Psicometría de tiempos de respuesta explicada por Modelos de Difusión Estocástica

Pedro Vladimir Hernández Serrano
Estadśtica Computacional - Ciencia de Datos

Abstract

En el presente documento aborda de manera general la bondad de la utilización de los modelos de difusión estocástica en problemas puntuales de tiempos de decisión que el cerebro lleva a cabo sobre una tarea, los cuales han sido recientemente explotadas en disciplinas como la Neurociencia y la Psicología cognitiva. Posteriormente se enunciarán el fundamento estocástico, de un proceso de tiempo continuo y con espacio de estados continuos, de tal manera que se buscará simular tal modelo, y finalmente llevar a cabo un breve ejercicio sobre un caso de estudio. Se presentarán las observaciones importantes y breves comentarios para la discusión del tema en general.

1. Historia

El enfoque del modelo de Diusión se introdujo como una herramienta para analizar la información a partir de los experimentos relacionados con la velocidad de respuesta por *Ratcliff (1978)*. Sin embargo el uso de este tipo de modelación matemática fue desarrollado durante bastante tiempo por solo un puñado de investigadores, debido evidentemente al pobre avance en las herramientas computacionales, donde dichos investigadores programaban sus propias soluciones limitando la reproducibilidad.

Por lo que recientemente, diferentes herramientas han sido publicadas simultaneamente que permiten la aplicación del modelo sin un gran número de habilidades computacionales, algunas de las cuales comprenden por ejemplo el EZ-diffusion model (Grasman, Wagenmakers, & van der Maas, 2009). Independientemente que el interés en el modelo ha crecido considerablemente dicho método, se encuentra aún muy lejos de ser un estandar para la psicología cognitiva y la neurociencia

2. Modelos de Difusión Estocásticos

Los Modelos de Difusión Estocásticos son comúnmente utilizados para analizar los tiempos de respuesta de una serie de experimentos a partir de experimentos de desición binarios, donde proveen información detallada a cerca del proceso cognitivo subyacente al desempeo en dichos experimentos.

2.1. Componentes Importantes

Se pueden distinguir 4 variables que se consideran cruciales en las mediciones de las tareas de decisión:

1.- La velocidad con la que se va adquiriendo información sobre la decisión

2.- La cantidad de información que se requiere para tomar la decisión

3.- El posible sesgo de la decisión (un umbral predeterminado en memoria)

4.- El tiempo que se tarda en decidir

Cabe señalar que el promedio de los tiempos de respuesta proveen mucha más información de la que creemos.

La investigación en la Psicología cognitiva y la Neurociencia se estudian muy a menudo los tiempos de respuesta de tareas o cuestionamientos de algún tipo dirigidos a una persona, típicamente los participantes tienen que clasificar estímulos acorde a la categoría a la teóricamente deberían de pertenecer, como por ejemplo balance (positivo vs negativo), familiaridad en un experimento de memoria (palabras conocidas vs palabras nuevas), léxico (palabra vs no es palabra), sobre propiedades de estimulación superficial (colores o localización de objetos), o incluso sobre estímulos de identidad

2.2. Especificaciones

Recordemos que los experimentos de difusión se refieren a clasificación binaria en la toma de decisión por lo que si tenemos una serie de categorías de tipo ordinal, como por ejemplo enumerar del 1 al 10, podemos dividir la decisión entre altos (6, 10) y bajos (1, 5). Para el presente experimento nos concentraremos en características dicotómicas (presencia:1, ausencia:0)

Uno de los supuestos importantes es que después de codificar el estimulo (clasificarlo de manera computacional), la memoria hace un proceso de indagar en la información almacenada, por lo que podemos estar seguro que cada tarea de recolección de información en la memoria es un proceso de estados continuos en tiempo continuo.

A pesar de que el modelo de difusión es diseñado para predecir la distribución del tiempo de respuesta, la eliminación de valores atípicos de los tiempos de respuesta originales es normalmente recomendada, por lo general los de corta respuesta (fast guesses) son mś problemáticos que los "slow outliers".

