

# Линейная алгебра

Бобень Вячеслав

@darkkeks, [GitHub](#)

Большую часть исходного кода предоставила Левина Александра.

Благодарность выражается Левиному Александру за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

“К коллоку можете даже не готовиться”.

— Роман Сергеевич Авдеев

## Содержание

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Лекция 09.09.2019</b>  | <b>4</b>  |
| 1.1      | Матрицы   | 4         |
| 1.2      | Операции над матрицами  | 4         |
| 1.3      | Пространство $\mathbb{R}^n$ , его отождествление с матрицами-столбцами высоты $n$                                 | 4         |
| 1.4      | Транспонирование матриц, его простейшие свойства  | 5         |
| 1.5      | Умножение матриц  | 5         |
| <b>2</b> | <b>Лекция 12.09.2019</b>  | <b>7</b>  |
| 2.1      | Отступление о суммах  | 7         |
| 2.2      | Основные свойства умножения матриц  | 7         |
| 2.3      | Диагональные матрицы  | 8         |
| 2.4      | Единичная матрица и её свойства   | 8         |
| 2.5      | След квадратной матрицы и его свойства  | 8         |
| 2.6      | Системы линейных уравнений  | 9         |
| 2.6.1    | Совместные и несовместные системы   | 9         |
| 2.6.2    | Матричная форма записи СЛУ  | 10        |
| <b>3</b> | <b>Лекция 14.09.2019</b>  | <b>11</b> |
| 3.1      | Расширенная матрицы системы линейных уравнений  | 11        |
| 3.2      | Эквивалентные системы   | 11        |
| 3.3      | Как решить СЛУ?   | 11        |
| 3.3.1    | Элементарные преобразования СЛУ и соответствующие преобразования строк её расширенной матрицы                     | 11        |
| 3.3.2    | Сохранение множества решений системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях                          | 12        |
| 3.4      | Ступенчатые матрицы   | 12        |
| 3.4.1    | Улучшенный ступенчатый вид матрицы  | 12        |
| 3.5      | Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения слева на подходящую матрицу             | 13        |
| <b>4</b> | <b>Лекция 19.09.2019</b>  | <b>14</b> |
| 4.1      | Метод Гаусса решения систем линейных уравнений  | 14        |
| 4.2      | Однородные системы линейных уравнений   | 15        |
| 4.3      | Связь между множеством решений системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей однородной системы | 15        |
| 4.4      | Матричные уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$ , общий метод их решения   | 15        |
| 4.4.1    | Тип 1   | 15        |
| 4.5      | Обратные матрицы  | 16        |
| 4.6      | Перестановки на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$  | 16        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>5</b>  | <b>Лекция 23.09.2019</b>  | <b>17</b> |
| 5.1       | Инверсии в перестановке   | 17        |
| 5.2       | Знак и чётность перестановки  | 17        |
| 5.3       | Произведение перестановок   | 17        |
| 5.4       | Ассоциативность произведения перестановок   | 17        |
| 5.5       | Тождественная перестановка  | 17        |
| 5.6       | Обратная перестановка и её знак   | 18        |
| 5.7       | Теорема о знаке произведения перестановок   | 18        |
| 5.8       | Транспозиции, знак транспозиции   | 18        |
| 5.9       | Определитель квадратной матрицы   | 19        |
| 5.10      | Определители порядков 2 и 3   | 19        |
| <b>6</b>  | <b>Лекция 26.09.2019</b>  | <b>20</b> |
| 6.1       | Свойства определителей  | 20        |
| 6.2       | Поведение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов)  | 22        |
| <b>7</b>  | <b>Лекция 30.09.2019</b>  | <b>23</b> |
| 7.1       | Определитель с углом нулей  | 23        |
| 7.2       | Определитель произведения матриц  | 23        |
| 7.3       | Дополнительные миноры и алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы  | 24        |
| 7.4       | Лемма об определителе матрицы, содержащей ровно один ненулевой элемент в некоторой строке   | 24        |
| 7.5       | Разложение определителя по строке (столбцу)   | 24        |
| 7.6       | Лемма о фальшивом разложении определителя   | 25        |
| 7.7       | Обратная матрица, её единственность   | 25        |
| 7.8       | Невырожденные матрицы   | 25        |
| 7.9       | Определитель обратной матрицы   | 25        |
| 7.10      | Присоединённая матрица  | 25        |
| 7.11      | Критерий обратимости квадратной матрицы, явная формула для обратной матрицы   | 26        |
| <b>8</b>  | <b>Лекция 2.11.2019</b>   | <b>27</b> |
| 8.1       | Следствия из критерия обратимости квадратной матрицы  | 27        |
| 8.2       | Формулы Крамера   | 27        |
| 8.3       | Понятие поля  | 27        |
| 8.4       | Простейшие примеры  | 28        |
| 8.5       | Построение поля комплексных чисел   | 28        |
| 8.5.1     | Формальная конструкция поля $\mathbb{C}$  | 28        |
| 8.5.2     | Проверка аксиом   | 28        |
| 8.6       | Алгебраическая форма комплексного числа, его действительная и мнимая части  | 29        |
| 8.7       | Комплексное сопряжение  | 29        |
| 8.7.1     | Свойства комплексного сопряжения  | 29        |
| 8.8       | Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация сложения и сопряжения в этой модели  | 29        |
| <b>9</b>  | <b>Лекция 7.11.2019</b>   | <b>30</b> |
| 9.1       | Модуль комплексного числа, его свойства   | 30        |
| 9.2       | Аргумент комплексного числа   | 30        |
| 9.3       | Тригонометрическая форма комплексного числа   | 30        |
| 9.4       | Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме  | 30        |
| 9.5       | Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра   | 31        |
| 9.6       | Извлечение корней из комплексных чисел  | 31        |
| 9.7       | Основная теорема алгебры комплексных чисел (без доказательства)   | 31        |
| 9.8       | Деление многочленов с остатком  | 31        |
| 9.9       | Теорема Безу  | 32        |
| 9.10      | Кратность корня многочлена  | 32        |
| 9.11      | Утверждение о том, что всякий многочлен степени $n$ с комплексными коэффициентами имеет ровно $n$ корней с учётом кратностей        | 32        |
| <b>10</b> | <b>Лекция 14.11.2019</b>  | <b>33</b> |
| 10.1      | Векторные пространства, простейшие следствия из аксиом  | 33        |
| 10.1.1    | Определение векторного пространства   | 33        |
| 10.1.2    | Простейшие следствия из аксиом  | 33        |
| 10.2      | Подпространства векторных пространств   | 34        |
| 10.3      | Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений с $n$ неизвестными является подпространством в $F^n$ | 34        |
| 10.4      | Линейная комбинация конечного набора векторов   | 34        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 10.5      | Линейная оболочка подмножества векторного пространства, примеры . . . . .   | 34        |
| <b>11</b> | <b>Лекция 21.11.2019</b>  | <b>35</b> |
| 11.1      | Утверждение о том, что линейная оболочка системы векторов является подпространством объемлющего векторного пространства . . . . . | 35        |
| 11.2      | Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов . . . . .  | 35        |
| 11.3      | Критерий линейной зависимости конечного набора векторов . . . . .   | 36        |
| 11.4      | Основная лемма о линейной зависимости . . . . .   | 36        |
| 11.5      | Базис векторного пространства . . . . .   | 37        |
| 11.6      | Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства . . . . .   | 37        |
| 11.7      | Независимость числа элементов в базисе векторного пространства от выбора базиса . . . . .   | 37        |
| 11.8      | Размерность конечномерного векторного пространств . . . . .   | 37        |
| <b>12</b> | <b>Лекция 28.11.2019</b>  | <b>38</b> |
| 12.1      | Характеризация базисов в терминах единственности линейного выражения векторов . . . . .   | 38        |
| 12.2      | Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений . . . . .   | 38        |
| 12.3      | Метод построения фундаментальной системы решений . . . . .  | 38        |
| 12.4      | Утверждение о возможности выбора из конечной системы векторов базиса её линейной оболочки . . . . .                               | 40        |
| 12.5      | Дополнение конечной линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства . . . . .               | 40        |
| 12.6      | Лемма о добавлении вектора к конечной линейно независимой системе . . . . .   | 40        |

# 1 Лекция 09.09.2019

## 1.1 Матрицы

**Определение 1.** Матрица размера  $n \times m$  — это прямоугольная таблица высоты  $m$  и ширины  $n$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}$  — элемент на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца

Краткая запись —  $A = (a_{ij})$

Множество всех матриц размера  $m \times n$  с коэффициентами из  $\mathbb{R}$  (множество всех действительных чисел) —  $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$  или  $\text{Mat}_{n \times m}$

**Определение 2.** Две матрицы  $A \in \text{Mat}_{n \times m}$  и  $B \in \text{Mat}_{p \times q}$  называются *равными*, если  $m = p$ ,  $n = q$ , и соответствующие элементы равны

Пример.  $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$

## 1.2 Операции над матрицами

Для любых  $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}$

- Сложение  $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$
- Умножение на скаляр  $\alpha \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij})$

**Свойства суммы и произведения на скаляр**

$\forall A, B, C \in \text{Mat}_{m \times n} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- 1)  $A + B = B + A$  (коммутативность)
- 2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (ассоциативность)
- 3)  $A + 0 = 0 + A = A$ , где

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ — нулевая матрица.}$$

- 4)  $A + (-A) = 0$   
 $-A = (-a_{ij})$  — противоположная матрица
- 5)  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- 6)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- 7)  $\lambda(\mu A) = \lambda(\mu A)$
- 8)  $1A = A$

**Упражнение на дом.** Доказать эти свойства.

**Замечание.** Из свойств 1) – 8) следует, что  $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$  является векторным пространством над  $\mathbb{R}$

## 1.3 Пространство $\mathbb{R}^n$ , его отождествление с матрицами-столбцами высоты $n$

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n\}$$

$\mathbb{R}$  — числовая прямая

$\mathbb{R}^2$  — плоскость

$\mathbb{R}^3$  — трехмерное пространство

Договоримся отождествлять  $\mathbb{R}^n$  со столбцами высоты  $n$

$$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — вектор столбец}$$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n \right\} = \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{R})$$

$$\left[ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right] \implies [x = y \iff x_i = y_i \forall i]$$

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_i := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

## 1.4 Транспонирование матриц, его простейшие свойства

$$A \in \text{Mat}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T \in \text{Mat}_{n \times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A^T$  — транспонированная матрица

Свойства:

- 1)  $(A^T)^T = A$
- 2)  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- 3)  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Пример.  $(x_1 \quad \dots \quad x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Пример.  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = (x_1 \quad \dots \quad x_n)$

Пример.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

## 1.5 Умножение матриц

Пусть  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}$

$A_{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  —  $i$ -я строка матрицы  $A$

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ — } j\text{-й столбец матрицы } A$$

- 1) Частный случай: умножение строки на столбец той же длины

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1 \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

- 2) Общий случай:

$A$  - матрица размера  $m \times \underline{n}$

$B$  - матрица размера  $\underline{n} \times p$

Количество строк матрицы  $A$  равно количеству столбцов матрицы  $B$  — условие согласованности матриц

$$AB := C \in \text{Mat}_{m \times p}, \text{ где } C_{ij} = A_{(i)} B^{(j)}$$

$$\text{Пример. } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} (x_1 \quad \dots \quad x_n) := \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_1 & \dots & x_n y_1 \\ x_1 y_2 & x_2 y_2 & \dots & x_n y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 y_n & x_2 y_n & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Пример. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

## 2 Лекция 12.09.2019

### 2.1 Отступление о суммах

Пусть  $S_p, S_{p+1}, \dots, S_q$  – набор чисел.

