Математический анализ, Коллоквиум 3

Балюк Игорь

@lodthe, GitHub

Дата изменения: 2020.02.16 в 21:49

Содержание

Предварительная дата проведения коллоквиума — 29 февраля.
Оригинальный список вопросов
Огромное спасибо Егору Косову: большая часть документа состоит из его материалов.

1 Выпуклые и вогнутые функции. Выпуклость в терминах производной. Неравенство Йенсена. Примеры.

1.1 Выпуклые и вогнутые функции и их свзяь с производной

Определение. Функция f на интервале I называется **выпуклой**, если $\forall x, y \int I$ и для каждого $t \in [0;1]$ выполнено $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.

Функция f на интервале I называется **вогнутой**, если функция $-f$ — выпуклая.

Лемма. Функция f на интервале I выпукла тогда и только тогда, когда для всех точек $x < y < z$ из этого интервала выполенно
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

Доказательство. Зафиксируем $t \in [0;1]$. Пусть $z = tx + (1-t)y$. Тогда $t = \dfrac{y-z}{y-x}$ и выпуклость f равносильна выполнению неравенства:
$$f(z) = f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) = \frac{y-z}{y-x}f(x) + \frac{z-x}{y-x}f(y)$$

Так как $y - x = y - z + z - x$, полученное неравенство равносильно неравенству из формлуировки леммы:
$$f(z) \leqslant \frac{y-z}{y-x}f(x) + \frac{z-x}{y-x}f(y)$$
$$f(z)\cdot(y-z+z-x) \leqslant (y-z)f(x) + (z-x)f(y)$$
$$yf(z) - zf(z) + zf(z) - xf(z) \leqslant yf(x) - zf(x) + zf(y) - xf(y)$$
$$yf(z) - zf(z) - yf(x) + zf(x) \leqslant zf(y) - xf(y) - zf(z) + xf(z)$$
$$(f(z)-f(x))\cdot(y-z) \leqslant (f(y)-f(z))\cdot(z-x)$$
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

■

Теорема. Дифференцируемая функция f на интервале I выпукла тогда и толко тогда, когда f' — неубывает.

Доказательство. Если f выпукла, то по предыущей лемме для $x < y$ выполнено
$$f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y).$$

Первая часть неравенства выполняется, если в лемме приближать z к x справа. Вторая часть неравенства выполняется, если значение z из леммы приближать к y слева. Полученное неравенство означает неубывание f'.

Наоборот, пусть теперь f' неубывает. По теореме Лагранжа для всех точек $x < z < y$ найдутся точки $\xi_1 \in (x;z)$ и $\xi_2 \in (z;y)$ для которых
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(\xi_2)$$
.

Так как $f'(\xi) \leqslant f'(\xi_2)$, то по предудыщей лемме получаем выпуклость f. ■

Заметим, что дважды дифференцируемая функция f на интервале I выпукла тогда и только тогда, когда $f''(x) \geqslant 0 \forall x \in I$.

1.2 Неравенство Йенсена

Теорема (Неравенство Йенсена) Пусть функция f выпукла на интервале I. Тогда для всех точек $x_1, \dots, x_n \in I$ и для всех чисел $t_1 \geqslant 0, \dots, t_n \geqslant 0$, для которых $t_1 + \dots + t_n = 1$, выполнено $f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n)$.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n.

База: $n = 2$, по определению выпуклости.

Пусть утверждение выполнено для n точек. Проверим, что оно выполнено для $n+1$ точки. Пусть $t := t_1+\dots+t_n$. Так как $\frac{t_1}{t}x_1+\dots+\frac{t_n}{t}x_n \in I$ (проверяется подстановкой во все t_i минимального/максимального из t), то

$$f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1}) \leqslant tf\left(\frac{t_1}{t}x_1 + \dots + \frac{t_n}{t}x_n\right) + f_{n+1}f(x_{n+1})$$

$$\leqslant t\left(\frac{t_1}{t}f(x_1) + \dots + \frac{t_n}{t}f(x_n)\right) + t_{n+1}f(x_{n+1}) = t_1f(x_1) + \dots + t_{n+1}f(x_{n+1})$$

Первое неравенство верно из определения выпуклости, второе — воспользовались предположением индукции для n. ∎

1.3 Пример

С помощью неравенства Йенсена докажем неравенство о средних. Пусть $x_1, \dots, x_n > 0$. Тогда $\sqrt[n]{x_1 \times \dots \times x_n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Так как $f''(x) = e^x \geqslant 0$, то f — выпуклая функция. Теперь заметим, что

$$\sqrt[n]{x_1 \times \dots \times x_n} = f\left(\frac{1}{n}\ln x_1 + \dots + \frac{1}{n}\ln x_n\right) \leqslant \frac{1}{n}f(\ln x_1) + \dots + \frac{1}{n}f(\ln x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

∎

2 Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность интеграла, формула интегрирования по частям и замены переменной.

