



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

По основной образовательной программе подготовки бакалавров направлению
01.03.02 Прикладная математика и информатика профиль «Системное
программирование»

Студент группы Б9121-02.03.01сцт

Москера Креспо Адриан Хосуэ

«26» января 2024 г.

Преподаватель кандидат физико-
математических наук

_____ (подпись)

Яковлев Анатолий Александрович

«__» _____ 2023 г.

г. Владивосток

2023

Постановка задачи

Пусть дана матричная игра, заданная матрицей A размерности 6×8 . Необходимо найти верхнюю и нижнюю цену игры и равновесное решение в смешанных стратегиях.

$$\begin{pmatrix} -10.46 & 14.80 & -21.25 & 30.84 & -4.49 & 24.20 & 47.45 & 5.68 \\ -24.87 & 33.86 & 45.66 & -22.12 & -16.24 & 45.51 & 35.63 & -11.31 \\ -33.39 & 19.95 & 5.01 & -10.35 & 14.18 & 40.46 & 35.13 & -26.32 \\ 16.94 & -16.97 & -4.94 & -40.60 & -11.14 & -41.60 & 15.08 & -22.84 \\ -4.66 & 14.45 & -26.48 & 29.28 & 38.81 & 20.88 & 24.52 & 35.68 \\ -43.57 & -1.90 & -19.70 & 4.80 & 12.11 & -3.41 & 29.07 & -22.78 \end{pmatrix}$$

Нижняя цена игры:

$$\underline{A} = \max_i \min_j a_{ij} = -21.254878614230552$$

Верхняя цена игры:

$$\overline{A} = \min_j \max_i a_{ij} = 16.937688915945937$$

Искать равновесное решение в смешанных стратегиях будем с помощью симплекс-метода. Для этого необходимо сделать матрицу A неотрицательной, поэтому к каждому элементу матрицы A добавим модуль минимального элемента β матрицы A .

$$\beta = \min_{ij} a_{ij} = -43.574988621921335$$

Получается неотрицательная матрица \hat{A} .

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 33.12 & 58.38 & 22.32 & 74.42 & 39.09 & 67.78 & 91.02 & 49.25 \\ 18.70 & 77.43 & 89.23 & 21.45 & 27.34 & 89.09 & 79.21 & 32.26 \\ 10.18 & 63.53 & 48.59 & 33.22 & 57.76 & 84.04 & 78.71 & 17.26 \\ 60.51 & 26.61 & 38.64 & 2.98 & 32.44 & 1.97 & 58.65 & 20.74 \\ 38.91 & 58.02 & 17.09 & 72.86 & 82.38 & 64.45 & 68.09 & 79.25 \\ 0.00 & 41.68 & 23.87 & 48.38 & 55.68 & 40.17 & 72.65 & 20.80 \end{pmatrix}$$

Необходимо решить следующие задачи:

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{cases} y \cdot e \rightarrow \max \\ \hat{A}y \leq e^T \\ y \geq 0 \end{cases} & 2. \begin{cases} e \cdot x \rightarrow \min \\ \hat{A}^T x \geq e \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

В этом случае оптимальная стратегия первого игрока будет найдена по формуле:

$$p^* = \frac{x}{\|x\|}$$

.

А оптимальная стратегия второго игрока будет найдена по формуле:

$$q^* = \frac{y}{\|y\|}$$

Цена игры будет равна:

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} - |\beta|$$

где α – значение целевой функции, полученной в результате решения задач линейной оптимизации.

q^* – находится прямой задачей; p^* – находится двойственной задачей.

Прямая задача

Задача приводится к каноническому виду. За начальную угловую точку берём $y_0 = (0, e)$.

$$\begin{pmatrix} -1.00 & -1.00 & -1.00 & -1.00 & -1.00 & -1.00 & -1.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 33.12 & 58.38 & 22.32 & 74.42 & 39.09 & 67.78 & 91.02 & 49.25 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 18.70 & 77.43 & 89.23 & 21.45 & 27.34 & 89.09 & 79.21 & 32.26 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 10.18 & 63.53 & 48.59 & 33.22 & 57.76 & 84.04 & 78.71 & 17.26 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 60.51 & 26.61 & 38.64 & 2.98 & 32.44 & 1.97 & 58.65 & 20.74 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 38.91 & 58.02 & 17.09 & 72.86 & 82.38 & 64.45 & 68.09 & 79.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 41.68 & 23.87 & 48.38 & 55.68 & 40.17 & 72.65 & 20.80 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 \end{pmatrix}$$

разрешающая строка = №5

разрешающий столбец = №1

разрешающий элемент = 60.512677537867276

$$\begin{pmatrix} 0.00 & -0.56 & -0.36 & -0.95 & -0.46 & -0.97 & -0.03 & -0.66 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.02 & 0.00 & 0.00 & 0.02 \\ 0.00 & 43.81 & 1.17 & 72.79 & 21.33 & 66.70 & 58.92 & 37.90 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & -0.55 & 0.00 & 0.00 & 0.45 \\ 0.00 & 69.21 & 77.29 & 20.53 & 17.31 & 88.48 & 61.08 & 25.85 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & -0.31 & 0.00 & 0.00 & 0.69 \\ 0.00 & 59.05 & 42.09 & 32.72 & 52.30 & 83.71 & 68.84 & 13.77 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & -0.17 & 0.00 & 0.00 & 0.83 \\ 1.00 & 0.44 & 0.64 & 0.05 & 0.54 & 0.03 & 0.97 & 0.34 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.02 & 0.00 & 0.00 & 0.02 \\ 0.00 & 40.91 & -7.76 & 70.94 & 61.52 & 63.18 & 30.37 & 65.92 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.64 & 1.00 & 0.00 & 0.36 \\ 0.00 & 41.68 & 23.87 & 48.38 & 55.68 & 40.17 & 72.65 & 20.80 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 \end{pmatrix}$$