Una pequea explicación del modelo en su forma mas sencilla es por ejemplo en un experimento de evaluación el çontador"debe incrementar con información positiva y decrecer con información negativa, el movimiento del contador a través del tiempo se modela como un proceso de difusión en el que avanza sobre un corredor con dos barreras absorbentes, tan promto toca una de las barreras (la superior o la inferior) la decisión es tomada

2.3. Movimiento Browniano Estandar

Cabe recalcar que para este enfoque, el modelo de difusión se utiliza como modelador de la toma de decisión binaria

El supuesto básico es que durante el proceso de decisión, es que se va acumulando información extraída de la memoria de manera continua, y dicha acumulación se puede ver como un proceso Wiener de Difusión (Movimiento Browniano estandar). Cuyas características comprenden una constante sistemática *drift* y por un error distribuido normal

El drift (v) puede verse como el crecimiento esperado de la acumulación de información, intuitivamente se entiende como la velocidad y la dirección de la acumulación de información

El supuesto de ruido aleatorio explica que el procesamiento repetido del estímulo o los mismos tipos de estímulos resultan en diferentes tiempos de respuesta, y algunas veces en respuestas erroneas. Más aún, el modelo de difusión puede explicar el *drift* que es típicamente enco ntrado en las distribuciones de tiempo de respuesta empírica (Ratcliff, 2002).

Se enuncian entonces las variables y parámetros, que se relacionarán con el proceso, en el mismo orden que fueron mencionadas anteriormente:

- *Drift rate*: $\mu \sim N(v, \sigma_v^2)$

- *Umbral*: α
  La cantidad de información que se considera para tomar la decisión

- Inicio del proceso: zEs donde inicia el proceso, si no se tiene información a priori se usa $a/2$ (es el caso uniforme)

- Tiempo de duda: t_0 y τ

Lo que se quiere modelar son las distribuciones del tiempo de respuesta hacía alguno de los items, y asi predecir (t_0) así como la media, varianza y accuracy del proceso.

La manera en como lo vamos a abordar es presentar un ajuste por cada persona y cada condición por separado y graficar las funciones de distribución acumulada en la misma gráfica.
Otra opción es graficar los quatiles de los tiempos de respuesta como función de respuesta de las probabilidades para diferentes condiciones y estímulos

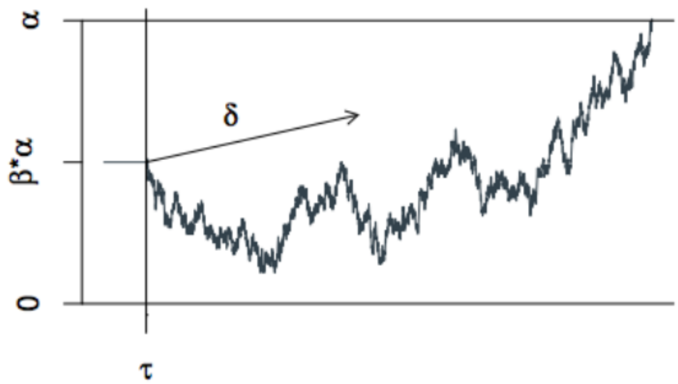

Figura 1: Representaci'on de un modelo de difusión Wiener para tiempo de respuesta con 2 alternativas

2.4. Simulación

Existen algunos métodos para simular un proceso de difusión, en particular utilizaremos la aproximación a una caminata aleatoria. El proceso de difusión con una tendencia constante y barreras absorbentes es considerado una versión continua de une caminata aleatoria con estados absorbentes.

Con esta perspectiva podemos deducir matemáticamente construyendo una caminata aleatoria con desplazamientos en intervalos de tiempo lo suficientemente pequeños, y así, tomando en cuenta intervalos de tiempo y desplazamientos tendiendo a cero podremos aproximar un proceso de difusión.

Sea una caminata aleatoria con espacio de estados $\{0, \Delta, 2\Delta, \cdots, z - \Delta, z, z + \Delta, \cdots, a\}$, donde $0, a$ son estados absorbentes y z es el estado inicial, entonces en cada t ocurre un desplazamiento Δ con probabilidad p y un desplazamiento $-\Delta$ con probabilidad $q = 1 - p$, de tal modo que lo podemos ver como: (ecuaciones de difusión) para calcular probabilidades de transición

$$p = \frac{1}{2}(1 + \frac{\mu\sqrt[2]{\tau}}{\sigma}) \tag{1}$$

$$q = \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu\sqrt[2]{\tau}}{\sigma}) \tag{2}$$

$$\Delta = \sigma\sqrt[2]{\tau} \tag{3}$$

Considerando lo anterior, si t converge a cero, entonces la caminata aleatoria converge a un proceso de difusión con tendencia μ y varianza σ^2 entonces para cada vector de variables (μ, σ, τ) tenemos un vector (p, q, Δ) que puede ser calculado como se ve en las ecuaciones y una aproximación a una caminata aleatoria puede ser obtenida.

