Линейная алгебра, Коллоквиум

Бобень Вячеслав
@darkkeks, GitHub
Большую часть исходного кода предоставила Левина Александра.
Благодарность выражается Левину Александру за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

"К коллоку можете даже не готовиться".

— Роман Сергеевич Авдеев

Содержание

1 Определения и формулировки **4**
1.1 Сумма двух матриц, произведение матрицы на скаляр . . . 4
1.2 Транспонированная матрица . . . 4
1.3 Произведение двух матриц . . . 4
1.4 Диагональная матрица, умножение на диагональную матрицу слева и справа . . . 4
1.5 Единичная матрица, её свойства . . . 4
1.6 След квадратной матрицы и его поведение при сложении матриц, умножении матрицы на скаляр и транспонировании . . . 5
1.7 След произведения двух матриц . . . 5
1.8 Совместные и несовместные системы линейных уравнений . . . 5
1.9 Эквивалентные системы линейных уравнений . . . 5
1.10 Расширенная матрица системы линейных уравнений . . . 5
1.11 Элементарные преобразования строк матрицы . . . 5
1.12 Ступенчатый вид матрицы . . . 5
1.13 Улучшенный ступенчатый вид матрицы . . . 6
1.14 Теорема о виде, к которому можно привести матрицу при помощи элементарных преобразований строк 6
1.15 Общее решение совместной системы линейных уравнений . . . 6
1.16 Сколько может быть решений у системы линейных уравнений с действительными коэффициентами? . 6
1.17 Однородная система линейных уравнений. Что можно сказать про её множество решений? . . . 6
1.18 Свойство однородной системы линейных уравнений, у которой число неизвестных больше числа уравнений 7
1.19 Связь между множеством решений совместной системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей ей однородной системы . . . 7
1.20 Обратная матрица . . . 7
1.21 Перестановки множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ . . . 7
1.22 Инверсия в перестановке. Знак перестановки. Чётные и нечётные перестановки . . . 7
1.23 Произведение двух перестановок . . . 7
1.24 Тождественная перестановка и её свойства. Обратная перестановка и её свойства . . . 7
1.25 Теорема о знаке произведения двух перестановок . . . 8
1.26 Транспозиция. Знак транспозиции . . . 8
1.27 Общая формула для определителя квадратной матрицы произвольного порядка . . . 8
1.28 Определители 2-го и 3-го порядка . . . 8
1.29 Поведение определителя при разложении строки (столбца) в сумму двух . . . 8
1.30 Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов) . . . 8
1.31 Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на скаляр . . . 8
1.32 Верхнетреугольные и нижнетреугольные матрицы . . . 8
1.33 Определитель верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы . . . 9
1.34 Определитель диагональной матрицы. Определитель единичной матрицы . . . 9
1.35 Матрица с углом нулей и её определитель . . . 9
1.36 Определитель произведения двух матриц . . . 9

1.37 Дополнительный минор к элементу квадратной матрицы . . . 9
1.38 Алгебраическое дополнение к элементу квадратной матрицы . . . 9
1.39 Формула разложения определителя по строке (столбцу) . . . 9
1.40 Лемма о фальшивом разложении определителя . . . 10
1.41 Невырожденная матрица . . . 10
1.42 Присоединённая матрица . . . 10
1.43 Критерий обратимости квадратной матрицы . . . 10
1.44 Явная формула для обратной матрицы . . . 10
1.45 Критерий обратимости произведения двух матриц. Матрица, обратная к произведению двух матриц . . . 10
1.46 Формулы Крамера . . . 10
1.47 Что такое поле? . . . 10
1.48 Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме . . . 11
1.49 Комплексное сопряжение и его свойства: сопряжение суммы и произведения двух комплексных чисел . . . 11
1.50 Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация в ней сложения и сопряжения . . . 11
1.51 Модуль комплексного числа и его свойства: неотрицательность, неравенство треугольника, модуль произведения двух комплексных чисел . . . 11
1.52 Аргумент комплексного числа . . . 11
1.53 Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме . . . 11
1.54 Формула Муавра . . . 12
1.55 Извлечение корней из комплексных чисел . . . 12
1.56 Основная теорема алгебры комплексных чисел . . . 12
1.57 Теорема Безу и её следствие . . . 12
1.58 Кратность корня многочлена . . . 12
1.59 Векторное пространство . . . 12
1.60 Подпространство векторного пространства . . . 12
1.61 Линейная комбинация конечного набора векторов векторного пространства . . . 13
1.62 Линейная оболочка подмножества векторного пространства . . . 13
1.63 Две общих конструкции подпространств в пространстве F^n . . . 13
1.64 Линейная зависимость конечного набора векторов . . . 13
1.65 Линейная независимость конечного набора векторов . . . 13
1.66 Критерий линейной зависимости конечного набора векторов . . . 13
1.67 Основная лемма о линейной зависимости . . . 13
1.68 Базис векторного пространства . . . 13
1.69 Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства . . . 13
1.70 Размерность конечномерного векторного пространства . . . 13
1.71 Характеризация базисов конечномерного векторного пространства в терминах единственности линейного выражения векторов . . . 14
1.72 Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений . . . 14
1.73 Лемма о добавлении вектора к конечной линейно независимой системе . . . 14

2 Вопросы на доказательство **14**
2.1 Операции над матрицами . . . 14
2.1.1 Дистрибутивность произведения матриц по отношению к сложению . . . 14
2.1.2 Ассоциативность произведения матриц . . . 14
2.1.3 Некоммутативность произведения матриц . . . 15
2.1.4 Транспонирование произведения двух матриц . . . 15
2.1.5 Умножение на диагональную матрицу слева и справа . . . 15
2.1.6 След произведения двух матриц . . . 15
2.2 Системы линейных уравнений . . . 16
2.2.1 Эквивалентность систем линейных уравнений, получаемых друг из друга путём элементарных преобразований строк расширенной матрицы . . . 16
2.2.2 Теорема о приведении матрицы к ступенчатому и улучшенному ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк . . . 16
2.2.3 Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения на подходящую матрицу . . . 16
2.2.4 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений . . . 17
2.2.5 Связь между множеством решений совместной системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей ей однородной системы . . . 18
2.2.6 Общий метод решения матричных уравнений вида $AX = B$ и $XA = B$ . . . 18
2.2.7 Вычисление обратной матрицы при помощи элементарных преобразований . . . 18
2.3 Перестановки . . . 19

2.3.1 Ассоциативность произведения перестановок . . . 19
2.3.2 Некоммутативность произведения перестановок . . . 19
2.3.3 Теорема о знаке произведения двух перестановок . . . 19
2.3.4 Знак обратной перестановки . . . 19
2.3.5 Знак транспозиции . . . 19
2.4 Определители . . . 20
2.4.1 Определитель транспонированной матрицы . . . 20
2.4.2 Поведение определителя при умножении строки (столбца) на скаляр . . . 20
2.4.3 Поведение определителя при разложении строки (столбца) в сумму двух . . . 20
2.4.4 Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами) . . . 21
2.4.5 Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на скаляр . . . 21
2.4.6 Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов) . . . 21
2.4.7 Определитель верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы . . . 22
2.4.8 Определитель с углом нулей . . . 22
2.4.9 Определитель произведения двух матриц . . . 23
2.4.10 Разложение определителя по строке (столбцу) . . . 23
2.4.11 Лемма о фальшивом разложении определителя . . . 24
2.4.12 Единственность обратной матрицы . . . 24
2.4.13 Определитель обратной матрицы . . . 25
2.4.14 Критерий обратимости квадратной матрицы и явная формула для обратной матрицы . . . 25
2.4.15 Матрица, обратная к произведению двух матриц . . . 25
2.4.16 Формулы Крамера . . . 25
2.5 Комплексные числа . . . 26
2.5.1 Построение поля комплексных чисел . . . 26
2.5.2 Свойства комплексного сопряжения (для суммы и произведения) . . . 27
2.5.3 Свойства модуля комплексного числа: неотрицательность, неравенство треугольника (алгебраическое доказательство), модуль произведения двух комплексных чисел . . . 27
2.5.4 Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра . . . 27
2.5.5 Извлечение корней из комплексных чисел . . . 27
2.6 Векторные пространства . . . 28
2.6.1 Понятие векторного пространства, шесть простейших следствий из аксиом . . . 28
2.6.2 Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений является подпространством в соответствующем векторном пространстве . . . 29
2.6.3 Утверждение о том, что линейная оболочка произвольного подмножества векторного пространства является подпространством . . . 29
2.6.4 Критерий линейной зависимости конечной системы векторов . . . 29
2.6.5 Основная лемма о линейной зависимости . . . 30
2.6.6 Независимость числа векторов в базисе конечномерного векторного пространства от выбора базиса 30
2.6.7 Характеризация базисов конечномерного векторного пространства в терминах единственности линейного выражения векторов . . . 30
2.6.8 Метод построения фундаментальной системы решений для однородной системы линейных уравнений . . . 31
2.6.9 Существование подмножества конечной системы векторов, являющегося базисом её линейной оболочки . . . 32
2.6.10 Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства . . . 32
2.6.11 Лемма о добавлении вектора к конечной линейно независимой системе . . . 33

1 Определения и формулировки

1. **Сумма двух матриц, произведение матрицы на скаляр**

   Для любых $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$

   - *Сложение* $A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$
   - *Умножение на скаляр* $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

2. **Транспонированная матрица**

$$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T \in \mathrm{Mat}_{n\times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — \textit{транспонированная матрица}.}$$

3. **Произведение двух матриц**

   1) Частный случай: умножение строки на столбец той же длинны

   $$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

   2) Общий случай:
   A - матрица размера $m \times \underline{n}$
   B - матрица размера $\underline{n} \times p$
   $AB := C \in \mathrm{Mat}_{m\times p}$, где

   $$C_{ij} = A_{(i)}B^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

   Количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B — условие согласованности матриц.