Тогда,  $\sum_{i=p}^q S_i := S_p + S_{p+1} + \dots + S_q$  – сумма по  $i$  от  $p$  до  $q$

Например,  $\sum_{i=1}^{100} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$

**Свойства сумм:**

1.  $\lambda \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \lambda S_i$
2.  $\sum_{i=1}^n (S_i + T_i) = \sum_{i=1}^n S_i + \sum_{i=1}^n T_i$
3.  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m S_{ij}$  – сумма всех элементов матрицы  $S = (S_{ij})$

### 2.2 Основные свойства умножения матриц

Пусть  $A \in \text{Mat}_{m \times n}$ ,  $B \in \text{Mat}_{n \times p}$

1.  $\underbrace{A(B+C)}_x = \underbrace{AB+AC}_y$  – левая дистрибутивность.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} x_{ij} &= A_{(i)}(B+C)^{(j)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} \\ &= A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

2.  $(A+B)C = AC + BC$  – правая дистрибутивность, доказывается аналогично.
3.  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
4.  $(AB)C = A(BC)$  – ассоциативность.

*Доказательство.*  $\underbrace{(AB)C}_u = x, \underbrace{A(BC)}_v = y$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^p a_{il}b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p (a_{il}b_{lk}c_{kj}) \\ &= \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n (a_{il}b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^p a_{il} \sum_{k=1}^n (b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^p a_{il}v_{lj} = y_{ij}. \end{aligned}$$

5.  $\underbrace{(AB)^T}_x = \underbrace{B^T A^T}_y$

*Доказательство.*  $x_{ij} = [AB]_{ji} = A_{(j)}B^{(i)} = B_{(i)}^T(A^T)^{(j)} = y_{ij}$

Умножение матриц не коммутативно

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Определение 3.**  $A \in \text{Mat}_{n \times n}$  называется *квадратной матрицей* порядка  $n$

Обозначение  $M_n := \text{Mat}_{n \times n}$

$A \in M_n$

### 2.3 Диагональные матрицы

**Определение 4.** Матрица  $A \in M_n$  называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ( $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ )

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \implies A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

**Лемма 2.1.**  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

$$1. \forall B \in \text{Mat}_{n \times p} \implies AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$$

$$2. \forall B \in \text{Mat}_{m \times n} \implies BA = \begin{pmatrix} a_1 B^{(1)} & a_2 B^{(2)} & \dots & a_n B^{(n)} \end{pmatrix}$$

*Доказательство.* 1.  $[AB]_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i b_{ij}$

$$2. [BA]_{ij} = \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ a_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = b_{ij} a_j$$

■

### 2.4 Единичная матрица и её свойства

**Определение 5.** Матрица  $E = E_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$  называется *единичной матрицей* порядка  $n$ .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Свойства:**

1.  $EA = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{n \times p}$
2.  $AE = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{p \times n}$
3.  $AE = EA = A \quad \forall A \in M_n$

### 2.5 След квадратной матрицы и его свойства

**Определение 6.** *Следом* матрицы  $A \in M_n$  называется число  $\text{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

**Свойства:**

1.  $\text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B$
2.  $\text{tr} \lambda A = \lambda \text{tr} A$
3.  $\text{tr} A^T = \text{tr} A$
4.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$   
 $\forall A \in \text{Mat}_{m \times n}, B \in \text{Mat}_{n \times m}$





### 2.6.2 Матричная форма записи СЛУ

$$AX = B.$$

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}(R) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{матрица коэффициентов}$$

$$B \in \text{Mat}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \text{столбец правых частей}$$

$$X \in \text{Mat}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных}$$

### 3 Лекция 14.09.2019

#### 3.1 Расширенная матрицы системы линейных уравнений

$$Ax = b, A \in \text{Mat}_{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Полная информация о СЛУ содержится в её *расширенной матрице*.

$$(A | b) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

#### 3.2 Эквивалентные системы

**Определение 9.** Две системы уравнений от одних и тех же неизвестных называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

*Пример.* Рассмотрим несколько СЛУ

$$\text{А) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{В) } \begin{cases} 2x_1 = 1 \\ 2x_2 = 1 \end{cases} \iff \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{С) } x_1 + x_2 = 1 \iff \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

А и В эквивалентны, так как обе имеют единственное решение  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

А и С не эквивалентны, так как С имеет бесконечно много решений.

#### 3.3 Как решить СЛУ?

**Идея:** выполнить преобразование СЛУ, сохраняющее множество её решений, и привести её к такому виду, в котором СЛУ легко решается.

$$\text{Пример. } \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

##### 3.3.1 Элементарные преобразования СЛУ и соответствующие преобразования строк её расширенной матрицы

| тип | СЛУ  | расширенная матрица             |
|-----|--|---------------------------------|
| 1.  | К $i$ -му уравнению прибавить $j$ -ое, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ ( $i \neq j$ ) | $\mathfrak{A}_1(i, j, \lambda)$ |
| 2.  | Переставить $i$ -е и $j$ -е уравнения ( $i \neq j$ )   | $\mathfrak{A}_2(i, j)$          |
| 3.  | Умножить $i$ -ое уравнение на $\lambda \neq 0$   | $\mathfrak{A}_3(i, \lambda)$    |

1.  $\mathfrak{A}_1(i, j, \lambda)$ : к  $i$ -ой строке прибавить  $j$ -ую, умноженную на  $\lambda$  (покомпонентно),

$$a_{ik} \mapsto a_{ik} + \lambda a_{jk} \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

$$b_i \mapsto b_i + \lambda b_j.$$

2.  $\mathfrak{A}_2(i, j)$ : переставить  $i$ -ую и  $j$ -ую строки.

3.  $\mathfrak{A}_3(i, \lambda)$ : умножить  $i$ -ю строку на  $\lambda$  (покомпонентно).

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$  называются *элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы*.

### 3.3.2 Сохранение множества решений системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях

**Лемма 3.1.** Элементарные преобразования СЛУ не меняют множество решений

*Доказательство.* Пусть мы получили СЛУ(★★) из СЛУ(★) путем применения элементарных преобразований.

1. Всякое решение системы (★) является решением (★★).
2. (★) получается из (★★) путем элементарных преобразований.

| $(★) \rightarrow (★★)$          | $(★★) \rightarrow (★)$                 |
|---------------------------------|--|
| $\mathfrak{D}_1(i, j, \lambda)$ | $\mathfrak{D}_1(i, j, -\lambda)$       |
| $\mathfrak{D}_2(i, j)$          | $\mathfrak{D}_2(i, j)$                 |
| $\mathfrak{D}_3(i, \lambda)$    | $\mathfrak{D}_3(i, \frac{1}{\lambda})$ |

Следовательно, всякое решение (★★) является решением (★)  $\implies$  множества решений совпадают. ■

### 3.4 Ступенчатые матрицы

**Определение 10.** Строка  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  называется *нулевой*, если  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$  и *ненулевой* иначе ( $\exists i : a_i \neq 0$ ).

**Определение 11.** *Ведущим элементом* ненулевой строки называется первый её ненулевой элемент.

**Определение 12.** Матрица  $M \in \text{Mat}_{m \times n}$  называется *ступенчатой*, или имеет ступенчатый вид, если:

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк строго возрастают.
2. Все нулевые строки стоят в конце.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \diamond & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \diamond & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \diamond & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\diamond \neq 0$ ,  $*$  — что угодно.

#### 3.4.1 Улучшенный ступенчатый вид матрицы

**Определение 13.** М имеет *улучшенный ступенчатый вид*, если:

1. М имеет обычный ступенчатый вид.
2. Все ведущие элементы равны 1.
3. В одном столбце с любым ведущим элементом стоят только нули.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 3.2.** 1) *Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду.*  
 2) *Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.*

**Следствие.** Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к **улучшенному** ступенчатому виду.

*Доказательство.*

1. Алгоритм. Если М - нулевая, то конец. Иначе:

Шаг 1: Ищем первый ненулевой столбец, пусть  $j$  — его номер.

Шаг 2: Переставляем строки, если нужно, добиваемся того, что  $a_{1j} \neq 0$

Шаг 3: Зануляем элементы в этом столбце используя первую строку —  $\mathfrak{D}_1(2, 1, -\frac{a_{2j}}{a_{1j}}), \dots, \mathfrak{D}_1(m, 1, -\frac{a_{mj}}{a_{1j}})$ .

В результате  $a_{ij} = 0$  при  $i = 2, 3, \dots, m$ .

Дальше повторяем все шаги для подматрицы  $M'$  (без первой строки и столбцов  $1, \dots, j$ ).

2. Алгоритм. Пусть  $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$  — ведущие элементы ступенчатой матрицы.

Шаг 1: Выполняем  $\Theta_3(1, \frac{1}{a_{1j_1}}), \dots, \Theta_3(r, \frac{1}{a_{rj_r}})$ , в результате все ведущие элементы равны 1.

Шаг 2: Выполняем  $\Theta_1(r-1, r, -a_{r-1, j_r}), \Theta_1(r-2, r, -a_{r-2, j_r}), \dots, \Theta_1(1, r, -a_{1, j_r})$ . В результате все элементы над  $a_{rj_r}$  равны 0.

Аналогично обнуляем элементы над всеми остальными ведущими.

Итог: матрица имеет улучшенный ступенчатый вид. ■

### 3.5 Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения слева на подходящую матрицу

Всякое элементарное преобразование строк матрицы реализуется умножением как умножение слева на подходящую “элементарную матрицу”.

