

Построить квадратуру Гаусса-Кристоффеля с двумя узлами для вычисления интеграла

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx .$$

(можно использовать многочлен Эрмита или Чебышева).

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx &= \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \left(\frac{i}{n+1} \pi \right) f \left(\cos \left(\frac{i}{n+1} \pi \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{\pi}{3} \sin^2 \left(\frac{i}{3} \pi \right) f \left(\cos \left(\frac{i}{3} \pi \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \sin^2 \left(\frac{1}{3} \pi \right) f \left(\cos \left(\frac{1}{3} \pi \right) \right) + \frac{\pi}{3} \sin^2 \left(\frac{2}{3} \pi \right) f \left(\cos \left(\frac{2}{3} \pi \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{4} f \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{\pi}{4} f \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(f \left(\frac{1}{2} \right) + f \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \end{aligned}$$