разрешающая строка = №6

разрешающий столбец = №6

разрешающий элемент = 63.18152294907165

$$\begin{pmatrix} 0.00 & 0.07 & -0.48 & 0.14 & 0.48 & 0.00 & 0.43 & 0.35 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.02 & 0.00 & 0.02 \\ 0.00 & 0.62 & 9.36 & -2.11 & -43.61 & 0.00 & 26.86 & -31.68 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.13 & -1.06 & 0.00 & 0.08 \\ 0.00 & 11.91 & 88.15 & -78.82 & -68.84 & 0.00 & 18.55 & -66.45 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.59 & -1.40 & 0.00 & 0.19 \\ 0.00 & 4.85 & 52.36 & -61.27 & -29.21 & 0.00 & 28.60 & -73.56 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.68 & -1.32 & 0.00 & 0.36 \\ 1.00 & 0.42 & 0.64 & 0.01 & 0.50 & 0.00 & 0.95 & 0.31 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.02 & -0.00 & 0.00 & 0.02 \\ 0.00 & 0.65 & -0.12 & 1.12 & 0.97 & 1.00 & 0.48 & 1.04 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.02 & 0.00 & 0.01 \\ 0.00 & 15.67 & 28.81 & 3.27 & 16.57 & 0.00 & 53.34 & -21.11 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.41 & -0.64 & 1.00 & 0.77 \end{pmatrix}$$

разрешающая строка = №3

разрешающий столбец = №3

разрешающий элемент = 88.15166460660836

$$\begin{pmatrix} 0.00 & 0.13 & 0.00 & -0.29 & 0.10 & 0.00 & 0.54 & -0.01 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.01 & 0.01 & 0.00 & 0.02 \\ 0.00 & -0.64 & 0.00 & 6.26 & -36.30 & 0.00 & 24.89 & -24.62 & 1.00 & -0.11 & 0.00 & 0.07 & -0.91 & 0.00 & 0.06 \\ 0.00 & 0.14 & 1.00 & -0.89 & -0.78 & 0.00 & 0.21 & -0.75 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.01 & -0.02 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -2.23 & 0.00 & -14.45 & 11.69 & 0.00 & 17.58 & -34.08 & 0.00 & -0.59 & 1.00 & 0.33 & -0.49 & 0.00 & 0.25 \\ 1.00 & 0.33 & 0.00 & 0.59 & 1.01 & 0.00 & 0.82 & 0.79 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.01 & 0.01 & 0.00 & 0.01 \\ 0.00 & 0.66 & 0.00 & 1.01 & 0.88 & 1.00 & 0.51 & 0.95 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.01 & 0.00 & 0.01 \\ 0.00 & 11.78 & 0.00 & 29.03 & 39.07 & 0.00 & 47.28 & 0.61 & 0.00 & -0.33 & 0.00 & 0.22 & -0.18 & 1.00 & 0.71 \end{pmatrix}$$

разрешающая строка = №6

разрешающий столбец = №4

разрешающий элемент = 1.0131157642947446

$$\begin{pmatrix} 0.00 & 0.32 & 0.00 & 0.00 & 0.36 & 0.29 & 0.68 & 0.27 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.01 & 0.01 & 0.00 & 0.02 \\ 0.00 & -4.75 & 0.00 & 0.00 & -41.73 & -6.18 & 21.76 & -30.50 & 1.00 & -0.11 & 0.00 & 0.13 & -0.99 & 0.00 & 0.02 \\ 0.00 & 0.72 & 1.00 & 0.00 & -0.01 & 0.88 & 0.66 & 0.09 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.01 \\ 0.00 & 7.24 & 0.00 & 0.00 & 24.21 & 14.27 & 24.81 & -20.52 & 0.00 & -0.57 & 1.00 & 0.20 & -0.30 & 0.00 & 0.33 \\ 1.00 & -0.05 & 0.00 & 0.00 & 0.50 & -0.58 & 0.52 & 0.24 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.02 & 0.00 & 0.00 & 0.01 \\ 0.00 & 0.66 & 0.00 & 1.00 & 0.87 & 0.99 & 0.50 & 0.94 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.01 & 0.00 & 0.01 \\ 0.00 & -7.25 & 0.00 & 0.00 & 13.91 & -28.65 & 32.76 & -26.63 & 0.00 & -0.37 & 0.00 & 0.48 & -0.58 & 1.00 & 0.54 \end{pmatrix}$$

Результат

$$y = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.00 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix} \quad \alpha = 2.4747741869746445e - 2 \quad q^* = \frac{y}{\|y\|} = \begin{pmatrix} 0.77 \\ 0.00 \\ 0.50 \\ 0.39 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix}$$

Двойственная задача

Двойственная задача приводится к каноническому виду, далее ищется начальная угловая точка, решая вспомогательную задачу.