2.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция F называется **первообразной** функции f на некотором интервале I, если F дифференцируема на I и $F'(x) = f(x) \forall x \in I$.

Лемма. Любимые две первообразные F_1 и F_2 функции f на интервале I отличаются на константу.

Доказательство. По теореме Лагранжа, применимой к функции $F := F_1 - F_2$, для произвольных точек $x, y \in I$ выполнено $F(x) - F(y) = F'(\xi)(x-y) = 0$. Что означает, что для двух первообразных, для каждой пары точек из интервала, их разность равна.

$F'(\xi)(x-y) = 0$, так как $F'(\xi) = F_1'(\xi) - F_2'(\xi) = f(\xi) - f(\xi) = 0$. ∎

Определение. Множество всех первообразных функции f на некотором задонном интервале I называется **неопределенным интегралом** от f и обозначается $\int f(x)\,dx$.

Если F — некоторая первообразная функции f на некотором интервале I, то $\int f(x)\,dx = F + C$, где C — константа.

2.2 Линейность интеграла, формула интегрирования по частям и замены переменной

Теорема (Свойства неопределенного интеграла)

1. (**Линейность**) $\displaystyle\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx + C$

2. (**Формула интегрирования по частям**) $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

3. (**Формула замены переменной**) $\displaystyle\int f(x)\,dx = [x = \phi(t)] = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$

Доказательство.

1. Пусть F и G — первообразные f и g соответственно. Тогда $\alpha F + \beta G$ — первообразная функции $\alpha f + \beta g$, то есть $\displaystyle\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha F + \beta G + C$.

   В то же время

$$\int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx = \alpha F + \alpha C_1 + \beta G + \beta C_2 = \alpha F + \beta G + C$$

2. Так как $(fg)' = f'g + fg'$, то по линейности интеграла

$$\int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx = f(x) + g(x) + C.$$

3. Если F — первообразная для f, то $(F(\phi(t))') = F'(\phi(t))\phi'(t)$.

∎

3 Вычислиение интеграла от рациональной функции. Примеры сведения интеграла к интегралу от рациональной функции.

3.1 Представление интеграла от рациональной функции

Теорема. Пусть P и Q два многочлена. Тогда первообразная функции $\dfrac{P}{Q}$ выражается в элементарных функциях.

Доказательство. Пусть $Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_n x + q_n)^{m_n}$. Из курса алгебры известно (доказывать не требуется), что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{j,k}}{(x - x_j)^k} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{j,k}x + c_{j,k}}{(x^2 + p_j x + q_j)^k},$$

где p — многочлен, а коэффициенты $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ — рациональные числа. То есть частное от деления рациональных многочлен представляется суммой неприводимых дробей (знаменатель имеет степень 1 или 2, числитель имеет степень на единицу меньще) и многочлена.

По линейности нам надо научиться интегриировать каждое слагаемое отдельно. Выделяя у интеграла $\displaystyle\int \frac{bx + c}{(x^2 + px + q)^k}\,dx$ в знаменателе целую часть (выделяем полный квадрат) и делая линейную замену приводим его к виду $\displaystyle\int \frac{b'u + c'}{(u^2 + a^2)^k}\,du$.

3.2 Вычисление интеграла каждого типа

Перейдем к вычислению интеграла каждого типа.

1.

$$\int \frac{dx}{(x - a)^k} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - k}(x - a)^{1-k} + C, & k \neq 1, \\ \ln|x - a| + C, & k = 1. \end{cases}$$

2.

$$\int \frac{u}{(u^2+a^2)^k}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{d(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^k} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-k)}(u^2+a^2)^{1-k}+C, & k\neq 1,\\ \dfrac{1}{2}\ln(u^2+a^2)+C, & k=1. \end{cases}$$

3.

$$\begin{aligned} I_k = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} &= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{u^2\,du}{(u^2+a^2)^{k+1}} \\ &= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} - 2ka^2\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{k+1}} \\ &= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1} \end{aligned}$$

Решая рекуррентное уравнение, находим

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\cdot\frac{u}{(u^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2}I_k, \quad I_1 = \int \frac{du}{u^2+a^2} = a^{-1}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$$

■

3.3 Пример

Пример. Пусть $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$. Заметим, что

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Тем самым, интегралы от функций $R(\cos x, \sin x)$, где R — рациональная функция, сводятся заменой к интегралам от рациональных функций.