4. **Диагональная матрица, умножение на диагональную матрицу слева и справа**

   Определение. Матрица $A \in M_n$ называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$)

   Лемма. $A = diag(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

   1. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{n\times p} \implies AB = \begin{pmatrix} a_1B_{(1)} \\ a_2B_{(2)} \\ \vdots \\ a_nB_{(n)} \end{pmatrix}$
   2. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \implies BA = \begin{pmatrix} a_1B^{(1)} & a_2B^{(2)} & \dots & a_nB^{(n)} \end{pmatrix}$

5. **Единичная матрица, её свойства**

   Определение. Матрица $E = E_n = diag(1, 1, \dots, 1)$ называется *единичной матрицей* порядка n.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства:

1. $EA = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$
2. $AE = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{p\times n}$
3. $AE = EA = A \quad \forall A \in M_n$

6. След квадратной матрицы и его поведение при сложении матриц, умножении матрицы на скаляр и транспонировании

Определение. *Следом* матрицы $A \in M_n$ называется число $trA = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Свойства:

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$
2. $\operatorname{tr} \lambda A = \lambda \operatorname{tr} A$
3. $\operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A$

7. След произведения двух матриц

$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

$\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}, B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$

8. Совместные и несовместные системы линейных уравнений

Определение. СЛУ называется

– *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение,

– *несовместной*, если решений нет.

9. Эквивалентные системы линейных уравнений

Определение. Две системы уравнений от одних и тех же неизвестных называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

10. Расширенная матрица системы линейных уравнений

Для СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

её *расширенной матрицей* называется матрица

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

11. Элементарные преобразования строк матрицы

тип	СЛУ	расширенная матрица
1.	К i-му уравнению прибавить j-ое, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ $(i \neq j)$	$Э_1(i, j, \lambda)$
2.	Переставить i-е и j-е уравнения $(i \neq j)$	$Э_2(i, j)$
3.	Умножить i-ое уравнение на $\lambda \neq 0$	$Э_3(i, \lambda)$

1. $Э_1(i, j, \lambda)$: к i-ой строке прибавить j-ую, умноженную на λ (покомпонентно),
   $a_{ik} \mapsto a_{ik} + \lambda a_{jk}\ \forall k = 1, \dots, n$,
   $b_i \mapsto b_i + \lambda b_j$.
2. $Э_2(i, j)$: переставить i-ую и j-ую строки.
3. $Э_3(i, \lambda)$: умножить i-ю строку на λ (покомпонентно).

$Э_1, Э_2, Э_3$ называются *элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы.*

12. Ступенчатый вид матрицы

Определение. Строка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ называется *нулевой*, если $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ и *ненулевой* иначе ($\exists i : a_i \neq 0$).

Определение. *Ведущим элементом* ненулевой строки называется первый её ненулевой элемент.

Определение. Матрица $M \in \mathrm{Mat}_{m \times n}$ называется *ступенчатой*, или имеет ступенчатый вид, если:

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк строго возрастают.
2. Все нулевые строки стоят в конце.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \diamond & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \diamond & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \diamond & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\diamond \neq 0$, $*$ – что угодно.

13. Улучшенный ступенчатый вид матрицы

Определение. M имеет *улучшенный ступенчатый вид*, если:

1. M имеет обычный ступенчатый вид.
2. Все ведущие элементы равны 1.
3. В одном столбце с любым ведущим элементом стоят только нули.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Теорема о виде, к которому можно привести матрицу при помощи элементарных преобразований строк

Теорема.

1) *Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду.*
2) *Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.*

Следствие. Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к **улучшенному** ступенчатому виду.

15. Общее решение совместной системы линейных уравнений

Определение. *Общим решением исходной СЛУ* называется выражение главных неизвестных через свободные.

16. Сколько может быть решений у системы линейных уравнений с действительными коэффициентами?

Определение. Всякая СЛУ с действительными коэффициентами:

- либо не имеет решений (несовместна)
- либо имеет ровно одно решение
- либо имеет бесконечно много решений

17. Однородная система линейных уравнений. Что можно сказать про её множество решений?

Определение. СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если все её правые части равны 0. Расширенная матрица: $(A \mid 0)$

Очевидный факт. Всякая ОСЛУ имеет нулевое решение ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$).

Следствие. Всякая ОСЛУ либо имеет ровно 1 решение (нулевое), либо бесконечно много решений.

18. Свойство однородной системы линейных уравнений, у которой число неизвестных больше числа уравнений

Следствие. Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение (бесконечно много ненулевых решений).

19. Связь между множеством решений совместной системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей ей однородной системы

Утверждение. *Пусть $Ax = b$ – совместная СЛУ,*

x_0 – частное решение $Ax = b$,

$S \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений ОСЛУ $Ax = 0$,

$L \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений $Ax = b$.

Тогда, $L = x_0 + S$, где $x_0 + S = \{x_0 + v \mid v \in S\}$

20. Обратная матрица

Определение. Матрица $B \in M_n$ называется *обратной*, к A, если $AB = BA = E$.

Обозначение: $B = A^{-1}$.

21. Перестановки множества $\{1, 2, \ldots, n\}$

Определение. *Перестановкой (подстановкой)* на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется всякое биективное (взаимно однозначное) отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя.

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

S_n – множество всех перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Запись:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ либо } \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \sigma(i_3) & \ldots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь, $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

22. Инверсия в перестановке. Знак перестановки. Чётные и нечётные перестановки

Пусть $\sigma \in S_n$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$

Определение. Пара $\{i, j\}$ (неупорядоченная) образует *инверсию* в σ, если числа $i-j$ и $\sigma(i)-\sigma(j)$ имеют разный знак (то есть либо $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$, либо $i > j$ и $\sigma(i) < \sigma(j)$).

Определение. *Знак* перестановки σ – это число $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{<\text{число инверсий в } \sigma>}$.

Определение. Перестановка σ называется *четной*, если $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ (четное количество инверсий), и *нечетной* если $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ (нечетное количество инверсий).

23. Произведение двух перестановок

Определение. *Произведением* (или *композицией*) двух перестановок $\sigma, \rho \in S_n$ называется такая перестановка $\sigma\rho \in S_n$, что $(\sigma\rho)(x) := \sigma(\rho(x)) \quad \forall x \in \{1, \ldots, n\}$.

24. Тождественная перестановка и её свойства. Обратная перестановка и её свойства

Определение. Перестановка $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$ называется *тождественной* перестановкой.

Свойства:

$\forall \sigma \in S_n \quad id \cdot \sigma = \sigma \cdot id = \sigma$.

$\operatorname{sgn}(id) = 1$.

Определение. $\sigma \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \implies$ подстановка $\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ называется *обратной* к σ перестановкой.

Свойства: $\sigma \cdot \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \cdot \sigma$

25. Теорема о знаке произведения двух перестановок

Теорема. $\sigma, \rho \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho.$

26. Транспозиция. Знак транспозиции

Пусть $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Рассмотрим перестановку $\tau_{ij} \in S_n$, такую что

$\tau_{ij}(i) = j.$

$\tau_{ij}(j) = i.$

$\tau_{ij}(k) = k \ \forall k \neq i, j.$

Определение. Перестановки вида τ_{ij} называются *транспозициями.*

Замечание. τ – траспозиция $\implies \tau^2 = id, \tau^{-1} = \tau.$

Лемма. $\tau \in S_n$ – транспозиция $\implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1.$

27. Общая формула для определителя квадратной матрицы произвольного порядка

Определение. Определителем матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

($\sum_{\sigma \in S_n}$ – сумма по всем перестановкам)

28. Определители 2-го и 3-го порядка

- $n = 2$
  $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $n = 3$
  $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$
  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$

29. Поведение определителя при разложении строки (столбца) в сумму двух

Если $A_{(i)} = A^1_{(i)} + A^2_{(i)}$, то $\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^1_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^2_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Аналогично, если $A^{(j)} = A^{(j)}_1 + A^{(j)}_2$, то $\det A = \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_1 \cdots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_2 \cdots A^{(n)}).$

30. Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов)

Если в A поменять местами две строки или два столбца, то $\det A$ поменяет знак.

31. Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на скаляр

Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на скаляр, то $\det A$ не изменится.

32. Верхнетреугольные и нижнетреугольные матрицы

Определение. Матрица называется *верхнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, *нижнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – верхнетреугольная}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – нижнетреугольная}$$

33. Определитель верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы

Если A верхнетреугольная или нижнетреугольная, то $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

34. Определитель диагональной матрицы. Определитель единичной матрицы

Так как матрица диагональна, она верхнетреугольна. Тогда, её определитель равен произведению элементов на диагонали:

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

Значит, определитель единичной матрицы – 1.

$\det E = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$.

35. Матрица с углом нулей и её определитель

Предложение.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right) \text{ или } A = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array}\right),\ P \in M_k,\ R \in M_{n-k} \implies \det A = \det P \det R.$$

Матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

НЕ матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

36. Определитель произведения двух матриц

Теорема. $A, B \in M_n \implies \det(AB) = \det A \det B$.

37. Дополнительный минор к элементу квадратной матрицы

Определение. *Дополнительным минором* к элементу a_{ij} называется определитель $(n-1) \times (n-1)$ матрицы, получающейся из A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Обозначение: $\overline{M}_{ij}$.

38. Алгебраическое дополнение к элементу квадратной матрицы

Определение. *Алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_{ij}$.

39. Формула разложения определителя по строке (столбцу)

Теорема. *При любом фиксированном* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – \textit{разложение по i-й строке.}}$$

Аналогично, для любого фиксированного $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – \textit{разложение по j-у столбцу.}}$$

40. Лемма о фальшивом разложении определителя

Лемма.

1. При любых $i, k \in \{1, 2, \dots, n\} : i \neq k \implies \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$,
2. При любых $j, k \in \{1, 2, \dots, n\} : j \neq k \implies \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$.

41. Невырожденная матрица

Определение. Матрица $A \in M_n$ называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, и *вырожденной* иначе (то есть $\det A = 0$).

42. Присоединённая матрица

Определение. *Присоединенной* к А матрицей называется матрица $\widehat{A} = (A_{ij})^T$.

43. Критерий обратимости квадратной матрицы

Теорема. *A обратима (то есть $\exists A^{-1}$) $\iff$ A невырождена ($\det A \neq 0$).*

44. Явная формула для обратной матрицы

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A}$

45. Критерий обратимости произведения двух матриц. Матрица, обратная к произведению двух матриц

Следствие. $A, B \in M_n \implies AB$ обратима $\iff$ обе A, B обратимы. При этом $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

46. Формулы Крамера

Пусть есть СЛУ $Ax = b(\star)$, $A \in M_n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Также, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i = (A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$.

Теорема. *Если $\det A \neq 0$, то СЛУ ($\star$) имеет единственное решение и его можно найти по формулам:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

47. Что такое поле?

Определение. *Полем* называется множество F, на котором заданы две операции "сложение" ($(a, b) \to a + b$) и "умножение" ($(a, b) \to a \cdot b$), причем $\forall a, b, c \in F$ выполнены следующие условия:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$ (нулевой элемент)
4. $\exists(-a) \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$ (противоположный элемент)
   $\uparrow$ абелева группа $\uparrow$
5. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность)
6. $ab = ba$ (коммутативность умножения)
7. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
8. $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1a = a1 = a$ (единица)
9. Если $a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in F : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (обратный элемент)

48. Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме

Определение. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$ называется его *алгебраической формой*. Число i называется *мнимой единицей*.

$a =: Re(z)$ – *действительная* часть числа z.

$b =: Im(z)$ – *мнимая* часть числа z.

Сложение $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Умножение $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Деление $\dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$

49. Комплексное сопряжение и его свойства: сопряжение суммы и произведения двух комплексных чисел

Определение. Число $\overline{z} := a - bi$ называется *комплексно сопряженным* к числу $z = a + bi$.

Операция $z \to \overline{z}$ называется *комплексным сопряжением*.

Свойства комплексного сопряжения

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

50. Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация в ней сложения и сопряжения

Числу $z = a + bi$ соответствует точка (или вектор) на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (a, b). Сумме $z + w$ соответствует сумма соответствующих векторов. Сопряжение $z \to \overline{z}$ – это отражение z относительно действительной оси.

51. Модуль комплексного числа и его свойства: неотрицательность, неравенство треугольника, модуль произведения двух комплексных чисел

Определение. Число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем числа* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (то есть длина соответствующего вектора).

Свойства

1. $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (неравенство треугольника).
3. $z\overline{z} = |z|^2$.
4. $|zw| = |z||w|$.

52. Аргумент комплексного числа

Определение. *Аргументом числа* $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ называется число $\varphi \in \mathbb{R}$, такое что

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

В геометрических терминах, φ есть угол между осью Ox и соответствующим вектором.

53. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Определение. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется его *тригонометрической формой*.

Предложение. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Следствие. В условиях предложения, предположим, что $z_2 \neq 0$.

Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

54. Формула Муавра

Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \text{ – формула Муавра.}$$

55. Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Определение. *Корнем степени* n (или *корнем* n*-й степени)* из числа z называется всякое число $w \in \mathbb{C}$, что $w^n = z$.

$\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, где $w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$

Замечание. Числа $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ лежат в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат.

56. Основная теорема алгебры комплексных чисел

Теорема. *Всякий многочлен степени* $\geqslant 1$ *с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

57. Теорема Безу и её следствие

Частный случай деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ с остатком: $g(x) = x - c$, $\deg g(x) = 1$:

$f(x) = q(x)(x-c) + r(x)$, где либо $r(x) = 0$, либо $\deg r(x) < g(x) = 1$

Значит, $r(x) \equiv r = const \in F$.

Теорема. $r = f(c)$.

Следствие. Элемент $c \in F$ является корнем многочлена $f(x) \in F[x]$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $(x - c)$.

58. Кратность корня многочлена

Определение. *Кратностью* корня $c \in F$ многочлена $f(x)$ называется наибольшее целое k такое что, $f(x)$ делится на $(x-c)^k$.

59. Векторное пространство

Фиксируем поле F (можно считать, что $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

Определение. Множество V называется *векторным (линейным) пространством* над полем F, если на V заданы две операции

- "сложение": $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- "умножение на скаляр": $F \times V$, $(\alpha \in F, x \in V) \mapsto \alpha x$.

а также, $\forall x, y, z \in V$ и $\alpha, \beta \in F$ выполнены следующие условия (называются *аксиомами векторного пространства*):

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. $\exists \overrightarrow{0} \in V : x + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + x = x$ (нулевой элемент).
4. $\exists -x : -x + x = x + (-x) = \overrightarrow{0}$ (противоположный элемент).
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
8. $1 \cdot x = x$.

60. Подпространство векторного пространства

Пусть V – векторное пространство над F.

Определение. Подмножество $U \subseteq V$ называется *подпространством* (в V), если

1. $\overrightarrow{0} \in U$.
2. $x, y \in U \implies x + y \in U$.
3. $x \in U, \alpha \in F \implies \alpha x \in U$.

61. Линейная комбинация конечного набора векторов векторного пространства

Пусть V – векторное пространство над F и $v_1, \dots, v_k \in V$ – набор векторов.

Определение. *Линейной комбинацией* векторов $v_1, \dots, v_k$ называется всякое выражение вида $\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_k v_k$, где $\alpha_i \in F$.

62. Линейная оболочка подмножества векторного пространства

Пусть $S \subseteq V$ – подмножество векторного пространства.

Определение. *Линейной оболочкой* множества S называются множество всех векторов из V, представимых в виде линейной комбинации какого-то конечного набора векторов из S.

Обозначение: $\langle S \rangle$.

63. Две общих конструкции подпространств в пространстве F^n

- Пусть $U \subseteq F^n$ – множество векторов, тогда $\langle U \rangle$ – подпространство в F^n.
- Множество решений любой ОСЛУ $Ax = 0$ ($A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$, $x \in F^n$) является подпространством в F^n.

Любое подпространство в F^n можно задать любым из этих способов.

64. Линейная зависимость конечного набора векторов

65. Линейная независимость конечного набора векторов

Определение.

1. Векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ называются *линейно зависимыми* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная $\overrightarrow{0}$ (то есть $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, такие что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}$) и *линейно независимыми* иначе (то есть из условия $\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}$ следует $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$).
2. Множество $S \subseteq V$ (возможно бесконечное, возможно с повторяющимися элементами) называется *линейно зависимым* если существует конечное линейно зависимое подмножество, и *линейно независимым* если любое конечное подмножество линейно независимо.

