбиение $\mathbb{T}$, для которого $\sum\limits_k \omega(f, \Delta_k) \cdot |\Delta_k| < \varepsilon$.

*Доказательство.* Заметим, что $\overline{i} = \underline{I} \iff \forall \varepsilon > 0$ найдется разбиение $\mathbb{T}$, для которого $S(f, \mathbb{T}) - s(f, \mathbb{T}) < \varepsilon$.

Требует пояснения только импликация $\implies$, так как обратное следует из выбора $\mathbb{T}$: для инфинума и супремума в $\overline{I}$ и $\underline{I}$ соответственно будет выбрано то самое $\mathbb{T}$.

Если $\overline{i} = \underline{I}$, то $\forall \varepsilon > 0$ найдутся разбиения $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$: $S(f, \mathbb{T}_1) - s(f, \mathbb{T}_2) < \overline{I} - \frac{\varepsilon}{2} - (\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$ (так как можно взять $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$ равные выбранным в $\overline{I}$ и $\underline{I}$ соответственно).

Кроме того, $S(f, \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2) - s(f, \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2) \leqslant S(f, \mathbb{T}_1) - s(f, \mathbb{T}_2)$ (по свойствам для сумм Дарбу).

Остается лишь заметить, что верно равенство $S(f, \mathbb{T}) - s(f, \mathbb{T}) = \sum\limits_k \omega(f, \Delta_k) \cdot |\Delta_k|$. ∎

## 6.2 Интегрируемость модуля и произведения интегрируемых функций. Интегрируемость на подотрезке.

**Следствие.** Если $f$ интегрируема по Риману на отрезке $[a; b]$, то $|f|$ и $f^2$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a; b]$ и для любого $[c; d] \subseteq [a; b]$ функция $f$ интегрируема по Риману на отрезке $[c; d]$.

*Доказательство.* Интегрируемость $|f|$ и $f^2$ следует из оценок

$$\omega(|f|, \Delta) \leqslant \omega(f, \Delta)$$
$$\omega(f^2, \Delta) \leqslant 2 \sup_{x \in \Delta} |f(x)) \cdot \omega(f, \Delta)$$

Интегрируемость на подотрезке доказывается следующим образом. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся разбиение $\mathbb{T}$ отрезка $[a; b]$ для которого $S_{[a;b]}(f, \mathbb{T}) - s_{[a;b]} < \varepsilon$. Но

$$S_{[c;d]}(f, (\mathbb{T} \cup \{c, d\}) \cap [c; d]) - s_{[c;d]}(f, (\mathbb{T} \cup \{c, d\}) \cap [c; d])$$
$$\leqslant S_{[a;b]}(f, \mathbb{T} \cup \{c, d\}) - s_{[a;b]}(f, \mathbb{T} \cup \{c, d\}) \leqslant S_{[a;b]}(f, \mathbb{T}) - s_{[a;b]}(f, \mathbb{T}),$$

где $S_{[c;d]}$, $s_{[c;d]}$, $S_{[a;b]}$ и $s_{[a;b]}$ обозначают верхние и нижние суммы Дарбу на отрезках $[c;d]$ и $[a;b]$ соответственно. ■

**Следствие.** Если $f$ и $g$ интегрируемы на $[a;b]$, то и $f \cdot g$ интегрируема на $[a;b]$.

*Доказательство.* Действительно, $f \cdot g = \frac{1}{4} \cdot |(f+g)^2 - (f-g)^2|$ ■

### 6.3 Аддитивность интеграла

**Следствие.** Если $f$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$, $c \in [a;b]$, то $f$ интегрируема на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$ и верно равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

*Доказательство.* Интегрируемость на подотрезках уже доказано. А равенство следует из того, что при вычислении интеграла можно использовать интегральные суммы, соответствующие разбиениям, содержащим точку $c$ (выберем $\mathbb{T}$, в котором будет точка $c$). ■

## 7 Интегрируемость монотонных функций. Равномерная непрерывность. Примеры. Равновероятная непрерывность непрерывной на отрезке функции. Интегрируемость непрерывных функций.

## 8 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Ряд Тейлора для функций $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$ (обоснование сходимости для $e^x$ и $\ln(1+x)$). Площадь криволинейной трапеции и длина кривой.

## 9 Формула Стирлинга.

## 10 Несобственный интеграл Римана: определение и примеры. Регулярность и линейность несобственного интеграла, независимость сходимости интеграла от его «начала». Формула интегрирования по частям и замены переменной для несобственного интеграла.

## 11 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Пример функции, интеграл от которой сходится условно. Исследования сходимости интеграла от неотрицательной функции с помощью неравенств и эквивалентности. Признаки Дирихле-Абеля сходимости несобственного интеграла.