4 Интегралы Римана: определение, примеры интегрируемых и неинтегрируемых функций, линейность и монотонность интеграла, ограниченность интегрируемой функции.

4.1 Определение интеграла по Риману

Определение.

Разбиением $\mathbb{T}$ отрезка $[a;b]$ называется набор точке $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Отрезки $\Delta_k := [x_{k-1}; x_k]$ называются **отрезками разбиения**.

Число $\lambda(\mathbb{T}) := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |\Delta_k| := x_k - x_{k-1}$, называется **масштабом** разбиения.

Отмеченным разбиением $(\mathbb{T}, \xi)$ отрезка $[a;b]$ называется пара, состоящая из разбиения $\mathbb{T}$ отрезка $[a;b]$ и набора точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi_k \in \Delta_k$.

Интегральной суммой функции f, соответствующей отмеченному разбиению $(\mathbb{T}, \xi)$, называется выражение $\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot|\Delta_k|$.

Определение. Функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a;b]$ и число I называется её интегралом, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall$ отмеченного разбиения $(\mathbb{T}, \xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ выполнено $|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - I| < \varepsilon$.

Число I обозначают $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

4.2 Примеры

Пример.

1. $\int\limits_a^b 1\,dx = b-a$

2. Функция $I_{\mathbb{Q}}$ не интегрируема ни на каком отрезке..

4.3 Ограниченность интегрируемых функций

Предложение. Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Так как f интегрируема, то для некоторого разбиения $\mathbb{T}$ для произвольного выбора отмеченных точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ выполнено

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx - 1 < \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\cdot|\Delta_k| < \int\limits_a^b f(x)\,dx + 1.$$

Если бы f оказалась неограниченной на отрезке $[a;b]$, она была бы неограниченной на каком-то из отрезков разбиения Δ_{k_0}, что в силу произвольности выбора $\xi_{k_0} \in \Delta_{k_0}$ и противоречит неравенству выше («зажали» бесконечность с двух сторон) ■

4.4 Линейность интеграла

Предложение. (Линейность интеграла). Пусть f и g интегрируемы по Риману на отрезке $[a;b]$. Тогда для произвольных чисел α, β функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$ и $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. Заметим, что $\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) = \alpha\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) + \beta\sigma(g, \mathbb{T}, \xi)$. Кроме того, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ для которого

$$\left|\sigma(f, |T, \xi) - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon; \quad \left|\sigma(g, \mathbb{T}, \xi) - \int\limits_a^b g(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

для каждого отмеченного разбиения $(\mathbb{T}, \xi)$ с масштбатом $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$. Тем самым, для таких разбиений

$$\left|\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) - \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx\right| < (|\alpha| + |\beta|)\cdot\varepsilon$$

■

4.5 Монотонность интеграла

Предложение. (Монотонность интеграла). Пусть f и g интегрируемы по Риману на отрезке $[a;b]$. Если $f(x) \leqslant g(x) \forall x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. В силу линейности достаточно доказать данное утверждение только для $f \equiv 0$ (иначе прибавим к обеим частям одинаковую функцию, знак неравенства не изменится). В этом случае $\sigma(g, \mathbb{T}, \xi) \geqslant 0$ для произвольного отмеченного разбиения $(\mathbb{T}, \xi)$. Так как интеграл приближается интегральными суммами с любой точностью, то и сам интеграл неотрицателен. ■

5 Нижние и верхние суммы Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости ограниченной функции.

6 Переформулировка критерия Дарбу в терминах колебаний. Интегрируемость модуля и произвдеения интегрируемых функций. Интегрируемость на подотрезке, аддитивность интеграла.

7 Интегрируемость монотонных функций. Равномерная непрерывность. Примеры. Равновероятная непрерывность непрерывной на отрезке функции. Интегрируемость непрерывных функций.

8 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Ряд Тейлора для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$ (обоснование сходимости для e^x и $\ln(1+x)$). Площадь криволинейной трапеции и длина кривой.

9 Формула Стирлинга.

10 Несобственный интеграл Римана: определение и примеры. Регулярность и линейность несобственного интеграла, независимость сходимости интеграла от его «начала». Формула интегрирования по частям и замены переменной для несобственного интеграла.

11 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Пример функции, интеграл от которой сходится условно. Исследования сходимости интеграла от неотрицательной функции с помощью неравенств и эквивалентности. Признаки Дирихле-Абеля сходимости несобственного интеграла.