66. Критерий линейной зависимости конечного набора векторов

Предложение. Пусть $v_1, \dots, v_n \in V$, $i \in \{1, \dots, n\}$, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$, такой что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}\,(\star)$ и $\alpha_i \neq 0$.
2. $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$.

Следствие. Векторы $v_1, \dots, v_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\exists i \in \{1, \dots, n\}$, такое что $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$.

67. Основная лемма о линейной зависимости

Лемма. Пусть есть две системы векторов $v_1, \dots, v_m$ и $w_1, \dots, w_n$, причем $m < n$ и $w_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Тогда векторы $w_1, \dots, w_n$ линейно зависимы.

Пример. Любые $n+1$ векторов в F^n линейно зависимы, так как $F^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

68. Базис векторного пространства

Определение. Подмножество $S \subseteq V$ называется *базисом* пространства V, если

1. S линейно независимо,
2. $\langle S \rangle = V$.

Пример. $e_1, \dots, e_n$ – это базис в F^n. Он называется *стандартным базисом* в F^n.

69. Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства

Определение. Векторное пространство V называется *конечномерным*, если в нем есть конечный базис, и *бесконечномерным* иначе.

70. Размерность конечномерного векторного пространства

Определение. *Размерностью* конечномерного векторного пространства называется число элементов в (любом) его базисе.

Обозначение: $\dim V$.

Пример.

1. $\dim F^n = n$,
2. $V = \{\overrightarrow{0}\} \implies \dim V = 0$ так как базисом V будет $\varnothing$.

71. Характеризация базисов конечномерного векторного пространства в терминах единственности линейного выражения векторов

Утверждение. *Пусть* $\dim V < \infty$, $e_1, \dots, e_n \in \langle V \rangle$.
$e_1, \dots, e_n$ *— базис* V *тогда и только тогда, когда,* $\forall v \in V$ *единственным образом представим в виде*

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad x_i \in F.$$

72. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$$Ax = 0 \text{ – ОСЛУ.} \tag{$\star$}$$

$A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$.

$S \subseteq F^n$ – множество решений.

Знаем, что S – подпространство в F^n.

Определение. *Фундаментальной системой решений* (ФСР) для ОСЛУ ($\star$) называется всякий базис пространства её решений.

Замечание. У одной ОСЛУ может быть много разных ФСР.

73. Лемма о добавлении вектора к конечной линейно независимой системе

Лемма. Пусть $v, v_1, \dots, v_m \in V$ и $v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, тогда либо $v, v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, либо $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

2 Вопросы на доказательство

2.1 Операции над матрицами

1. Дистрибутивность произведения матриц по отношению к сложению

$\underbrace{A(B+C)}_{x} = \underbrace{AB + AC}_{y}$ — левая дистрибутивность.

Доказательство.

$$\begin{aligned} x_{ij} = A_{(i)}(B+C)^{(j)} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \\ &= A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

Правая дистрибутивность доказывается аналогично.

2. Ассоциативность произведения матриц

$(AB)C = A(BC)$

Доказательство. $\underbrace{(AB)}_{u}C = x$, $A\underbrace{(BC)}_{v} = y$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} (a_{il}b_{lk}c_{kj}) \\ &= \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} (a_{il}b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^{p} a_{il} \sum_{k=1}^{n} (b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^{p} a_{il}v_{lj} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

3. **Некоммутативность произведения матриц**

Умножение матриц не коммутативно

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

4. **Транспонирование произведения двух матриц**

$\underbrace{(AB)^T}_{x} = \underbrace{B^T A^T}_{y}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} x_{ij} = [AB]_{ji} = A_{(j)}B^{(i)} &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \cdot a_{jk} = B^T_{(i)}(A^T)^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

∎

5. **Умножение на диагональную матрицу слева и справа**

Лемма. $A = diag(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

1. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{n\times p} \implies AB = \begin{pmatrix} a_1B_{(1)} \\ a_2B_{(2)} \\ \vdots \\ a_nB_{(n)} \end{pmatrix}$
2. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \implies BA = (a_1B^{(1)}\ a_2B^{(2)}\ \dots\ a_nB^{(n)})$

Доказательство.

1. $[AB]_{ij} = (0\ \dots\ 0\ a_i\ 0\ \dots\ 0) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_ib_{ij}$
2. $[BA]_{ij} = \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ a_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = b_{ij}a_j$

∎

6. **След произведения двух матриц**

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

$\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n},\ B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$

Доказательство. $AB = x \in M_m$, $BA = y \in M_n$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\, x = \sum_{i=1}^{m} x_{ii} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}b_{ji}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (b_{ji}a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} y_{jj} = \mathrm{tr}\, y. \end{aligned}$$

∎

2.2 Системы линейных уравнений

1. Эквивалентность систем линейных уравнений, получаемых друг из друга путём элементарных преобразований строк расширенной матрицы

Лемма. Элементарные преобразования СЛУ не меняют множество решений

Доказательство. Пусть мы получили СЛУ($\star\star$) из СЛУ($\star$) путем применения элементарных преобразований.

1. Всякое решение системы ($\star$) является решением ($\star\star$).
2. ($\star$) получается из ($\star\star$) путем элементарных преобразований.

$(\star) \to (\star\star)$	$(\star\star) \to (\star)$
$Э_1(i, j, \lambda)$	$Э_1(i, j, -\lambda)$
$Э_2(i, j)$	$Э_2(i, j)$
$Э_3(i, \lambda)$	$Э_3(i, \frac{1}{\lambda})$

Следовательно, всякое решение ($\star\star$) является решением ($\star$) $\implies$ множества решений совпадают. ∎

2. Теорема о приведении матрицы к ступенчатому и улучшенному ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк

Теорема.

1) Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду.
2) Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

Следствие. Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к **улучшенному** ступенчатому виду.

Доказательство.

1. Алгоритм. Если M - нулевая, то конец. Иначе:

Шаг 1: Ищем первый ненулевой столбец, пусть j — его номер.
Шаг 2: Переставляем строки, если нужно, добиваемся того, что $a_{1j} \neq 0$
Шаг 3: Зануляем элементы в этом столбце используя первую строку – $Э_1(2, 1, -\frac{a_{2j}}{a_{1j}}), \ldots, Э_1(m, 1, -\frac{a_{mj}}{a_{1j}})$.
В результате $a_{ij} = 0$ при $i = 2, 3, \ldots m$.

Дальше повторяем все шаги для подматрицы M' (без первой строки и столбцов $1, \ldots, j$).

2. Алгоритм. Пусть $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$ – ведущие элементы ступенчатой матрицы.

Шаг 1: Выполняем $Э_3(1, \frac{1}{a_{1j_1}}), \ldots, Э_3(r, \frac{1}{a_{rj_r}})$, в результате все ведущие элементы равны 1.
Шаг 2: Выполняем $Э_1(r-1, r, -a_{r-1,\, j_r}), Э_1(r-2, r, -a_{r-2,\, j_r}), \ldots, Э_1(1, r, -a_{1,\, j_r})$. В результате все элементы над a_{rj_r} равны 0.
Аналогично обнуляем элементы над всеми остальными ведущими.

Итог: матрица имеет улучшенный ступенчатый вид. ∎

3. Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения на подходящую матрицу

Всякое элементарное преобразование строк матрицы реализуется умножением как умножение слева на подходящую "элементарную матрицу".

- $Э_1(i, j, \lambda)$: $A \mapsto U_1(i, j, \lambda)A$, где

$$U_1(i,j,\lambda) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & & & & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, на i-м j-м месте стоит λ, остальные элементы нули)

- $Э_2(i,j)$: $A \mapsto U_2(i,j)A$, где

$$U_2(i,j) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & i & & & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i-го и j-го столбца (на i-м j-м и j-м i-м местах стоит 1, остальные нули)

- $Э_3(i,\lambda)$: $A \mapsto U_3(i,\lambda)A$, где

$$U_3(i,\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & i & & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i-го столбца, там λ, остальные элементы нули)

Элементарные преобразования столбцов — умножение на соответствующую матрицу справа.

4. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Дана СЛУ с расширенной матрицей $(A \mid b)$.

Прямой ход метода Гаусса.

Выполняя элементарные преобразования строк в $(A|b)$, приведем A к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_{ij_1} & * & \dots & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2j_2} & * & \dots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{rj_r} & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Случай 1 $\exists i \geqslant r+1 : b_i \neq 0$ (в A есть нулевая строка с $b_i \neq 0$)

Тогда в новой СЛУ i-е уравнение $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i$, т.е. $0 = b_i \implies$ СЛУ несовместна.

Случай 2 либо $r = m$, либо $b_i = 0 \quad \forall i \geqslant r+1$

Выполняя элементарные преобразования строк приводим матрицу к улучшенному ступенчатому виду – обратный ход метода Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ называются *главными*, а остальные *свободными*, где j_i – индексы столбцов с ведущими элементами.

