FÍSICA
Acta Científica Venezolana, 66(2): 114–120, 2015

ALGUNOS ASPECTOS SOBRE DUALIDAD GRAVITACIONAL: EL CAMPO DE CURTRIGHT

Alexangel Bracho[1,*] y Adel Khoudeir[2]

[1]Departamento de Física, Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela
[2]Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

Recibido: 17/03/2015 Corregido: 16/07/2015 Aceptado: 03/08/2015

RESUMEN Se presentan dos formulaciones a primer orden para la acción de cuarto orden en derivadas de la nueva gravedad masiva (NMG) y de la nueva gravedad masiva dual (NMDG) en tres y cuatro dimensiones, respectivamente, a partir de las cuales la equivalencia dual con la teoría masiva de Curtright es establecida.
Palabras claves: Nueva gravedad masiva dual, nueva gravedad masiva.

SOME ASPECTS ON GRAVITATIONAL DUALITY: THE CURTRIGHT FIELD

ABSTRACT We present two first-order formulations for the fourth-order action in derivatives of the new massive gravity (NMG) and the new dual massive gravity (NMDG) in three and four dimensions, respectively, from which the dual equivalence with the massive Curtright theory is established. **Keywords:** New massive dual gravity, new massive gravity.

INTRODUCCIÓN

El concepto de dualidad dentro de las teorías físicas se ha constituido en una de las piezas claves para el comprensión de fenómenos físicos a niveles no perturbativos. La idea básica de este concepto radica en que un mismo fenómeno físico puede ser formulado por al menos dos teorías, en principio diferentes en sus respectivas formulaciones, pero que resultan ser equivalentes físicamente.

En dimensiones altas aparecen campos con simetría mixta;[1] por ejemplo, se tiene el caso del campo de Curtright ($T_{mn,p} = -T_{nm,p}\,; T_{[mn,p]} = 0$). En cinco dimensiones el campo de Curtright es dual a la gravitación linealizada.[3] Ambos campos describen cinco grados de libertad en dicha dimensión. Este último hecho puede generalizarse y enunciarse para **D**-dimensiones mediante la siguiente relación de dualidad: $h_{MN} \longleftrightarrow T_{M_1...M_{D-3},P}$. Para el caso masivo esta relación es de la siguiente manera:[4] $h_{MN} \longleftrightarrow T_{M_1...M_{D-2},P}$. Las dualidades son fácilmente entendidas usando el calibre del cono-luz a través de coordenadas transversas[5] $i, j = 1, ..., \mathbf{D} - 2$, que para el caso de un campo vectorial A_i arroja las siguientes relaciones de dualidad: en tres dimensiones un campo vectorial es dual a un campo escalar, $A_i \longleftrightarrow \phi$; en cuatro dimensiones un campo vectorial es autodual, es decir, $A_i \longleftrightarrow \tilde{A}_i$; y por último, en cinco dimensiones un campo vectorial es dual a un campo antisimétrico, $A_i \longleftrightarrow B_{ij}$.

Es destacable que recientemente en cuatro dimensiones se ha formulado un modelo de cuarto orden en derivadas que es equivalente a la teoría de segundo orden masiva de Curtright.[7] En este trabajo lo que se hace esencialmente es construir una teoría invariante de calibre en cuatro dimensiones que describe los cinco modos de polarización de una partícula masiva de espín 2, esto a partir de un lagrangiano que es de cuarto orden en derivadas.

En tres dimensiones es posible tener teorías gravitacionales de alto orden sin pérdida de unitariedad. Recientemente, Bergshoeff, Hohm y Townsend formularon[6] la llamada *nueva gravedad masiva* (NMG) en tres dimensiones. Esta última consiste en la acción de Einstein–Hilbert (EH) no dinámica completada con un término específico de curvatura cuadrada, la cual lleva a ecuaciones de campo de cuarto orden en derivadas.

En 2012 se propuso[7] la *nueva gravedad masiva dual* (NMDG), cuyo trabajo consistió en la construcción de una teoría cuadri-dimensional (4**D**) basada en el campo de *calibre* de Curtright, que propaga unitariamente los cinco modos de polarización de una partícula masiva de espín 2. Estos modos están descritos por un potencial de calibre *dual* en donde el lagrangiano es de cuarto orden en derivadas. Hay que resaltar que en general las teorías con altas derivadas son físicamente inapropiadas porque su energía no está definida positivamente, lo que conlleva a la existencia de fantasmas. A lo largo de este trabajo se usará la métrica η_{mn} en su mayoría positiva, y los paréntesis cuadrados indican permutaciones cíclicas o pares en los índices; es decir, $A_{[mnp]} = A_{mnp} + A_{npm} + A_{pmn}$.