Решение вспомогательной задачи

$$\begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 \\ 33.12 & 18.70 & 10.18 & 60.51 & 38.91 & 0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 58.38 & 77.43 & 63.53 & 26.61 & 58.02 & 41.68 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 22.32 & 89.23 & 48.59 & 38.64 & 17.09 & 23.87 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 74.42 & 21.45 & 33.22 & 2.98 & 72.86 & 48.38 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 39.09 & 27.34 & 57.76 & 32.44 & 82.38 & 55.68 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 67.78 & 89.09 & 84.04 & 1.97 & 64.45 & 40.17 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 91.02 & 79.21 & 78.71 & 58.65 & 68.09 & 72.65 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 1.00 \\ 49.25 & 32.26 & 17.26 & 20.74 & 79.25 & 20.80 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 \end{pmatrix}$$

Базисные столбцы выделяются с помощью элементарных преобразований строк. К первой строке добавляются остальные строки, умноженные на -1 . Получается:

$$\begin{pmatrix} -435.37 & -434.72 & -393.28 & -242.54 & -481.06 & -303.22 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -8.00 \\ 33.12 & 18.70 & 10.18 & 60.51 & 38.91 & 0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 58.38 & 77.43 & 63.53 & 26.61 & 58.02 & 41.68 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 22.32 & 89.23 & 48.59 & 38.64 & 17.09 & 23.87 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 74.42 & 21.45 & 33.22 & 2.98 & 72.86 & 48.38 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 39.09 & 27.34 & 57.76 & 32.44 & 82.38 & 55.68 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 67.78 & 89.09 & 84.04 & 1.97 & 64.45 & 40.17 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 91.02 & 79.21 & 78.71 & 58.65 & 68.09 & 72.65 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 1.00 \\ 49.25 & 32.26 & 17.26 & 20.74 & 79.25 & 20.80 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 \end{pmatrix}$$

разрешающая строка = №6

разрешающий столбец = №5

разрешающий элемент = 82.38116756630728

$$\begin{pmatrix} -207.12 & -275.09 & -56.01 & -53.11 & 0.00 & 21.93 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & -4.84 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 5.84 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -2.16 \\ 14.65 & 5.79 & -17.10 & 45.19 & 0.00 & -26.30 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.47 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.47 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.53 \\ 30.85 & 58.18 & 22.85 & 3.76 & 0.00 & 2.46 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.70 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & -0.70 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.30 \\ 14.21 & 83.56 & 36.60 & 31.91 & 0.00 & 12.32 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.21 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & -0.21 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.79 \\ 39.85 & -2.72 & -17.86 & -25.71 & 0.00 & -0.87 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.88 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & -0.88 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.12 \\ 0.47 & 0.33 & 0.70 & 0.39 & 1.00 & 0.68 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.01 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 \\ 37.20 & 67.70 & 38.85 & -23.41 & 0.00 & -3.40 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.78 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.78 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.22 \\ 58.71 & 56.61 & 30.97 & 31.84 & 0.00 & 26.62 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.83 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.83 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.17 \\ 11.65 & 5.97 & -38.30 & -10.47 & 0.00 & -32.77 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.96 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.96 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.04 \end{pmatrix}$$

разрешающая строка = №8

разрешающий столбец = №2

разрешающий элемент = 56.614991151878556

$$\begin{pmatrix} 78.17 & 0.00 & 94.47 & 101.60 & 0.00 & 151.30 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & -0.82 & 1.00 & -3.86 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.82 & 0.00 & 4.86 & 0.00 & -1.32 & 0.00 & 0.00 \\ 8.65 & 0.00 & -20.27 & 41.93 & 0.00 & -29.02 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.39 & 0.00 & 0.10 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.39 & 0.00 & -0.10 & 0.00 & 0.51 & 0.00 & 0.00 \\ -29.49 & 0.00 & -8.98 & -28.96 & 0.00 & -24.90 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & -0.15 & 0.00 & 1.03 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.15 & 0.00 & -1.03 & 0.00 & 0.12 & 0.00 & 0.00 \\ -72.45 & 0.00 & -9.11 & -15.09 & 0.00 & -26.97 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & -1.01 & 0.00 & 1.48 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 1.01 & 0.00 & -1.48 & 0.00 & 0.54 & 0.00 & 0.00 \\ 42.67 & 0.00 & -16.37 & -24.18 & 0.00 & 0.41 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.92 & 0.00 & -0.05 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & -0.92 & 0.00 & 0.05 & 0.00 & 0.12 & 0.00 & 0.00 \\ 0.13 & 0.00 & 0.52 & 0.21 & 1.00 & 0.52 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.02 & -0.00 & 0.01 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.02 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.00 \\ -33.01 & 0.00 & 1.82 & -61.48 & 0.00 & -35.23 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.21 & -1.00 & 1.20 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.21 & 1.00 & -1.20 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.00 \\ 1.04 & 1.00 & 0.55 & 0.56 & 0.00 & 0.47 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & -0.02 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.02 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 5.46 & 0.00 & -41.57 & -13.82 & 0.00 & -35.57 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.87 & 0.00 & 0.11 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.87 & 0.00 & -0.11 & 1.00 & 0.02 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

разрешающая строка = №7

разрешающий столбец = №13

разрешающий элемент = 1.195840862534468

-28.36	0.00	100.33	-96.80	0.00	37.59	1.00	1.00	1.00	1.00	-1.49	-2.23	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.49	3.23	1.00	0.00	-1.28
11.47	0.00	-20.42	47.19	0.00	-26.01	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.41	0.09	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	-0.41	-0.09	0.00	0.00	0.51
-1.12	0.00	-10.54	23.87	0.00	5.38	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.03	0.86	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	-0.03	-0.86	0.00	0.00	0.11
-31.70	0.00	-11.35	60.80	0.00	16.51	0.00	0.00	-1.00	0.00	-0.76	1.23	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.76	-1.23	0.00	0.00	0.52
41.34	0.00	-16.30	-26.65	0.00	-1.01	0.00	0.00	0.00	-1.00	0.92	-0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-0.92	0.04	0.00	0.00	0.12	
0.29	0.00	0.51	0.51	1.00	0.69	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.02	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	-0.00	0.00	0.00	0.01	
-27.61	0.00	1.52	-51.41	0.00	-29.46	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.17	-0.84	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.17	0.84	-1.00	0.00	0.01	
0.55	1.00	0.57	-0.35	0.00	-0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	
8.37	0.00	-41.73	-8.41	0.00	-32.47	0.00	0.00	0.00	0.00	0.89	0.09	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	-0.89	-0.09	0.00	1.00	0.02	