Подслучай 2.1 $r = n$, т.е. все неизвестные – главные

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \quad\vdots \\ x_r = b_r \end{cases} \qquad \text{— единственное решение.}$$

Подслучай 2.2 $r < n$, т.е. есть хотя бы одна свободная неизвестная

Перенесем в каждом уравнении все члены со свободными неизвестными в правую часть, получаем выражения всех главных неизвестных через свободные, эти выражения называется *общим решением исходной СЛУ.*

5. Связь между множеством решений совместной системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей ей однородной системы

Утверждение. *Пусть $Ax = b$ – совместная СЛУ.*

x_0 – частное решение $Ax = b$,

$S \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений ОСЛУ $Ax = 0$,

$L \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений $Ax = b$.

Тогда, $L = x_0 + S$, где $x_0 + S = \{x_0 + v \mid v \in S\}$

Доказательство.

1. Пусть $u \in L$ (u – решение $Ax = b$), положим $v = u - x_0$.
   Тогда, $Av = A(u - x_0) = Au - Ax_0 = b - b = 0 \implies v \in S \implies L \subseteq x_0 + S$.
2. Пусть $v \in S$ (v – решение $Ax = 0$), положим $u = x_0 + v$.
   Тогда, $Au = A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b \implies u \in L \implies x_0 + S \subseteq L$.

Значит, $x_0 + S = L$. ■

6. Общий метод решения матричных уравнений вида $AX = B$ и $XA = B$

Два типа матричных уравнений:

1. $AX = B$
   A и B известны, X – неизвестная матрица.
2. $XA = C$
   A и C известны, X – неизвестная матрица.

Из второго типа получается первый транспонированием матриц: $XA = C \iff A^T X^T = B^T$, то есть достаточно уметь решать только уравнения первого типа.

$\underset{n\times m}{A}\underset{m\times p}{X} = \underset{n\times p}{B}$ – это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} AX^{(1)} = B^{(1)} \\ AX^{(2)} = B^{(2)} \\ \qquad\vdots \\ AX^{(p)} = B^{(p)} \end{cases}$$

Этот набор СЛУ надо решать одновременно методом Гаусса.

Записываем матрицу $(A \mid B)$ и элементарными преобразованиями строк с ней приводим A к улучшенному ступенчатому виду.

Получаем $(A' \mid B')$, где A' имеет улучшенный ступенчатый вид.

Остается выписать общее решение для каждой СЛУ

$$\begin{cases} A'x^{(1)} = B'^{(1)} \\ A'x^{(2)} = B'^{(2)} \\ \qquad\vdots \\ A'x^{(p)} = B'^{(p)} \end{cases}$$

7. Вычисление обратной матрицы при помощи элементарных преобразований

Факты:

1. Если $\exists A^{-1}$, то она определена однозначно.

   Доказательство. Пусть B, B' – две матрицы, обратные к A. Тогда $B = B(AB') = (BA)B' = B'$. ■
2. Если $AB = E$ для некоторой $B \in M_n$, то $BA = E$ автоматически и тогда $B = A^{-1}$.

   Доказательство.
   $$AB = E \implies \det A \det B = 1 \implies \det A \neq 0 \implies \exists A^{-1}.$$
   $$BA = EBA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}A = E.$$ ■

Следствие. A^{-1} является решение матричного уравнения $AX = E$ (если решение существует).

2.3 Перестановки

1. Ассоциативность произведения перестановок

Утверждение. *Умножение подстановок ассоциативно, то есть* $\sigma(\tau\pi) = (\sigma\tau)\pi \ \forall \sigma, \tau, \pi \in S_n$.

Доказательство. $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеем
$[\sigma(\tau\pi)](i) = \sigma((\tau\pi)(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$
$[(\sigma\tau)\pi](i) = (\sigma\tau)(\pi(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$ ∎

2. Некоммутативность произведения перестановок

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\rho\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3. Теорема о знаке произведения двух перестановок

Теорема. $\sigma, \rho \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho$.

Доказательство. Для каждой пары $i < j$ введем следующие числа:

$$\alpha(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \text{ образует инверсию в } \rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\beta(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\rho(i), \rho(j)\} \text{ образует инверсию в } \sigma \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\gamma(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \text{ образует инверсию в } \sigma\rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

“число инверсий в ρ” $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha(i, j)$

“число инверсий в $\sigma\rho$” $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \gamma(i, j)$

“число инверсий в σ” $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \beta(i, j)$ – Почему?

Когда $\{i, j\}$ пробегает все неупорядоченные пары в $\{1, 2, \ldots, n\}$, пара $\{\rho(i), \rho(j)\}$ тоже пробегает все неупорядоченные пары в $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Зависимость $\gamma(i,j)$ от $\alpha(i,j)$ и $\beta(i,j)$:

$\alpha(i,j)$	0	0	1	1
$\beta(i,j)$	0	1	0	1
$\gamma(i,j)$	0	1	1	0

Вывод: $\alpha(i, j) + \beta(i, j) \equiv \gamma(i,j) \pmod 2$.

Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma\rho) = (-1)^{\sum \gamma(i,j)} = (-1)^{\sum \beta(i,j) + \sum \alpha(i,j)} = (-1)^{\sum \alpha(i,j)} \cdot (-1)^{\sum \beta(i,j)} = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho$. ∎

4. Знак обратной перестановки

Следствие. $\sigma \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

Доказательство. $\sigma\sigma^{-1} = id \implies \operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(id) \implies \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\sigma^{-1} = 1 \implies \operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$. ∎

5. Знак транспозиции

Лемма. $\tau \in S_n$ – транспозиция $\implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$.

Доказательство. Пусть $\tau = \tau_{ij}$, можем считать, что $i < j$.

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Посчитаем инверсии:

$\{i, j\}$

$\{i, k\}$ при $i + 1 \leqslant k \leqslant j - 1$, всего $= j - i - 1$

$\{k, j\}$ при $i + 1 \leqslant k \leqslant j - 1$, всего $= j - i - 1$

Значит, всего инверсий $2(j - i - 1) + 1 \equiv 1 \pmod 2 \implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$. ∎

2.4 Определители

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \qquad (\star)$$

1. **Определитель транспонированной матрицы**

   $\det A = \det A^T$.

   Доказательство. Пусть $B = A^T$, тогда $b_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{aligned} \det A^T = \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)^{-1}} a_{2\sigma(2)^{-1}} \dots a_{n\sigma(n)^{-1}} \qquad // \text{ замена } \sigma^{-1} = \rho \text{ } // \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} = \det A. \end{aligned}$$

   ∎

2. **Поведение определителя при умножении строки (столбца) на скаляр**

   Если в A все элементы одной строки или одного столбца домножить на одно и то же число λ, то $\det A$ тоже умножается на λ.

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda * & \lambda * & \lambda * & \lambda * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

   Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

   $A_{(i)} \to \lambda A_{(i)} \implies a_{ij} \to \lambda a_{ij}\ \forall j \implies$ в $(\star)$ каждое слагаемое умножается на $\lambda \implies \det A$ умножается на λ. ∎

3. **Поведение определителя при разложении строки (столбца) в сумму двух**

   Если $A_{(i)} = A^1_{(i)} + A^2_{(i)}$, то $\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^1_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^2_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$.

   Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

   Аналогично, если $A^{(j)} = A^{(j)}_1 + A^{(j)}_2$, то $\det A = \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_1 \cdots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_2 \cdots A^{(n)})$.

Доказательство. В связи со свойством Т можно доказать только для строк.

Пусть $A^1_{(i)} = (a'_{i1}a'_{i2}\cdots a'_{in})$, $A^2_{(i)} = (a''_{i1}a''_{i2}\dots a''_{in}) \implies a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$.

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)})\dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a'_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a''_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \det A_1 + \det A_2.
\end{aligned}$$

■

4. Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами)

Если в А есть две одинаковые строки (столбца), то $\det A = 0$.

Доказательство. В связи со свойством Т можно доказать только для строк.

При перестановке двух одинаковых строк (столбцов):

– А не изменится $\implies$ $\det A$ не изменится

– по свойству 3: $\det A$ меняет знак

Значит, $\det A = -\det A \implies \det A = 0$. ■

5. Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на скаляр

Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженный на скаляр, то $\det A$ не изменится.

Доказательство. В связи со свойством Т можно доказать только для строк.

$$A \to A' = \begin{pmatrix} \dots \\ A_{(i)} + \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda 0 = |A|.$$

■

6. Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов)

Если в A поменять местами две строки или два столбца, то $\det A$ поменяет знак.

Доказательство. В связи со свойством Т можно доказать только для строк.

Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n$, $B = (b_{ij}) \in M_n$ – матрица, полученная из А перестановкой p-ой и q-ой строк.

Так же, $\tau = \tau_{pq}$.

