

Algoritmo para gerar invólucros convexos

Artur Queiroz - PG38014
Luís Albuquerque - PG38015

December 14, 2019

1 Introdução

Neste trabalho abordamos um dos principais temas de Geometria Computacional, Invólucros Convexos. Estes são muito usados porque têm aplicações em bastantes áreas como reconhecimento de padrões, processamento de imagem, estatística, etc.

Existem várias formas de construir um, mas neste trabalho vamos nos cingir a implementar o "*merge-hull*". Que é um algoritmo que se usa, umas das técnicas mais importantes na computação, que se chama "Dividir para conquistar". Que se baseia em dividir um problema complexo, em problemas mais pequenos e mais fáceis.

2 Descrição

Para implementarmos o algoritmo apenas temos que seguir os passos a baixo.

- Ordenar os pontos por ordem lexicográfica.
- Remover os pontos repetidos.
- Criar o Invólucro convexo
 - Se o conjunto tem apenas 1 elemento, criar um "polígono" de 1 elemento e acaba-se a função.
 - Separar os pontos em dois conjuntos A e B, onde A contem os pontos da esquerda e B os da direita.
 - Calcular o invólucro convexo de A, $\mathcal{A} = I(A)$ e o de B, $\mathcal{B} = I(B)$ recursivamente

- Encontrar o pontos de junção.
- Juntar \mathcal{A} e \mathcal{B} , calculando o invólucro convexo de $A \cup B$.

Agora vamos explicar com mais detalhe todo o processo.

2.1 Ordenar os Pontos

Para ordenar os pontos, pode ser usado qualquer algoritmo de ordenação, tendo em atenção que a escolha do algoritmo de ordenação, pode alterar a complexidade do algoritmo como um todo. Nós optamos por escolher o algoritmo de ordenação *merge sort*, além de ter uma das melhores complexidades $\Theta(n \log n)$, achamos que se enquadra perfeitamente no espírito do algoritmo, "Dividir para conquistar".

2.1.1 Descrição de MergeSort

Input: array, índice esquerdo, índice direito

Começando com o índice esquerdo a 0, e o índice direito a (*tamanho do array*) - 1

- Primeiro encontra-se o índice médio do Array e divide-se em dois. ($\text{meio} = (\text{esquerda} + \text{direita})/2$)
- Calcular o MergeSort(array, esquerda, meio) (a lista que fica à esquerda)
- Calcular o MergeSort(array, meio+1, direita) (a lista que fica à direita)
- No final junta os dois de forma ordenada.

2.2 Remover os Pontos Repetidos

Já que neste contexto sabemos que o array está ordenado, podemos fazer este algoritmo com 2 índices, um para percorrer o array, o outro para percorrer o novo array onde todos os elementos são diferentes. Se o valor dos dois índices for diferente então incrementa-se o segundo índice e atribui-se o valor do primeiro índice no valor do segundo índice. Se o valor dos dois índices for igual, apenas incrementa-se o primeiro índice.

2.3 Separar os Pontos em dois conjuntos

No trabalho decidimos usar um array, para que a sua divisão a meio tivesse uma complexidade constante é tão simples como encontrar o índice a meio do array.

2.4 Juntar os invólucros convexos

Liberta-se a memória dos vértices entre as duas ligações e de seguida conecta-se as duas ligações.

3 Correção

Depois de mostrarmos como é o algoritmo, aqui vamos provar, porque é que o algoritmo faz o que diz que faz. Tendo I como a nossa função descrita em cima.

Queremos que no fim de execução do algoritmo, o polígono retornado seja o invólucro convexo do conjunto dado no input.

Para isso vamos usar um Corolário dado nas aulas, descrito como:

”Seja $S \subseteq \mathbb{R}^2$ e P um polígono de vértices positivamente orientados $v_0, \dots, v_{n-1} \in S$ tal que cada vértice é estritamente convexo e $S \subseteq P$. Então P é o invólucro convexo de S .”

E a definição:

” v_i diz-se estritamente convexo se $\mathcal{A}(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) > 0$.”

Agora para provar que o nosso algoritmo retorna o invólucro convexo do conjunto dado no input, basta provar que o polígono retornado, com os vértices positivamente orientados, tem todos os vértices estritamente convexos e contém todo o conjunto de pontos.

Seja S o conjunto de pontos dado no input.

Caso base ($S = \emptyset$):

Como não há elementos é trivialmente verdade.

Caso base ($\#S = 1$):

Seja $S = \{e\}$,

Temos de mostrar que $e \in I(\{e\})$

$e \in I(\{e\})$
 $\equiv \{\text{Descrição do algoritmo}\}$
 $e \in \{e\}$ (Trivial)

Caso indutivo:

Para $S = S_1 \cup S_2$

Por hipótese sabemos que:

1. $< \forall p_1 : p_1 \in S_1 : p_1 \in I(S_1) >$
2. $< \forall p_2 : p_2 \in S_2 : p_2 \in I(S_2) >$

Queremos que:

$< \forall p : p \in S : p \in I(S) >$
 $\equiv \{\dots\}$
 $< \forall p : p \in S : p \in I(S) >$
 $\equiv \{\dots\}$

■

3.1 Proposição Sandwich

Seja H um invólucro convexo.

Seja l_s e l_i linhas superior (com a orientação direita para a esquerda) e inferior (com a orientação esquerda para a direita), respectivamente.

Seja p e q pontos em H tais que $leftOn(l_s, p)$, $leftOn(l_s, q)$, $leftOn(l_i, p)$ e $leftOn(l_i, q)$

Então,

$$< \forall n : n \in \overline{p q} : leftOn(l_s, n) \wedge leftOn(l_i, n) >$$

3.2 Proposição Tangente

Seja H um invólucro convexo e l uma linha que interceta num ponto de H , p_1 , no sentido contrário dos ponteiros do relógio. Seja p_0 o ponto anterior a p_1 e p_2 o ponto posterior a p_1 . Temos que:

$$leftOn(l, p_0) \wedge leftOn(l, p_2) \Rightarrow < \forall p : p \in H : leftOn(l, p) >$$

3.2.1 Demonstração

Suponhamos que $leftOn(l, p_0) \wedge leftOn(l, p_2)$ e que existe um $p \in H$ tal que $right(l, p)$ isso significa que a linha $\overline{p p_1}$ não está no invólucro convexo. Que é uma contradição, ou seja, $< \forall p : p \in H : leftOn(l, p) >$

4 Complexidade

A nossa implementação não foi exatamente igual ao algoritmo original, apesar de não alterar na conta da complexidade assintoticamente. Por isso vamos avaliar a correção da nossa implementação, e quando achamos pertinente, vamos fazer a ressalva, mencionando as diferenças em relação ao algoritmo original.

- Ordenar os pontos pela cordenada x, tem Complexidade $\Theta(n \log n)$
- Separar os pontos em dois conjuntos A e B, onde A contém os pontos da esquerda e B os da direita.
- Calcular o invólucro convexo de A, $\mathcal{A} = I(A)$ e o de B, $\mathcal{B} = I(B)$ recursivamente
- No final juntar \mathcal{A} e \mathcal{B} , calculando o invólucro convexo de $A \cup B$.

5 Conclusão