La precisión del algoritmo depende en gran parte del intervalo t, si tenemos un t grande entonces la aproximación del modelo no será muy precisa pero la simulación será rápida, y por otro lado si t es pequeña la aproximación del proceso en el caso particular será precisa, pero una simulación lenta, por lo que se buscó un punto medio para dicha problemática.

De manera práctica podemos mejorar este proceso utilizando los supuestos de una caminata aleatoria tal como la definimos, con ayuda del número esperado de pasos antes de la absorción $E(N)$ para ambas barreras absorbentes puede verse igual. *(Feller, 1968).*

$$E(N) = \begin{cases} \frac{\frac{z}{\Delta}}{q-p} - \frac{\frac{a}{\Delta}}{q-p} x \frac{(1-(\frac{q}{p})^{z/\Delta})}{(1-(\frac{q}{p})^{a/\Delta})} & si\ \mu \neq 0 \\ \frac{z}{\Delta}(\frac{a}{\Delta} - \frac{z}{\Delta}) & si\ \mu = 0 \end{cases}$$

Adicionalmente, con el uso de la igualdad:

$$\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt[2]{\tau}} \tag{4}$$

Podemos comprobar que para el caso $\mu = 0$ si dividimos por un factor K con $K \neq 0$ entonces $E(N)$ es multiplicado por el mismo factor K, para el otro caso no es tan trivial, se puede revisar numéricamente, aquí hace sentido lo que se decía anteriormente que si la simulación es más precisa entonces también toma más tiempo. La función $simDIFF$ utiliza el método de rechazo para simular los N valores de un proceso de difusión comparemos con el método de la aproximación Utilizamos los datos de los *tasks* de rotación

3. Caso de Estudio

Los datos comprenden las calificaciones de 121 personas en 6 tareas (items) para medir la rotación mental (el efecto visual que produce nuestro cerebro al percibir cambios en las formas de las cosas), Cada item consiste en una representación gráfica de dos objetos en 3 dimensiones, el segundo objeto es una versión rotada del primero o de algún otro objeto. Las personas en el experimento se les pregunta si el segundo objeto era el mismo que el primero, con una respuesta dicotómica, si o no, la rotación del objeto se midió en grados 50, 100 o 150. Donde las respuestas se registraban (1) como correctas y (2) incorrectas, y los tiempos de respuesta se registraron en segundos.

La información descrita la podemos encontrar de manera precargada en la paquetería $diffIRT$ lo que se busca es ajustar un modelo de difusión para dichos datos y predecir los parámetros de umbral de decisión y tendencia de cada uno de los items.

Sea un modelo de difusión con parámetros:

$$\mu_{pi} = \frac{\theta_p}{v_i}, \quad \theta_p \in R, \; v_i \neq 0 \tag{5}$$

$$\alpha_{pi} = \frac{\gamma_p}{a_i}, \quad \gamma_p \in R, \; a_i \neq 0 \tag{6}$$

Se puede ver como:

$$P(x_{pi} = 1|\theta_p, \gamma_p) = \frac{exp(\frac{\gamma_p\theta_p}{\alpha_i v_i})}{1 + exp(\frac{\gamma_p\theta_p}{\alpha_i v_i})} \tag{7}$$

Donde a_i es la presión del tiempo, v_i la dificultad del item, γ_p el sesgo de indecisión, θ_p la habilidad que se busca medir, Dado que a_i, v_i, θ_p y γ_p son estrictamente positivas, entonces μ es cercano a cero, lo que asegura que con tiempos de respuesta muy lentos se tendrá $\mu_p = 0$ y se hace más rápido cuando μ crece, dado que se tendrá items más difíciles, (v_i más grande) o tendrá mayor habilidad (θ_p más grande)

En la figura podemos ver el ajuste

```
        RESULTS
        -------
         a[i] se.a[i]  v[i] se.v[i] Ter[i] se.Ter[i]
item 1  0.249   0.016 1.484   0.174  0.880     0.036
item 2  0.230   0.018 1.231   0.135  0.538     0.060
item 3  0.219   0.014 1.424   0.160  0.778     0.038
item 4  0.248   0.015 2.345   0.323  0.999     0.046
item 5  0.238   0.020 0.884   0.100  0.824     0.043
item 6  0.267   0.018 1.210   0.130  0.878     0.036
item 7  0.190   0.015 1.155   0.128  0.580     0.036
item 8  0.214   0.021 0.764   0.086  0.617     0.050
item 9  0.231   0.016 1.191   0.126  0.794     0.040
item 10 0.202   0.013 1.814   0.209  0.801     0.041

omega[gamma]: 0.326
std. err:     0.061
omega[theta]: 0.535
std. err:     0.088

---------------------------


--POPULATION DESCRIPTIVES--
Person Boundary (lognormal): Var(gamma):  0.124
Person Drift (lognormal):    Var(theta):  0.441
---------------------------


---MODEL FIT STATISTICS---
-2 x logLikelihood: 4355.775

no. of parameters: 32
AIC:  4419.775
BIC:  4509.24
sBIC: 4408.067
DIC:  4450.953
---------------------------
```

