

Математический анализ, Коллоквиум 2

Балюк Игорь

@lodthe, [GitHub](#)

2019 — 2020

Содержание

1	Вопросы предварительной части коллоквиума	3
1.1	Определение непрерывности функции в точке.	3
1.2	Точки разрыва, их классификация.	3
1.3	Теорема о непрерывности сложной функции.	3
1.4	Формулировки первой и второй теорем Вейерштрасса.	3
1.5	Понятие производной функции в точке.	4
1.6	Геометрический и физический смысл производной.	4
1.7	Уравнение касательной к графику функции в точке.	4
1.8	Понятие дифференцируемости функции в точке.	4
1.9	Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного).	4
1.10	Формула вычисления производной сложной функции.	4
1.11	Таблица производных основных элементарных функций.	4
1.12	Понятие дифференциала (первого) функции в точке.	5
1.13	Геометрический смысл дифференциала.	5
1.14	Определение локального экстремума. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).	5
1.15	Формулы Лагранжа и Коши.	5
1.16	Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной.	6
1.17	Формулы Маклорена для основных элементарных функций.	6
1.18	Правило Лопиталья.	7
2	Вопросы на знание доказательств	7
2.1	Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. Точки разрыва, их классификация.	7
2.2	Непрерывность основных элементарных функций.	8
2.3	Арифметические свойства непрерывных функций.	8
2.4	Теорема о непрерывности сложной функции.	8
2.5	Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).	8
2.6	Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.	9
2.7	Понятие производной функции в точке.	10
2.8	Геометрический и физический смысл производной.	10
2.9	Уравнение касательной к графику функции в точке.	10
2.10	Понятие дифференцируемости функции в точке.	11
2.11	Необходимое условие дифференцируемости.	11
2.12	Правила дифференцирования.	11
2.13	Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.	12
2.14	Теорема о дифференцируемости обратной функции.	13
2.15	Таблица производных основных элементарных функций.	13
2.16	Производные функций, графики которых заданы параметрически.	14
2.17	Понятие дифференциала (первого) функции в точке.	14
2.18	Геометрический смысл дифференциала. [На коллоквиуме будет отсутствовать]	14
2.19	Инвариантность формы первого дифференциала. [На коллоквиуме будет отсутствовать]	15

2.20	Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке. [На коллоквиуме будет только производная высших порядков]	15
2.21	Понятие об экстремумах функции одной переменной.	16
2.22	Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).	16
2.23	Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши.	16
2.24	Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.	18
2.25	Формулы Маклорена для основных элементарных функций.	19
2.26	Правило Лопиталю.	20
2.27	Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке.	21
2.28	Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]	22
2.29	Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]	22
2.30	Достаточные условия выпуклости (вогнутости). [На коллоквиуме будет отсутствовать]	22
2.31	Точки перегиба.	22
2.32	Необходимые и достаточные условия для точки перегиба. [На коллоквиуме будет отсутствовать]	22
2.33	Асимптоты графика функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]	22

1 Вопросы предварительной части коллоквиума

Список вопросов предварительной части коллоквиума, ответ на которые необходим для подготовки к основной части.

1. Определение непрерывности функции в точке.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если она определена на некоторой окрестности этой точки и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Другими словами, $A = f(x_0)$ и справедливы следующие определения предела функции в точке x_0 :

- **По Коши:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- **По Гейне:**

$$\forall \{x_n\} : x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

Другое определение:

Пусть $f(x)$ — функция, определенная на промежутке I (I — это её область определения) и пусть c — произвольная точка из I . Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$:

$$\forall x \in I : |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Тогда функция $f(x)$ **непрерывна** в точке c .

Заметьте, если c — это левая граница I , то условие имеет вид (функция непрерывна в точке c справа, аналогично для непрерывности слева).

$$\forall x \in I : c < x < c + \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Теорема. Также, функция $f(x)$ непрерывна в точке a . Тогда найдётся такое $\delta > 0$, что функция $f(x)$ ограничена окрестностью $U_\delta(a)$ точки a .

2. Точки разрыва, их классификация.

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U_\delta(a)$ и функция разрывна в a . Тогда этот разрыв является одним из следующих:

- **Устранимый разрыв:** пределы $f(x)$ справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$$

- **Неустранимый разрыв первого рода:** пределы $f(x)$ справа и слева существуют, но не равны друг другу
- **Неустранимый разрыв второго рода:** хотя бы один из односторонних пределов $f(x)$ не существует или равен бесконечности.

3. Теорема о непрерывности сложной функции.

Теорема. Пусть функция $g(x)$ непрерывна в точке a_0 и функция $f(x)$ непрерывна в точке $b_0 = g(a_0)$. Тогда функция $f(g(x))$ непрерывна в точке a_0 .