разрешающая строка = №3

разрешающий столбец = №4

разрешающий элемент = 23.872612592452022

-32.91	0.00	57.60	0.00	0.00	59.40	1.00	-3.05	1.00	1.00	-1.36	1.26	0.00	1.00	0.00	4.05	0.00	0.00	2.36	-0.26	1.00	0.00	-0.84
13.69	0.00	0.41	0.00	0.00	-36.64	-1.00	1.98	0.00	0.00	0.34	-1.61	0.00	0.00	1.00	-1.98	0.00	0.00	-0.34	1.61	0.00	0.00	0.29
-0.05	0.00	-0.44	1.00	0.00	0.23	0.00	-0.04	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	-0.00	-0.04	0.00	0.00	0.00
-28.85	0.00	15.49	0.00	0.00	2.82	0.00	2.55	-1.00	0.00	-0.84	-0.95	0.00	0.00	0.00	-2.55	1.00	0.00	0.84	0.95	0.00	0.00	0.25
40.09	0.00	-28.06	0.00	0.00	5.00	0.00	-1.12	0.00	-1.00	0.95	0.92	0.00	0.00	0.00	1.12	0.00	1.00	-0.95	-0.92	0.00	0.00	0.25
0.32	0.00	0.74	0.00	1.00	0.58	-0.00	0.02	-0.00	-0.00	-0.02	-0.01	0.00	-0.00	0.00	-0.02	0.00	0.00	0.02	0.01	0.00	0.00	0.01
-30.02	0.00	-21.18	0.00	0.00	-17.88	0.00	-2.15	0.00	0.00	-0.10	1.01	1.00	0.00	0.00	2.15	0.00	0.00	0.10	-1.01	-1.00	0.00	0.24
0.53	1.00	0.42	0.00	0.00	0.03	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.01	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
7.98	0.00	-45.44	0.00	0.00	-30.58	0.00	-0.35	0.00	0.00	0.90	0.39	0.00	-1.00	0.00	0.35	0.00	0.00	-0.90	-0.39	0.00	1.00	0.06

разрешающая строка = №5

разрешающий столбец = №1

разрешающий элемент = 40.08978861384429

0.00	0.00	34.56	0.00	0.00	63.51	1.00	-3.97	1.00	0.18	-0.58	2.01	0.00	1.00	0.00	4.97	0.00	0.82	1.58	-1.01	1.00	0.00	-0.64
0.00	0.00	9.99	0.00	0.00	-38.35	-1.00	2.36	0.00	0.34	0.02	-1.93	0.00	0.00	1.00	-2.36	0.00	-0.34	-0.02	1.93	0.00	0.00	0.21
0.00	0.00	-0.47	1.00	0.00	0.23	0.00	-0.04	0.00	-0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	-0.00	-0.04	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-4.70	0.00	0.00	6.41	0.00	1.74	-1.00	-0.72	-0.16	-0.29	0.00	0.00	0.00	-1.74	1.00	0.72	0.16	0.29	0.00	0.00	0.42
1.00	0.00	-0.70	0.00	0.00	0.12	0.00	-0.03	0.00	-0.02	0.02	0.02	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.02	-0.02	-0.02	0.00	0.00	0.01
0.00	0.00	0.96	0.00	1.00	0.54	-0.00	0.03	-0.00	0.01	-0.02	-0.02	0.00	-0.00	0.00	-0.03	0.00	-0.01	0.02	0.02	0.00	0.00	0.01
0.00	0.00	-42.20	0.00	0.00	-14.14	0.00	-2.99	0.00	-0.75	0.61	1.70	1.00	0.00	0.00	2.99	0.00	0.75	-0.61	-1.70	-1.00	0.00	0.43
0.00	1.00	0.79	0.00	0.00	-0.04	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-39.85	0.00	0.00	-31.57	0.00	-0.13	0.00	0.20	0.71	0.21	0.00	-1.00	0.00	0.13	0.00	-0.20	-0.71	-0.21	0.00	1.00	0.01

