

Математический анализ

Игорь Балюк, БПМИ193

@lodthe, github

2019 — 2020

Содержание

1	Пределы	3
1.1	Следствия первого замечательного предела	3
1.2	Следствия второго замечательного предела	3
1.3	Тригонометрические формулы	4
2	Коллоквиум 1	4
2.1	В обязательный минимум входят	4
2.1.1	Определение предела числовой последовательности	4
2.1.2	Определение точной верхней и нижней грани	4
2.1.3	Определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности	5
2.1.4	Определение предела функции в точке и на бесконечности по Коши и по Гейне	5
2.1.5	Определение фундаментальной последовательности, критерий Коши сходимости последовательности	5
2.1.6	Первый и второй замечательный пределы	5
2.1.7	Таблица производных элементарных функций	6
2.2	Основные понятие и теоремы (с доказательствами)	6
2.2.1	Числовые последовательности. Примеры.	6
2.2.2	Понятие предела последовательности.	6
2.2.3	Ограниченные и неограниченные последовательности.	6
2.2.4	Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.	7
2.2.5	Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.	7
2.2.6	Теорема о переходе к пределу в неравенствах.	8
2.2.7	Теорема о вынужденном пределе (Теорема о двух милиционерах).	8
2.2.8	Теорема о сходимости монотонных ограниченных последовательностей.	8
2.2.9	Определение числа ϵ	9
2.2.10	Бесконечно малые последовательности.	10
2.2.11	Связь со сходящимися последовательностями.	10
2.2.12	Арифметические свойства бесконечно малых и сходящихся последовательностей.	10
2.2.13	Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми.	11
2.2.14	Арифметические свойства для последовательностей, имеющих конечные и бесконечные пределы.	11

2.2.15	Неопределенности. [В списке вопросов к коллоквиуму отсутствует]	12
2.2.16	Определение подпоследовательности.	12
2.2.17	Теорема Больцано-Вейерштрасса.	12
2.2.18	Критерий Коши сходимости последовательности.	12
2.2.19	Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне.	13
2.2.20	Теорема об эквивалентности этих определений.	14
2.2.21	Односторонние пределы, их связь с двусторонними. Пределы функции в бесконечности. [В списке вопросов к коллоквиуму отсутствует]	14
2.2.22	Неопределенности. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах, о вынужденном пределе. [Не пройдено]	15
2.2.23	Теорема о пределе сложной функции. [Не пройдено]	15
2.2.24	Первый и второй замечательные пределы. [Не пройдено]	15
2.2.25	Сравнение функций, о-символика, главная часть функции, порядок малости и порядок роста функции. [Не пройдено]	15
2.2.26	Критерий Коши существования конечного предела функции. [Не пройдено]	15
2.2.27	Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. [Не пройдено]	15
2.2.28	Точки разрыва, их классификация. Непрерывность основных элементарных функций. [Не пройдено]	15
2.2.29	Арифметические свойства непрерывных функций. [Не пройдено]	15
2.2.30	Теорема о непрерывности сложной функции. [Не пройдено]	15
2.2.31	Теоремы о локальной ограниченности и локальном сохранении знака для функций, непрерывных в точке. [Не пройдено]	15
2.2.32	Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса, теорема Коши). Критерий существования и непрерывности обратной функции на промежутке. [Не пройдено]	15
2.2.33	Понятие равномерной непрерывности функции на множестве. [Не пройдено]	15
2.2.34	Теорема Кантора [Не пройдено]	15
2.2.35	Система стягивающихся отрезков [В списке вопросов к коллоквиуму отсутствует]	15

1 Пределы

1.1 Следствия первого замечательного предела

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} &= 1\end{aligned}$$

1.2 Следствия второго замечательного предела

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} &= e \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} &= e^{ab} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} &= 1, a > 0, a \neq 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^a - 1}{x} &= a\end{aligned}$$

1.3 Тригонометрические формулы

[Сайт с многими остальными формулами](#)

$$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \quad (\sin(-a) = -\sin(a))$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} \cdot (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot (\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot (\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\cos a = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right)$$

2 Коллоквиум 1

[Информация о коллоквиуме](#)

Ориентировочная дата проведения: 09.11.2019

2.1 В обязательный минимум входят

2.1.1 Определение предела числовой последовательности

Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

2.1.2 Определение точной верхней и нижней грани

Верхняя (нижняя) грань числового множества X — число a такое, что $\forall x \in X \implies x \leq (\geq) a$

Точная верхняя грань (или супремум) — это наименьшая из всех верхних граней. Обозначается $\sup X$.