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \neq p, q \\ a_{qj}, & \text{если } i = p \\ a_{pj}, & \text{если } i = q \end{cases}$$

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} \implies b_{i\sigma(i)} = a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(i),(\sigma\tau\tau)(i)}$$

$$
\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot b_{2\sigma(2)} \ldots b_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\tau(1),\sigma(1)} \cdot a_{\tau(2),\sigma(2)} \ldots a_{\tau(n),\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\tau(1),(\sigma\tau\tau)(1)} \cdot a_{\tau(2),(\sigma\tau\tau)(2)} \ldots a_{\tau(n),(\sigma\tau\tau)(n)} \\
&\quad \text{// уберем } \tau(i) \text{, переупорядочив элементы в произведении //} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)} \cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)} \ldots a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)} \cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)} \ldots a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\
&\quad \text{// замена } \rho = \sigma\tau \text{ //} \\
&= -\sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) \cdot a_{1,\rho(1)} \cdot a_{2,\rho(2)} \ldots a_{n,\rho(n)} \\
&= -\det A.
\end{aligned}
$$

■

7. Определитель верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы

Если A верхнетреугольная или нижнетреугольная, то $\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Выделим в ($\star$) слагаемые, которые могут быть отличны от нуля.

$$
\begin{gathered}
a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n,\sigma(n)} \neq 0 \\
\implies a_{n\sigma(n)} \neq 0 \implies \sigma(n) = n. \\
\implies a_{n-1,\sigma(n-1)} \neq 0 \implies \sigma(n-1) \in \{n-1, n\},
\end{gathered}
$$

но n уже занято, значит $\sigma(n-1) = n-1$, и так далее.

Рассуждая аналогично, получаем $\sigma(k) = k \ \forall k \implies \sigma = id$ – это единственное слагаемое в ($\star$), которое может быть не равно 0.

$$
\operatorname{sgn}(id) = +1 \implies \det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.
$$

■

8. Определитель с углом нулей

Предложение.

$$
A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right) \text{ или } A = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array}\right), \ P \in M_k, \ R \in M_{n-k} \implies \det A = \det P \det R.
$$

Матрица с углом нулей:

$$
\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)
$$

НЕ матрица с углом нулей:

$$
\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)
$$

Доказательство. В силу свойства T достаточно доказать для строк.

1. Элементарными преобразованиями строк в A, приведем $(P \mid Q)$ к виду $(P' \mid Q')$, в котором P' имеет ступенчатый вид. При этом $\det A$ и $\det P$ умножаются на один и тот же скаляр $\alpha \neq 0$.
2. Элементарными преобразованиями строк в A, приведем $(0 \mid R)$ к виду $(0 \mid R')$, в котором R' имеет ступенчатый вид. При этом $\det A$ и $\det R$ умножаются на один и тот же скаляр $\beta \neq 0$.

$\begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix}$ – верхнетреугольная $\implies \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R'$.

$$\alpha\beta \det A = \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R' = (\alpha \det P)(\beta \det R) = \alpha\beta \det P \det R. \qquad \blacksquare$$

9. Определитель произведения двух матриц

Теорема. *$A, B \in M_n \implies \det(AB) = \det A \det B$.*

Доказательство. Выполним с матрицей A одно элементарное преобразование строк, получим матрицу A'.

$$A \rightsquigarrow A' = UA.$$

Такое же преобразование строк с AB.

$$AB \rightsquigarrow U(AB) = (UA)B = A'B.$$

Таким образом, сначала выполнив элементарное преобразование и домножив на матрицу B, либо домножив на B и затем применив элементарное преобразование, получим тот же результат.

Тогда, цепочка элементарных преобразований строк:

$$A \rightsquigarrow C \text{ – улучшенный ступенчатый вид.}$$

Так же цепочка для AB:

$$AB \rightsquigarrow CB.$$

При этом, $\det A$ и $\det AB$ умножились на один и тот же скаляр $\alpha \neq 0$

$$\det C = \alpha \det A.$$

$$\det CB = \alpha \det AB.$$

Случай 1 Последняя строка состоит из нулей:

$$\begin{aligned} &C_{(n)} = (0 \dots 0) \\ &\implies [CB]_{(n)} = C_{(n)} B = (0 \dots 0) \\ &\implies \det CB = 0 = 0 \cdot \det B = \det C \det B. \end{aligned}$$

Случай 2 Последняя строка ненулевая:

$$C_{(n)} \implies C = E,$$

так как матрица C имеет улучшенный ступенчатый вид.

Значит,

$$\det CB = \det B = 1 \cdot \det B = \det C \cdot \det B.$$

Из этих двух случаем следует, что $\det CB = \det C \det B$.

Сокращая α получаем,

$$\det CB = \det C \det B \implies \det AB = \det A \det B. \qquad \blacksquare$$

10. Разложение определителя по строке (столбцу)

Лемма. *Пусть $a_{ik} = 0$ при всех $k \neq j$. Тогда $\det A = a_{ij} \cdot A_{ij}$.*

Доказательство.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} P & U & Q \\ \hline 0 \dots 0 & a_{ij} & 0 \dots 0 \\ \hline R & V & S \end{array}\right).$$

Переставляя соседние строки $i - 1$ раз, вытолкнем i-ю строку наверх.

$$A' = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 \dots 0 & a_{ij} & 0 \dots 0 \\ \hline P & U & Q \\ \hline R & V & S \end{array}\right)$$

Переставляя соседние столбцы $j-1$ раз, переместим j-й столбец на первое место.

$$A'' = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{ij} & 0\dots 0 & 0\dots 0 \\ \hline U & P & Q \\ \hline V & R & S \end{array}\right)$$

$\det A'' = a_{ij} \det \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right) = a_{ij}\overline{M}_{ij}$.

$\implies detA = (-1)^{i-1+j-1} \det A'' = (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}_{ij} = a_{ij}A_{ij}$. ■

Теорема. *При любом фиксированном* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – \textit{разложение по i-й строке.}}$$

Аналогично, для любого фиксированного $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – \textit{разложение по j-у столбцу.}}$$

Доказательство. В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

$$A_{(i)} = (a_{i1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_{in}).$$

Требуемое следует из свойства определителей (разложение строки в сумму двух) и леммы. ■

11. Лемма о фальшивом разложении определителя

Лемма.

1. При любых $i, k \in \{1, 2, \dots, n\} : i \neq k \implies \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$.
2. При любых $j, k \in \{1, 2, \dots, n\} : j \neq k \implies \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$

Доказательство. В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

Пусть $B \in M_n$ – матрица, полученная из A заменой k-й строки на i-ю.

$$B = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

В B есть две одинаковые строки $\implies \det B = 0$.

Разлагая $\det B$ по k-й строке, получаем

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}B_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}.$$ ■

12. Единственность обратной матрицы

Пусть дана $A \in M_n$.

Определение. Матрица $B \in M_n$ называется *обратной* к A, если $AB = BA = E$.

Обозначение: A^{-1}.

Лемма. Если $\exists A^{-1}$, то она единственна.

Доказательство. Пусть $B, C \in M_n$ такие, что $AB = BA = E$ и $AC = CA = E$. Тогда,

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C \implies B = C.$$ ■

13. Определитель обратной матрицы

Лемма. Если $\exists A^{-1}$, то $\det A \neq 0$.

Доказательство. $AA^{-1} = E \implies \det(AA^{-1}) = \det E \implies \det A \det(A^{-1}) = 1$. ∎

14. Критерий обратимости квадратной матрицы и явная формула для обратной матрицы

Теорема. *A обратима (то есть $\exists A^{-1}$) $\iff$ A невырождена ($\det A \neq 0$), при этом $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A}$.*

Доказательство. Утверждение в одну сторону следует из предыдущего пункта.

Пусть $\det A \neq 0$. Покажем, что $\frac{1}{detA}\widehat{A} = A^{-1}$. Для этого достаточно доказать, что $A\widehat{A} = \widehat{A}A = \det A \cdot E$.
Для $X = A\widehat{A}$ имеем

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}[\widehat{A}]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} detA, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

Для $Y = \widehat{A}A$ имеем

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\widehat{A}]_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \begin{cases} detA, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$ ∎

15. Матрица, обратная к произведению двух матриц

Следствие. $A, B \in M_n \implies AB$ обратима $\iff$ обе A, B обратимы. При этом $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказательство. Эквивалентность ($\iff$) следует из условия $\det AB = \det A \det B$.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E.$$ ∎

16. Формулы Крамера

Пусть есть СЛУ $Ax = b(\star)$, $A \in M_n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Также, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i = (A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$.