разрешающая строка = №2

разрешающий столбец = №8

разрешающий элемент = 2.3580598067948677

0.00	0.00	51.39	0.00	0.00	-1.08	-0.68	0.00	1.00	0.75	-0.55	-1.23	0.00	1.00	1.68	1.00	0.00	0.25	1.55	2.23	1.00	0.00	-0.29
0.00	0.00	4.24	0.00	0.00	-16.26	-0.42	1.00	0.00	0.14	0.01	-0.82	0.00	0.00	0.42	-1.00	0.00	-0.14	-0.01	0.82	0.00	0.00	0.09
0.00	0.00	-0.29	1.00	0.00	-0.47	-0.02	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	-0.01	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.01
0.00	0.00	-12.09	0.00	0.00	34.77	0.74	0.00	-1.00	-0.97	-0.17	1.13	0.00	0.00	-0.74	0.00	1.00	0.97	0.17	-1.13	0.00	0.00	0.27
1.00	0.00	-0.58	0.00	0.00	-0.33	-0.01	0.00	0.00	-0.02	0.02	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.00	0.00	0.02	-0.02	-0.00	0.00	0.00	0.01
0.00	0.00	0.83	0.00	1.00	1.03	0.01	0.00	-0.00	0.00	-0.02	0.00	0.00	-0.00	-0.01	-0.00	0.00	-0.00	0.02	-0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-29.52	0.00	0.00	-62.76	-1.27	0.00	0.00	-0.32	0.63	-0.74	1.00	0.00	1.27	0.00	0.00	0.32	-0.63	0.74	-1.00	0.00	0.69
0.00	1.00	0.79	0.00	0.00	-0.03	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-39.30	0.00	0.00	-33.69	-0.06	0.00	0.00	0.22	0.72	0.10	0.00	-1.00	0.06	0.00	0.00	-0.22	-0.72	-0.10	0.00	1.00	0.02

разрешающая строка = №9

разрешающий столбец = №12

разрешающий элемент = 0.10158876203453247

0.00	0.00	-425.82	0.00	0.00	-410.10	-1.35	0.00	1.00	3.40	8.14	0.00	0.00	-11.14	2.35	1.00	0.00	-2.40	-7.14	1.00	1.00	12.14	-0.05
0.00	0.00	-311.93	0.00	0.00	-287.25	-0.87	1.00	0.00	1.90	5.77	0.00	0.00	-8.04	0.87	-1.00	0.00	-1.90	-5.77	0.00	0.00	8.04	0.25
0.00	0.00	0.39	1.00	0.00	0.12	-0.02	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.02	0.02	0.00	0.00	-0.00	0.01	0.00	0.00	-0.02	0.01
0.00	0.00	425.82	0.00	0.00	410.10	1.35	0.00	-1.00	-3.40	-8.14	0.00	0.00	11.14	-1.35	0.00	1.00	3.40	8.14	0.00	0.00	-11.14	0.05
1.00	0.00	-0.52	0.00	0.00	-0.27	-0.01	0.00	0.00	-0.02	0.02	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.00	0.00	0.02	-0.02	0.00	0.00	-0.00	0.01
0.00	0.00	2.36	0.00	1.00	2.34	0.01	0.00	-0.00	-0.00	-0.05	0.00	0.00	0.04	-0.01	-0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	-0.04	0.00
0.00	0.00	-316.00	0.00	0.00	-308.30	-1.67	0.00	0.00	1.27	5.85	0.00	1.00	-7.29	1.67	0.00	0.00	-1.27	-5.85	-0.00	-1.00	7.29	0.84
0.00	1.00	-4.72	0.00	0.00	-4.76	-0.01	0.00	0.00	0.04	0.10	0.00	0.00	-0.14	0.01	0.00	0.00	-0.04	-0.10	0.00	0.00	0.14	0.00
0.00	0.00	-386.87	0.00	0.00	-331.58	-0.54	0.00	0.00	2.14	7.05	1.00	0.00	-9.84	0.54	0.00	0.00	-2.14	-7.05	-1.00	0.00	9.84	0.19

разрешающая строка = №4

разрешающий столбец = №3

разрешающий элемент = 425.8221274455778

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	13.16	0.12	1.00	-0.73	-0.59	-0.20	0.00	0.00	0.12	-0.12	-1.00	0.73	0.59	0.20	0.00	0.00	-0.12	0.28
0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.26	-0.02	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	-0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.01
0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.96	0.00	0.00	-0.00	-0.01	-0.02	0.00	0.00	0.03	-0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.00	0.00	-0.03	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.23	-0.01	0.00	-0.00	-0.03	0.01	0.00	0.00	0.02	0.01	-0.00	0.00	0.03	-0.01	0.00	0.00	-0.02	0.01
0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.07	0.01	0.00	0.01	0.01	-0.01	0.00	0.00	-0.02	-0.01	-0.00	-0.01	-0.01	0.01	0.00	0.00	0.02	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-3.97	-0.67	0.00	-0.74	-1.25	-0.19	0.00	1.00	0.98	0.67	0.00	0.74	1.25	0.19	-0.00	-1.00	-0.98	0.87
0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	-0.21	0.01	0.00	-0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	-0.02	-0.01	0.00	0.01	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.02	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	41.00	0.69	0.00	-0.91	-0.94	-0.35	1.00	0.00	0.28	-0.69	0.00	0.91	0.94	0.35	-1.00	0.00	-0.28	0.24

разрешающая строка = №8

разрешающий столбец = №11

разрешающий элемент = $9.504034650591187e - 3$

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00
0.00	21.01	0.00	0.00	0.00	8.71	0.28	1.00	-0.97	-0.46	0.00	0.00	0.00	-0.23	-0.28	-1.00	0.97	0.46	0.00	0.00	0.00	0.23	0.38
0.00	0.23	0.00	1.00	0.00	-0.31	-0.02	0.00	-0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.01
0.00	2.01	1.00	0.00	0.00	0.54	0.02	0.00	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.02	0.00	0.02	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01
1.00	-1.35	0.00	0.00	0.00	0.51	-0.02	0.00	0.01	-0.03	0.00	0.00	0.00	0.04	0.02	-0.00	-0.01	0.03	0.00	0.00	0.00	-0.04	0.00
0.00	0.75	0.00	0.00	1.00	-0.09	0.01	0.00	-0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	-0.04	-0.01	-0.00	0.00	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.04	0.01
0.00	20.47	0.00	0.00	0.00	-8.31	-0.51	0.00	-0.97	-1.13	0.00	0.00	1.00	0.64	0.51	0.00	0.97	1.13	0.00	-0.00	-1.00	-0.64	0.97
0.00	105.22	0.00	0.00	0.00	-22.32	0.78	0.00	-1.17	0.64	1.00	0.00	0.00	-1.76	-0.78	0.00	1.17	-0.64	-1.00	0.00	0.00	1.76	0.50
0.00	37.08	0.00	0.00	0.00	33.13	0.96	0.00	-1.32	-0.72	0.00	1.00	0.00	-0.34	-0.96	0.00	1.32	0.72	0.00	-1.00	0.00	0.34	0.42