Точная нижняя грань (или инфимум) — это наибольшая из всех нижних граней. Обозначается $\inf X$.

$$a = \sup X \iff (\forall x \in X \implies x \leq a) \wedge (\nexists b : b < a, \forall x \in X \implies x \leq b)$$

$$a = \inf X \iff (\forall x \in X \implies x \geq a) \wedge (\nexists b : b > a, \forall x \in X \implies x \geq b)$$

2.1.3 Определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется

- бесконечно малой последовательностью, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \implies |x_n| < \varepsilon$$

- бесконечно большой последовательностью, если

$$\forall A > 0 \exists N(A) : \forall n \geq N(A) \implies |x_n| > A$$

2.1.4 Определение предела функции в точке и на бесконечности по Коши и по Гейне

Предел функции в точке:

- По Коши: A — предел функции $f(x)$ в точке a ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- По Гейне: A называется пределом функции $f(x)$ в точке a , если $\forall \{x_n\} \rightarrow a, x_n \neq a$ (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$), соответствующая последовательность значений $f(x_n) \rightarrow A$ (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$)

Предел функции на бесконечности:

- По Коши:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D(f) : |x| > \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- По Гейне:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \forall \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

2.1.5 Определение фундаментальной последовательности, критерий Коши сходимости последовательности

Критерий Коши: Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n, m > N(\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

2.1.6 Первый и второй замечательный пределы

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

2.1.7 Таблица производных элементарных функций

$$\begin{aligned}(C)' &= 0 \\(x^a)' &= a \cdot x^{a-1} \\(a^x)' &= a^x \ln a \\(e^x)' &= e^x \\(\ln x)' &= \frac{1}{x} \\(\sin x)' &= \cos x \\(\cos x)' &= -\sin x \\(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\(\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

2.2 Основные понятие и теоремы (с доказательствами)

2.2.1 Числовые последовательности. Примеры.

Определение из википедии: Пусть X — это либо множество вещественных чисел \mathbb{R} , либо множество комплексных чисел \mathbb{C} . Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов множества X называется **числовой последовательностью**.

Определение из Ёжика: Отображение $\mathbb{N} \mapsto X$ будем называть последовательностью и записывать как x_1, x_2, \dots, x_n . Отображение $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ будем называть **числовой последовательностью**.

Примеры:

- Функция, сопоставляющая каждому натуральному числу $n \leq 12$ одно из слов «январь», «февраль», «март», «апрель», «май», «июнь», «июль», «август», «сентябрь», «октябрь», «ноябрь», «декабрь» (в порядке их следования здесь) представляет собой последовательность вида $\{x_n\}_{n=1}^{12}$. Например, пятым элементом x_5 этой последовательности является слово «май».
- $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечной последовательностью рациональных чисел. Элементы этой последовательности начиная с первого имеют вид $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$
- $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечной последовательностью целых чисел. Элементы этой последовательности начиная с первого имеют вид $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$

2.2.2 Понятие предела последовательности.

Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

2.2.3 Ограниченные и неограниченные последовательности.

- Ограниченная сверху последовательность — это последовательность элементов множества \mathbb{R} , все члены которой не превышают некоторого элемента из этого множества. Этот элемент называется верхней гранью данной последовательности (говоря

в общем, это верно и не только для \mathbb{R}).

$$\{x_n\} \text{ ограниченная сверху} \iff \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \implies x_n \leq M$$

- Ограниченная снизу последовательность — это последовательность элементов множества \mathbb{R} , для которой в этом множестве найдётся элемент, не превышающий всех её членов. Этот элемент называется нижней гранью данной последовательности.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная снизу} \iff \exists m \in \mathbb{R} : \forall n \implies x_n \geq m$$

- Ограниченная последовательность (ограниченная с обеих сторон последовательность) — это последовательность, ограниченная и сверху, и снизу.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная} \iff \exists M, m \in \mathbb{R} : \forall n \implies m \leq x_n \leq M$$

- Неограниченная последовательность — это последовательность, которая не является ограниченной.

$$\{x_n\} \text{ неограниченная} \iff \forall M, m \in \mathbb{R} : \exists N \implies (x_N < m) \vee (x_N > M)$$

- Критерий ограниченности: Числовая последовательность является ограниченной тогда и только тогда, когда существует такое число, что модули всех членов последовательности не превышают его.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная} \iff \exists A \in \mathbb{R} : \forall n \implies |x_n| \leq A$$

2.2.4 Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.

Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Все члены последовательности, кроме конечного их числа, принадлежат окрестности предела — ограниченному множеству.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к a , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $A = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$. Тогда, $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq A$. ■

2.2.5 Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.

Теорема. Если предел числовой последовательности существует, то он единственный.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем «методом от противного». Предположим, что теорема неверна. Тогда, пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = b$ и выполняется следующее:

$$\begin{cases} a < b, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \implies |x_n - b| < \varepsilon, \end{cases}$$

Положим $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ и $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Тогда, $\forall n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon \wedge |x_n - b| < \varepsilon$. Возьмём $n \geq N$, тогда,

$$b - a = |b - a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} = b - a$$

Пришли к противоречию ($b - a < b - a$). ■

2.2.6 Теорема о переходе к пределу в неравенствах.

Теорема. Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$ ($x_n \leq b$), то и предел a этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geq b$ ($a \leq b$).

Доказательство. Пусть все элементы x_n , по крайней мере начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$. Требуется доказать неравенство $a \geq b$.

Предположим, что $a < b$. Поскольку a - предел последовательности $\{x_n\}$, то для положительного $\varepsilon = b - a$ можно указать номер N такой, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < b - a$. Это неравенство эквивалентно следующим двум неравенствам: $-(b - a) < x_n - a < b - a$. Используя правое из этих неравенств, получим $x_n < b$, а это противоречит условию теоремы. Случай $x_n \leq b$ рассматривается аналогично. ■

Примечание. Элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ могут удовлетворять строгому неравенству $x_n > b$, однако при этом предел a может оказаться равным b . Например, если $x_n = \frac{1}{n}$, то $x_n > 0$, однако $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Следствие. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Если $a < b$, то $\exists N : \forall n \geq N \implies x_n < y_n$.

Доказательство. Из аксиомы полноты $\exists c : a < c < b$.

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies |y_n - b| < \varepsilon_2$$

Тогда, $\forall n \geq N_1 \implies |x_n - a| < c - a$ и $\forall n \geq N_2 \implies |y_n - b| < b - c$. Отсюда $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \implies x_n < c - a + a = c = c - b + b < y_n$. ■

2.2.7 Теорема о вынужденном пределе (Теорема о двух милиционерах).

Теорема. Если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

Доказательство. Из определения предела $\{x_n\}$, $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Аналогично для предела $\{z_n\}$, $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies |z_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$.

Тогда, $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \implies a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$. ■

2.2.8 Теорема о сходимости монотонных ограниченных последовательностей.

Теорема. Неубывающая числовая последовательность имеет предел, причём он в точности равен точной верхней границе (нижней границе, для ограниченной невозрастающей ч.п.).

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная неубывающая числовая последовательность. Тогда множество $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничено, следовательно, из определения супремума, имеет супремум. Обозначим его через S . Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$. Действительно, так как $S = \sup\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies S - \varepsilon < x_n \leq x_n \leq S \implies |x_n - S| < \varepsilon$$

Аналогичное доказательство для ограниченной невозрастающей ч.п.

2.2.9 Определение числа e .

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Теорема. Последовательность с общим членом $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ имеет конечный предел при $n \rightarrow \infty$. Для обозначения этого предела используется символ e .

Доказательство. Докажем сначала, что $\{e_n\}$ представляет собой монотонно возрастающую последовательность. Согласно биному Ньютона,

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \\ e_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \end{aligned}$$

Сравним e_n и e_{n+1} :

- Оба выражения содержат только положительные слагаемые
- Начиная со второго слагаемого, каждый член в выражении e_{n+1} превышает соответствующий член в e_n , так как

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right) < \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots$$

- Выражение e_{n+1} состоит из большего числа слагаемых. Следовательно, $e_{n+1} > e_n$.