Figura 2: Ajuste del modelo

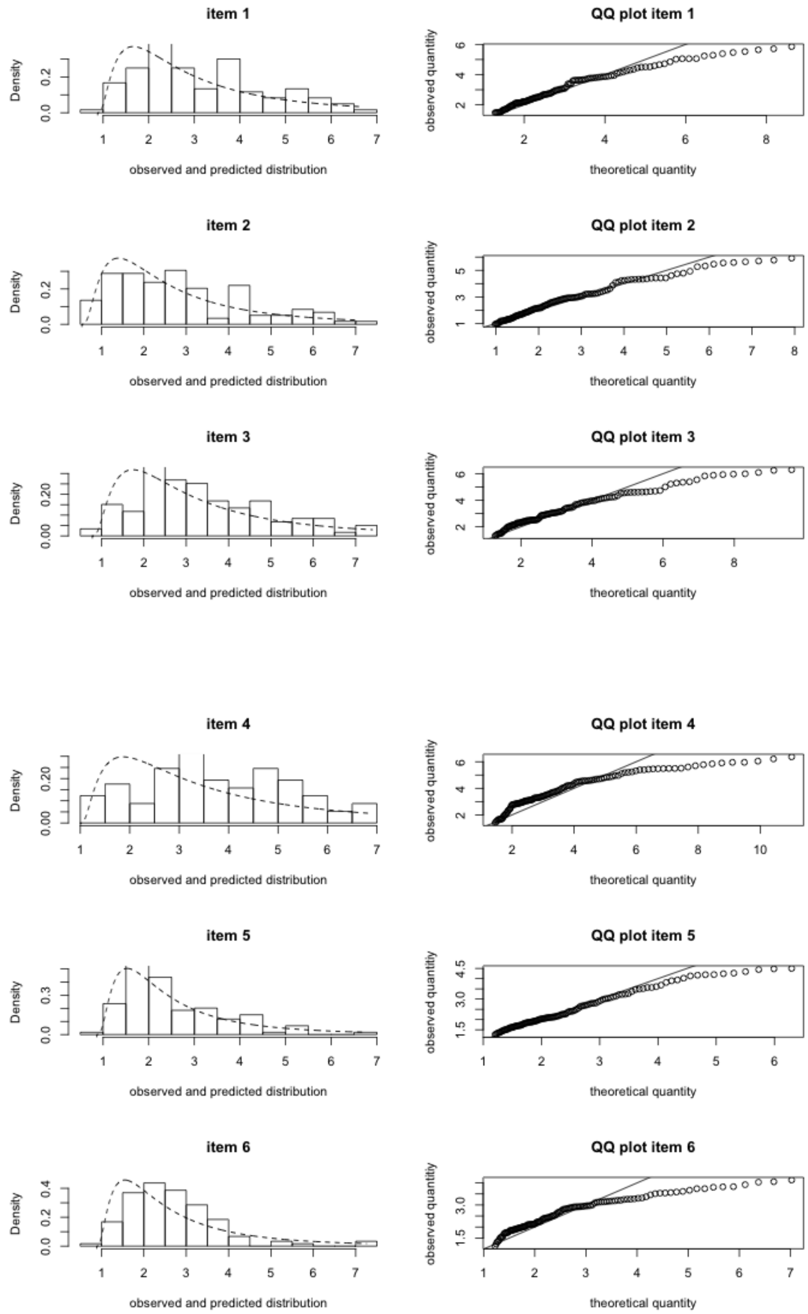

Figura 3: Distribución de los parámetros de difusión para los 6 items

4. Discusión

La mayor ventaja del modelo de difusión es que diferentes procesos cognitivos son trazados hacia diferentes significatos de los parámetros, De aquí que el modelo provee una solución al problema de falta de métrica e los analisis de respuesta tradicionales.

Por ejemplo, la influencia en las diferencias del rendimiento es independiente a la influencia de estilos en la toma de decisiones, debido a que estos procesos asignan los parmetros por separado.

[1] ...

[2]