FORMULACIÓN A PRIMER ORDEN

En cuatro dimensiones el campo no masivo de Curtright no propaga ninguna excitación local, tal y como ocurre con el campo de espín 2 no masivo en tres dimensiones y, generalmente, para un campo no masivo $T_{m_1 m_2 \ldots m_{D-2},n}$ en **D**-dimensiones. Zinoviev[8] ha escrito una acción a primer orden para el campo sin dinámica de Curtright $\Phi_{mn,p}$ (no masivo) en cuatro dimensiones, parecida a la conocida formulación a primer orden de la acción de Einstein linealizada en tres dimensiones,[8]

$$S = \int d^4x \Big[-\frac{1}{2}(\omega_{mn}\omega^{nm} - \omega^2) + \varepsilon^{mrpq}\omega_{mn}\partial_r \Phi_{pq,}{}^{n} \Big] \;, \tag{1}$$

en donde el campo de Curtright cumple con las relaciones

$$\Phi_{mn,p} = -\Phi_{nm,p} \qquad\qquad \Phi_{[mn,p]} = 0 \tag{2}$$

y ω_{mn} es un campo auxiliar que no posee simetría definida. La acción (1) es invariante bajo

$$\delta\Phi_{\mu\nu,\alpha} = \partial_\mu Z_{\nu\alpha} - \partial_\nu Z_{\mu\alpha} \;, \tag{3}$$

siendo $Z_{\mu\nu}$ un parámetro de calibre que es a su vez un tensor arbitrario general de segundo orden. Por otro lado, se tiene invariancia bajo transformaciones tipo *Lorentz*

$$\delta\Phi_{\mu\nu,\alpha} = \Lambda_{\mu\nu\alpha} \tag{4}$$

en donde $\Lambda_{\mu\nu\alpha}$ es un campo completamente antisimétrico en sus tres índices. Lo que se quiere ahora es obtener una formulación a primer orden alternativa a la ecuación (1). Para ello se parte de[8]

$$\begin{aligned} L \;&=\; \frac{3}{4}\Omega^{\mu,\nu\alpha\beta}\Omega_{\nu,\mu\alpha\beta} - \frac{3}{4}\Omega^{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\Omega^{\mu,\nu\alpha\beta}F_{\nu\alpha\beta,\mu} \\ &+\; \frac{3}{2}\Omega^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{5}$$

donde $F_{\nu\alpha\beta,\mu}$ es el campo de fuerzas definido por

$$F_{\nu\alpha\beta,\mu} = \partial_\nu \Phi_{\alpha\beta,\mu} + \partial_\alpha \Phi_{\beta\nu,\mu} + \partial_\beta \Phi_{\nu\alpha,\mu} \tag{6}$$

y $\Phi_{\alpha\beta,\mu} = -\Phi_{\beta\alpha,\mu}$ es la única propiedad que posee el campo (hasta este momento). El lagrangiano (5) es invariante bajo (3), (4) y

$$\delta\Omega_\mu{}^{\nu\alpha\beta} = \partial_\mu \Lambda^{\nu\alpha\beta} \;. \tag{7}$$

Se hace el siguiente cambio de variables ($\Omega^{\mu,\nu\alpha\beta} \longrightarrow Y^{\nu\alpha\beta,\mu}$):

$$Y^{\nu\alpha\beta,\mu} = \Omega^{\mu,\nu\alpha\beta} - (\eta^{\nu\mu}\Omega^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\mu}\Omega^{\beta\nu} + \eta^{\beta\mu}\Omega^{\nu\alpha}) \tag{8}$$

y le tomamos traza a este cambio de variables,

$$\Omega_{\nu\alpha} = (3 - D)Y_{\nu\alpha} \;. \tag{9}$$

Si sustituimos (9) en (8) y despejamos $\Omega^{\mu,\nu\alpha\beta}$ se obtiene

$$\Omega_{\mu,\nu\alpha\beta} = Y_{\nu\alpha\beta,\mu} + \frac{1}{(3-D)}\Big[\eta_{\nu\mu}Y_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\mu}Y_{\beta\nu} + \eta_{\beta\mu}Y_{\nu\alpha}\Big] \tag{10}$$

con lo cual la ecuación (5) va quedando de la siguiente manera:[2]