разрешающая строка = №5

разрешающий столбец = №14

разрешающий элемент = $3.7881709862985787e - 2$

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00
6.20	12.62	0.00	0.00	0.00	11.88	0.16	1.00	-0.88	-0.67	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.16	-1.00	0.88	0.67	0.00	0.00	0.00	0.00	0.40
-0.09	0.35	0.00	1.00	0.00	-0.36	-0.02	0.00	-0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
0.20	1.74	1.00	0.00	0.00	0.64	0.01	0.00	-0.02	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
26.40	-35.74	0.00	0.00	0.00	13.53	-0.53	0.00	0.36	-0.89	0.00	0.00	0.00	1.00	0.53	-0.00	-0.36	0.89	0.00	0.00	0.00	-1.00	0.06
0.93	-0.51	0.00	0.00	1.00	0.39	-0.01	0.00	0.01	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.00	-0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
-16.80	43.21	0.00	0.00	0.00	-16.92	-0.18	0.00	-1.20	-0.56	0.00	0.00	1.00	0.00	0.18	0.00	1.20	0.56	0.00	-0.00	-1.00	0.00	0.94
46.57	42.17	0.00	0.00	0.00	1.55	-0.16	0.00	-0.52	-0.92	1.00	0.00	0.00	0.00	0.16	-0.00	0.52	0.92	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.60
9.03	24.85	0.00	0.00	0.00	37.76	0.78	0.00	-1.19	-1.02	0.00	1.00	0.00	0.00	-0.78	0.00	1.19	1.02	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.44

разрешающая строка = №3

разрешающий столбец = №10

разрешающий элемент = $8.757095192450067e - 3$

$$\begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 \\ -0.47 & 39.24 & 0.00 & 76.84 & 0.00 & -15.51 & -1.01 & 1.00 & -1.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.01 & -1.00 & 1.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.11 \\ -9.91 & 39.57 & 0.00 & 114.19 & 0.00 & -40.71 & -1.73 & 0.00 & -0.32 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.73 & 0.00 & 0.32 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.05 \\ 0.18 & 1.84 & 1.00 & 0.27 & 0.00 & 0.54 & 0.01 & 0.00 & -0.02 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.02 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 \\ 17.58 & -0.55 & 0.00 & 101.55 & 0.00 & -22.68 & -2.07 & 0.00 & 0.08 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 2.07 & -0.00 & -0.08 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.99 \\ 0.80 & 0.00 & 0.00 & 1.48 & 1.00 & -0.14 & -0.03 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.03 & -0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.02 \\ -22.34 & 65.35 & 0.00 & 63.88 & 0.00 & -39.69 & -1.14 & 0.00 & -1.38 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 1.14 & 0.00 & 1.38 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -1.00 & 0.00 & 1.52 \\ 37.40 & 78.75 & 0.00 & 105.56 & 0.00 & -36.09 & -1.76 & 0.00 & -0.82 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.76 & 0.00 & 0.82 & -0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.58 \\ -1.09 & 65.26 & 0.00 & 116.62 & 0.00 & -3.81 & -0.99 & 0.00 & -1.52 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.99 & 0.00 & 1.52 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 1.51 \end{pmatrix}$$

разрешающая строка = №4

разрешающий столбец = №6

разрешающий элемент = 0.5411911390555306

$$\begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 \\ 4.58 & 91.89 & 28.67 & 84.68 & 0.00 & 0.00 & -0.72 & 1.00 & -1.75 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.72 & -1.00 & 1.75 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.47 \\ 3.35 & 177.72 & 75.23 & 134.76 & 0.00 & 0.00 & -0.98 & 0.00 & -2.03 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.98 & 0.00 & 2.03 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2.01 \\ 0.33 & 3.39 & 1.85 & 0.51 & 0.00 & 1.00 & 0.02 & 0.00 & -0.04 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.02 & 0.00 & 0.04 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.02 \\ 24.97 & 76.40 & 41.90 & 113.01 & 0.00 & 0.00 & -1.65 & 0.00 & -0.87 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1.65 & 0.00 & 0.87 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 1.53 \\ 0.85 & 0.48 & 0.26 & 1.56 & 1.00 & 0.00 & -0.03 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.03 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.03 \\ -9.41 & 200.04 & 73.34 & 83.93 & 0.00 & 0.00 & -0.41 & 0.00 & -3.04 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.41 & 0.00 & 3.04 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -1.00 & 0.00 & 2.46 \\ 49.16 & 201.21 & 66.68 & 123.79 & 0.00 & 0.00 & -1.09 & 0.00 & -2.33 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.09 & 0.00 & 2.33 & -0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2.42 \\ 0.15 & 78.19 & 7.04 & 118.54 & 0.00 & 0.00 & -0.92 & 0.00 & -1.68 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.92 & 0.00 & 1.68 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 1.60 \end{pmatrix}$$