4. Формулировки первой и второй теорем Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса (первая) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема Вейерштрасса (вторая) Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f достигает на нем своих нижней и верхней граней. То есть существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, так что для любого $x \in [a, b]$, выполняются неравенства:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

5. Понятие производной функции в точке.

Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку x_0 . Тогда функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 , и ее производная определяется формулой

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

если предел существует.

6. Геометрический и физический смысл производной.

Геометрический смысл производной. Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

Физический смысл производной. Если точка движется вдоль оси OX и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то мгновенная скорость точки: $v(t) = x'(t)$.

7. Уравнение касательной к графику функции в точке.

Пусть дана функция f , которая в некоторой точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0)$. Тогда прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$, имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$, называется касательной.

Итак, пусть дана функция $y = f(x)$, которая имеет производную $y = f'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда в любой точке $x_0 \in (a; b)$ к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

8. Понятие дифференцируемости функции в точке.

Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

и

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

9. Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в точке x_0 . Тогда,

$$\begin{aligned}(g + f)'(x_0) &= g'(x_0) + f'(x_0) \\ (g \cdot f)'(x_0) &= g'(x_0) \cdot f(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)\end{aligned}$$

Если $g(x_0) \neq 0$, то

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

10. Формула вычисления производной сложной функции.

Если $g(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x)$ дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0)$, тогда,

$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

11. Таблица производных основных элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	0
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

12. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.

Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

Тогда выражение $f'(x_0)dx$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 . Обозначение: $df = df(x_0, dx)$. Обратите внимание, что df зависит и от точки, и от dx .

13. Геометрический смысл дифференциала.

Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, когда аргумент x получает приращение Δx .

[Подробнее тут](#)

14. Определение локального экстремума. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции f , если существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0 , что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leq f(x_0) \text{ (для минимума соответственно } f(x) \geq f(x_0))$$

x_0 называется точкой строгого локального максимума (минимума), если

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \implies f(x) < f(x_0) \text{ (для минимума соответственно } f(x) > f(x_0))$$

Теорема Ферма Если функция имеет в точке локального экстремума производную, то эта производная равна нулю.

15. Формулы Лагранжа и Коши.

Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то в этом интервале существует хотя бы одна точка x_0 , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Теорема Коши. Обобщает формулу конечных приращений Лагранжа. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) , причем $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$. Тогда в этом интервале существует точка $x = \xi$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

16. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной.

Предположим, что имеется некоторая функция $f(x)$ и надо исследовать ее поведение в некоторой точке x_0 или ее окрестности. Сама функция может быть при этом достаточно сложной, и поэтому непосредственное вычисление $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (как пример того, что мы хотим узнать о функции в x_0) окажется крайне трудоемким. Идея в том, чтобы найти такой многочлен $P_n(x)$, что $f(x) \sim P_n(x - x_0)$ при $x \rightarrow x_0$, а затем исследовать его. Работать с многочленами практически всегда намного проще.

Предположим пока, что $x_0 = 0$. Тогда $P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$. $P_n(0) = c_0$, а $P'_n(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$, из чего следует, что $c_1 = P'_n(0)$. По аналогии можно получить, что $c_2 = \frac{P''_n(0)}{2!}, \dots, c_n = \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}$. Т.е. получаем, что $P_n(x) = P_n(0) + \frac{P'_n(0)}{1!}x + \dots + \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}x^n$.

Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$, тогда справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(f, x)$$

Эта формула называется **формулой Тейлора** и обычно записывается в виде:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_n(f, x)}_{\text{остаточный член}}$$

17. Формулы Маклорена для основных элементарных функций.

При $x_0 = 0$ формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано называется формулой Маклорена

Приведем пример: $f(x) = \sin x$. Вспомним, что

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \implies f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Тогда получаем следующее разложение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n})$$

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$$

$$2. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$$

$$3. (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \bar{o}(x^n)$$

$$\text{Например } (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)x^2 + \bar{o}(x^2) = \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + \bar{o}(x^2)$$

$$4. \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n})$$

$$5. \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

$$6. \operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} \cdot x^{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1}), \text{ где } B_{2n} \text{ — числа Бернулли}$$

Но достаточно помнить, что $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \bar{o}(x^5)$, т.е. общая формула для семинаров не нужна

$$7. \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \cdot x^{2n+1} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

$$\text{Достаточно знать } \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \bar{o}(x^5)$$

$$8. \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$9. \operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1})$$

18. Правило Лопиталья.