$$\begin{aligned} S \;&=\; \int d^D x \Bigg[\frac{3}{4}Y_{\mu\nu\alpha,\beta}Y^{\beta\nu\alpha,\mu} - \frac{3}{4(\mathbf{D}-3)}Y^{\mu\nu}Y_{\mu\nu} \\ &-\; \frac{1}{2}Y^{\mu\nu\alpha,\beta}F_{\mu\nu\alpha,\beta} \Bigg] \end{aligned} \tag{11}$$

en donde se ha mostrado en la forma de acción. Acá el campo $Y_{\alpha\beta\nu,\mu}$ funge como un campo auxiliar. La expresión (11) no es más que una formulación a primer orden de Curtright alternativa a la de Zinoviev (Ec. 1); ambas difieren por el cambio de variables dado en (8). La acción (11) sigue siendo invariante bajo (3) y (4), y consecuentemente, el campo de fuerzas $F_{\mu\nu\alpha,\beta}$ y el campo $Y_{\mu\nu\alpha,\beta}$ cambian de la siguiente manera, respectivamente,

$$\delta F_{\mu\nu\alpha,\beta} = \partial_\mu \Lambda_{[\nu\alpha\beta]} + \partial_\nu \Lambda_{[\alpha\mu\beta]} + \partial_\alpha \Lambda_{[\mu\nu\beta]} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \delta Y^{\mu\nu\alpha,\beta} \;&=\; \frac{1}{3}\partial^\beta \Lambda^{\mu\nu\alpha} - \partial_\theta \Big(\eta^{\mu\beta}\Lambda^{\nu\alpha\theta} + \eta^{\beta\nu}\Lambda^{\alpha\mu\theta} \\ &+\; \eta^{\beta\alpha}\Lambda^{\mu\nu\theta} \Big) \;. \end{aligned} \tag{13}$$

REDUCCIÓN DIMENSIONAL

En esta sección se llevará a cabo un proceso de reducción dimensional con el objetivo de proveer de masa al campo de Curtright, manteniendo sólo los primeros modos masivos tal y como se hizo para el campo de espín 2 en la Ref.[4] Se partirá de la formulación a primer orden para el campo no masivo $\Phi_{MN} = -\Phi_{NM}$ (Ec. 11), y se irá desde **D**-dimensiones hasta (**D**-1)-dimensiones,

$$\begin{aligned} S &= \int d^{\mathbf{D}}x \left[\frac{3}{4} Y_{ABC,D} Y^{DBC,A} - \frac{3}{4(\mathbf{D}-3)} Y^{AB} Y_{AB} \right. \\ &- \left. \frac{3}{2} Y^{ABC,D} \partial_A \Phi_{BC,D} \right] . \end{aligned} \tag{14}$$

Aquí se ha sustituído (6); los índices de los tensores **D**-dimensionales se denotarán con las letras latinas mayúsculas $(A, B, C...M = 0...\mathbf{D}-1)$, y se reservarán las letras latinas minúsculas (a,b,c...m = 0...**D**-2) para los tensores (**D**-1)-dimensional. La dependencia con la coordenada compactificada se denotará por la variable y. Para llevar a cabo este proceso se debe realizar, en primer lugar, las siguientes definiciones:

$$Y_{abc,d} \equiv \alpha Y_{abc,d}(x) c(\mu y) \quad / \quad Y_{abc,}{}^{c} \equiv \alpha Y_{ab}(x) c(\mu y)$$

$$Y_{aby,c} \equiv \alpha Y_{ab,c}(x) s(\mu y) \quad / \quad Y_{aby,}{}^{b} \equiv \alpha Y_{a}(x) s(\mu y)$$

$$Y_{aby,}{}^{y} \equiv \alpha Z_{ab}(x) c(\mu x) \quad / \quad Y_{abc,y} \equiv \alpha X_{abc}(x) s(\mu y)$$

$$\Phi_{ab,c} \equiv \alpha \Phi_{ab,c}(x) c(\mu y) \quad / \quad \Phi_{ay,}{}^{y} \equiv \alpha E_{a}(x) c(\mu y)$$

$$\Phi_{ab,y} \equiv \alpha B_{ab}(x) s(\mu y) \quad / \quad \Phi_{ay,b} \equiv \alpha \Phi_{ab}(x) s(\mu y)$$

donde μ es la masa, $c(...)$ es la función coseno, $s(...)$ es la función seno y $\alpha \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\pi}}$. Por otro lado, los campos X_{mnp}, Z_{mn}, Φ_{mn} y B_{mn} son completamente antisimétricos, E_m es un vector mientras que $Y_{mnp,q}$ y $Y_{mn,p}$ serán los campos auxiliares. Sustituyendo estas definiciones y llevando a cabo la integración sobre la coordenada compactificada y resulta en