Теорема. *Если $\det A \neq 0$, то СЛУ $(\star)$ имеет единственное решение и его можно найти по формулам:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Доказательство. $\det A \neq 0 \implies \exists A^{-1} \implies (\star) \iff x = A^{-1}b$ – единственное решение.

$$b = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \dots + x_nA^{(n)}.$$

$$\begin{aligned} \det A_i &= \det\left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, x_1A^{(1)} + \dots + x_nA^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}\right) \\ &= x_1 \det\left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(1)}, A^{(i+1)}), \dots A^{(n)}\right) \\ &\quad + x_2 \det\left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(2)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}\right) \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + x_n \det\left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}\right) \\ &= x_i \det A \quad \text{// Все слагаемые кроме i-го равны 0.} \end{aligned}$$ ∎

2.5 Комплексные числа

1. Построение поля комплексных чисел

Цель — построить поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Неформально, $\mathbb{C}$ – это наименьшее поле со следующими свойставми:

1. $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.
2. Многочлен $x^2 + 1$ имеет корень, то есть $\exists i : i^2 = -1$.

Формальная конструкция поля $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

Неформально, каждой такой паре (a, b) соответствует комплексное число $a + bi$:

- $(a, b) \iff a + bi$
- $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2 \underbrace{i^2}_{=-1} = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

Проверка аксиом

1, 2. Очевидны.

3. $0 = (0, 0)$.
4. $-(a, b) = (-a, -b)$.
5. Дистрибутивность

$$\begin{aligned}
(a_1 + b_1i)((a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)) &= (a_1 + b_1i)((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i) \\
&= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3)) + (a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3))i \\
&= a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 + (a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3)i \\
&= ((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i) + ((a_1a_3 + b_1b_3) + (b_1a_3 + a_1b_3)i) \\
&= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(a_3 + b_3i)
\end{aligned}$$

6. Коммутативность умножения – из явного вида формулы.

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

7. Ассоциативность умножения

$$\begin{aligned}
(a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3) &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)(a_3, b_3) \\
&= (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) \\
&= (a_1, b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) \\
&= (a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3).
\end{aligned}$$

8. $1 = (1, 0)$.
9. $(a, b) \neq 0 \implies a^2 + b^2 \neq 0$. Тогда, $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.
   $(a, b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$.

Итак, $\mathbb{C}$ – поле.

Проверка свойств

1. $a \in \mathbb{R} \leftrightarrow (a, 0) \in \mathbb{C}$.
   $a + b \leftrightarrow (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$.
   $ab \leftrightarrow (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$
   Значит, $\mathbb{R}$ отождествляется в $\mathbb{C}$.
2. $i = (0, 1) \implies i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

2. Свойства комплексного сопряжения (для суммы и произведения)

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Доказательство.

- $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a + bi}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$.
- $\overline{z + w} = \overline{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = \overline{z} + \overline{w}$.
- $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i = \overline{zw}$. ■

3. Свойства модуля комплексного числа: неотрицательность, неравенство треугольника (алгебраическое доказательство), модуль произведения двух комплексных чисел

Определение. Число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем числа* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (то есть длина соответствующего вектора).

Свойства

1. $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (неравенство треугольника).
3. $z\overline{z} = |z|^2$.
   $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i = a^2 + b^2 = |z|^2$
4. $|zw| = |z||w|$
   $|zw|^2 = (zw) \cdot (\overline{zw}) = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = |z|^2 |w|^2$

4. Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра

Предложение. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= |z_1||z_2|((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$ ■

Следствие. В условиях предложения, предположим, что $z_2 \neq 0$.
Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра

Следствие. Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \text{ – формула Муавра.}$$

5. Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Определение. *Корнем степени* n (или *корнем* n*-й степени)* из числа z называется всякое число $w \in \mathbb{C}$, что $w^n = z$.

Положим $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$.

Опишем множество $\sqrt[n]{z}$.
$w = \sqrt[n]{z} \implies w^n = z \implies |w|^n = |z|$.
Если $z = 0$, то $|z| = 0 \implies |w| = 0 \implies w = 0 \implies \sqrt[n]{0} = \{0\}$.

Далее считаем, что $z \neq 0$.
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$
$z = w^n = |w|^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi))$
Отсюда,

$$z = w^n \iff \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

С точностью до $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, получается ровно n различных значений для ψ, при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
В результате $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, где $w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$

Замечание. Числа $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ лежат в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат.

2.6 Векторные пространства

1. **Понятие векторного пространства, шесть простейших следствий из аксиом**

Фиксируем поле F (можно считать, что $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

Определение. Множество V называется *векторным (линейным) пространством* над полем F, если на V заданы две операции

- "сложение": $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- "умножение на скаляр": $F \times V$, $(\alpha \in F, x \in V) \mapsto \alpha x$.

а также, $\forall x, y, z \in V$ и $\alpha, \beta \in F$ выполнены следующие условия (называются *аксиомами векторного пространства*):

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. $\exists \overrightarrow{0} \in V : x + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + x = x$ (нулевой элемент).
4. $\exists -x : -x + x = x + (-x) = \overrightarrow{0}$ (противоположный элемент).
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
8. $1 \cdot x = x$.

Простейшие следствия из аксиом

$\forall \alpha \in F, x \in V$.

1. Элемент $\overrightarrow{0}$ единственный.
   Если $\overrightarrow{0}'$ – другой такой ноль, то $\overrightarrow{0}' = \overrightarrow{0}' + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
2. Элемент $-x$ единственный.
   Если $(-x)'$ – другой такой противоположный элемент, то
   $$(-x)' = (-x)' + \overrightarrow{0} = (-x)' + (x + (-x)) = ((-x)' + x) + (-x) = \overrightarrow{0} + (-x) = -x.$$
3. $\alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
   Рассмотрим равенство $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. Домножив на α получаем $\alpha(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = \alpha\overrightarrow{0}$.
   Раскроем скобки, $\alpha\overrightarrow{0} + \alpha\overrightarrow{0} = \alpha\overrightarrow{0}$.
   Прибавим к обоим частям обратный элемент к $\alpha\overrightarrow{0}$, получим $\alpha\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies \alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

4. $\alpha(-x) = -(\alpha x)$.
   Рассмотрим равенство $1 + (-1) = 0$.
   $$1 + (-1) = 0 \implies 1x + (-1)x = 0 \implies ax + (-1)ax = 0 \implies (-1)ax = -ax \implies (-a)x = -ax.$$
5. $0 \cdot x = \overrightarrow{0}$.
   Доказывается так же, как пункт 3, но с 0 вместо $\overrightarrow{0}$.
6. $(-1) \cdot x = -x$.
   Рассмотрим равенство $1 + (-1) = 0$. Домножив на x получаем $(1 + (-1))x = 0x$.
   Раскроем скобки и воспользуемся пунктом 5 — $1x + (-1)x = 0$ или $x + (-1)x = 0$.
   Прибавим к обоим частям $-x$, получим $0 + (-1)x = -x$ или $(-1)x = -x$.

2. Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений является подпространством в соответствующем векторном пространстве

Предложение. Множество решений любой ОСЛУ $Ax = 0$ ($A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$, $x \in F^n$) является подпространством в F^n.

Доказательство. Пусть S – множество решений ОСЛУ Ax = 0.

1. $\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S$.
2. $x, y \in S \implies Ax = \overrightarrow{0}$ и $Ay = \overrightarrow{0} \implies A(x + y) = Ax + Ay = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies x + y \in S$.
3. $x \in S, \alpha \in F \implies Ax = \overrightarrow{0} \implies A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies \alpha x \in S$. ∎

3. Утверждение о том, что линейная оболочка произвольного подмножества векторного пространства является подпространством

Пусть V – векторное пространство, $S \subseteq V$.

Предложение. $\langle S\rangle$ является подпространством в V.

Доказательство.

1. Два случая:
   $S = \varnothing \implies \langle\varnothing\rangle = \{\overrightarrow{0}\} \implies \overrightarrow{0} \in \langle S\rangle$.
   $S \neq \varnothing \implies \exists V \in S \implies \underbrace{0V}_{\in\langle S\rangle} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \in \langle S\rangle$.
2. Пусть $v, w \in \langle S\rangle$:
   $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$,
   $w = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n$, где $v_i, w_i \in S$, $\alpha_i, \beta_i \in F$.
   Тогда, $v + w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n \in \langle S\rangle$.
   (если $v_i = w_j$, то $\alpha_i v_i + \beta_j w_j = (\alpha_i + \beta_j)w_j$)
3. $v \in \langle S\rangle$, $\alpha \in F \implies v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$
   $\implies \alpha v = (\alpha\alpha_1)v_1 + \cdots + (\alpha\alpha_m)v_m \in \langle S\rangle$. ∎

4. Критерий линейной зависимости конечной системы векторов

Предложение. Пусть $v_1, \ldots, v_n \in V$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$, такой что $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}\,(\star)$ и $\alpha_i \neq 0$.
2. $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle$.

Доказательство.

(1) $\implies$ (2) $\alpha_i \neq 0$ в $(\star) \implies v_i = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_i}v_1 - \cdots - \dfrac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}v_{i-1} - \dfrac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}v_{i+1} - \cdots - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_i}v_n \in \langle v_1, \ldots v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle$.