разрешающая строка = №4

разрешающий столбец = №7

разрешающий элемент = $1.839587384277209e - 2$

$$\begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 \\ 17.40 & 225.52 & 101.43 & 104.57 & 0.00 & 39.38 & 0.00 & 1.00 & -3.40 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 3.40 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2.40 \\ 20.74 & 358.95 & 173.91 & 161.74 & 0.00 & 53.40 & 0.00 & 0.00 & -4.26 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 4.26 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 3.26 \\ 17.70 & 184.47 & 100.45 & 27.46 & 0.00 & 54.36 & 1.00 & 0.00 & -2.28 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 2.28 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.28 \\ 54.25 & 381.51 & 208.04 & 158.43 & 0.00 & 89.91 & 0.00 & 0.00 & -4.64 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 4.64 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 3.64 \\ 1.31 & 5.22 & 2.84 & 2.26 & 1.00 & 1.40 & 0.00 & 0.00 & -0.06 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.06 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.06 \\ -2.10 & 276.29 & 114.86 & 95.28 & 0.00 & 22.47 & 0.00 & 0.00 & -3.98 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 3.98 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -1.00 & 0.00 & 2.98 \\ 68.50 & 402.78 & 176.44 & 153.80 & 0.00 & 59.40 & 0.00 & 0.00 & -4.82 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 4.82 & -0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 3.82 \\ 16.39 & 247.41 & 99.19 & 143.73 & 0.00 & 49.87 & 0.00 & 0.00 & -3.77 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 3.77 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 2.77 \end{pmatrix}$$

Оптимальное решение

$$\begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.06 \\ 0.00 \end{pmatrix}$$

В первой строке не осталось отрицательных элементов (не считая значение целевой функции) и $u = 0$, значит найдено оптимальное решение для вспомогательной задачи.

Решение двойственной задачи

Для нахождения решения двойственной задачи продолжим с найденной угловой точки. Исключим из таблицы столбцы, соответствующие элементам u и заменим первую строку на $(e, 0)$.

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 17.40 & 225.52 & 101.43 & 104.57 & 0.00 & 39.38 & 0.00 & 1.00 & -3.40 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2.40 \\ 20.74 & 358.95 & 173.91 & 161.74 & 0.00 & 53.40 & 0.00 & 0.00 & -4.26 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 3.26 \\ 17.70 & 184.47 & 100.45 & 27.46 & 0.00 & 54.36 & 1.00 & 0.00 & -2.28 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.28 \\ 54.25 & 381.51 & 208.04 & 158.43 & 0.00 & 89.91 & 0.00 & 0.00 & -4.64 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 3.64 \\ 1.31 & 5.22 & 2.84 & 2.26 & 1.00 & 1.40 & 0.00 & 0.00 & -0.06 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.06 \\ -2.10 & 276.29 & 114.86 & 95.28 & 0.00 & 22.47 & 0.00 & 0.00 & -3.98 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 2.98 \\ 68.50 & 402.78 & 176.44 & 153.80 & 0.00 & 59.40 & 0.00 & 0.00 & -4.82 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 3.82 \\ 16.39 & 247.41 & 99.19 & 143.73 & 0.00 & 49.87 & 0.00 & 0.00 & -3.77 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 2.77 \end{pmatrix}$$

Выделяем базисные столбцы с помощью элементарных преобразований строк матрицы. К первой строке добавляем 6 строку, умноженная на -1 .

$$\begin{pmatrix} -0.31 & -4.22 & -1.84 & -1.26 & 0.00 & -0.40 & 0.00 & 0.00 & 0.06 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.06 \\ 17.40 & 225.52 & 101.43 & 104.57 & 0.00 & 39.38 & 0.00 & 1.00 & -3.40 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2.40 \\ 20.74 & 358.95 & 173.91 & 161.74 & 0.00 & 53.40 & 0.00 & 0.00 & -4.26 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 3.26 \\ 17.70 & 184.47 & 100.45 & 27.46 & 0.00 & 54.36 & 1.00 & 0.00 & -2.28 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.28 \\ 54.25 & 381.51 & 208.04 & 158.43 & 0.00 & 89.91 & 0.00 & 0.00 & -4.64 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 3.64 \\ 1.31 & 5.22 & 2.84 & 2.26 & 1.00 & 1.40 & 0.00 & 0.00 & -0.06 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.06 \\ -2.10 & 276.29 & 114.86 & 95.28 & 0.00 & 22.47 & 0.00 & 0.00 & -3.98 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 2.98 \\ 68.50 & 402.78 & 176.44 & 153.80 & 0.00 & 59.40 & 0.00 & 0.00 & -4.82 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 3.82 \\ 16.39 & 247.41 & 99.19 & 143.73 & 0.00 & 49.87 & 0.00 & 0.00 & -3.77 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 2.77 \end{pmatrix}$$