$$\begin{aligned} S &= \int d^{\mathbf{D}-1}x \left[\frac{3}{4} Y_{abc,d} Y^{dbc,a} - \frac{3}{4(\mathbf{D}-3)} Y_{ab} Y^{ab} \right. \\ &+ \frac{3}{2} X_{abc} Y^{ab,c} - \frac{3}{2(\mathbf{D}-3)} Y_a Y^a \\ &- \frac{3}{2(\mathbf{D}-3)} Y_{ab} Z^{ab} \\ &+ \frac{3}{4} \frac{(\mathbf{D}-4)}{(\mathbf{D}-3)} Z_{ab} Z^{ab} + \frac{3}{2} Y^{ca,d} Y_{cd,a} \\ &- \frac{3}{2} Y^{abc,d} \partial_a \Phi_{bc,d} - \frac{3}{2} X^{abc} \partial_a B_{bc} - 3 Y^{ab,d} \partial_a \Phi_{bd} \\ &- \left. 3 Z^{ab} \partial_a E_b + \frac{3}{2} \mu Y^{bc,d} \Phi_{bc,d} - \frac{3}{2} \mu Z^{ab} B_{ab} \right] . \end{aligned} \tag{15}$$

La acción (15) dimensionalmente reducida es invariante bajo las siguientes transformaciones de calibre:

$$\delta \Phi_{mn,p}(x) = \partial_m Z_{np}(x) - \partial_n Z_{mp}(x)$$

$$\delta \Phi_{mp}(x) = \partial_m Z_{yp}(x) + \mu Z_{mp}(x)$$

$$\delta B_{mn}(x) = \partial_m Z_{ny}(x) - \partial_n Z_{my}(x)$$

$$\delta E_m(x) = \partial_m Z_{yy}(x) - \mu Z_{my}(x)$$

donde se ha descompuesto el parámetro de calibre $Z_{MN} : \{Z_{mn}, Z_{my}, Z_{ym}, Z_{yy}\}$. Se pueden romper estas simetrías de calibre escogiendo apropiadamente los parámetros de calibre z_{mn} y z_{my} para fijar los calibres

$$\Phi_{mn} = 0 \qquad\qquad E_m = 0 \tag{16}$$

siendo Φ_{mn} y E_m campos tipo Stuckelberg. Por otro lado, la acción reducida hereda las simetrías de *Lorentz* asociadas a los parámetros Λ_{MNP} : $(\Lambda_{mnp}, \Lambda_{mny} \equiv \Lambda_{mn})$,

$$\delta \Phi_{mn,p}(x) = \Lambda_{mnp}(x) \qquad \delta E_m = 0$$

$$\delta Z_{mn} = -\partial^r \Lambda_{rmn} \qquad \delta X_{mnp} = -\mu \Lambda_{mnp}$$

$$\delta B_{mn}(x) = \Lambda_{mn}(x) = -\delta \Phi_{mn}$$

$$\delta Y_{mn,p} = \partial_p \Lambda_{mn} + \eta_{p[m} \partial_q \Lambda_{n]}{}^{q}$$

$$\delta Y_{mnp,q} = \partial_q \Lambda_{mnp} - \partial^r \eta_{q[m} \Lambda_{np]r} - \mu \eta_{q[m} \Lambda_{np]} .$$

Se puede romper la simetría de Lorentz asociada al parámetro Λ_{mn} escogiendo

$$B_{mn} = 0 . \tag{17}$$

Sustituyendo (16) y (17) dentro de (15) se obtiene

$$\begin{aligned} S &= \int d^{\mathbf{D}-1}x \Bigg[\frac{3}{4} Y_{abc,d} Y^{dbc,a} - \frac{3}{4(\mathbf{D}-3)} Y_{ab} Y^{ab} \\ &- \frac{3}{2} Y^{abc,d} \partial_a \Phi_{bc,d} - \frac{3}{2(\mathbf{D}-3)} Y_{ab} Z^{ab} \\ &+ \frac{3}{4} \frac{(\mathbf{D}-4)}{(\mathbf{D}-3)} Z_{ab} Z^{ab} - \frac{3}{2(\mathbf{D}-3)} Y_a Y^a \\ &+ \frac{3}{2} \mu Y^{bc,d} \Phi_{bc,d} + \frac{3}{2} Y^{ca,d} Y_{cd,a} + \frac{3}{2} X_{abc} Y^{ab,c} \Bigg] \quad (18) \end{aligned}$$