Теорема Лопиталья (первое правило) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

1. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки a
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
3. $g'(x) \neq 0$ в окрестности U
4. Существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Теорема Лопиталья (второе правило) Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо следующее:

1. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b) , причем a и b конечны
2. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$
3. $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$
4. Существует конечный $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

то $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

2 Вопросы на знание доказательств

1. Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. Точки разрыва, их классификация.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если она определена на некоторой окрестности этой точки $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Другими словами, $A = f(x_0)$ и справедливы следующие определения предела функции в точке x_0 :

- **По Коши:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- **По Гейне:**

$$\forall \{x_n\} : x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

Теорема. Определения предела функции в точке по Коши и Гейне эквивалентны

Доказательство. Пусть f определена на множестве X и число A является пределом функции f в точке x_0 в смысле Коши. Выберем произвольную подходящую последовательность $x_n, n \in \mathbb{N}$, т.е. такую, для которой $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Покажем, что A является пределом в смысле Гейне.

Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и укажем для него такое $\delta > 0$, что $\forall x \in X$ из условия $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В силу того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, для $\delta > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N$ будет выполняться неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Докажем теперь обратное утверждение: предположим, что $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ в смысле Гейне, и покажем, что число A является пределом функции f в точке x_0 в смысле Коши. Предположим, что это неверно, т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in X : 0 < |x_\delta - x_0| < \delta : |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon$$

В качестве δ рассмотрим $\delta = \frac{1}{n}$, а соответствующие значения x_δ будем обозначать x_n . Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняются условия $x_n \neq x_0, |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ является подходящей, но число A не является пределом функции f в точке x_0 . Получили противоречие. ■

Классификация разрывов:

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U_\delta(a)$ и функция разрывна в a . Тогда говорят, что функция имеет

- **Устранимый разрыв:** пределы $f(x)$ справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$$

- **Неустраняемый разрыв первого рода:** пределы $f(x)$ справа и слева существуют, но не равны друг другу
- **Неустраняемый разрыв второго рода:** хотя бы один из односторонних пределов $f(x)$ не существует или равен бесконечности.

2. Непрерывность основных элементарных функций.

TODO(): Спросить, что тут требуется.

3. Арифметические свойства непрерывных функций.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 .

Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ непрерывны в точке x_0 .

Если функция $g(x_0) \neq 0$, то и $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0 .

Доказать можно расписав пределы.

4. Теорема о непрерывности сложной функции.

Теорема. Если функция $g(t)$ непрерывна в точке t_0 и функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = g(t_0)$, то $f(g(t))$ непрерывна в t_0 .

Доказательство. Для доказательства этой теоремы воспользуемся формальным преобразованием двух выражений с кванторами кванторов.

$f(x)$ непрерывна в x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$g(t)$ непрерывна в t_0 :

$$\forall \delta > 0 \exists \mu > 0 : \forall t : 0 < |t - t_0| < \mu \implies |g(t) - g(t_0)| < \delta$$

Получается, $f(g(t))$ непрерывна в t_0 :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mu > 0 : \forall t : 0 < |t - t_0| < \mu \implies |f(g(t)) - f(g(t_0))| < \varepsilon$$

■

5. Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).

Теорема Вейерштрасса (первая) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то есть $\exists A : \forall x \in [a, b] \implies |f(x)| \leq A$

Доказательство. Докажем от противного.

Пусть f не ограничена на отрезке $[a, b]$, тогда:

$$\begin{aligned} \forall A > 0 \exists x_A \in [a, b] : |f(x_A)| > A \\ A = 1 \implies \exists x_1 \in [a, b] : |f(x_1)| > 1 \\ A = 2 \implies \exists x_2 \in [a, b] : |f(x_2)| > 2 \\ \vdots \\ A = n \implies \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n \end{aligned}$$

Получим последовательность $\{x_n\} \subset [a, b]$, то есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить подпоследовательность, которая сходится к точке c , то есть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$$

Тогда $c \in [a, b]$. Но по условию функция непрерывна в точке c и тогда по определению непрерывности в точке по Гейне $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$.

С другой стороны

$$|f(x_{n_k})| > n_k, n_k \geq k \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$$

А это противоречит единственности предела. ■

Теорема Вейерштрасса (вторая) Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f достигает на нем своих нижней и верхней граней. То есть существуют такие точки $c_1, c_2 \in [a, b]$, так что для любого $x \in [a, b]$, выполняются неравенства:

$$f(c_2) \leq f(x) \leq f(c_1)$$

Доказательство. Докажем $\exists c_1 \in [a, b] : f(c_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Пусть $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ (существование следует из первой теоремы Вейерштрасса). В силу определения точной верхней грани выполняется условие:

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b] \implies f(x) \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in [a, b] : M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \end{cases}$$

Полагая $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ получим последовательность $\{x_n\}$ такую, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются условия $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$, откуда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ и точка c (по теореме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке c), такие что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$, где $c \in [a, b]$.

В силу непрерывности функции f в точке c , получаем $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$.

С другой стороны, $\{f(x_{n_k})\}$ — подпоследовательность последовательности $\{f(x_n)\}$, сходящейся к числу M . Поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$.