Далее докажем, что последовательность $\{e_n\}$ является ограниченной. Действительно, первый член любой монотонно возрастающей последовательности является ее наибольшей нижней границей и, таким образом, $e_n \geq 2 \forall n \in \mathbb{N}$.

Перейдем к доказательству существования верхней границы. Очевидно, что

$$\begin{aligned} e_n &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) < \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Кроме того, $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^k} \forall k > 3$. Тогда,

$$\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Правая часть этого неравенства представляет собой сумму убывающей геометрической прогрессии, которая равна $\frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$. Таким образом, последовательность

$$e_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} < 3$$

представляет собой ограниченную монотонно возрастающую последовательность и, следовательно, имеет конечный предел. ■

2.2.10 Бесконечно малые последовательности.

Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |a_n| < \varepsilon$$

т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

2.2.11 Связь со сходящимися последовательностями.

Если предел последовательности равен 0, то это бесконечно малая последовательность. Бесконечно малые последовательности являются сходящимися последовательностями.

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел b , необходимо и достаточно, чтобы $x_n = b + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая последовательность.

2.2.12 Арифметические свойства бесконечно малых и сходящихся последовательностей.

Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая числовая последовательность.

- $\{\alpha_n\}$ ограничена

Доказательство. Как известно, $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \implies |\alpha_n| < \varepsilon$. Значит, для всех $n > N$ доказано. Но $\forall n < N \implies \alpha_n \leq \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N-1}|\}$. Тогда выберем $\varepsilon = 1$, $A = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N-1}|, 1\} \implies \forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n| \leq A$. ■

- Если $\{y_n\}$ ограничена, то $\{y_n \cdot \alpha_n\}$ — бесконечно малая.

Доказательство. $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, поэтому $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$. Ввиду ограниченности $\{y_n\}$, $\exists A : \forall n \in \mathbb{N} \implies |y_n| \leq A$. Но тогда $\{y_n \cdot \alpha_n\} : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |y_n \cdot \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon$. ■

- Если $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая, то $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ и $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ — бесконечно малые.

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда при } N = \max\{N_1, N_2\} \implies \forall n \geq N \implies |\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Аналогично для произведения:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies |\alpha_n| < \frac{1}{\varepsilon} \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies |\beta_n| < \varepsilon^2$$

$$\text{Тогда при } N = \max\{N_1, N_2\} \implies \forall n \geq N \implies |\alpha_n \cdot \beta_n| \leq |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon$$

■

2.2.13 Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми.

- Если $\{x_n\}$ — бесконечно малая и $\forall n \in \mathbb{N} \implies x_n \neq 0$, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно большая.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n| < \varepsilon \iff \frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = A$ ■

- Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая и $\forall n \in \mathbb{N} \implies x_n \neq 0$, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно малая.

Доказательство. $\forall A > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n| > A \iff \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{A} = \varepsilon$ ■

2.2.14 Арифметические свойства для последовательностей, имеющих конечные и бесконечные пределы.

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$, а также $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, если $b \neq 0$.

Доказательство.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \iff x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ — бесконечно малые.

$$x_n \pm y_n = (a + \alpha_n) \pm (b + \beta_n) = (a \pm b) + \underbrace{(\alpha_n \pm \beta_n)}_{\text{б. м.}}$$

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = a \cdot b + \underbrace{(\alpha_n \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a)}_{\text{б.м.}}$$

Лемма. Пусть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$. Тогда $\exists r > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies |y_n| > r > 0$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |y_n - b| < \varepsilon \implies b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = \left|\frac{b}{2}\right|$, тогда $r < \left|\frac{b}{2}\right| < |y_n| < \left|\frac{3b}{2}\right|$. ■

Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ — бесконечно малая.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b \cdot a + b \cdot \alpha_n - b \cdot a - \beta_n \cdot a}{y_n \cdot b} = (\alpha_n \cdot b - \beta_n \cdot a) \cdot \frac{1}{y_n \cdot b}$$

По лемме $\left|\frac{1}{y_n \cdot b}\right| \leq \max \left\{ \left|\frac{1}{y_1 \cdot b}\right|, \dots, \left|\frac{1}{y_N \cdot b}\right|, \frac{1}{rb} \right\} \implies \left\{\frac{1}{y_n \cdot b}\right\}$ ограничена. Но тогда имеем произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей, значит, $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ — бесконечно малая. ■

2.2.15 Неопределенности. [В списке вопросов к коллоквиуму отсутствует]

Не очень понятно, что именно требуется в этом пункте

Основные виды неопределенностей: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

Раскрывать неопределенность помогает:

- упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения,
- тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.); использование замечательных пределов;

2.2.16 Определение подпоследовательности.

Подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ — это последовательность $\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}\}$, полученная из $\{x_n\}$, удалением ряда её членов без изменения порядка следования членов.

То есть подпоследовательность состоит из членов исходной последовательности $\{x_n\}$ с номерами n_k , где $\{n_k\}$ — строго монотонная последовательность натуральных чисел.

Примечание. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, тогда $\forall \{a_{n_k}\} : \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

2.2.17 Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Теорема. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Для понимания происходящего следует ознакомиться с 2.2.35 Системой стягивающихся отрезков (ССО)

$\{x_n\}$ ограничена $\implies \exists [a, b] : \forall n \in N \implies a \leq x_n \leq b$. Поделим $[a; b]$ на две равные части. Хотя бы одна из частей (пусть это $[a_1; b_1]$) содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}$.

Выберем на $[a_1; b_1]$ произвольный элемент $\{x_n\}$. Назовем его x_{n_1} . Далее делим $[a_1; b_1]$ на две равные части. Хотя бы одна из этих частей содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}$. Обозначим ее $[a_2; b_2]$. Выберем $x_{n_2} \in [a_2; b_2]$. Будем продолжать выполнять указанные действия. Обозначим за x_{n_k} число, полученное на k -ом шаге, т.е. $x_{n_k} \in [a_k; b_k]$.

$\{[a_k; b_k]\}$ — система стягивающихся отрезков. Тогда, существует единственное $c : \forall k \implies c \in [a_k; b_k]$.

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = c \implies \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$ (по теореме о двух милиционерах) ■

2.2.18 Критерий Коши сходимости последовательности.

Критерий Коши: Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность.

- Необходимость:

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall p \geq N \implies |x_p - a| < \varepsilon$$

Поскольку ε произвольное, можно взять вместо него $\frac{\varepsilon}{2}$

$$p = m \geq N \implies |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$p = n \geq N \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

То есть $|x_n - x_m| < \varepsilon$, а значит $\{x_n\}$ фундаментальная по определению. Необходимость доказана

• Достаточность:

Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, докажем, что она имеет предел. Сначала покажем, что $\{x_n\}$ — ограничена. По определению фундаментальной последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Так как ε произвольное, возьмём $\varepsilon = 1$.

$$|x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leq \underbrace{|x_n - x_N|}_{\leq 1} + |x_N| \leq 1 + |x_N|$$

$$\forall n \geq N \implies |x_n| \leq (1 + |x_N|) = \text{const} \leq A \implies |x_n| \leq A$$

$$A = \max\{1 + |x_N|; |x_1|; |x_2|; \dots; |x_N|\}$$

$$\forall n \geq N \implies |x_n| \leq A$$

По теореме 2.2.17 Больцано-Вейерштрасса, так как $\{x_n\}$ — ограниченная, $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$, покажем, что число a и будет пределом всей последовательности $\{x_n\}$.

Так как $\{x_n\}$ фундаментальная:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall m, n \geq N_1 \implies |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как $\{x_{n_k}\}$ сходящаяся:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a : \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n_k \geq n_{N_2} \implies |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : |x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\text{Возьмём } N = \max\{N_1, N_2\} : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Достаточность доказана. ■

2.2.19 Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне.

• По Коши (или на языке $\varepsilon - \delta$):

A — предел функции $f(x)$ в точке a ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

• По Гейне:

A называется пределом функции $f(x)$ в точке a , если $\forall \{x_n\} \rightarrow a, x_n \neq a$ (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$), соответствующая последовательность значений $f(x_n) \rightarrow A$ (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$)

2.2.20 Теорема об эквивалентности этих определений.

- Из определения по Коши следует определение по Гейне:

Выберем произвольную $\{x_n\} \rightarrow a, x_n \neq a$. По определению предела последовательности

$$\forall \delta > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n - a| < \delta$$

Указанное неравенство выполняется для любого $\delta > 0$. Тогда какое бы $\varepsilon > 0$ мы бы ни выбрали, можно найти $\delta > 0$, такое, что по определению по Коши будет выполняться

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

т.е. $\{f(x_n)\} \rightarrow A$, а значит из сходимости по Коши следует сходимость по Гейне.