En este punto se puede eliminar el campo Z_{mn} ya que aparece como un multiplicador cuadrático, lo que permite determinar su valor a través de su ecuación de movimiento

$$\frac{\delta S}{\delta Z_{ab}} = 0 \Longrightarrow Z_{ab} = \frac{(\mathbf{D}-3)}{(\mathbf{D}-4)} Y_{ab} \ . \quad (19)$$

Sustituyendo en (18) se obtiene

$$\begin{aligned} S &= \int d^{\mathbf{D}-1}x \Bigg[\frac{3}{4} Y_{abc,d} Y^{dbc,a} - \frac{3}{4(\mathbf{D}-4)} Y_{ab} Y^{ab} \\ &- \frac{3}{2} Y^{abc,d} \partial_a \Phi_{bc,d} + \frac{3}{2} X_{abc} Y^{ab,c} - \frac{3}{2} \frac{1}{(\mathbf{D}-3)} Y_a Y^a \\ &+ \frac{3}{2} Y^{ca,d} Y_{cd,a} + \frac{3}{2} \mu Y^{bc,d} \Phi_{bc,d} \Bigg] \ . \quad (20) \end{aligned}$$

La simetría de Lorentz asociada con los parámetros Λ_{mnp} puede ser usada para fijar el calibre de dos formas distintas. La primera alternativa consiste en escoger $X_{mn,p} = 0$, y la otra posibilidad es fijar $C_{mnp} = 0$ que permitiría eliminar la parte antisimétrica de $\Phi_{mn,p}$ (es decir, $\Phi_{[mn,p]} = 0$). Ambas escogencias conllevan a lo mismo: la formulación a primer orden para la acción masiva de Curtright. Fijemos el calibre $X_{mn,p} = 0$, luego calculemos las ecuaciones de movimiento para el campo $Y_{mn,p}$,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta Y_{mn,p}} = 0 \to Y_{ab,c} &= -\frac{1}{2} \mu \Big(T_{ab,c} + T_{ac,b} - T_{bc,a} \Big) \\ &+ \mu \Big(\eta_{bc} T_a - \eta_{ac} T_b \Big) \ . \quad (21) \end{aligned}$$

Reemplazando en (20),

$$\begin{aligned} S &= \int d^{\mathbf{D}}x \Bigg[\frac{3}{4} Y_{abc,d} Y^{dbc,a} - \frac{3}{4(\mathbf{D}-3)} Y_{ab} Y^{ab} \\ &- \frac{3}{2} Y^{abc,d} \partial_a \Phi_{bc,d} - \frac{3}{8} \mu^2 \Big(\Phi_{ab,c} \Phi^{ab,c} + 2 \Phi_{ac,b} \Phi^{ab,c} \\ &- 4 \Phi_a \Phi^a \Big) \Bigg] \ . \quad (22) \end{aligned}$$

Los primeros tres términos de (22) conforman la acción a primer orden para el campo no masivo de Curtright. Si se descompone el campo Φ_{mn} de la siguiente manera,

$$\Phi_{mn,p} = T_{mn,p} + C_{mnp} \quad (23)$$

con $T_{[mn,p]} = 0$ y con el campo C_{mnp} completamente antisimétrico en todos sus índices; y si se sustituye (23) dentro de (22), nos damos cuenta que la parte cinética de la acción no depende de C_{mnp}, mientras que los coeficientes del término masivo son tales que los constituyentes de $\Phi_{mn,p}$ están desacoplados,

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2} \int d^{\mathbf{D}}x \Big[-\frac{1}{6} F_{abc,d} F^{abc,d} + \frac{1}{2} F_{abc,c} F^{abd,d} \\ &- \frac{1}{2} \mu^2 (T_{ab,c} T^{ab,c} - 2 T_{ab,b} T^{ac,c} - C_{mnp} C^{mnp}) \Big] \ . \end{aligned}$$

$F_{abc,d}$ es el campo de fuerzas ($F_{abc,d} = \partial_a T_{bcd} + \partial_b T_{cad} + \partial_c T_{abd}$). C_{mnp} no es un campo dinámico, por lo que es posible eliminarlo a través de su ecuación de movimiento

$$\frac{\delta S}{\delta C_{mnp}} = 0 \to C_{mnp} = 0 \quad (24)$$

con lo cual se tiene

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2} \int d^{\mathbf{D}}x \Big[-\frac{1}{6} F_{abc,d} F^{abc,d} + \frac{1}{2} F_{abc,c} F^{abd,d} \\ &- \frac{1}{2} \mu^2 (T_{ab,c} T^{ab,c} - 2 T_{ab,b} T^{ac,c}) \Big] \ . \quad (25) \end{aligned}$$