- $\Theta_1(i, j, \lambda): A \mapsto U_1(i, j, \lambda)A$ , где

$$U_1(i, j, \lambda) = \begin{matrix} & & & & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, на  $i$ -м  $j$ -м месте стоит  $\lambda$ , остальные элементы нули)

- $\Theta_2(i, j): A \mapsto U_2(i, j)A$ , где

$$U_2(i, j) = \begin{matrix} & i & & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ j & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме  $i$ -го и  $j$ -го столбца (на  $i$ -м  $j$ -м и  $j$ -м  $i$ -м местах стоит 1, остальные нули)

- $\Theta_3(i, \lambda): A \mapsto U_3(i, \lambda)A$ , где

$$U_3(i, \lambda) = \begin{matrix} & i \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме  $i$ -го столбца, там  $\lambda$ , остальные элементы нули)

Элементарные преобразования столбцов — умножение на соответствующую матрицу справа.

**Упражнение на дом.** Доказательство.

## 4 Лекция 19.09.2019

Дана СЛУ с расширенной матрицей  $(A | b)$ .

Было: элементарные преобразования строк в  $(A | b)$  сохраняют множество решений.

### 4.1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Прямой ход метода Гаусса.

Выполняя элементарные преобразования строк в  $(A|b)$ , приведем  $A$  к ступенчатому виду:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_{ij_1} & * & \dots & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2j_2} & * & \dots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{rj_r} & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

**Случай 1**  $\exists i \geq r+1 : b_i \neq 0$  (в  $A$  есть нулевая строка с  $b_i \neq 0$ )

Тогда в новой СЛУ  $i$ -е уравнение  $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i$ , т.е.  $0 = b_i \implies$  СЛУ несовместна.

**Случай 2** либо  $r = m$ , либо  $b_i = 0 \quad \forall i \geq r+1$

Выполняя элементарные преобразования строк приводим матрицу к улучшенному ступенчатому виду – обратный ход метода Гаусса

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Неизвестные  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$  называются *главными*, а остальные *свободными*, где  $j_i$  – индексы столбцов с ведущими элементами.

**Подслучай 2.1**  $r = n$ , т.е. все неизвестные – главные

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_r = b_r \end{cases} \quad \text{— единственное решение.}$$

**Подслучай 2.2**  $r < n$ , т.е. есть хотя бы одна свободная неизвестная

Перенесем в каждом уравнении все члены со свободными неизвестными в правую часть, получаем выражения всех главных неизвестных через свободные, эти выражения называется *общим решением исходной СЛУ*.

*Пример.* Улучшенный ступенчатый вид:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Главные неизвестные:  $x_1, x_3$ .

Свободные неизвестные:  $x_2, x_4$ .

$x_2 = t_1, x_4 = t_2$  – параметры.

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = 4 + 2t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3t_1 - t_2 \\ t_1 \\ 4 + 2t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 4 + 2x_4 \end{cases}$$

**Следствие.** Всякая СЛУ с коэффициентами из  $\mathbb{R}$  имеет либо 0 решений, либо одно решение, либо бесконечно много решений.

## 4.2 Однородные системы линейных уравнений

**Определение 14.** СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если все её правые части равны 0. Расширенная матрица:  $(A \mid 0)$

**Очевидный факт.** Всякая ОСЛУ имеет нулевое решение ( $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ).

**Следствие.** Всякая ОСЛУ либо имеет ровно 1 решение (нулевое), либо бесконечно много решений.

**Следствие.** Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение

*Доказательство.* В ступенчатом виде будет хотя бы одна свободная неизвестная. Придавая ей ненулевое значение, получим ненулевое решение ■

## 4.3 Связь между множеством решений системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей однородной системы.

Пусть дана совместная СЛУ  $Ax = b$

Частное решение СЛУ — это какое-то одно её решение.

**Утверждение 4.1.** Пусть  $Ax = b$  — совместная СЛУ.

$x_0$  — частное решение  $Ax = b$

$S \subset \mathbb{R}^n$  — множество решений ОСЛУ  $Ax = 0$

$L \subset \mathbb{R}^n$  — множество решений  $Ax = b$ .

Тогда,  $L = x_0 + S$ , где  $x_0 + S = \{x_0 + v \mid v \in S\}$

*Доказательство.*

1. Пусть  $u \in L$  ( $u$  — решение  $Ax = b$ ), положим  $v = u - x_0$

$$\text{Тогда, } Av = A(u - x_0) = Au - Ax_0 = b - b = 0 \implies v \in S \implies L \subseteq x_0 + S$$

2. Пусть  $v \in S$  ( $v$  — решение  $Ax = 0$ ), положим  $u = x_0 + v$ .

$$\text{Тогда, } Au = A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b \implies u \in L \implies x_0 + S \subseteq L$$

Значит,  $x_0 + S = L$ . ■

## 4.4 Матричные уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$ , общий метод их решения

Два типа матричных уравнений:

1.  $AX = B$

$A$  и  $B$  известны,  $X$  — неизвестная матрица

2.  $XA = C$

$A$  и  $C$  известны,  $X$  — неизвестная матрица

Из второго типа получается первый транспонированием матриц:  $XA = C \iff A^T X^T = B^T$ , то есть достаточно уметь решать только уравнения первого типа.

### 4.4.1 Тип 1

$A \quad X = B$  — это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} AX^{(1)} = B^{(1)} \\ AX^{(2)} = B^{(2)} \\ \vdots \\ AX^{(p)} = B^{(p)} \end{cases}$$

Этот набор СЛУ надо решать одновременно методом Гаусса.

Записываем матрицу  $(A \mid B)$  и элементарными преобразованиями строк с ней приводим  $A$  к улучшенному ступенчатому виду.

Получаем  $(A' \mid B')$ , где  $A'$  имеет улучшенный ступенчатый вид.

Остается выписать общее решение для каждой СЛУ

$$\begin{cases} A'x^{(1)} = B'^{(1)} \\ A'x^{(2)} = B'^{(2)} \\ \vdots \\ A'x^{(p)} = B'^{(p)} \end{cases}$$

## 4.5 Обратные матрицы

**Определение 15.** Матрица  $B \in M_n$  называется *обратной*, к  $A$ , если  $AB = BA = E$ .

Обозначение:  $B = A^{-1}$

Факты:

1. Если  $\exists A^{-1}$ , то она определена однозначно

*Доказательство.* Пусть  $B, B'$  – две матрицы, обратные к  $A$ . Тогда  $B = B(AB') = (BA)B' = B'$ . ■

2. Если  $AB = E$  для некоторой  $B \in M_n$ , то  $BA = E$  автоматически и тогда  $B = A^{-1}$

**Замечание.** Доказывается на [Лекции 8](#).

**Следствие.**  $A^{-1}$  является решение матричного уравнения  $AX = E$  (если решение существует)

## 4.6 Перестановки на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$

**Определение 16.** *Перестановкой (подстановкой)* на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$  называется всякое биективное (взаимно однозначное) отображение множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  в себя.

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

$S_n$  – множество всех перестановок на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Запись:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ либо } \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \sigma(i_3) & \dots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь,  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Замечание.** Количество всех перестановок длины  $n$ :  $|S_n| = n!$



## 5 Лекция 23.09.2019

### 5.1 Инверсии в перестановке

Обозначение:  $S_n$  – множество всех перестановок из  $n$  элементов.

Пусть  $\sigma \in S_n$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$

**Определение 17.** Пара  $\{i, j\}$  (неупорядоченная) образует *инверсию* в  $\sigma$ , если числа  $i - j$  и  $\sigma(i) - \sigma(j)$  имеют разный знак (то есть либо  $i < j$  и  $\sigma(i) > \sigma(j)$ , либо  $i > j$  и  $\sigma(i) < \sigma(j)$ ).

### 5.2 Знак и чётность перестановки

**Определение 18.** *Знак* перестановки  $\sigma$  – это число  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{число инверсий в } \sigma}$ .

**Определение 19.** Перестановка  $\sigma$  называется *чётной*, если  $\text{sgn}(\sigma) = 1$  (чётное количество инверсий), и *нечётной* если  $\text{sgn}(\sigma) = -1$  (нечётное количество инверсий).

Примеры.

| $\sigma$             | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ |
|----------------------|--|--|
| число инверсий       | 0  | 1  |
| $\text{sgn}(\sigma)$ | 1  | -1   |
| чётность             | чётная   | нечётная                                       |

| $\sigma$             | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ |
|----------------------|--|--|--|--|--|--|
| число инверсий       | 0  | 1  | 2  | 3  | 2  | 1  |
| $\text{sgn}(\sigma)$ | 1  | -1   | 1  | -1   | 1  | -1   |
| чётность             | чётная   | нечётная   | чётная   | нечётная   | чётная   | нечётная   |

**Замечание.** число инверсий в  $\sigma \in S_n \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ , равенство достигается при  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

### 5.3 Произведение перестановок

**Определение 20.** *Произведением* (или *композицией*) двух перестановок  $\sigma, \rho \in S_n$  называется такая перестановка  $\sigma\rho \in S_n$ , что  $(\sigma\rho)(x) := \sigma(\rho(x)) \quad \forall x \in \{1, \dots, n\}$ .

Пример.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Видно, что  $\sigma\rho \neq \rho\sigma \implies$  произведение перестановок не обладает свойством коммутативности.

### 5.4 Ассоциативность произведения перестановок

**Утверждение 5.1.** Умножение перестановок ассоциативно, то есть  $\sigma(\tau\pi) = (\sigma\tau)\pi \quad \forall \sigma, \tau, \pi \in S_n$ .

*Доказательство.*  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  имеем

$$[\sigma(\tau\pi)](i) = \sigma((\tau\pi)(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$$

$$[(\sigma\tau)\pi](i) = (\sigma\tau)(\pi(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$$

■

### 5.5 Тожественная перестановка

**Определение 21.** Перестановка  $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n$  называется *тождественной* перестановкой.

**Свойства:**

$$\forall \sigma \in S_n \quad id \cdot \sigma = \sigma \cdot id = \sigma.$$

$$\text{sgn}(id) = 1.$$

## 5.6 Обратная перестановка и её знак

**Определение 22.**  $\sigma \in S_n$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \implies$  подстановка  $\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$  называется *обратной* к  $\sigma$  перестановкой.

**Свойства:**  $\sigma \cdot \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \cdot \sigma$

## 5.7 Теорема о знаке произведения перестановок

**Теорема 5.2.**  $\sigma, \rho \in S_n \implies \text{sgn}(\sigma\rho) = \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \rho$ .