- Из определения по Гейне следует определение по Коши:

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ по Гейне. От противного: если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ по Гейне, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$ по Коши. Напишем отрицание определения по Коши:

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \delta > 0 : \exists x : 0 < |x - a| < \delta : |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$$

Так как δ может быть любым, можно выбрать последовательность $\{\delta_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а соответствующие значения x будем обозначать как x_n . Тогда $0 < |x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}$, и $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ является подходящей, но при этом число A не является пределом функции $f(x)$ в точке a (по Гейне). Пришли к противоречию.

2.2.21 Односторонние пределы, их связь с двусторонними. Пределы функции в бесконечности. [В списке вопросов к коллоквиуму отсутствует]

Назовём число A левым (правым) пределом f по Коши, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta; a)(x \in (a; a + \delta)) \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Назовём число A левым (правым) пределом f по Гейне, если:

$$\forall \{x_n\} : \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq a, x_n < a (x_n > a) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \{f(x_n)\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$$

Обозначим односторонние пределы так: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A = f(a-0)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A = f(a+0)$. Таким образом, когда мы можем «подойти» к предельному значению функции, двигаясь по x к точке a слева, говорят, что существует левый предел. Аналогично следует понимать и определение правого предела. Поэтому если мы можем подойти к a и слева, и справа, то существует предел в точке a . В кванторах это значит следующее:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \exists f(a-0) = f(a+0) = A$$

$$(\text{т. к. } \forall x : a - \delta < x < a \text{ и } \forall x : a < x < a + \delta \iff \forall x : 0 < |x - a| < \delta)$$

Предел функции на бесконечности:

- По Коши:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D(f) : |x| > \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- По Гейне:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \forall \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

- 2.2.22 Неопределенности. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах, о вынужденном пределе. [Не пройдено]
- 2.2.23 Теорема о пределе сложной функции. [Не пройдено]
- 2.2.24 Первый и второй замечательные пределы. [Не пройдено]
- 2.2.25 Сравнение функций, о-символика, главная часть функции, порядок малости и порядок роста функции. [Не пройдено]
- 2.2.26 Критерий Коши существования конечного предела функции. [Не пройдено]
- 2.2.27 Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. [Не пройдено]
- 2.2.28 Точки разрыва, их классификация. Непрерывность основных элементарных функций. [Не пройдено]
- 2.2.29 Арифметические свойства непрерывных функций. [Не пройдено]
- 2.2.30 Теорема о непрерывности сложной функции. [Не пройдено]
- 2.2.31 Теоремы о локальной ограниченности и локальном сохранении знака для функций, непрерывных в точке. [Не пройдено]
- 2.2.32 Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса, теорема Коши). Критерий существования и непрерывности обратной функции на промежутке. [Не пройдено]
- 2.2.33 Понятие равномерной непрерывности функции на множестве. [Не пройдено]
- 2.2.34 Теорема Кантора [Не пройдено]
- 2.2.35 Система стягивающихся отрезков [В списке вопросов к коллоквиуму отсутствует]

Множество отрезков $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой стягивающихся отрезков, если выполнено:

1. Каждый последовательный отрезок вложен в предыдущий, т.е. $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

Лемма. (Коши-Кантора) Для любой ССО существует, причем единственная, точка c , принадлежащая всем отрезками данной системы, т. е. $\exists! c : \forall n \in \mathbb{N} \implies c \in [a_n, b_n]$

Доказательство. Существование. Используем аксиому полноты: если $a \leq b$, то $\exists c : a \leq c \leq b$.

$$\exists c : \forall n \in \mathbb{N} \implies c \in [a_n, b_n]$$

Единственность. Предположим противное, пусть существуют две различные точки c, c' , принадлежащие всем отрезкам последовательности $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Не теряя общности, предположим, что $c > c'$.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \implies a_n \leq c' < c \leq b_n \implies 0 \leq c - c' \leq b_n - a_n$. Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \implies 0 \leq c - c' \leq 0 \implies c - c' = 0 \implies c = c'$

Пришли к противоречию. ■