La expresión (25) no es más que la acción a segundo orden para el campo de Curtright masivo. El número de grados de libertad para esta teoría es $\frac{1}{3}(\mathbf{D}^2-1)(\mathbf{D}-3)$, mientras que para el caso no masivo se propagan $\frac{1}{3}\mathbf{D}(\mathbf{D}-2)(\mathbf{D}-4)$ modos transversos. El campo de Curtright no masivo en $(\mathbf{D}+1)$-dimensiones tiene el mismo número de grados de libertad que el campo de Curtright masivo en $\mathbf{D}$-dimensiones.

Si se escogiese el calibre $C_{mnp} = 0$ ($\Phi_{mn,p} = T_{mn,p}$), entonces X_{mnp} sería un multiplicador que nos dice que $Y_{[mn,p]} = 0$, y que luego de calcular la ecuación de movimiento del campo $Y_{mn,p}$, se llegaría nuevamente a la acción de segundo orden para el campo de Curtright masivo.

NUEVA GRAVEDAD MASIVA DUAL

La formulación a primer orden en cuatro dimensiones que se propone para la NMDG de cuarto orden en derivadas involucra tres variables independientes: el campo de Curtright $T_{mn,p}$; una conexión auxiliar h_{mn} que no posee simetría definida en sus índices y un campo auxiliar[2] $Y_{mn,p}$

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \Bigg[-\frac{1}{4}(h_{mn}h^{nm} - h^2) \\ &+ \frac{1}{2}\varepsilon^{mrpq} h_{mn}\partial_r T_{pq,}{}^{n} + Y^{ca,d}Y_{cd,a} - \frac{1}{2}Y_a Y^a \\ &+ \mu Y^{bc,d}T_{bc,d} \Bigg] \ . \end{aligned} \tag{26}$$

Tanto $T_{mn,p}$ como $Y_{mn,p}$ cumplen con la propiedad cíclica

$$T_{[mn,p]} = 0 \qquad Y_{[mn,p]} = 0 \ .$$

Calculemos las variaciones independientes en los tres campos,

$$\frac{\delta S}{\delta h_{nm}} = 0 \rightarrow h_{mn} = \varepsilon_{nrpq}\partial^r T^{pq,}{}_{m} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta Y_{ab,c}} = 0 \Longrightarrow Y_{ab,c} &= -\frac{1}{2}\mu\Big(T_{ab,c} + T_{ac,b} - T_{bc,a}\Big) \\ &+ \mu\Big(\eta_{bc}T_a - \eta_{ac}T_b\Big) \end{aligned} \tag{28}$$

$$\frac{\delta S}{\delta T_{mn,p}} = 0 \Longrightarrow Y_{mn,p} = \frac{1}{2\mu}\varepsilon_{mnrq}\partial^q h^r{}_p \ . \tag{29}$$

Las ecuaciones (27) y (29) son a primer orden en derivadas, mientras que la ecuación (28) es puramente algebraica. Como es usual, si se reemplaza las ecuaciones (27) y (28) dentro de (26), se llega a la teoría de segundo orden para Curtright masivo (Ec. 25). Alternativamente, se puede expresar el campo $Y_{mn,p}$ en términos de la segunda derivada del campo de Curtright $T_{mn,p}$, sustituyendo (27) dentro de (29),

$$Y^{mn,p} = -\frac{1}{\mu}\mathfrak{G}^{mn,p} \tag{30}$$

en donde

$$\mathfrak{G}^{mn,p} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{mnqr}\varepsilon^{pkls}\partial_q\partial_k T_{ls,r}$$

es el *tensor de Eisntein generalizado* (siendo $Y^m = -\frac{1}{\mu}\mathfrak{G}^m$ la traza de $Y^{mn,p}$). Usando la propiedad cíclica del campo $Y_{mn,p}$ se tiene

$$Y^{mn,p}Y_{mp,n} - \frac{1}{2}Y^m Y_m = \frac{1}{2}Y^{mn,p}Y_{mn,p} - \frac{1}{2}Y^m Y_m \ . \tag{31}$$

Tomando en cuenta esto último, y sustituyendo las expresiones (27) y (30) dentro de (26) se obtiene