*Доказательство.* Для каждой пары  $i < j$  введем следующие числа:

$$\alpha(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \text{ образует инверсию в } \rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\beta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\rho(i), \rho(j)\} \text{ образует инверсию в } \sigma \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\gamma(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \text{ образует инверсию в } \sigma\rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\text{“число инверсий в } \rho\text{”} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha(i, j)$$

$$\text{“число инверсий в } \sigma\rho\text{”} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \gamma(i, j)$$

$$\text{“число инверсий в } \sigma\text{”} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta(i, j) - \text{Почему?}$$

Когда  $\{i, j\}$  пробегает все неупорядоченные пары в  $\{1, 2, \dots, n\}$ , пара  $\{\rho(i), \rho(j)\}$  тоже пробегает все неупорядоченные пары в  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Зависимость  $\gamma(i, j)$  от  $\alpha(i, j)$  и  $\beta(i, j)$ :

|                |   |   |   |   |
|----------------|---|---|---|---|
| $\alpha(i, j)$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\beta(i, j)$  | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\gamma(i, j)$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

Вывод:  $\alpha(i, j) + \beta(i, j) \equiv \gamma(i, j) \pmod{2}$ .

Тогда  $\text{sgn}(\sigma\rho) = (-1)^{\sum \gamma(i, j)} = (-1)^{\sum \beta(i, j) + \sum \alpha(i, j)} = (-1)^{\sum \alpha(i, j)} \cdot (-1)^{\sum \beta(i, j)} = \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \rho$ . ■

**Следствие.**  $\sigma \in S_n \implies \text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$ .

*Доказательство.*  $\sigma\sigma^{-1} = id \implies \text{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \text{sgn}(id) \implies \text{sgn} \sigma \text{sgn} \sigma^{-1} = 1 \implies \text{sgn} \sigma = \text{sgn} \sigma^{-1}$ . ■

**Упражнение на дом:** Показать, что число инверсий в  $\sigma^{-1}$  такое же, как в  $\sigma$ .

## 5.8 Транспозиции, знак транспозиции

Пусть  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ .

Рассмотрим перестановку  $\tau_{ij} \in S_n$ , такую что

$$\tau_{ij}(i) = j.$$

$$\tau_{ij}(j) = i.$$

$$\tau_{ij}(k) = k \quad \forall k \neq i, j.$$

**Определение 23.** Перестановки вида  $\tau_{ij}$  называются *транспозициями*.

**Замечание.**  $\tau$  – траспозиция  $\implies \tau^2 = id, \tau^{-1} = \tau$ .

**Определение 24.** Перестановки вида  $\tau_{i, i+1}$  называются *элементарными траспозициями*.

**Лемма 5.3.**  $\tau \in S_n$  – транспозиция  $\implies \text{sgn}(\tau) = -1$ .

*Доказательство.* Пусть  $\tau = \tau_{ij}$ , можем считать, что  $i < j$ .

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Посчитаем инверсии:

$\{i, j\}$

$\{i, k\}$  при  $i+1 \leq k \leq j-1$ , всего  $= j-i-1$

$\{k, j\}$  при  $i+1 \leq k \leq j-1$ , всего  $= j-i-1$

Значит, всего инверсий  $2(j-i-1) + 1 \equiv 1 \pmod{2} \implies \text{sgn}(\tau) = -1$ . ■

**Следствие.** При  $n \geq 2$  отображение  $\sigma \rightarrow \sigma\tau_{12}$  является биекцией между множеством четных перестановок в  $S_n$  и множеством нечетных перестановок в  $S_n$ .

**Следствие.** При  $n \geq 2$  количество нечетных перестановок в  $S_n$  равно количеству четных перестановок в  $S_n$  и равно  $\frac{n!}{2}$ .

**Теорема 5.4.** Всякая перестановка  $\sigma \in S_n$  может быть разложена в произведение конечного числа элементарных транспозиций.

*Доказательство.*

$$\sigma \in S_n := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\sigma\tau_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

При умножении справа на  $\tau_{i,i+1}$  в нижней строке меняются местами  $i$ -ый и  $(i+1)$ -ый элементы.

Тогда, домножив  $\sigma$  на подходящее произведение  $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k$  элементарных транспозиций, можем добиться, что нижняя строка есть  $(1, 2, \dots, n) \implies \sigma\tau_1\tau_2 \dots \tau_k = id$ .

Теперь, домножая справа на  $\tau_k\tau_{k-1} \dots \tau_1$ , получим  $\sigma = \tau_k\tau_{k-1} \dots \tau_1$ . ■

## 5.9 Определитель квадратной матрицы

**Определение 25.** Определителем матрицы  $A \in M_n$  называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

( $\sum_{\sigma \in S_n}$  – сумма по всем перестановкам)

Другие обозначения:  $|A|$ ,  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

## 5.10 Определители порядков 2 и 3

•  $n = 2$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

•  $n = 3$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

## 6 Лекция 26.09.2019

Напомним что такое определитель:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \quad (\star)$$

**Замечание.** Каждое слагаемое содержит ровно 1 элемент из каждой строки и ровно 1 элемент из каждого столбца.

### 6.1 Свойства определителей

**Свойство Т**  $\det A = \det A^T$ .

*Доказательство.* Пусть  $B = A^T$ , тогда  $b_{ij} = a_{ji}$ .

$$\begin{aligned} \det A^T &= \det B = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)^{-1}} a_{2\sigma(2)^{-1}} \dots a_{n\sigma(n)^{-1}} \quad // \text{ замена } \sigma^{-1} = p // \\ &= \sum_{p \in S_n} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)} = \det A. \end{aligned}$$

■

**Свойство 0** Если в  $A$  есть нулевая строка или нулевой столбец, то  $\det A = 0$ .

*Доказательство.* В связи со **свойством Т** можно доказать только для строк.

Так как в каждом слагаемом  $(\star)$  присутствует элемент из каждой строки, то все слагаемые в  $(\star)$  равны 0  $\implies \det A = 0$ . ■

**Свойство 1** Если в  $A$  все элементы одной строки или одного столбца домножить на одно и то же число  $\lambda$ , то  $\det A$  тоже умножается на  $\lambda$ .

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda * & \lambda * & \lambda * & \lambda * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

*Доказательство.* В связи со **свойством Т** можно доказать только для строк.

$A_{(i)} \rightarrow \lambda A_{(i)} \implies a_{ij} \rightarrow \lambda a_{ij} \forall j \implies$  в  $(\star)$  каждое слагаемое умножается на  $\lambda \implies \det A$  умножается на  $\lambda$ . ■

**Свойство 2** Если  $A_{(i)} = A_{(i)}^1 + A_{(i)}^2$ , то  $\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)}^1 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)}^2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$ .

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Аналогично, если  $A^{(j)} = A_1^{(j)} + A_2^{(j)}$ , то  $\det A = \det(A^{(1)} \dots A_1^{(j)} \dots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \dots A_2^{(j)} \dots A^{(n)})$ .

*Доказательство.* В связи со **свойством Т** можно доказать только для строк.

Пусть  $A_{(i)}^1 = (a'_{i1} a'_{i2} \dots a'_{in})$ ,  $A_{(i)}^2 = (a''_{i1} a''_{i2} \dots a''_{in}) \implies a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ .

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \det A_1 + \det A_2
\end{aligned}$$

■

**Свойство 3** Если в  $A$  поменять местами две строки или два столбца, то  $\det A$  меняет знак.

*Доказательство.* В связи со [свойством Т](#) можно доказать только для строк.

Пусть  $A = (a_{ij}) \in M_n$ ,  $B = (b_{ij}) \in M_n$  – матрица, полученная из  $A$  перестановкой  $p$ -ой и  $q$ -ой строк.

Пусть  $\tau = \tau_{pq}$ .

$$b(i,j) = a_{\tau(i)j} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \neq p, q \\ a_{qj}, & \text{если } i = p \\ a_{pj}, & \text{если } i = q \end{cases}$$

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} \quad \forall i, j \implies a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(i),(\sigma\tau)(\tau(i))}$$

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1),\sigma(1)} a_{\tau(2),\sigma(2)} \dots a_{\tau(n),\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1),(\sigma\tau)(\tau(1))} a_{\tau(2),(\sigma\tau)(\tau(2))} \dots a_{\tau(n),(\sigma\tau)(\tau(n))} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,(\sigma\tau(1))} a_{2,(\sigma\tau(2))} \dots a_{n,(\sigma\tau(n))} \\
&= - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) a_{1,(\sigma\tau(1))} a_{2,(\sigma\tau(2))} \dots a_{n,(\sigma\tau(n))} \quad // \text{ замена } \rho = \sigma\tau // \\
&= - \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1,\rho(1)} a_{2,\rho(2)} \dots a_{n,\rho(n)} \\
&= - \det A.
\end{aligned}$$

■

**Свойство 4** Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженный на скаляр, то  $\det A$  не изменится.

*Доказательство.* В связи со [свойством Т](#) можно доказать только для строк.

$$A \rightarrow A' = \begin{pmatrix} \dots \\ A_{(i)} + \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda 0 = |A|$$

■

**Свойство 5** Если в  $A$  есть две одинаковые строки (столбца), то  $\det A = 0$ .

*Доказательство.* В связи со **свойством Т** можно доказать только для строк.

При перестановке двух одинаковых строк (столбцов):

–  $A$  не изменится  $\implies \det A$  не изменится

– по **свойству 3**:  $\det A$  меняет знак

Значит,  $\det A = -\det A \implies \det A = 0$ . ■

**Определение 26.** Матрица называется *верхнетреугольной*, если  $a_{ij} = 0$  при  $i > j$ , *нижнетреугольной*, если  $a_{ij} = 0$   $i < j$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – верхнетреугольная}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – нижнетреугольная}$$

**Замечание.** Всякая ступенчатая квадратная матрица верхнетреугольна.

**Свойство 6** Если  $A$  верхнетреугольная или нижнетреугольная, то  $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ .

*Доказательство.* В связи со **свойством Т** можно доказать только для строк.

Выделим в  $(\star)$  слагаемые, которые могут быть отличны от нуля.

$$\begin{aligned} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n,\sigma(n)} &\neq 0 \\ \implies a_{n,\sigma(n)} &\neq 0 \implies \sigma(n) = n. \\ \implies a_{n-1,\sigma(n-1)} &\neq 0 \implies \sigma(n-1) \in \{n-1, n\}, \end{aligned}$$

но  $n$  уже занято, значит  $\sigma(n-1) = n-1$ , и так далее.