разрешающая строка = №4

разрешающий столбец = №2

разрешающий элемент = 184.4687252986854

$$\begin{pmatrix} 0.10 & 0.00 & 0.46 & -0.63 & 0.00 & 0.85 & 0.02 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.03 \\ -4.24 & 0.00 & -21.37 & 71.00 & 0.00 & -27.08 & -1.22 & 1.00 & -0.61 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.83 \\ -13.71 & 0.00 & -21.55 & 108.30 & 0.00 & -52.37 & -1.95 & 0.00 & 0.17 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.78 \\ 0.10 & 1.00 & 0.54 & 0.15 & 0.00 & 0.29 & 0.01 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 \\ 17.64 & 0.00 & 0.30 & 101.63 & 0.00 & -22.51 & -2.07 & 0.00 & 0.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 \\ 0.80 & 0.00 & -0.00 & 1.48 & 1.00 & -0.14 & -0.03 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.02 \\ -28.61 & 0.00 & -35.58 & 54.15 & 0.00 & -58.95 & -1.50 & 0.00 & -0.57 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 1.07 \\ 29.85 & 0.00 & -42.88 & 93.84 & 0.00 & -59.29 & -2.18 & 0.00 & 0.15 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.03 \\ -7.35 & 0.00 & -35.53 & 106.90 & 0.00 & -23.04 & -1.34 & 0.00 & -0.72 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 1.06 \end{pmatrix}$$

разрешающая строка = №3

разрешающий столбец = №4

разрешающий элемент = 108.30271580704607

$$\begin{pmatrix} 0.02 & 0.00 & 0.33 & 0.00 & 0.00 & 0.54 & 0.01 & 0.00 & 0.01 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.02 \\ 4.75 & 0.00 & -7.24 & 0.00 & 0.00 & 7.25 & 0.05 & 1.00 & -0.72 & -0.66 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.32 \\ -0.13 & 0.00 & -0.20 & 1.00 & 0.00 & -0.48 & -0.02 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 \\ 0.11 & 1.00 & 0.57 & 0.00 & 0.00 & 0.37 & 0.01 & 0.00 & -0.01 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 \\ 30.50 & 0.00 & 20.52 & 0.00 & 0.00 & 26.63 & -0.24 & 0.00 & -0.09 & -0.94 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.27 \\ 0.99 & 0.00 & 0.30 & 0.00 & 1.00 & 0.58 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 \\ -21.76 & 0.00 & -24.81 & 0.00 & 0.00 & -32.76 & -0.52 & 0.00 & -0.66 & -0.50 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.68 \\ 41.73 & 0.00 & -24.21 & 0.00 & 0.00 & -13.91 & -0.50 & 0.00 & 0.01 & -0.87 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.36 \\ 6.18 & 0.00 & -14.27 & 0.00 & 0.00 & 28.65 & 0.58 & 0.00 & -0.88 & -0.99 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.29 \end{pmatrix}$$

Результат

$$x = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.01 \\ 0.00 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.00 \end{pmatrix} \quad \alpha = 2.4747741869746438e - 2 \quad p^* = \frac{x}{\|x\|} = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.39 \\ 0.00 \\ 0.48 \\ 0.78 \\ 0.00 \end{pmatrix}$$

Ответ

Нижняя цена игры: $\underline{A} = -21.254878614230552$

Верхняя цена игры: $\overline{A} = 16.937688915945937$

Оптимальная стратегия первого игрока: $p^* = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.39 \\ 0.00 \\ 0.48 \\ 0.78 \\ 0.00 \end{pmatrix}$

Оптимальная стратегия игрока: $q^* = \begin{pmatrix} 0.77 \\ 0.00 \\ 0.50 \\ 0.39 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix}$

Цена игры: -3.1672615144038048

Приложение (Я.П.: Haskell)

Весь исходный код этого приложения можно найти по адресу <https://github.com/AJMC2002/opt-methods/tree/main>.

Библиотека

```
-- lib/MatrixGame.hs
module MatrixGame where

import Data.Massiv.Array as A
import Prelude as P

lowStrategy :: Matrix P Double -> Double
lowStrategy a = maximum $ P.map (minimum' . (a !>)) [0 .. (i - 1)] where Sz2 i
_ = size a

highStrategy :: Matrix P Double -> Double
highStrategy a = minimum $ P.map (maximum' . (a <!)) [0 .. (j - 1)] where Sz2
_ j = size a
```

Бинарный

```
-- exe/Main.hs
module Main where

import Data.Massiv.Array as A
import Formst
import MatrixGame (highStrategy, lowStrategy)
import Optimization.DirectTask (solveDirect)
import Optimization.DualTask (solveDual)
import Prelude as P
import System.Random qualified as R

main :: IO ()
main = do
```

```

let
  -- Initial values
  salt = 19092002
  gen = R.mkStdGen salt
  rng = (-50 :: Double, 50)
  comp = ParN 0
  a = computeP $ uniformRangeArray gen rng comp (Sz2 6 8) :: Matrix P
Double
  b = A.replicate (ParN 0) 6 1
  c = A.replicate (ParN 0) 8 1
  beta = minimum' a
  a' = a .+ abs beta

putStrLn $ showMat a 2
putStrLn $ "underline(A) = " ++ show (lowStrategy a)
putStrLn $ "overline(A) = " ++ show (highStrategy a)
putStrLn $ "beta = " ++ show beta
putStrLn $ showMat a' 2

(y, alfa1) <- solveDirect a' b c
putStrLn $ "y = " ++ showVec y 2
putStrLn $ "alfa = " ++ show alfa1
putStrLn $ "q^* = y/||y|| = " ++ showVec (y ./ normL2 y) 2

(x, alfa2) <- solveDual a' b c
putStrLn $ "x = " ++ showVec x 2
putStrLn $ "alfa = " ++ show alfa2
putStrLn $ "p^* = x/||x|| = " ++ showVec (x ./ normL2 x) 2

putStrLn $ "underline(A) = " ++ show (lowStrategy a)
putStrLn $ "overline(A) = " ++ show (highStrategy a)
putStrLn $ "phi = " ++ show (1 / alfa1 - abs beta)

```