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x \Bigg[-T_{mn,p}\mathfrak{G}^{mn,p} + \frac{1}{\mu^2}\mathfrak{G}^{mn,p}\mathfrak{C}_{mn,p} \Bigg] \tag{32}$$

siendo $\mathfrak{C}_{mn,p}$ alguna especie del tensor generalizado de *Shouten*

$$\mathfrak{C}_{mn,p} \equiv \mathfrak{G}_{mn,p} - \frac{1}{2}(\eta_{np}\mathfrak{G}_m - \eta_{mp}\mathfrak{G}_n) \ .$$

Nótese el signo incorrecto del término cinético de Curtright en la ecuación (32). De esta manera se ha implementado una acción de primer orden que establece la equivalencia entre la teoría de segundo orden masiva de Curtright (Ec. 25) con la acción de cuarto orden en derivadas de la NMDG (Ec. 32).

NUEVA GRAVEDAD MASIVA

Para este caso se propone la siguiente formulación a primer orden,

$$\begin{aligned} S &= \int d^3x \Bigg[-\frac{1}{2}(\omega_{mn}\omega^{nm} - \omega^2) + \varepsilon^{mnp}\omega_{mr}\partial_n e_p{}^r \\ &+ \frac{1}{2}Y^{mn}Y_{nm} - \frac{1}{4}Y^2 + \mu Y^{mn}e_{mn} \Bigg] \ . \end{aligned} \tag{33}$$

Se han denotado los campos auxiliares como ω_{mn} y Y_{mn}, los cuales son tensores generales de segundo orden sin simetría alguna en sus índices. Calculemos las ecuaciones de movimiento de cada uno de los campos:

$$\frac{\delta S}{\delta \omega_{mn}} = 0 \Longrightarrow$$

$$\omega_{nm} = \varepsilon_{mrp}\partial_r e^p{}_n - \frac{1}{2}\eta_{nm}\varepsilon^{rpk}\partial_r e_{pk} \equiv W_{nm}[e] \tag{34}$$

$$\frac{\delta S}{\delta Y_{mn}} = 0 \Longrightarrow Y^{nm} = -\mu(e^{mn} - \eta^{mn}e) \tag{35}$$

$$\frac{\delta S}{\delta e_{mn}} = 0 \Longrightarrow Y^{nm} = \frac{1}{\mu}\varepsilon^{rsm}\partial_s\omega_r{}^n \ . \tag{36}$$

Sustituyendo (34) y (35) dentro de (33) se tiene

$$S = \int d^3x \Bigg[\frac{1}{2}e_p{}^n\varepsilon^{prm}\partial_r W_{mn}[e] - \frac{1}{2}\mu^2\Big(e^{nm}e_{mn} - e^2\Big) \Bigg] \ . \tag{37}$$

En este punto se realizará la siguiente descomposición del campo e_{mn} en su parte simétrica $h_{mn} = h_{nm}$ y antisimétrica $\epsilon_{mnp}V^p$,

$$e_{mn} = h_{mn} + \varepsilon_{mnp}V^p \tag{38}$$

con lo cual (37) queda

$$S = \int d^3x \left[\frac{1}{2} h_{pn} \varepsilon^{prm} \varepsilon_{nkl} \partial_r \partial^k h^l{}_m - \frac{1}{2}\mu^2 \Big(h^{mn} h_{mn} - h^2 \Big) - \mu^2 V_q V^q \right] .$$

La componente antisimétrica V^p aparece desacoplada dentro del término masivo, por lo que puede eliminarse trivialmente mediante su ecuación de movimiento

$$\frac{\delta S}{\delta V^q} = 0 \Longrightarrow V_q = 0 \tag{39}$$

resultando en

$$S = \int d^3x \left[\frac{1}{2} h_{mn} \mathfrak{G}^{mn} - \frac{1}{2}\mu^2 (h^{mn} h_{mn} - h^2) \right] , \tag{40}$$

en donde $\mathfrak{G}_{mn}$ es el tensor de Einstein linealizado

$$\mathfrak{G}_{pn} \equiv \varepsilon_{prm} \varepsilon_{nkl} \partial^r \partial^k h^{lm} \; . \tag{41}$$

