Контрольная работа
по решению уравнений и систем уравнений
Вопрос 1 and 2

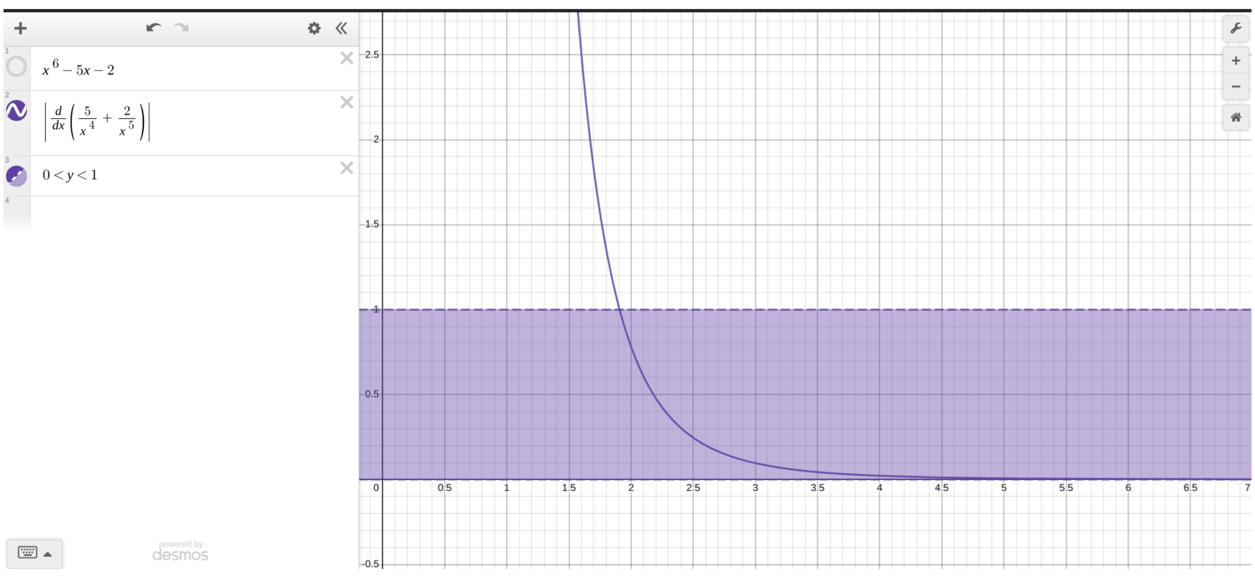
Предлагаемая формула для использования в методе простой итерации была следующей:

$$x^6 - 5x - 2 = 0$$
$$x^6 = 5x + 2$$
$$x = \frac{5}{x^4} + \frac{2}{x^5}$$
$$\therefore x_{n+1} = \frac{5}{x_n^4} + \frac{2}{x_n^5}$$