В силу единственности предела последовательности заключаем, что $f(c) = M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Утверждение $\exists c_1 \in [a, b] : f(c_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ доказано.

Аналогично доказывается $\exists c_2 \in [a, b] : f(c_2) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$

Функция непрерывна на интервале может не достигать своих точных граней (требовать непрерывности на сегменте существенно). ■

6. Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.

Теорема Больцано-Коши (первая), о нулях непрерывной функции Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и на своих концах принимает значение разных знаков, то существует такая точка, принадлежащая этому отрезку, в которой функция обращается в нуль.

Доказательство. Геометрически очень легко: функция пересечет ось OX .

Алгебраически: разделим отрезок $[a, b]$ точкой x_0 на два равных по длине отрезка, тогда либо $f(x_0) = 0$ и, значит, искомая точка x_0 найдена, либо $f(x_0) \neq 0$ и тогда на концах одного из полученных промежутков функция f принимает значения разных знаков, точнее, на левом конце значение меньше нуля, на правом — больше.

Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$ и разделим его снова на два равных по длине отрезка и т.д. В результате, либо через конечное число шагов придем к искомой точке x , в которой $f(x) = 0$, либо получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ по длине стремящихся к нулю и таких, что

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

Пусть γ — общая точка всех отрезков $[a_n, b_n]$. Тогда $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Поэтому, в силу непрерывности функции f

$$f(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Откуда следует, что $f(\gamma) = 0$. ■

Теорема Больцано-Коши (вторая), о промежуточном значении непрерывных функций Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $A = f(a) \neq f(b) = B$, число $C \in (A, B)$, тогда существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.

Другими словами, утверждается, что если непрерывная функция, принимает два значения, то она принимает и любое значение между ними.

Доказательство. Не нарушая общности будем считать, что $A = f(a) < f(b) = B$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - C$, непрерывность на отрезке $[a, b]$ которой следует из непрерывности функции f . Очевидно что $h(a) = A - C < 0$ и $h(b) = B - C > 0$. Применяем к h первую теорему Больцано-Коши и находим точку c , в которой $h(c) = f(c) - C = 0$, то-есть $f(c) = C$. Теорема доказана. ■

7. Понятие производной функции в точке.

Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку x_0 . Тогда функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 , и ее производная определяется формулой

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

если предел существует.

8. Геометрический и физический смысл производной.

Геометрический смысл производной. Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

Физический смысл производной. Если точка движется вдоль оси OX и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то мгновенная скорость точки: $v(t) = x'(t)$.

9. Уравнение касательной к графику функции в точке.

Пусть дана функция f , которая в некоторой точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0)$. Тогда прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$, имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$, называется касательной.

Итак, пусть дана функция $y = f(x)$, которая имеет производную $y = f'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда в любой точке $x_0 \in (a; b)$ к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

10. Понятие дифференцируемости функции в точке.

Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

и

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

11. Необходимое условие дифференцируемости.

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Тогда её приращение представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$$

Но тогда при $\Delta x \rightarrow 0$ будет $\Delta y \rightarrow 0$, а это означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0 . ■

Обратите внимание, что из непрерывности не следует дифференцируемости (например, $f(x) = |x|$).

12. Правила дифференцирования.

Теорема. Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x , то $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) также дифференцируемы в точке x , причем $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(f \cdot g)' = f'g + fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Доказательство. Будем считать, что Δf отвечает приращению $f(x)$, Δg отвечает приращению $g(x)$, а Δh отвечает приращению $h(x)$.

1. $h(x) = f(x) \pm g(x)$

$$\begin{aligned}\Delta h &= h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)) - (f(x) \pm g(x)) \\ &= (f(x + \Delta x) - f(x)) \pm (g(x + \Delta x) - g(x)) \\ &= \Delta f \pm \Delta g\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ существует предел правой части, равный $f'(x) \pm g'(x)$, а значит, существует и предел левой части

$$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

2. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned}\Delta h &= h(x + \Delta x) - h(x) = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= (f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x)) + (f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x))\end{aligned}$$

Далее можно записать

$$\Delta h = f(x + \Delta x) \cdot (g(x + \Delta x) - g(x)) + g(x) \cdot (f(x + \Delta x) - f(x)) = f(x + \Delta x) \cdot \Delta g + g(x) \Delta f$$

Таким образом

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = f(x + \Delta x) \frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Возьмем теперь предел правой части при $\Delta x \rightarrow 0$. В силу непрерывности $f(x)$ в x (т.к. она дифференцируема в этой точке) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. Тогда получаем, что

$$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

3. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Поскольку $g(x) \neq 0$, то $g(x + \Delta x) \neq 0$ для малых Δx . Тогда

$$\begin{aligned}\Delta h &= h(x + \Delta x) - h(x) = \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \\&= \frac{f(x + \Delta x)g(x) - g(x + \Delta x)f(x)}{g(x)g(x + \Delta x)} \\&= \frac{(f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)) - (g(x + \Delta x)f(x) - f(x)g(x))}{g(x)g(x + \Delta x)} \\&= \frac{g(x)(f(x + \Delta x) - f(x)) - f(x)(g(x + \Delta x) - g(x))}{g(x)g(x + \Delta x)} \\&= \frac{g(x)\Delta f - f(x)\Delta g}{g(x)g(x + \Delta x)}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} - f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x)g(x + \Delta x)}$$

Снова используя непрерывность и беря предел правой и левой частей, получаем, что

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

■

13. Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.