La expresión (40) no es más que la acción para espín 2 masivo. El primer término es simplemente la acción de Einstein–Hilbert (EH) linealizado en tres dimensiones ($e_{mq}\epsilon^{mnp}\partial_n W_{pq}[e] = h_{mn}G^{mn}, G^{mn} = R^{mn} - \frac{1}{2}\eta^{mn}R$ es el tensor de Einstein linealizado) expresado sólo en términos de la parte simétrica de e_{mn}. Similarmente a como se hizo en la sección anterior, se puede expresar el campo Y_{mn} en términos de segundas derivadas del campo h_{mn} reemplazando (34) en (36):

$$Y^{mn} = -\frac{1}{\mu} \epsilon^{mpq} \partial_p W_q{}^n[h] = -\frac{1}{\mu} \mathfrak{G}^{mn}[h] \; . \tag{42}$$

Finalmente, sustituyendo los resultados (34) y (42) dentro de la acción (33) se tiene

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x \left[-h_{mn} \mathfrak{G}^{mn} + \frac{1}{\mu^2} \Big(R_{mn} R^{mn} - \frac{3}{8} R^2 \Big) \right] . \tag{43}$$

Esta es la NMG de cuarto orden en derivadas en tres dimensiones.[6] Es decir, se ha implementado una acción a primer orden (Ec. 33) que logra reproducir a (43).

CONCLUSIONES

Se ha introducido una acción a primer orden para la NMDG en cuatro dimensiones. Para llegar a este objetivo, se introdujeron dos campos auxiliares, h_{mn} y $Y_{mn,p}$, además del campo de Curtright $T_{mn,p}$. Uno de esos campos auxiliares viene de la reducción dimensional de la acción a primer orden para el campo de Curtright, mientras que el otro campo auxiliar aparece cuando se considera el término cinético a primer orden para un campo de simetría general[8] $T_{s_1 \ldots S_{\mathbf{D-2}}, n}$

$$S = \int d^Dx \left[-\frac{1}{4}(h_{mn} h^{nm} - h^2) + \frac{1}{2} \varepsilon^{mnS_1 \ldots S_{\mathbf{D}-2}} h_{mr} \partial_n T_{S_1 \ldots S_{\mathbf{D}-2},}{}^r \right] .$$

Esta acción es topológica en el sentido que no propaga ningún grado de libertad, y los términos cinéticos para la formulación en tres y cuatro dimensiones surgieron de ella. Por otro lado, se empleó una formulación a primer orden completamente nueva para un campo $\Phi_{mn,p}$ no masivo de simetría mixta[2] $\Phi_{mn,p} = -\Phi_{nm,p}$ (Ec. 11) válida para dimensión arbitraria. Se le aplicó la técnica de la reducción dimensional, manteniendo los primeros modos masivos, para dotar de masa al campo de Curtright obteniendo una formulación a primer orden. Con estas acciones de bajo orden en derivadas, el análisis canónico y la investigación sobre la posible existencia de fantasmas son tareas factibles. Estos aspectos serían el propósito de un trabajo futuro.

AGRADECIMIENTO

Queremos agradecer a Denis Dalmazi por sus fructíferos comentarios. Por otra parte, agradecemos a Willian Barreto y Luis Moreno Villamediana por leer y revisar el manuscrito.

REFERENCIAS

1. **Curtright, T.** Generalized gauge fields. *Phys. Lett. B*, **165**: 304–308, 1985.

2. **Bracho, A., Khoudeir, A.** First order actions for new massive dual gravity. *Phys. Rev. D*, **88**: 025045, 2013.

3. **Boulanger, N., Cnockaert, S., Henneaux, M.** A note on spin-S duality. *Arxiv[hep-th]:0306023 v3*, 2003.

4. **González, B., Khoudeir, A., Montemayor, R., Urrutia L.F.** Duality for massive spin two theories in arbitrary dimensions. *Phys. Rev. D*, **78**: 065041, 2008

5. **Hull, C.M.** Duality in gravity and higher spin gauge fields. *ArXiv[hep-th]:0107149v.3*, 2001.

6. **Bergshoeff, E., Hohm, O., Townsend, P.** Massive gravity in three dimensions. *ArXiv[hept-th]:0901.1766v.3*, 2009.

7. **Bergshoeff, E., Townsend, P.K., Fernández-Melgarejo, J.J., Rosseel J.** On new massive 4D gravity. *ArXiv[hep-th]:1202.1501v.1*, 2012.

8. **Zinoviev, Yu.** Firt order formalism for mixed symmetry tensor fields. *ArXix[hep-th]:0304067V.1*, 2003.

***Correspondencia**: Alexangel Bracho, Laboratorio de Astrofísica y Física Teórica, Departamento de Física, Facultad Experimental de Ciencias, Maracaibo 4001, Universidad del Zulia, Venezuela.
CE: alexangelb@gmail.com