Рассуждая аналогично, получаем  $\sigma(k) = k \ \forall k \implies \sigma = id$  – это единственное слагаемое в  $(\star)$ , которое может быть не равно 0.

$$\operatorname{sgn}(id) = +1 \implies \det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}. \quad \blacksquare$$

**Следствие.**  $\det \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 a_2 \dots a_n$ .

**Следствие.**  $\det E = 1$

## 6.2 Поведение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов)

$\Theta_1(i, j, \lambda)$ :  $\det A$  не меняется.

$\Theta_2(i, j)$ :  $\det A$  меняет знак.

$\Theta_3(i, \lambda)$ :  $\det A$  умножается на  $\lambda$ .

*Алгоритм.* Элементарными преобразованиями строк  $A$  приводится к ступенчатому ( $\rightarrow$  верхнетреугольному) виду, в котором  $\det A$  легко считается.

## 7 Лекция 30.09.2019

### 7.1 Определитель с углом нулей

Предложение.

$$A = \left( \begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array} \right) \text{ или } A = \left( \begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array} \right), \quad P \in M_k, \quad R \in M_{n-k} \implies \det A = \det P \det R.$$

Матрица с углом нулей:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array} \right)$$

НЕ матрица с углом нулей:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array} \right)$$

*Доказательство.* В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

1. Элементарными преобразованиями строк в  $A$ , приведем  $(P \mid Q)$  к виду  $(P' \mid Q')$ , в котором  $P'$  имеет ступенчатый вид. При этом  $\det A$  и  $\det P$  умножаются на один и тот же скаляр  $\alpha \neq 0$ .
2. Элементарными преобразованиями строк в  $A$ , приведем  $(0 \mid R)$  к виду  $(0 \mid R')$ , в котором  $R'$  имеет ступенчатый вид. При этом  $\det A$  и  $\det R$  умножаются на один и тот же скаляр  $\beta \neq 0$ .

$$\begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} - \text{верхнетреугольная} \implies \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R'.$$

$$\alpha\beta \det A = \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R' = (\alpha \det P)(\beta \det R) = \alpha\beta \det P \det R.$$

■

### 7.2 Определитель произведения матриц

**Теорема 7.1.**  $A, B \in M_n \implies \det(AB) = \det A \det B$ .

*Доказательство.* Выполним с матрицей  $A$  одно элементарное преобразование строк, получим матрицу  $A'$ .

$$A \rightsquigarrow A' = UA.$$

Такое же преобразование строк с  $AB$ .

$$AB \rightsquigarrow U(AB) = (UA)B = A'B.$$

Таким образом, сначала выполнив элементарное преобразование и домножив на матрицу  $B$ , либо домножив на  $B$  и затем применив элементарное преобразование, получим тот же результат.

Тогда, цепочка элементарных преобразований строк:

$$A \rightsquigarrow C - \text{улучшенный ступенчатый вид.}$$

Так же цепочка для  $AB$ :

$$AB \rightsquigarrow CB.$$

При этом,  $\det A$  и  $\det AB$  умножились на один и тот же скаляр  $\alpha \neq 0$

$$\det C = \alpha \det A.$$

$$\det CB = \alpha \det AB.$$

**Случай 1** Последняя строка состоит из нулей:

$$\begin{aligned} C_{(n)} &= (0 \dots 0) \\ \implies [CB]_{(n)} &= C_{(n)}B = (0 \dots 0) \\ \implies \det CB &= 0 = 0 \cdot \det B = \det C \det B. \end{aligned}$$

**Случай 2** Последняя строка ненулевая:

$$C_{(n)} \implies C = E,$$

так как матрица  $C$  имеет улучшенный ступенчатый вид.

Значит,

$$\det CB = \det B = 1 \cdot \det B = \det C \cdot \det B.$$

Из этих двух случаев следует, что  $\det CB = \det C \det B$ .

Сокращая  $\alpha$  получаем,

$$\det CB = \det C \det B \implies \det AB = \det A \det B.$$

■

**Замечание.** Пусть  $A \in M_n$ ,  $A_{\text{ул}}$  – её улучшенный ступенчатый вид.

$$\det A \neq 0 \iff A_{\text{ул}} = E.$$

### 7.3 Дополнительные миноры и алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы

**Определение 27.** *Дополнительным минором* к элементу  $a_{ij}$  называется определитель  $(n-1) \times (n-1)$  матрицы, получающейся из вычеркиванием  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца.

Обозначение:  $\overline{M}_{ij}$ .

**Определение 28.** *Алгебраическим дополнением* к элементу  $a_{ij}$  называется число  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_{ij}$ .

### 7.4 Лемма об определителе матрицы, содержащей ровно один ненулевой элемент в некоторой строке

**Лемма 7.2.** Пусть  $a_{ik} = 0$  при всех  $k \neq j$ . Тогда  $\det A = a_{ij} \cdot A_{ij}$ .

*Доказательство.*

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c} P & U & Q \\ \hline 0 \dots 0 & a_{ij} & 0 \dots 0 \\ \hline R & V & S \end{array} \right).$$

Переставляя соседние строки  $i-1$  раз, вытолкнем  $i$ -ю строку наверх.

$$A' = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 \dots 0 & a_{ij} & 0 \dots 0 \\ \hline P & U & Q \\ \hline R & V & S \end{array} \right)$$

Переставляя соседние столбцы  $j-1$  раз, переместим  $j$ -й столбец на первое место.

$$A'' = \left( \begin{array}{c|c|c} a_{ij} & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \hline U & P & Q \\ \hline V & R & S \end{array} \right)$$

$$\det A'' = a_{ij} \det \left( \begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array} \right) = a_{ij} \overline{M}_{ij}.$$

$$\implies \det A = (-1)^{i-1+j-1} \det A'' = (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}_{ij} = a_{ij} A_{ij}.$$

■

### 7.5 Разложение определителя по строке (столбцу)

**Теорема 7.3.** При любом фиксированном  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \text{ — разложение по } i\text{-й строке.}$$

Аналогично, для любого фиксированного  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \text{ — разложение по } j\text{-у столбцу.}$$

*Доказательство.* В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

$$A_{(i)} = (a_{i1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_{in}).$$

Требуемое следует из [свойства 2](#) определителей и леммы.

■



## 7.6 Лемма о фальшивом разложении определителя

### Лемма 7.4.

1. При любых  $i, k \in \{1, 2, \dots, n\} : i \neq k \implies \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0$ .
2. При любых  $j, k \in \{1, 2, \dots, n\} : j \neq k \implies \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0$

*Доказательство.* В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

Пусть  $B \in M_n$  – матрица, полученная из  $A$  заменой  $k$ -й строки на  $i$ -ю.

$$B = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

В  $B$  есть две одинаковые строки  $\implies \det B = 0$ .

Разлагая  $\det B$  по  $k$ -й строке, получаем

$$\det B = \sum_{j=1}^n b_{kj} B_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}.$$

■

## 7.7 Обратная матрица, её единственность

Пусть дана  $A \in M_n$ .

**Определение 29.** Матрица  $B \in M_n$  называется *обратной* к  $A$ , если  $AB = BA = E$ .

Обозначение:  $A^{-1}$ .

**Лемма 7.5.** Если  $\exists A^{-1}$ , то она единственна.

*Доказательство.* Пусть  $B, C \in M_n$  такие, что  $AB = BA = E$  и  $AC = CA = E$ . Тогда,

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C \Rightarrow B = C.$$

■

## 7.8 Невырожденные матрицы

**Определение 30.** Матрица  $A \in M_n$  называется *невырожденной*, если  $\det A \neq 0$ , и *вырожденной* иначе (то есть  $\det A = 0$ ).

## 7.9 Определитель обратной матрицы

**Лемма 7.6.** Если  $\exists A^{-1}$ , то  $\det A \neq 0$ .

*Доказательство.*  $AA^{-1} = E \implies \det(AA^{-1}) = \det E \implies \det A \det(A^{-1}) = 1$ .

■

## 7.10 Присоединённая матрица

**Определение 31.** Присоединённой к  $A$  матрицей называется матрица  $\hat{A} = (A_{ij})^T$ .

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

## 7.11 Критерий обратимости квадратной матрицы, явная формула для обратной матрицы

**Теорема 7.7.** *А обратима (то есть  $\exists A^{-1}$ )  $\iff$  А невырождена ( $\det A \neq 0$ ), при этом  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}$ .*

*Доказательство.* Утверждение в одну сторону следует из леммы 2.

Пусть  $\det A \neq 0$ . Покажем, что  $\frac{1}{\det A} \hat{A} = A^{-1}$ . Для этого достаточно доказать, что  $A\hat{A} = \hat{A}A = \det(A) \cdot E$ .

Для  $X = A\hat{A}$  имеем

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} [\hat{A}]_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \det A, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

Для  $Y = \hat{A}A$  имеем

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^n [\hat{A}]_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ki} a_{kj} = \begin{cases} \det A, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

■

## 8 Лекция 2.11.2019

### 8.1 Следствия из критерия обратимости квадратной матрицы

**Следствие.** Если  $AB = E$ , то  $BA = E$  (и тогда  $A = B^{-1}$ ,  $B = A^{-1}$ ).

*Доказательство.*

$$AB = E \implies \det A \det B = 1 \implies \det A \neq 0 \implies \exists A^{-1}.$$

$$BA = EBA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}A = E.$$

**Следствие.**  $A, B \in M_n \implies AB$  обратима  $\iff$  обе  $A, B$  обратимы. При этом  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

*Доказательство.* Эквивалентность ( $\iff$ ) следует из условия  $\det AB = \det A \det B$ .

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E.$$

### 8.2 Формулы Крамера

Пусть есть СЛУ  $Ax = b(\star)$ ,  $A \in M_n$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ .

Также,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $A_i = (A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$ .

**Теорема 8.1.** Если  $\det A \neq 0$ , то СЛУ  $(\star)$  имеет единственное решение и его можно найти по формулам:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

*Доказательство.*  $\det A \neq 0 \implies \exists A^{-1} \implies (\star) \iff x = A^{-1}b$  – единственное решение.

$$b = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_n A^{(n)}.$$

$$\begin{aligned} \det A_i &= \det \left( A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &= x_1 \det \left( A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(1)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &\quad + x_2 \det \left( A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(2)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + x_n \det \left( A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &= x_i \det A \quad // \text{ Все слагаемые кроме } i\text{-го равны } 0. \end{aligned}$$

### 8.3 Понятие поля.

**Определение 32.** *Поле* называется множество  $F$ , на котором заданы две операции “сложение”  $((a, b) \rightarrow a + b)$  и “умножение”  $((a, b) \rightarrow a \cdot b)$ , причем  $\forall a, b, c \in F$  выполнены следующие условия:

1.  $a + b = b + a$  (коммутативность сложения)
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (ассоциативность сложения)
3.  $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$  (нулевой элемент)
4.  $\exists (-a) \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$  (противоположный элемент)  
↑ абелева группа
5.  $a(b + c) = ab + ac$  (дистрибутивность)
6.  $ab = ba$  (коммутативность умножения)
7.  $(ab)c = a(bc)$  (ассоциативность умножения)
8.  $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1a = a1 = a$  (единица)
9. Если  $a \neq 0$ ,  $\exists a^{-1} \in F : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$  (обратный элемент)

## 8.4 Простейшие примеры.

$\mathbb{Q}$  – Рациональные числа.