Теорема. Пусть функцию $y = y(x)$ от переменной x можно представить как сложную функцию в следующем виде:

$$y(x) = f(u(x))$$

где $f(u)$ и $u(x)$ есть некоторые функции. Функция $u = u(x)$ дифференцируема при некотором значении переменной x . Функция $f(u)$ дифференцируема при значении переменной $u = u(x)$. Тогда сложная (составная) функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x и ее производная определяется по формуле:

$$y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

Доказательство. Введем следующие обозначения.

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x + \Delta x) - u(x) \\ \Delta f &= f(u + \Delta u) - f(u) = f(u(x + \Delta x)) - f(u(x))\end{aligned}$$

Здесь Δu есть функция от переменных x и Δx , Δf есть функция от переменных u и Δu . Но мы будем опускать аргументы этих функций, чтобы не загромождать выкладки.

Поскольку функции u и f дифференцируемы в точках x и $u = u(x)$, соответственно, то в этих точках существуют производные этих функций, которые являются следующими пределами:

$$\begin{aligned}u'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ f'(u) &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}\end{aligned}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\varepsilon(\Delta u) = \frac{\Delta f}{\Delta u} - f'(u)$$

При фиксированном значении переменной u , ε является функцией от Δu . Очевидно, что

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Тогда

$$\Delta f = (f'(u) + \varepsilon(\Delta u)) \cdot \Delta u$$

Поскольку функция $u(x)$ является дифференцируемой функцией в точке x , то она непрерывна в этой точке. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Теперь находим производную.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= f'(u) \cdot u'(x) + 0 \cdot u'(x) \\ &= f'(u) \cdot u'(x) \end{aligned}$$

Формула доказана. ■

14. Теорема о дифференцируемости обратной функции.

Теорема. Рассмотрим функцию $f(x)$, которая является строго монотонной на некотором интервале (a, b) . Если в этом интервале существует такая точка x_0 , что $f'(x_0) \neq 0$, то функция $x = \phi(y)$, обратная к функции $y = f(x)$, также дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и её производная равна

$$\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказательство. Пусть переменная y в точке y_0 получает приращение $\Delta y \neq 0$. Соответствующее ему приращение переменной x в точке x_0 обозначим как Δx , причем $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y = f(x)$. Запишем отношение приращений в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Допустим, что $\Delta y \rightarrow 0$, тогда $\Delta x \rightarrow 0$, поскольку обратная функция $x = \phi(y)$ является непрерывной в точке y_0 . В пределе, при $\Delta x \rightarrow 0$, правая часть записанного соотношения становится равной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

В таком случае левая часть тоже стремится к пределу, который по определению равен производной обратной функции:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \phi'(y_0)$$

Таким образом,

$$\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$
■

15. Таблица производных основных элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	0
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

16. Производные функций, графики которых заданы параметрически.

Теорема. Зависимость между аргументом x и функцией y может быть задана в параметрическом виде с помощью двух уравнений:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

Пусть $x = \phi(t)$ и $y = \psi(t)$ определены и дифференцируемы при $t \in (a, b)$, причем $x'_t = \phi'(t) \neq 0$ и $x = \phi(t)$ имеет обратную функцию $t = \theta(x)$, то

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

Доказательство. Перейдем от параметрического задания к явному. При этом получаем сложную функцию $y = \psi(t) = \psi(\theta(x))$, аргументов которой является x .

По правилу нахождения производной сложной функции имеем

$$y'_x = (\psi(\theta(x)))' = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x)$$

По теореме об обратной функции $\theta'(x) = \frac{1}{\phi'(t)}$. А значит

$$y'_x = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x) = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

■

17. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.

Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A , что:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) \\ A &= f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} \end{aligned}$$

Тогда выражение $f'(x_0)dx$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 . Обозначение: $df = df(x_0, dx)$. Обратите внимание, что df зависит и от точки, и от dx .

18. Геометрический смысл дифференциала. [На коллоквиуме будет отсутствовать]

Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, когда аргумент x получает приращение Δx .