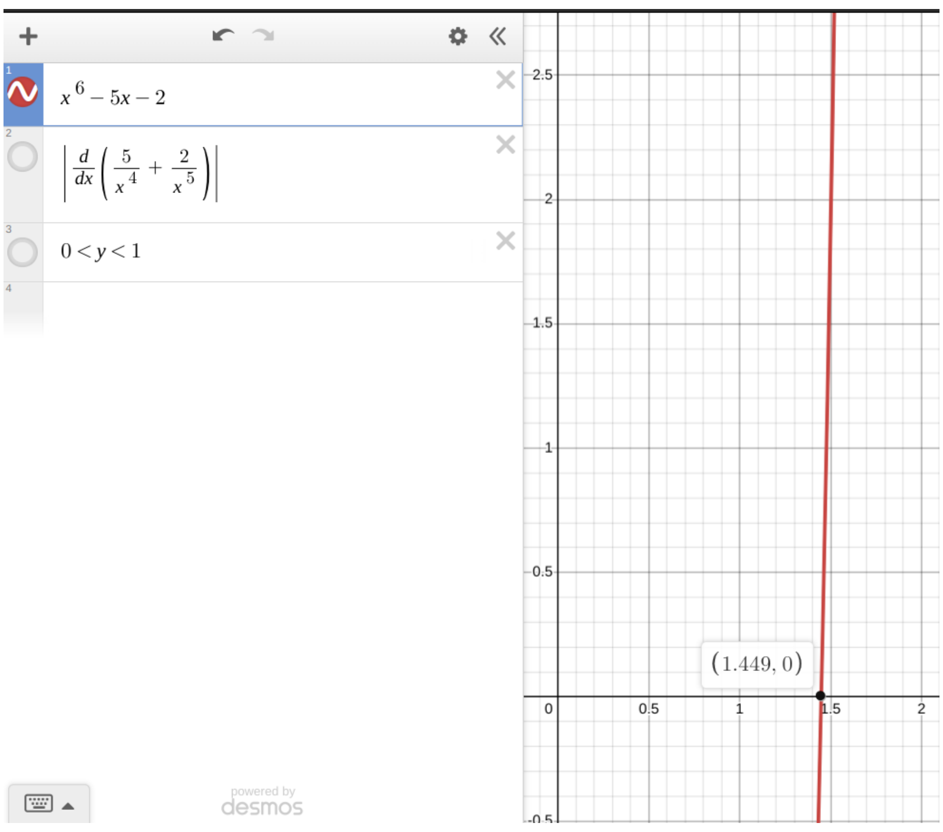
Чтобы проверить, работает ли эта функция для метода простой итерации (т. е. сходится ли она), мы должны проверить следующее:

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{5}{x^4} + \frac{2}{x^5}\right)\right| < 1,\ \forall x \in I,\ x_{\text{корень}} \in I$$

Сверяясь с Desmos, получаем следующий график:



Там мы видим, что при значениях x меньше 2 наш метод будет расходиться. Поэтому нам нужно проверить, есть ли корни в этом интервале $(0, 2)$.



Как видно, единственный положительный корень (поскольку при всех $x > 2$ все значения производных функции положительны) находится в этом интервале, где модуль нашей производной больше 1. Это означает, что эта функция не привести к корню и метод будет расходиться.

ВОПРОС 2

Построить алгоритм метода Ньютона для решения системы уравнений. Сходится ли метод при выборе в качестве начального приближения точки M?

$$\begin{cases} x - y^3 = 1, \\ (x+3)(y-1) = 5, \end{cases} \qquad M = (0,0).$$

$$F(u) = \begin{pmatrix} x - y^3 - 1 \\ (x+3)(y-1) - 5 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -3y^2 \\ y-1 & x+3 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = \frac{1}{x + 3 - (-3y^2)(y-1)} \begin{pmatrix} x+3 & 3y^2 \\ 1-y & 1 \end{pmatrix}$$

Используя $M = (0, 0)$ в качестве начального приближения:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{0 + 3 - (-3 \cdot 0^2)(0-1)} \begin{pmatrix} 0+3 & 3 \cdot 0^2 \\ 1-0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 - 0^3 - 1 \\ (0+3)(0-1) - 5 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Используя больше итераций, мы видим, что использование $M = (0, 0)$ в качестве начального приближения расходится.

$$u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1.0 \\ -3.0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1.8396226415094339 \\ -3.8207547169811322 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 6.526038850197102 \\ -5.006502255327961 \end{pmatrix}$$

$$u_4 = \begin{pmatrix} 14.284907091290336 \\ -6.645642562719063 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$u_{97} = \begin{pmatrix} 8.542782266737642e+21 \\ -2791904605926.876 \end{pmatrix}$$

$$u_{98} = \begin{pmatrix} 1.4237970444563757e+22 \\ -3722539474569.168 \end{pmatrix}$$

$$u_{99} = \begin{pmatrix} 2.372995074094087e+22 \\ -4963385966092.225 \end{pmatrix}$$