$\mathbb{R}$  – Действительные числа.

$F_2 = \{0, 1\}$ , сложение и умножение по модулю 2.

## 8.5 Построение поля комплексных чисел.

Ближайшая цель — построить поле  $\mathbb{C}$  комплексных чисел.

Неформально,  $\mathbb{C}$  – это наименьшее поле со следующими свойствами:

1.  $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ .
2. Многочлен  $x^2 + 1$  имеет корень, то есть  $\exists i : i^2 = -1$ .

### 8.5.1 Формальная конструкция поля $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

Неформально, каждой такой паре  $(a, b)$  соответствует комплексное число  $a + bi$ :

- $(a, b) \iff a + bi$
- $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2 \underbrace{i^2}_{=-1} = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

### 8.5.2 Проверка аксиом

- 1, 2. Очевидны.
3.  $0 = (0, 0)$ .
4.  $-(a, b) = (-a, -b)$ .
5. Дистрибутивность – *Упражнение на дом*.
6. Из явного вида формулы для умножения.
- 7.

$$\begin{aligned}(a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3) &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)(a_3, b_3) \\ &= (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3).\end{aligned}$$

8.  $1 = (1, 0)$ .
9.  $(a, b) \neq 0 \implies a^2 + b^2 \neq 0$ . Тогда,  $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ .  
 $(a, b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$ .

Итак,  $\mathbb{C}$  – поле.

Проверка свойств:

1.  $a \in \mathbb{R} \iff (a, 0) \in \mathbb{C}$ .  
 $a + b \iff (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ .  
 $ab \iff (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$   
Значит,  $\mathbb{R}$  отождествляется в  $\mathbb{C}$ .
2.  $i = (0, 1) \implies i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ .

## 8.6 Алгебраическая форма комплексного числа, его действительная и мнимая части.

**Определение 33.** Представление числа  $z \in \mathbb{C}$  в виде  $a+bi$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$  называется его *алгебраической формой*. Число  $i$  называется *мнимой единицей*.

$a =: \operatorname{Re}(z)$  – действительная часть числа  $z$ .  $b =: \operatorname{Im}(z)$  – мнимая часть числа  $z$ .

Числа вида  $bi$ , где  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , называются *чисто мнимыми*.

## 8.7 Комплексное сопряжение.

**Определение 34.** Число  $\bar{z} := a - bi$  называется *комплексно сопряженным* к числу  $z = a + bi$ .

Операция  $z \rightarrow \bar{z}$  называется *комплексным сопряжением*.

### 8.7.1 Свойства комплексного сопряжения

- $\overline{\bar{z}} = z$ .
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ .
- $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ .

Доказательство – прямая проверка (*упражнение на дом*).

## 8.8 Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация сложения и сопряжения в этой модели.

Числу  $z = a + bi$  соответствует точка (или вектор) на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $(a, b)$ . Сумме  $z + w$  соответствует сумма соответствующих векторов. Сопряжению  $z \rightarrow \bar{z}$  – это отражение  $z$  относительно действительной оси.

## 9 Лекция 7.11.2019

### 9.1 Модуль комплексного числа, его свойства

**Определение 35.** Число  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  называется *модулем числа*  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  (то есть длина соответствующего вектора).

#### Свойства

1.  $|z| \geq 0$ , причем  $|z| = 0 \iff z = 0$ .
2.  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (неравенство треугольника).
3.  $z\bar{z} = |z|^2$ .  
 $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i = a^2 + b^2 = |z|^2$
4.  $|zw| = |z||w|$   
 $|zw|^2 = (zw) \cdot (\overline{zw}) = z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} = |z|^2 |w|^2$

**Замечание.** Из 3) следует, что для  $\forall z \neq 0$ ,  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , то есть  $(a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$

### 9.2 Аргумент комплексного числа

Пусть  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ .

Тогда,  $z = |z| \left( \frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i \right)$ , при этом  $\left( \frac{a}{|z|} \right)^2 + \left( \frac{b}{|z|} \right)^2 = 1$

Значит,  $\frac{a}{|z|}$  и  $\frac{b}{|z|}$  являются синусом и косинусом некоторого угла.

**Определение 36.** Аргументом числа  $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  называется число  $\varphi \in \mathbb{R}$ , такое что

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

В геометрических терминах,  $\varphi$  есть угол между осью  $Ox$  и соответствующим вектором.

**Замечание.** При  $z \neq 0$ , аргумент определен с точностью до  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Замечание.** При  $z = 0$ , удобно считать что любое  $\varphi$  является аргументом.

### 9.3 Тригонометрическая форма комплексного числа

$Arg(z) :=$  множество всех аргументов числа  $z$ .

$arg(z) :=$  единственное значение из  $Arg(z)$ , лежащее в  $[0; 2\pi)$ .

$Arg(z) = arg(z) + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$Arg(z) = \{ \varphi \in \mathbb{R} \mid \cos \varphi = \frac{a}{|z|}, \sin \varphi = \frac{b}{|z|} \}$

Тогда,  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $z = |z| \left( \frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i \right) = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где  $\varphi \in Arg(z)$ .

**Определение 37.** Представление числа  $z \in \mathbb{C}$  в виде  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  называется его *тригонометрической формой*.

### 9.4 Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

**Предложение.** Пусть  $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , тогда

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= |z_1| |z_2| ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

■

**Следствие.** В условиях предложения, предположим, что  $z_2 \neq 0$ .

Тогда  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ .

В частности,  $\frac{1}{|z_2|} (\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2)) = \frac{1}{|z_2|} (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$ .

## 9.5 Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра

**Следствие.** Пусть  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Тогда  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) - \text{формула Муавра.}$$

**Замечание.** В комплексном анализе функция  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow e^x$ , доопределяется до функции  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \rightarrow e^z$  с сохранением всех привычных свойств.

Доказывается  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ,  $\forall \varphi \in \mathbb{C}$  — формула Эйлера.

Тогда  $\forall z \in \mathbb{C}$  представляется в виде  $z = |z|e^{i\varphi}$ , где  $\varphi \in \text{Arg}(z)$  — *показательная форма*.

## 9.6 Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

**Определение 38.** Корнем степени  $n$  (или корнем  $n$ -й степени) из числа  $z$  называется всякое число  $w \in \mathbb{C}$ , что  $w^n = z$ .

Положим  $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$ .

Опишем множество  $\sqrt[n]{z}$ .

$$w = \sqrt[n]{z} \implies w^n = z \implies |w|^n = |z|.$$

$$\text{Если } z = 0, \text{ то } |z| = 0 \implies |w| = 0 \implies w = 0 \implies \sqrt[n]{0} = \{0\}.$$

Далее считаем, что  $z \neq 0$ .

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$z = w^n = |w|^n (\cos(n\psi) + i \sin(n\psi))$$

Отсюда,

$$z = w^n \iff \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

С точностью до  $2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , получается ровно  $n$  различных значений для  $\psi$ , при  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

В результате  $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ , где  $w_k = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$

**Замечание.** Числа  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$  лежат в вершинах правильного  $n$ -угольника с центром в начале координат.

Примеры.

$$\sqrt{1} = \{\pm 1\}$$

$$\sqrt{-1} = \{\pm i\}$$

$$\sqrt[3]{1} = \{1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

$$\sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\}$$

## 9.7 Основная теорема алгебры комплексных чисел (без доказательства)

$$\sqrt[n]{z} = \{ \text{корни многочлена } x^n - z \}.$$

**Теорема 9.1.** Всякий многочлен степени  $\geq 1$  с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Пусть  $f = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ,  $n \geq 1$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $a_i \in \mathbb{C}$ , тогда  $\exists c \in \mathbb{C} : f(c) = 0$ .

**Замечание.** Свойство поля  $\mathbb{C}$ , сформулированное в теореме, называется *алгебраической замкнутостью*.

## 9.8 Деление многочленов с остатком

Пусть  $\mathbb{F}$  — поле.

$\mathbb{F}[x] :=$  все многочлены от переменной  $x$  с коэффициентами из  $\mathbb{F}$ .

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0 \implies \deg f = n.$$

$$\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g.$$

**Определение 39.** Многочлен  $f(x) \in F[x]$  делится на  $g(x) \in F[x]$ , если  $\exists h(x) \in F[x]$ , такой что  $f(x) = g(x)h(x)$ .

Если  $f(x)$  не делится на  $g(x)$ , то можно поделить с остатком.

**Предложение** (деление с остатком). Если  $f(x), g(x) \in F[x]$ ,  $g(x) \neq 0$ , то  $\exists! q(x), r(x) \in F[x]$ , такие что

$$\begin{cases} f(x) = q(x)g(x) + r(x) \\ \text{либо } r(x) = 0, \text{ либо } \deg r(x) < \deg g(x) \end{cases}$$

*Пример.*  $f(x) = x^3 - 2x$ ,  $g(x) = x + 1$ .

$$f(x) = (x^2 - x - 1)(x + 1) + 1, \quad q(x) = (x^2 - x - 1), \quad r(x) = 1.$$

## 9.9 Теорема Безу

Частный случай:  $g(x) = x - c$ ,  $\deg g(x) = 1$ :

$$f(x) = q(x)(x - c) + r(x), \text{ где либо } r(x) = 0, \text{ либо } \deg r(x) < \deg g(x) = 1$$

Значит,  $r(x) \equiv r = \text{const} \in F$ .

**Теорема 9.2.**  $r = f(c)$ .

*Доказательство.* Подставить  $x = c$  в  $f(x) = (x - c)g(x) + r(x)$ . ■

**Следствие.** Элемент  $c \in F$  является корнем многочлена  $f(x) \in F[x]$  тогда и только тогда, когда  $f(x)$  делится на  $(x - c)$ .

## 9.10 Кратность корня многочлена

**Определение 40.** *Кратностью* корня  $c \in F$  многочлена  $f(x)$  называется наибольшее целое  $k$  такое что,  $f(x)$  делится на  $(x - c)^k$ .