[Подробнее тут](#)

19. Инвариантность формы первого дифференциала. [На коллоквиуме будет отсутствовать]
20. Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке. [На коллоквиуме будет только производная высших порядков]

Рассмотрим функцию, дифференцируемую на множестве E . Т.е. $\exists f'(x)$, Если $f'(x)$ тоже дифференцируема на E , то $\exists (f'(x))' = f''(x)$.

Производной n -ого порядка будем считать $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, причем $f^{(0)}(x) = f(x)$. Разумеется, для существования производной n -ого порядка должны существовать производные всех меньших порядков.

Множество функция, имеющих все производные до порядка n включительно на множестве E , обозначается $C^{(n)}(E)$. Рассмотрим несколько примеров

- $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ f''(x) &= -\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right) \\ f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \\ f^{(4)}(x) &= \sin x = \sin x \end{aligned}$$

Докажем по индукции, что $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)$. При $n = 1$ уже было показано ранее. Пусть это верно при некотором n , покажем для $n = n + 1$.

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right) \\ f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi n}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right) \end{aligned}$$

- $f(x) = e^x$. $f^{(n)}(x) = e^x$
- $f(x) = x^m$. Беря n раз производную, получаем, что $f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$
- $f(x) = \ln x$. $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. $f^{(n)}(x^{-1}) = (-1)(-2)\dots(-n)x^{-1-n} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-1-n}$, Тогда получаем, что

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x-1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

Теорема (Формула Лейбница) Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют не менее n производных на множестве E . Тогда

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$$

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 1$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \cdot u^{(1-k)} \cdot v^{(k)}$$

Пусть равенство верно при некотором n , докажем его справедливость при $n = n + 1$. Беря по определению производную $(u \cdot v)^{(n+1)}$

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} \right)' \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} \\
&= \binom{n}{0} \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \binom{n}{n} \cdot u \cdot v^{(n+1)} \\
&= \binom{n}{0} \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \binom{n}{n} \cdot u \cdot v^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)}
\end{aligned}$$

Последний переход сделан при помощи следующего рассуждения:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

■

21. Понятие об экстремумах функции одной переменной.

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции f , если существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0 , что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leq f(x_0)$$

и точкой локального минимума, если

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \geq f(x_0)$$

Теорема Ферма Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , то ее производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

22. Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

Теорема Ферма Пусть функция f определена на интервале (a, b) и в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение на этом интервале. Если существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть x_0 — точка максимума функции f . Рассмотрим разностное отношение $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Так как $f(x) \leq f(x_0)$, то при $x > x_0$ имеем $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, и, следовательно, $f'_+(x_0) \leq 0$. Если же $x < x_0$, то $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, и поэтому $f'_-(x_0) \geq 0$. Но из дифференцируемости функции f в точке x_0 следует, что $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$ (следует из равенности предела справа и слева). ■

С геометрической точки зрения теорема Ферма означает, что если в точке экстремума у графика функции существует касательная, то она параллельна оси OX .

23. Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши).

Теорема Ролля. О нуле производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения Пусть функция $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2. дифференцируема на интервале (a, b) ;
3. $f(a) = f(b)$

Тогда на интервале (a, b) найдется, по крайней мере, одна точка x_0 , в которой $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Если функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$ (а значит, её минимальное и максимальное значение совпадают), то производная равна нулю в любой точке интервала (a, b) , в этом случае утверждение справедливо.

Иначе, минимальное и максимальное значение функции не совпадают. По второй теореме Вейерштрасса (о достижении функции значения точной верхней/нижней грани на отрезке), функция достигает своего наибольшего или наименьшего значения в точке ξ интервала (a, b) , т.е. в точке ξ существует локальный экстремум. Тогда по теореме Ферма производная в этой точке равна нулю

$$f'(\xi) = 0$$

■

Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то в этом интервале существует хотя бы одна точка x_0 , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) + \lambda x$.

Выберем число λ таким, чтобы выполнялось условие $F(a) = F(b)$, тогда

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b \implies f(b) - f(a) = \lambda(a - b) \implies \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

В результате получаем

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале (a, b) существует такая точка ξ , что $F'(\xi) = 0$.

Отсюда следует, что $0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ или

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Хорда, проходящая через точки графика, соответствующие концам отрезка a и b имеет угловой коэффициент, равный

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Тогда внутри отрезка существует точка $x = \xi$, в которой касательная к графику параллельна хорде.

Теорема Коши. Обобщает формулу конечных приращений Лагранжа. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) , причем $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$. Тогда в этом интервале существует точка $x = \xi$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Доказательство. Доказательство совпадает с доказательством теоремы Лагранжа.

Прежде всего заметим, что знаменатель в левой части формулы Коши не равен нулю: $g(b) - g(a) \neq 0$. Действительно, если $g(a) = g(b)$, то по теореме Ролля найдется точка $\mu \in (a, b)$, в которой $g'(\mu) = 0$. Это, однако, противоречит условию, где указано, что $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$.

Введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$.

Выберем число λ таким, чтобы выполнялось условие $F(a) = F(b)$, тогда

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \implies f(b) - f(a) = \lambda(g(a) - g(b)) \implies \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

В результате получаем

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot x$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и при найденном значении λ принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале (a, b) существует такая точка ξ , что $F'(\xi) = 0$.

Отсюда следует, что

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi)$$

или

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

■

24. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.

Предположим, что имеется некоторая функция $f(x)$ и надо исследовать ее поведение в некоторой точке x_0 или ее окрестности. Сама функция может быть при этом достаточно сложной, и поэтому непосредственное вычисление $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (как пример того, что мы хотим узнать о функции в x_0) окажется крайне трудоемким. Идея в том, чтобы найти такой многочлен $P_n(x)$, что $f(x) \sim P_n(x - x_0)$ при $x \rightarrow x_0$, а затем исследовать его. Работать с многочленами практически всегда намного проще.

Предположим пока, что $x_0 = 0$. Тогда $P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$. $P_n(0) = c_0$, а $P'_n(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$, из чего следует, что $c_1 = P'_n(0)$. По аналогии можно получить, что $c_2 = \frac{P''_n(0)}{2!}, \dots, c_n = \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}$. Т.е. получаем, что $P_n(x) = P_n(0) + \frac{P'_n(0)}{1!}x + \dots + \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}x^n$.

Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$, тогда справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(f, x)$$

Эта формула называется **формулой Тейлора** и обычно записывается в виде:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_n(f, x)}_{\text{остаточный член}}$$

Лемма. Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$ и $\exists f'(x)$ на некоторой $U(x_0)$. Тогда $(r_n(f, x))' = r_{n-1}(f', x)$.

Доказательство.

$$r_n(f, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$(r_n(f, x))' = f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{k-1} = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = r_{n-1}(f', x)$$

так как $f^{(k+1)}(x_0) = (f')^{(k)}(x_0)$. Следует также обратить внимание на то, что дифференцирование $r_n(f, x)$ происходит по x , поэтому все члены суммы, кроме $(x - x_0)^k$, — константы. ■

Теорема о локальной форме остаточного члена (Форма Пеано) Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$ и $\exists f'(x)$ на некоторой $U(x_0)$. Тогда справедлива формула Тейлора, причем $r_n(f, x) = \bar{o}((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$.

Доказательство. Докажем с помощью метода математической индукции. При $n = 1$, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$, что верно, т.к. $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Предположим теперь, что теорема верна для **произвольной функции** f при $n = n - 1$, и докажем её при $n = n$.

Заметим сначала, что $r_n(f, x_0) = 0$ (следует из обычной формулы Тейлора). Тогда $r_n(f, x) = f_n(f, x) - f_n(f, x_0) = (r_n(f, \xi))'(x - x_0)$, где ξ принадлежит интервалу $(\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ по теореме Лагранжа.

По лемме получаем, что $(r_n(f, \xi))'(x - x_0) = r_{n-1}(f', \xi)(x - x_0)$. По предположению для произвольной функции f , у которой есть n -ая производная в x_0 и $(n - 1)$ -ая в окрестности x_0 , можно выполнить индукционный переход для f' , т.к. для r_{n-1} у $f'(x)$ существуют $(n - 1)$ -ая производная в x_0 и $(n - 2)$ -ая в окрестности x_0 . Тогда $r_{n-1}(f', \xi)(x - x_0) = \bar{o}((\xi - x_0)^{n-1})(x - x_0) = [|\xi - x_0| < |x - x_0| \implies \bar{o}((\xi - x_0)^{n-1}) = \bar{o}((x - x_0)^{n-1})] = \bar{o}((x - x_0)^{n-1})(x - x_0) = \bar{o}((x - x_0)^n)$ ■

Теорема о форме Лагранжа Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\exists f^{(n)}(x)$, причем $f^{(n)}(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x]$. Кроме того, $\exists f^{(n+1)}(x)$ на (x_0, x) . Тогда справедлива формула Тейлора, причем $r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$, где $\xi \in (x_0, x)$.

Доказательство. Снова воспользуемся методом математической индукции. При $n = 0$, $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) -$ формула Лагранжа. Предположим теперь, что для произвольной функции f справедливо, что $r_{n-1}(f, x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$, где $\xi \in (x_0, x)$. При $n = n$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{r_n(f, x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{r_n(f, x) - r_n(f, x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} \text{ [по формуле Коши] } = \\ &= \frac{(r_n(f, \mu))'}{(n + 1)(\mu - x_0)^n} \text{ [по лемме, доказанной выше] } = \\ &= \frac{r_{n-1}(f', \mu)}{(n + 1)(\mu - x_0)^n} = \frac{(f'(\xi))^{(n)}}{(n + 1)n!} \implies r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

25. Формулы Маклорена для основных элементарных функций.