(2) $\implies$ (1) $v_i = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{i-1}v_{i-1} + \beta_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \beta_n v_n \implies$

$$b_1 v_1 + \cdots + \beta_{i-1}v_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_i + \beta_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \beta_n v_n = \overrightarrow{0}.$$

(нетривиальная линейная комбинация с i-м скаляром $\neq 0$). ∎

Следствие. Векторы $v_1, \dots, v_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\exists i \in \{1, \dots, n\}$, такое что $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$.

5. Основная лемма о линейной зависимости

Лемма. Пусть есть две системы векторов $v_1, \dots, v_m$ и $w_1, \dots, w_n$, причем $m < n$ и $w_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n$. Тогда векторы $w_1, \dots, w_n$ линейно зависимы.

Доказательство.

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{m1}v_m = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$\dots$$

$$w_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{mn}v_m = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\implies (w_1, \dots, w_n) = (v_1, \dots, v_m)A, \tag{$\star$}$$

где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

Так как $m < n$, то ОСЛУ $Ax = \overrightarrow{0}$ имеет ненулевое решение $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \in F^n$.

Тогда умножим ($\star$) справа на z:

$$(w_1, \dots, w_n) \cdot z = (v_1, \dots, v_m) \cdot \underbrace{A \cdot z}_{=\overrightarrow{0}} = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}.$$

$$\implies (w_1, \dots, w_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \implies z_1 w_1 + \dots z_n w_n = \overrightarrow{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация, так как $z \neq 0$.

Следовательно, $w_1, \dots, w_n$ линейно зависимы. ∎

Пример. Любые $n+1$ векторов в F^n линейно зависимы, так как $F^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

6. Независимость числа векторов в базисе конечномерного векторного пространства от выбора базиса

Предложение. V – конечномерное векторное пространство. Тогда, все базисы в V содержат одно и то же количество элементов.

Доказательство. V конечномерно, тогда существует конечный базис $e_1, \dots, e_n$.

Пусть $S \subseteq V$ – другой базис. Так как $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$, то $\forall v \in S \implies v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Тогда любые $n+1$ векторов в S линейно зависимы по основной лемме о линейной зависимости. Но S линейно независимо, значит $|S| \leqslant n$.

Пусть $S = \{e'_1, \dots, e'_m\}$, где $m \leqslant n$. Тогда $\forall i = 1, \dots, n \quad e_i \in \langle e'_1, \dots, e'_m \rangle$, по основной лемме о линейной зависимости получаем $n \leqslant m$.

То есть $m = n$. ∎

7. Характеризация базисов конечномерного векторного пространства в терминах единственности линейного выражения векторов

Утверждение. *Пусть* $\dim V < \infty$, $e_1, \dots, e_n \in \langle V \rangle$.

$e_1, \dots, e_n$ *— базис* V *тогда и только тогда, когда,* $\forall v \in V$ *единственным образом представим в виде*

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad x_i \in F.$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Пусть есть два представления $v = x_1e_1 + \dots x_ne_n = x'_1e_1 + \dots + x'_ne_n$.
Тогда, $(x_1 - x'_1)e_1 + \dots + (x_n - x'_n)e_n = \overrightarrow{0}$.
Так как $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, то $(x_1 - x'_1) = \dots = (x_n - x'_n) = 0$.
Значит, $x_i = x'_i \quad \forall i$.

$\Longleftarrow$ $\forall v \in V$ имеем $v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.
Значит, $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$.
Для $v = \overrightarrow{0}$ существует единственное представление $\overrightarrow{0} = \lambda_1e_1 + \dots + \lambda_ne_n$.
Но мы знаем, что $\overrightarrow{0} = 0e_1 + \dots + 0e_n$.
Следовательно $\alpha_1 = \dots \alpha_n = 0$, то есть $e_1, \dots, e_n$ линейно независимо.

Итог: $e_1, \dots, e_n$ – базис V. ■

8. Метод построения фундаментальной системы решений для однородной системы линейных уравнений

Приведем матрицу к улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразовиями строк.

$$(A|\overrightarrow{0}) \rightsquigarrow (B|\overrightarrow{0}) \quad \leftarrow \text{ улучшенный ступенчатый вид.}$$

Пусть r – число ненулевых строк в B.

Тогда будет r главных неизвестных и $n - r$ свободных.

Выполнив перенумерацию будем считать что,

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_r &\text{ – главные неизвестные,} \\ x_{r+1}, \dots, x_n &\text{ – свободные.} \end{aligned}$$

Тогда, общее решение для ($\star$) имеет вид

$$\begin{aligned} &x_1 = c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \dots + c_{n-r}x_n \\ &x_2 = c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \dots + c_{n-r}x_n \\ &\dots \\ &x_r = c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \dots + c_{n-r}x_n. \end{aligned}$$

Предъявим некоторую систему решений

$$u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{r1} \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{r2} \\ 0 \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ u_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \dots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \underline{1} \end{pmatrix}.$$

$u_1, \dots, u_{n-r} \in S$

Предложение. $u_1, \dots, u_{n-r}$ – это ФСР для ОСЛУ ($\star$).

Доказательство.

1. Линейная независимость.
   Пусть $\alpha_1u_1 + \dots + \alpha_{n-r}u_{n-r} = \overrightarrow{0}$.
   При любом $k \in \{1, \dots, n-r\}$, $(r+k)$-я координата левой части равна α_k, значит $\alpha_k = 0$.
   Следовательно $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-r} = 0$.
2. $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$.

   “$\subseteq$” Верно, так как $u_1, \dots, u_{n-r} \in S$.

"$\supseteq$" Пусть $u \in S$, тогда

$$u = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} \text{ для некоторых } \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in F.$$

Положим $v := u - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{n-r} u_{n-r}$.
Тогда, $v \in S$, но

$$v = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы для общего решения дают $v = \overrightarrow{0}$.
Поэтому $u = \alpha_i u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r}$.

Значит $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$. ∎

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

Тогда ФСР:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Существование подмножества конечной системы векторов, являющегося базисом её линейной оболочки

Пусть V – векторное пространство над F.

Наблюдение: если $v, v_1, \dots, v_m \in V$ и $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, тогда $\langle v, v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

Предложение. Из всякой конечной системы векторов $S \subseteq V$ можно выбрать подсистему, которая является базисом в линейной оболочке $\langle S \rangle$.

Доказательство. Пусть $S = \{v_1, \dots, v_m\}$.

Индукция по m.

База $m = 1$: $S = \{v_1\}$.
Если $v_1 = \overrightarrow{0}$, то $\langle S \rangle = \{\overrightarrow{0}\}$, значит в качестве базиса берем $\varnothing$.
Если $v_1 \neq 0$, то S линейно независимо.
Следовательно S – базис в $\langle S \rangle$.

Шаг Пусть доказано для $< m$, докажем для m.
Если $v_1, \dots, v_m$ линейно независимо, то $v_1, \dots, v_m$ – это уже базис в $\langle S \rangle$.
Иначе, $\exists i : v_i \in \langle S \setminus \{v_i\} \rangle$.
Положим $S' := S \setminus \{v_i\}$.
Тогда, $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$.
Так как $|S'| = m - 1 < m$, то по предположению индукции в S' можно выбрать базис для $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$. ∎

10. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства

Предложение. Пусть $\dim V < \infty$, тогда всякую линейно независимую систему векторов в V можно дополнить до базиса всего пространства V.

Доказательство. Пусть $v_1, \dots, v_m$ – данная линейно независимая система.

Так как $\dim V < \infty$, в V есть конечный базис $e_1, \dots, e_n$.

Рассмотрим систему векторов $v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n$.

Пройдемся по этим векторам слева направо и выбросим те, которые линейно выражаются через предыдущие (не выброшенные).

При этом:

1) линейная оболочка системы сохраняется и равна $\langle v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n \rangle = V$;
2) $v_1, \dots, v_m$ останутся в системе, так как они линейно независимы;
3) в новой системе никакой вектор линейно не выражается через предыдущие.

Пусть новая система - это $S' = \{v_1, \dots, v_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_t}\}$.

Докажем, что S' – базис в V.

По свойству 1) имеем, что $\langle S' \rangle = V$.

Осталось доказать, что S' линейно независимо.

Пусть $\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n + \beta_1 e_{i_1} + \dots + \beta_t e_{i_t} = \overrightarrow{0}$.

Предположим, что эта линейная комбинация нетривиальна.

Так как $v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, то $\exists k : \beta_k \neq 0$.

Выберем k максимальным с этим свойством.

Тогда, e_{i_k} линейно выражается через предыдущие — противоречие. ■

11. Лемма о добавлении вектора к конечной линейно независимой системе

Лемма. Пусть $v, v_1, \dots, v_m \in V$ и $v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, тогда либо $v, v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, либо $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

Доказательство. Пусть $v, v_1, \dots, v_m$ линейно зависимы, тогда $\exists(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq (0, \dots, 0)$, такой что

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0}.$$

Но, так как $v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, то $\alpha \neq 0$. Значит, $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ по предложению. ■