## 9.11 Утверждение о том, что всякий многочлен степени $n$ с комплексными коэффициентами имеет ровно $n$ корней с учётом кратностей

**Следствие.** Пусть  $f(z) \in F[z]$ ,  $\deg f = n \geq 1$ .

$$f(x) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0.$$

$c_1, \dots, c_s$  — корни  $f$ ,  $k_1, \dots, k_s$  — их кратности.

Любой многочлен с комплексными коэффициентами разлагается в произведение линейных множителей:

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_s)^{k_s}.$$

Иными словами,  $f(z)$  имеет ровно  $n$  корней с учетом кратностей.



## 10 Лекция 14.11.2019

### 10.1 Векторные пространства, простейшие следствия из аксиом

#### 10.1.1 Определение векторного пространства

Фиксируем поле  $F$  (можно считать, что  $F = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ )

**Определение 41.** Множество  $V$  называется *векторным (линейным) пространством* над полем  $F$ , если на  $V$  заданы две операции

- “сложение”:  $V \times V \rightarrow V, (x, y) \mapsto x + y$ .
- “умножение на скаляр”:  $F \times V, (\alpha \in F, x \in V) \mapsto \alpha x$ .

а также,  $\forall x, y, z \in V$  и  $\alpha, \beta \in F$  выполнены следующие условия (называются *аксиомами векторного пространства*):

1.  $x + y = y + x$ .
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .
3.  $\exists \vec{0} \in V : x + \vec{0} = \vec{0} + x = x$  (нулевой элемент).
4.  $\exists -x : -x + x = x + (-x) = \vec{0}$  (противоположный элемент).
5.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ .
6.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ .
7.  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ .
8.  $1 \cdot x = x$ .

**Определение 42.** Элементы векторного пространства называются (абстрактными) *векторами*.

*Пример.*

1.  $\mathbb{R}$  над  $\mathbb{R}$  (или  $F$  над  $F$ ).
2. Пространство  $\mathbb{R}^n$  над  $\mathbb{R}$  (или  $F^n$  над  $F$ ) реализованное как пространство столбцов или строк длины  $n$ .
3.  $\text{Mat}_{m \times n}(F)$ .
4.  $F[x]$  – многочлены то переменной  $x$  с коэффициентами в  $\mathbb{R}$ .
5. Пространство функций на множестве  $M$  с значениями в  $F$ :  
 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 
  - сложение  $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$ .
  - умножение на скаляр  $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$ .

– это векторное пространство над  $F$ .

Например, множество всех функций  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### 10.1.2 Простейшие следствия из аксиом

$\forall \alpha \in F, x \in V$ .

1. Элемент  $\vec{0}$  единственный.

Если  $\vec{0}'$  – другой такой ноль, то  $\vec{0}' = \vec{0}' + \vec{0} = \vec{0}$ .

2. Элемент  $-x$  единственный.

Если  $(-x)'$  – другой такой противоположный элемент, то

$$(-x)' = (-x)' + \vec{0} = (-x)' + (x + (-x)) = ((-x)' + x) + (-x) = \vec{0} + (-x) = -x.$$

3.  $\alpha \vec{0} = \vec{0}$ .

4.  $\alpha(-x) = -(\alpha x)$ .

5.  $0 \cdot x = \vec{0}$ .

6.  $(-1) \cdot x = -x$ .

## 10.2 Подпространства векторных пространств

Пусть  $V$  – векторное пространство над  $F$ .

**Определение 43.** Подмножество  $U \subseteq V$  называется *подпространством* (в  $V$ ), если

1.  $\vec{0} \in U$ .
2.  $x, y \in U \implies x + y \in U$ .
3.  $x \in U, \alpha \in F \implies \alpha x \in U$ .

**Замечание.** Всякое подпространство само является векторным пространством относительно тех же операций.

*Пример.*

1.  $\{\vec{0}\}$  и  $V$  – всегда подпространства в  $V$ .  
они называются *несобственными* подпространствами, остальные называются *собственными*.
2. Множество всех верхнетреугольных, нижнетреугольных, диагональных матриц в  $M_n(F)$ .
3.  $F[x]_{\leq n}$  все многочлены в  $F[x]$  степени  $\leq n$  – подпространство в  $F[x]$ .

## 10.3 Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений с $n$ неизвестными является подпространством в $F^n$

**Предложение.** Множество решений любой ОСЛУ  $Ax = 0$  ( $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ ,  $x \in F^n$ ) является подпространством в  $F^n$ .

*Доказательство.* Пусть  $S$  – множество решений ОСЛУ  $Ax = 0$ .

1.  $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S$ .
2.  $x, y \in S \implies Ax = \vec{0}$  и  $Ay = \vec{0} \implies A(x + y) = Ax + Ay = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \implies x + y \in S$ .
3.  $x \in S, \alpha \in F \implies Ax = \vec{0} \implies A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha \vec{0} = \vec{0} \implies \alpha x \in S$ . ■

## 10.4 Линейная комбинация конечного набора векторов

Пусть  $V$  – векторное пространство над  $F$  и  $v_1, \dots, v_k \in V$  – набор векторов.

**Определение 44.** *Линейной комбинацией* векторов  $v_1, \dots, v_k$  называется всякое выражение вида  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ , где  $\alpha_i \in F$ .

## 10.5 Линейная оболочка подмножества векторного пространства, примеры

Пусть  $S \subseteq V$  – подмножество векторного пространства.

**Определение 45.** *Линейной оболочкой* множества  $S$  называются множество всех векторов из  $V$ , представимых в виде линейной комбинации какого-то конечного набора векторов из  $S$ .

Обозначение:  $\langle S \rangle$ .

Если  $S = \{v_1, \dots, v_k\}$  конечно и состоит из векторов  $v_1, \dots, v_k$ , то еще пишут  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$  и говорят “линейная оболочка векторов  $v_1, \dots, v_k$ ”.

Соглашение:  $\langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}\}$ .

*Пример.*

1.  $\langle \vec{0} \rangle = \{\vec{0}\}$ .
2.  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $v \neq 0$ ,  $\langle v \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  – прямая.
3.  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $v_1, v_2$  – пара неколлинеарных векторов.  
Тогда,  $\langle v_1, v_2 \rangle = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$  – плоскость натянутая на  $v_1, v_2$ .

## 11 Лекция 21.11.2019

Напомним, если  $V$  – векторное пространство над полем  $F$ , то при  $S \subseteq V$ , линейная оболочка  $\langle S \rangle = \{ \text{все линейные комбинации конечных наборов векторов из } S \}$

*Пример.*

4.  $V = F^n$ ,  $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ , где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда  $\langle S \rangle = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = F^n$ .

$$\text{Так как для любого } x \in F^n \implies x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

### 11.1 Утверждение о том, что линейная оболочка системы векторов является подпространством объемлющего векторного пространства

Пусть  $V$  – векторное пространство,  $S \subseteq V$ .

**Предложение.**  $\langle S \rangle$  является подпространством в  $V$ .

*Доказательство.*

1. Два случая:

$$S = \emptyset \implies \langle \emptyset \rangle = \{ \vec{0} \} \implies \vec{0} \in \langle S \rangle.$$

$$S \neq \emptyset \implies \exists V \in S \implies \underbrace{0V}_{\in \langle S \rangle} = \vec{0} = \vec{0} \in \langle S \rangle.$$

2. Пусть  $v, w \in \langle S \rangle$ :

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m,$$

$$w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n, \text{ где } v_i, w_i \in S, \alpha_i, \beta_i \in F.$$

$$\text{Тогда, } v + w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n \in \langle S \rangle.$$

$$(\text{если } v_i = w_j, \text{ то } \alpha_i v_i + \beta_j w_j = (\alpha_i + \beta_j) w_j)$$

3.  $v \in \langle S \rangle, \alpha \in F \implies v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$

$$\implies \alpha v = (\alpha \alpha_1) v_1 + \dots + (\alpha \alpha_m) v_m \in \langle S \rangle. \quad \blacksquare$$

### 11.2 Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

**Определение 46.** Линейная комбинация  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$  называется *тривиальной*, если  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$  и *нетривиальной* иначе (то есть  $\exists i : \alpha_i \neq 0$  или  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ ).

*Пример.*  $v + (-v)$  – нетривиальная линейная комбинация векторов  $v$  и  $-v$ .

**Определение 47.**

1. Векторы  $v_1, \dots, v_n \in V$  называются *линейно зависимыми* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная  $\vec{0}$  (то есть  $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ , такие что  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$ ) и *линейно независимыми* иначе (то есть из условия  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$  следует  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ ).

2. Множество  $S \subseteq V$  (возможно бесконечное, возможно с повторяющимися элементами) называется *линейно зависимым* если существует конечное линейно зависимое подмножество, и *линейно независимым* если любое конечное подмножество линейно независимо.

**Соглашение.** Система векторов – множество векторов, в котором возможны повторения.

*Пример.*

1.  $S = \{ \vec{0} \}$   $1 \cdot \vec{0}$  – нетривиальная линейная комбинация  $\implies \vec{0}$  линейно зависимо.

2.  $S = \{v\}$ ,  $v \neq \vec{0}$  – линейно независимо.

Пусть  $\lambda v = \vec{0} \implies \vec{0} = \lambda^{-1} \vec{0} = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$  – противоречие.

3.  $S = \{v_1, v_2\} \implies S$  линейно зависимо тогда и только тогда, когда  $v_1$  и  $v_2$  пропорциональны (то есть либо  $v_2 = \lambda_1 v_1$ ,  $\lambda_1 \in F$ , либо  $v_1 = \lambda_2 v_2$ ,  $\lambda_2 \in F$ ).

*Доказательство.*

( $\implies$ )  $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = \vec{0}$ ,  $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$ .

Если  $\mu_1 \neq 0$ , то  $v_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1} v_2$ .

Аналогично для  $\mu_2 \neq 0$ .

( $\impliedby$ )  $v_2 = \lambda_1 v_1 \implies \lambda_1 v_1 + (-1)v_2 = \vec{0} \implies v_1, v_2$  линейно зависимы.

Аналогично для  $v_1 = \lambda_2 v_2$ . ■

4.  $V = F^n$ ,  $S = \{e_1, \dots, e_n\} \implies S$  линейно независимо.

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

### 11.3 Критерий линейной зависимости конечного набора векторов

**Предложение.** Пусть  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$ , такой что  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}(\star)$  и  $\alpha_i \neq 0$ .

2.  $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ .

*Доказательство.*

$$(1) \implies (2) \quad \alpha_i \neq 0 \text{ в } (\star) \implies v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle.$$

$$(2) \implies (1) \quad v_i = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n \implies$$

$$b_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n = \vec{0}.$$

(нетривиальная линейная комбинация с  $i$ -м скаляром  $\neq 0$ ). ■

**Следствие.** Векторы  $v_1, \dots, v_n$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда  $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ , такое что  $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ .

### 11.4 Основная лемма о линейной зависимости

**Лемма 11.1.** Пусть есть две системы векторов  $v_1, \dots, v_m$  и  $w_1, \dots, w_n$ , причем  $m < n$  и  $w_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n$ .

Тогда векторы  $w_1, \dots, w_n$  линейно зависимы.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{m1}v_m = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \\ &\dots \\ w_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{mn}v_m = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\implies (w_1, \dots, w_n) = (v_1, \dots, v_m)A, \quad (\star)$$

где  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

Так как  $m < n$ , то ОСЛУ  $Ax = \vec{0}$  имеет ненулевое решение  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \in F^n$ .

Тогда умножим  $(\star)$  справа на  $z$ :

$$(w_1, \dots, w_n) \cdot z = (v_1, \dots, v_m) \cdot \underbrace{A \cdot z}_{=\vec{0}} = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

$$\implies (w_1, \dots, w_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \vec{0} \implies z_1 w_1 + \dots + z_n w_n = \vec{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация, так как  $z \neq 0$ .

Следовательно,  $w_1, \dots, w_n$  линейно зависимы. ■

*Пример.* Любые  $n + 1$  векторов в  $F^n$  линейно зависимы, так как  $F^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ .

## 11.5 Базис векторного пространства

**Определение 48.** Подмножество  $S \subseteq V$  называется *базисом* пространства  $V$ , если

1.  $S$  линейно независимо,
2.  $\langle S \rangle = V$ .

*Пример.*  $e_1, \dots, e_n$  — это базис в  $F^n$ . Он называется *стандартным базисом* в  $F^n$ .

**Замечание.** Всякая линейно независимая система векторов является базисом своей линейной оболочки.

## 11.6 Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства

**Определение 49.** Векторное пространство  $V$  называется *конечномерным*, если в нем есть конечный базис, и *бесконечномерным* иначе.

## 11.7 Независимость числа элементов в базисе векторного пространства от выбора базиса

**Предложение.**  $V$  — конечномерное векторное пространство. Тогда, все базисы в  $V$  содержат одно и то же количество элементов.

*Доказательство.*  $V$  конечномерно, тогда существует конечный базис  $e_1, \dots, e_n$ .

Пусть  $S \subseteq V$  — другой базис. Так как  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$ , то  $\forall v \in S \implies v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ . Тогда любые  $n + 1$  векторов в  $S$  линейно зависимы по основной лемме о линейной зависимости. Но  $S$  линейно независимо, значит  $|S| \leq n$ .

Пусть  $S = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ , где  $m \leq n$ . Тогда  $\forall i = 1, \dots, n \quad e_i \in \langle e'_1, \dots, e'_m \rangle$ , по основной лемме о линейной зависимости получаем  $n \leq m$ .

То есть  $m = n$ . ■

## 11.8 Размерность конечномерного векторного пространства

**Определение 50.** *Размерностью* конечномерного векторного пространства называется число элементов в (любом) его базисе.

Обозначение:  $\dim V$ .

*Пример.*

1.  $\dim F^n = n$ ,
2.  $V = \{\vec{0}\} \implies \dim V = 0$  так как базисом  $V$  будет  $\emptyset$ .

## 12 Лекция 28.11.2019

Пусть  $V$  – векторное пространство над полем  $F$ .

Обозначение  $\dim V < \infty$  –  $V$  конечномерно.

### 12.1 Характеризация базисов в терминах единственности линейного выражения векторов

**Утверждение 12.1.** Пусть  $\dim V < \infty$ ,  $e_1, \dots, e_n \in \langle V \rangle$ .

$e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$  тогда и только тогда, когда,  $\forall v \in V$  единственным образом представим в виде

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad x_i \in F.$$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Пусть есть два представления  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e_1 + \dots + x'_n e_n$ .

Тогда,  $(x_1 - x'_1)e_1 + \dots + (x_n - x'_n)e_n = \vec{0}$ .

Так как  $e_1, \dots, e_n$  линейно независимы, то  $(x_1 - x'_1) = \dots = (x_n - x'_n) = 0$ .

Значит,  $x_i = x'_i \quad \forall i$ .

$\Leftarrow \forall v \in V$  имеем  $v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ .

Значит,  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$ .

Для  $v = \vec{0}$  существует единственное представление  $\vec{0} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ .

Но мы знаем, что  $\vec{0} = 0e_1 + \dots + 0e_n$ .

Следовательно  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ , то есть  $e_1, \dots, e_n$  линейно независимы.

Итог:  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$ . ■

### 12.2 Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$$Ax = 0 \text{ – ОСЛУ.} \quad (\star)$$

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}(F), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n.$$

$S \subseteq F^n$  – множество решений.

Знаем, что  $S$  – подпространство в  $F^n$ .

**Определение 51.** Фундаментальной системой решений (ФСР) для ОСЛУ  $(\star)$  называется всякий базис пространства её решений.

**Замечание.** У одной ОСЛУ может быть много разных ФСР.

### 12.3 Метод построения фундаментальной системы решений

Приведем матрицу к улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк.

$$(A | \vec{0}) \rightsquigarrow (B | \vec{0}) \leftarrow \text{улучшенный ступенчатый вид.}$$

Пусть  $r$  – число ненулевых строк в  $B$ .

Тогда будет  $r$  главных неизвестных и  $n - r$  свободных.

Выполнив перенумерацию будем считать что,

$x_1, \dots, x_r$  – главные неизвестные,

$x_{r+1}, \dots, x_n$  – свободные.

Тогда, общее решение для  $(\star)$  имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \dots + c_{1n-r}x_n \\ x_2 &= c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \dots + c_{2n-r}x_n \\ &\dots \\ x_r &= c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \dots + c_{rn-r}x_n. \end{aligned}$$

Предъявим некоторую систему решений

$$u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{r1} \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{r2} \\ 0 \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, u_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \dots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \underline{1} \end{pmatrix}.$$

$$u_1, \dots, u_{n-r} \in S$$

**Предложение.**  $u_1, \dots, u_{n-r}$  — это ФСР для ОСЛУ  $(\star)$ .

*Доказательство.*

1. Линейная независимость.

$$\text{Пусть } \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r} = \vec{0}.$$

При любом  $k \in \{1, \dots, n-r\}$ ,  $(r+k)$ -я координата левой части равна  $\alpha_k$ , значит  $\alpha_k = 0$ .

Следовательно  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-r} = 0$ .

2.  $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$ .

“ $\subseteq$ ” Верно, так как  $u_1, \dots, u_{n-r} \in S$ .

“ $\supseteq$ ” Пусть  $u \in S$ , тогда

$$u = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} \text{ для некоторых } \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in F.$$

Положим  $v := u - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{n-r} u_{n-r}$ .

Тогда,  $v \in S$ , но

$$v = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы для общего решения дают  $v = \vec{0}$ .

Поэтому  $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r}$ .

Значит  $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$ . ■

*Пример.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

Тогда ФСР:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## 12.4 Утверждение о возможности выбора из конечной системы векторов базиса её линейной оболочки

Пусть  $V$  – векторное пространство над  $F$ .

Наблюдение: если  $v, v_1, \dots, v_m \in V$  и  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ , тогда  $\langle v, v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

**Предложение.** Из всякой конечной системы векторов  $S \subseteq V$  можно выбрать подсистему, которая является базисом в линейной оболочке  $\langle S \rangle$ .

*Доказательство.* Пусть  $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ .

Индукция по  $m$ .

**База**  $m = 1$ :  $S = \{v_1\}$ .

Если  $v_1 = \vec{0}$ , то  $\langle S \rangle = \{\vec{0}\}$ , значит в качестве базиса берем  $\emptyset$ .

Если  $v_1 \neq 0$ , то  $S$  линейно независимо.

Следовательно  $S$  – базис в  $\langle S \rangle$ .

**Шаг** Пусть доказано для  $< m$ , докажем для  $m$ .

Если  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимо, то  $v_1, \dots, v_m$  – это уже базис в  $\langle S \rangle$ .

Иначе,  $\exists i : v_i \in \langle S \setminus \{v_i\} \rangle$ .

Положим  $S' := S \setminus \{v_i\}$ .

Тогда,  $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$ .

Так как  $|S'| = m - 1 < m$ , то по предположению индукции в  $S'$  можно выбрать базис для  $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$ . ■

## 12.5 Дополнение конечной линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства

**Предложение.** Пусть  $\dim V < \infty$ , тогда всякую линейно независимую систему векторов в  $V$  можно дополнить до базиса всего пространства  $V$ .

*Доказательство.* Пусть  $v_1, \dots, v_m$  – данная линейно независимая система.

Так как  $\dim V < \infty$ , в  $V$  есть конечный базис  $e_1, \dots, e_n$ .

Рассмотрим систему векторов  $v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n$ .

Пройдемся по этим векторам слева направо и выбросим те, которые линейно выражаются через предыдущие (не выброшенные).

При этом:

- 1) линейная оболочка системы сохраняется и равна  $\langle v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n \rangle = V$ ;
- 2)  $v_1, \dots, v_m$  останутся в системе, так как они линейно независимы;
- 3) в новой системе никакой вектор линейно не выражается через предыдущие.

Пусть новая система – это  $S' = \{v_1, \dots, v_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_t}\}$ .

Докажем, что  $S'$  – базис в  $V$ .

По свойству 1) имеем, что  $\langle S' \rangle = V$ .

Осталось доказать, что  $S'$  линейно независимо.

Пусть  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 e_{i_1} + \dots + \beta_t e_{i_t} = \vec{0}$ .

Предположим, что эта линейная комбинация нетривиальна.

Так как  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, то  $\exists k : \beta_k \neq 0$ .

Выберем  $k$  максимальным с этим свойством.

Тогда,  $e_{i_k}$  линейно выражается через предыдущие — противоречие. ■

**Следствие.** Если  $\dim V = n$  и  $v_1, \dots, v_n$  – линейно независимая система, тогда  $v_1, \dots, v_n$  – базис  $V$ .

## 12.6 Лемма о добавлении вектора к конечной линейной независимой системе

**Лемма 12.2.** Пусть  $v, v_1, \dots, v_m \in V$  и  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, тогда либо  $v, v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, либо  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ .

*Доказательство.* Пусть  $v, v_1, \dots, v_m$  линейно зависимы, тогда  $\exists (\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq (0, \dots, 0)$ , такой что

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0}.$$

Но, так как  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, то  $\alpha \neq 0$ . Значит,  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  по предложению. ■