При $x_0 = 0$ формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано называется формулой Маклорена

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$
2. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$
3. $(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \bar{o}(x^n)$

Например $(1 + x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right)x^2 + \bar{o}(x^2) = \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{2}x^2 + \bar{o}(x^2)$

4. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n})$
5. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{o}(x^{2n+1})$
6. $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1 - 4^n)}{(2n)!} \cdot x^{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1})$, где B_{2n} — числа Бернулли

Но достаточно помнить, что $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \bar{o}(x^5)$, т.е. общая формула для семинаров не нужна

7. $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \cdot x^{2n+1} + \bar{o}(x^{2n+1})$

Достаточно знать $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \bar{o}(x^5)$

$$8. \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$9. \operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1})$$

26. Правило Лопиталья.

Теорема Лопиталья (первое правило) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

1. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки a
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
3. $g'(x) \neq 0$ в окрестности U
4. Существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство. Доопределим функции в точке a нулём. Из первого условия следует, что $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, x]$, где x принадлежит рассматриваемой окрестности точки a .

Применим обобщённую формулу конечных приращений (Коши) к $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a, x]$.

$$\exists \xi \in [a, x] : \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Так как $g(a) = f(a) = 0$ получим, что $\forall x \exists \xi \in [a, x] : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Пусть предел отношения производных равен A . Следовательно, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = A$, так как $\lim_{x \rightarrow a} \xi(x) = a$. ■

Теорема Лопиталья (второе правило) Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо следующее:

1. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b) , причем a и b конечны
2. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$
3. $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$
4. Существует конечный $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

то $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Доказательство. Для начала положим, что $A \leq 0$ (при $A > 0$ доказательство практически аналогично приведенному). Пусть $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Тогда по определению предела

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \iff \exists x_\varepsilon \in (a, b) : \forall x \in (a, x_\varepsilon) \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon$$

Здесь мы просто приняли, что $x_\varepsilon = a + \delta$, в остальном же интерпретация определения предела не изменилась.

Выберем произвольное x из данного интервала (a, x_ε) . Заметим, что выполняется теорема Коши (доопределим функции f и g в точке a , а точке x_ε они уже определены):

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ где } a < x < \xi < x_\varepsilon < b$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}$$

Заметим теперь, что $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)} = 0$, т.к. $f(x_\varepsilon)$ и $g(x_\varepsilon)$ — константы. Тогда выберем для текущего закрепленного ε такое $\delta(\varepsilon) > 0$:

$$\forall x \in (a, a + \delta), \delta + a < b \implies \left| \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)} \right| < \varepsilon, \left| \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)} \right| < \varepsilon$$

Тогда получаем следующую оценку:

$$\frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \in \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}, \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)$$

Поскольку $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, то $\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = 1 - \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - 2\varepsilon$ и $\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = 1 + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} < 1 + \frac{8}{3}\varepsilon$. Учитывая, что $\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(A)$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \in \left((A - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon), (A + \varepsilon) \left(1 + \frac{8}{3}\varepsilon\right) \right) = \\ &= \left(A - (\varepsilon + 2A\varepsilon - 2\varepsilon^2), A + \left(\varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon A + \frac{8}{3}\varepsilon^2\right) \right) \implies \\ &\implies \frac{f(x)}{g(x)} \in U_\mu(A), \text{ где } \mu = \max \left\{ \varepsilon + 2A\varepsilon - 2\varepsilon^2, \varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon A + \frac{8}{3}\varepsilon^2 \right\} \end{aligned}$$

Как видно, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu = 0$, а для любого сколько угодно малого μ всегда можно найти соответствующее ε , такое, что все значения отношения функций попадут в заданную μ -трубку. Это и означает, что предел отношения функции равен A . ■

27. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке.

Теорема. Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале (a, b) строго возрастала, достаточно, чтобы $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0$

Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале (a, b) строго убывала, достаточно, чтобы $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0$

Доказательство. Докажем для строгого возрастания. Пусть $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$. Выберем произвольные точки $x_1, x_2 \in (a, b)$, и, не ограничивая общности, скажем, что $x_1 < x_2$.

Применим формулу конечных приращений Лагранжа. Так как $f'(\xi) > 0$ и $x_2 > x_1$, имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$$

■

- 28. Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]
- 29. Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]
- 30. Достаточные условия выпуклости (вогнутости). [На коллоквиуме будет отсутствовать]
- 31. Точки перегиба.
- 32. Необходимые и достаточные условия для точки перегиба. [На коллоквиуме будет отсутствовать]
- 33. Асимптоты графика функции одной переменной. [На коллоквиуме будет отсутствовать]